Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

SCHEDULING TRIANGLES

Finančni praktikum

Avtorja:
Blaž Arh, Matic Matušek

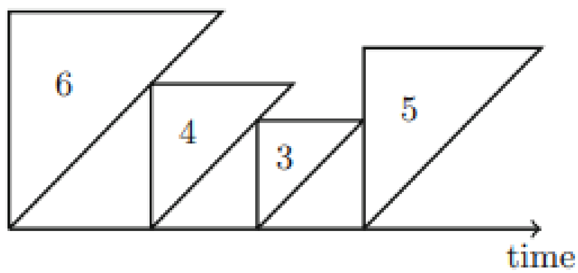
Ljubljana, 2022

Kazalo

1 Uvod

1.1 Navodilo naloge

Imamo n pravokotnih enakokrakih trikotnikov, ki so določeni z dolžino kraka d_i za $i = 1, 2, ..., n$ in pravim kotom med krakoma. Trikotnike postavimo, z nogo na x-os, na sledeči način.



Trikotniki morajo biti postavljeni tako, da je hipotenuza trikotnika naraščajoča glede na x-os, natančneje naklon hipotenuze je enak 1.
Želimo si trikotnike postaviti tako, da je dolžina teh trikotnikov najkrajša. Trikotniki se med seboj ne smejo prekrivati, prav tako pa mora biti krak noge pravokoten na x-os.

1.2 Uporabnost

Pomembno je, da znamo ta matematični problem interpretirati v praksi. Trikotnike lahko interpretiramo kot opravila na našem urnike. Radi bi minimizirali trajanje našega urnika, medtem ko bi radi prioritizirali bolj kritična oziroma pomembna opravila. Tako je torej:

- pravokotni enakokraki trikotniki = opravila,
- dolžina kraka = pomembnost opravila.

Želimo si sestaviti urnik iz n opravil. Naj bo d_i pomembnost i-tega opravila. Naš cilj je sestaviti čim krajši urnik. Želimo, da se pomembnejša opravila izvedejo, v primeru zakasnitve le teh pa lahko manj pomembna opravila izpustimo. Večji kot je trikotnik, bolj pomembno je opravilo. Kot je razvidno iz zgornje slike, lahko opravila z manjšo pomembnostjo vstavimo pod opravila z večjo pomembnostjo. To pomeni, da manjše trikotnike vstavljamo pod večje. Torej, če pride do zakasnitve pomembnejšega opravila (večjega trikotnika), manj pomembno opravilo izpustimo (manjši trikotnik).

2 Reševanje problema s pomočjo različnih algoritmov

V znanstvenem članku The triangle scheduling problem [1] je za reševanje problema predlagan Greedy algoritem. Pred Greedy algoritmom, sva se odločila sprogramirati brute force algoritem, ki je nekoliko manj težaven, je pa zelo časovno zahteven. Nato sva napisala Greedy algoritem, ki ima nizko časovno zahtevnost vendar ne vrne optimalnega rezultata. Ker Greedy algoritem ne vrne optimuma, sva za konec napisala tudi optimalen algoritem, kjer sva uporabila celoštevilsko linearno programiranje, ki je manj časovno zahteven kot brute force.

2.1 Brute force algoritem

2.1.1 Opis algoritma

Algoritem iz n trikotnikov sestavi vse možne permutacije in izračuna njihovo dolžino. Nato pa izbire prvo permutacijo na katero je naletel, ki je imela minimalno dolžino.

2.1.2 Psevdokoda

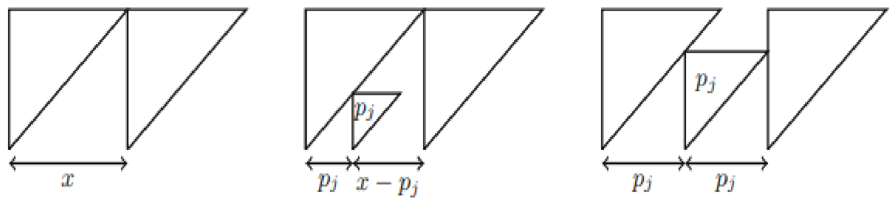
```
 Vhod: trikotniki
 n = length(trikotniki)
 dolzina_urnika = []
perutacije = permutations( [0, 1, ..., n-1] )
for i in permutacije
    for j in 0:(n-1)
        trikotnik["vrstni_red"][j] = permutacija[j]
    dolzina_urnika.append( dolzina(trikotniki) )
index = dolzina_urnika.index( min(dolzina_urnika) )
for i in 0:(n-1)
    trikotniki[i]["vrstni red"] = permutacije[index][i]
Izhod: trikotniki
```

