Estimación de la velocidad del viento con el método de cuadrados mínimos

Alan Pierri, Luciana Reznik, Matias Dominguez

9 de mayo de 2014

Índice

1. Objetivo del trabajo

El objetivo del siguiente trabajo práctico es el cálculo de una función de estimación de la velocidad del viento en Irlanda, a partir de los datos obtenidos en 12 estaciones meteorológicas entre los años 1961 y 1978.

2. Implementación

Para obtener la estimación de la velocidad del viento en función del tiempo en días, se utilizó el método de cuadrados mínimos, que trata de aproximar los valores obtenidos empíricamente a una curva determinada. Para ello, se utilizaron dos implementaciones diferentes. Por un lado el método de QR utilizando Gram-Schmidt y por el otro, el método de Cholesky.

La función a partir de la cual se ajustaron los datos, fue:

$$V(t) \quad = \quad A_0 + A_1 cos(2\pi f_1 t) + B_1 sin(2\pi f_1 t) \tag{1}$$

siendo

$$f_1 = 1/365{,}25 * dia^- 1 \tag{2}$$

Para resolver cuadrados mínimos, es necesario plantear la ecuación

$$A\vec{x} \quad = \quad \vec{b} \tag{3}$$

donde el $\vec{x}$ es el vector columna con los coeficientes buscados, $\vec{b}$ es el vector columna con los valores de s correspondientes a cada t, y donde A es la matriz formada por la función $y_2(t)$ evaluada en cada t, con la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} t_1^0 & t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^0 & t_2^1 & t_2^2 \\ ... & ... & ... \\ t_n^n & t_n^1 & t_n^2 \end{pmatrix}$$

donde el error queda planteado de la siguiente forma:

$$||A\vec{x} - \vec{b}||_2^2 \tag{4}$$

2.1. Método de Cholesky

Dado por probado el teorema que demuestra la existencia de la descomposición de Cholesky, se puede aproximar el valor de $\vec{x}$ en la ecuación 3.

Teorema 1 *Si X es cuadrada, simétrica y definida positiva* $\Rightarrow \exists$ *G triangular inferior / X = G* G^T

Se multiplica ambos lados de la ecuación 3 por A transpuesta obteniendo:

$$A^T A\vec{x} \quad = \quad A^T\vec{b} \tag{5}$$

Se propone la siguiente igualdad usando la matriz G obtenida en la descomposición de Cholesky:

$$GG^T \quad = \quad A^T A \tag{6}$$

Luego utilizando la sustitución progresiva siguiente:

$$\begin{aligned} GG^T\vec{x} &= A^T\vec{b} \quad (7)\\ z &= G^T\vec{x} \quad (8)\\ G\vec{z} &= A^T\vec{b} \quad (9)\\ G^T\vec{x} &= \vec{z} \quad (10)\end{aligned}$$

se obtiene el valor aproximado de $\vec{x}$.

2.2. Método QR

Sea $A = QR$, se sabe que x minimiza $||A\vec{x} - \vec{b}||_2 \Leftrightarrow ||R\vec{x} - Q\vec{b}||_2^2 = 0$. Entonces, el objetivo resulta resolver la ecuación 11

$$R\vec{x} = Q^T\vec{b} \quad (11)$$

y por sustitución regresiva obtener $\vec{x}$.

Para obtener QR se utilizó el método de Gram-Schmidt

3. Datos obtenidos

3.1. Velocidad media por estación

Estacion	V(t)
1	12,32299
2	10,56056
3	11,71465
4	6,28301
5	10,34253
6	7,04890
7	9,85677
8	8,46068
9	8,47582
10	8,65531
11	13,13176
12	15,54641

Cuadro 1: Valores de las velocidades medias obtenidas

3.2. Coeficientes de la función de aproximación

Estacion	A_0	A_1	B_1
1	6.35707	-0.01821	0.03675
2	5.47711	-0.04429	-0.00061
3	5.99067	0.03156	0.08428
4	3.23929	-0.01074	0.05357
5	5.37646	-0.05889	0.03337
6	3.64286	-0.02312	0.06211
7	5.03213	0.02872	0.08423
8	4.36409	-0.02041	0.06323
9	4.36889	-0.01161	0.01893
10	4.47136	-0.03418	0.08758
11	6.74920	0.00477	0.00889
12	8.03229	-0.01891	-0.07814