2.2 Greedy algoritem

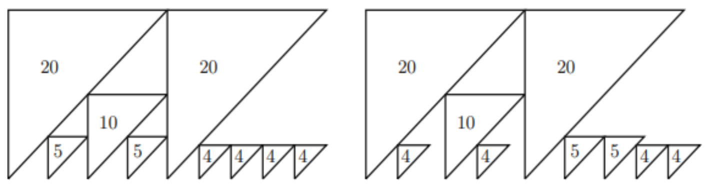
2.2.1 Opis algoritma

Greedy algoritem je kateri koli algoritem, ki rešuje problem tako, da na vsakem koraku naredi lokalno optimalno izbiro. Greedy algoritem najprej

razvrsti trikotnike tako, da velja
$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq ... \geq d_n$. Prvi trikotnik razvrsti na $x = 0$, kar ustvari prostor pod trikotnikom 1. Nato vsak trikotnik $j = 2, ..., n$ postavi v največji možen prostor pod že postavljenimi trikotniki. Če je več enakih prostorov, izbere prvega povrsti. Če ima izbrani prostor pod trikotnikom dolžino l in se začne v času x_i, potem je trikotnik j postavljen na mesto $x_j = x_i + d_j$. Če je $2d_j \geq l$, potem se vsi trikotniki k, za katere je $x_k \geq x_j$ zamaknejo za $2d_j - l$, da se ne prekrivajo. Opisano dogajanje prikazuje spodnji primer($x = l, p_i = d_i$).



Pri številnih problemih Greedy algoritem ne poišče optimalne rešitve, nič drugače ni pri našem problemu. Na naslednji sliki prikažemo primer, ko Greedy ni optimalen. Greedy algoritem (desna slika) vrne dolzino 42 in ne vrne optimalne dolžine, ki je 40 (leva slika).



Hitrost Greedy algoritma je polinomska. Da se pokazati, da je aproksimacijsko razmerje zgornje meje točnosti Greedy algoritma 1.5 optimalnega časa. Torej, če je optimalni čas določenega primerna 40 časovnih enot, potem Greedy pokaže največ 60 časovnih enot.

2.2.2 Psevdokoda

```
Vhod: trikotniki
n = length(trikotniki)
trikotniki_lokalno = dict()
for i in 0:(n-1)
    trikotniki_lokalno[i] = trikotniki[i]
    m = length(trikotniki_lokalno)
    lokalna_dolzina_urnika = []
```

```
    for j in 0:(m-1):
        trikotniki_lokalno[i]["vrstni_red"] = j
        *popravi_mesta_ostalim_trikotnikom
        lokalna_dolzina_urnika.append( dolzina_urnika(trikotniki_lokalno) )
    index = lokalna_dolzina_urnika.index( min(lokalna_dolzina_urnika) )
    trikotniki_lokalno[i]["vrstni_red"] = index
    *popravi_mesta_ostalim_trikotnikom
Izhod: trikotniki_lokalno
```

Tukaj opisat popravi_mesta...