Cuadro 2: Coeficientes obtenidos con la implementación de QR

Estacion	A_0	A_1	B_1
1	6.35707081	-0.01820940	0.03674981
2	5.47710517	-0.04429044	-0.00060650
3	5.99066747	0.03156476	0.08427996
4	3.23929484	-0.01074494	0.05357270
5	5.37646141	-0.05888658	0.03337499
6	3.64286185	-0.02311715	0.06211073
7	5.03212609	0.02872138	0.08423441
8	4.36409277	-0.02040780	0.06322703
9	4.36889099	-0.01160855	0.01893036
10	4.47135695	-0.03417731	0.08758244
11	6.74920424	0.00476971	0.00888903
12	8.03228508	-0.01890634	-0.07813697

Cuadro 3: Coeficientes obtenidos con la implementación de Cholesky

Estacion	A_0	A_1	B_1
1	6.35707081	-0.01820940	0.03674981
2	5.47710517	-0.04429044	-0.00060650
3	5.99066747	0.03156476	0.08427996
4	3.23929484	-0.01074494	0.05357270
5	5.37646141	-0.05888658	0.03337499
6	3.64286185	-0.02311715	0.06211073
7	5.03212609	0.02872138	0.08423441
8	4.36409277	-0.02040780	0.06322703
9	4.36889099	-0.01160855	0.01893036
10	4.47135695	-0.03417731	0.08758244
11	6.74920424	0.00476971	0.00888903
12	8.03228508	-0.01890634	-0.07813697

Cuadro 4: Coeficientes obtenidos con la implementación de Matlab

4. Preguntas teóricas adicionales

4.1. Calcule el error cuadrático medio del ajuste.

Estacion	ECM Cholesky	ECM QR	ECM Matlab
1	3.63807	0	0
2	1.07534	0	0
3	0.15304	0	0
4	0.15304	0	0
5	0.15304	0	0
6	0.15304	0	0
7	0.15304	0	0
8	0.15304	0	0
9	0.15304	0	0
10	0.15304	0	0
11	0.15304	0	0
12	0.15304	0	0

Cuadro 5: ECM por estación para ambos métodos

4.2. ¿Por qué 365.25 días de período?

El período elegido de 365.25 días corresponde a la duración media de un año y fue la unidad elegida ya que año tras año, el clima se supone periódico. Tomar un período menor, incurriría en el error de pensar que por ejemplo, las estaciones del año no modifican los comportamientos de las velocidades de los vientos.

4.3. ¿Cómo se relaciona A_0 con el valor medio calculado más arriba?

El valor de A_0 tiende al valor medio de la velocidad de las estaciones meteorológicas, ya que la suma de los coeficientes de la serie de Fourier

$$A_1 cos(2\pi f_1 t) + B_1 sin(2\pi f_1 t) \tag{12}$$

tienden a anularse.

4.4. Grafique un histograma del error entre los valores y el ajuste.

5. Anexo

Los códigos utilizados fueron:

5.1. Método main

execute.m

```
function X = execute(data,f)
    column = data(:,1:3);
  for i=4:size(data(1,:),2);
    column(:,4) = data(:,i);
    [A, y] = calculateMatrix(column);
        if f == 0
            [Q,R] = solveQRGS(A);
            X(i-3, :) = inv(R) * Q' * y;
        elseif f == 1
            B = A' * A;
            G = cholesky(B);
            z0 = inv(G) * A' * y;
            x0 = inv(G') * z0;
            X(i-3, :) = x0;
        else
            X(i-3, :) = A/y;
            %Este metodo es el super optimo de matlab
        end
  end
end
```

5.2. Método QR con Gram Shmidt

solveQRGS.m

```
function [Q, R] = solveQRGS(A)
  Q = [];
  for i = 1:size(A, 2)
     v = A(:, i);
     for j = 1:(i-1)
      v = v - (v' * Q(:, j)) * Q(:, j);
     end
     Q(:, i) = v ./ norm(v);
  end
  R = Q' * A;
end
```

5.3. Método de Cholesky

cholesky.m

```
ffunction chol = cholesky( matrix )


n = size(matrix,2);
```

```
chol = zeros(n);

for i=1:n
    chol(i, i) = sqrt(matrix(i, i) - chol(i, :)*chol(i, :)');
    for j=(i + 1):n
        chol(j, i) = (matrix(j, i) - chol(i,:)*chol(j ,:)')/chol(i, i
            );
    end
end

end
```

5.4. Cálculo de la velocidad estimada

getVelocity.m

```
function vel = getVelocity( vars )
  f1 = 1/365.25;
    vel = [];
  for i=1:size(vars,1)
        a=vars(i,1);
        b=vars(i,2);
        c=vars(i,3);
    vel(i) = a + b * cos(2*pi*f1*i)+ c * sin(2*pi*f1*i);
    end
    vel = vel';
end
```