2.2.3 Psevdokoda

```
Vhod: seznam_dolzin_trikotnikov
T = sum(seznam_dolzin_trikotnikov)
t = new_variable()
s = new_variable()
x = new_variable(binary = True)
set_objective(t, maximization = False)
for i, d in enumerate(seznam_dolzin_trikotnikov)
    add_constraint(s[i] >= 0)
    add_constraint(s[i] + d <= t)
    for j, e in enumerate(seznam_dolzin_trikotnikov[i+1:], i+1):
        m = min(d, e)
        add_constraint(x[i, j]+x[j, i] = 1)
        add_constraint(s[i] - s[j] >= m - T*x[j, i])
        add_constraint(s[j] - s[i] >= m - T*x[i, j])
Izhod: seznam s
```

v seznamu s so napisani položaji nog trikotnikov

2.3 Generiranje podatkov

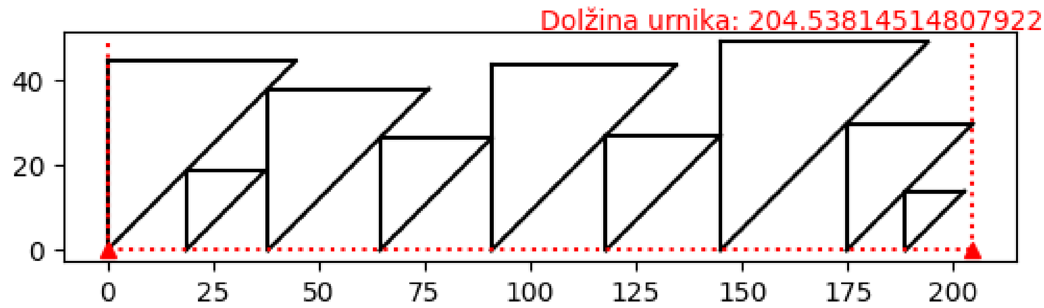
2.4 Predstavitev rezultatov

```
test = naredi_trikotnike(
            9,
            [
            44.513033703890834,
            18.613265453372076,
            27.04233495394404,
```

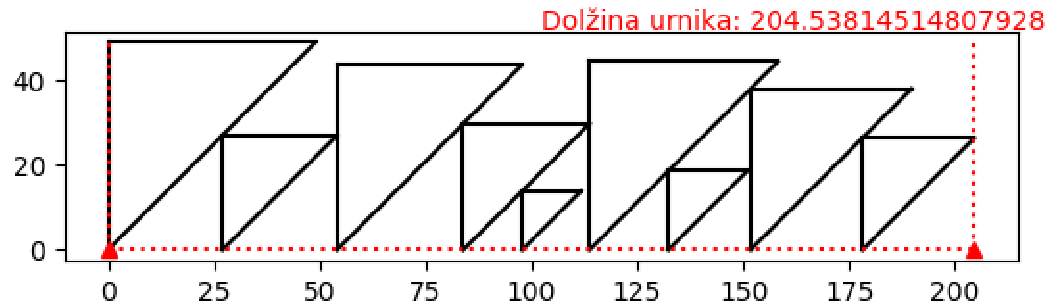
```
        29.803779538038164,
        38.01467639495788,
        43.53220098011497,
        13.90897209250403,
        26.415619884578483,
        49.01780933958118
        ]
    )
```

seznam trikotnikov, ime algoritma, več optimalnih razporeditev število optimalnih rešitev 72.

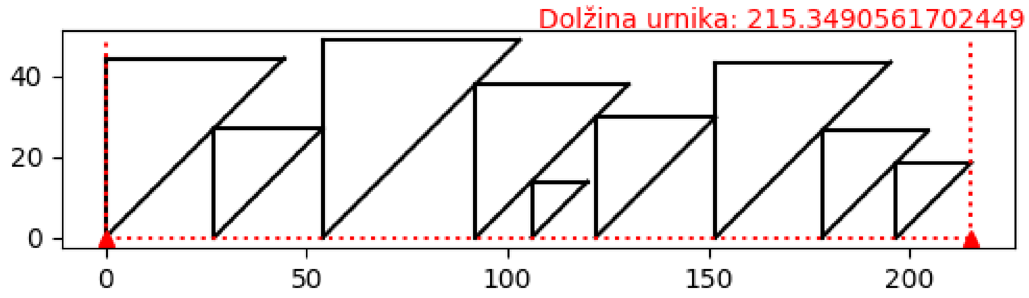
- Bruteforce algoritem



- Celoštevilsko linearno programiranje



- Greedy algoritem



Literatura

[1] Dürr, C., Hanzálek, Z., Konrad, C. et al. The triangle scheduling problem. J Sched 21, 305-312 (2018).