

# Proyecto Global Integrador: Control de Accionamiento de CA con Motor Sincrónico de Imanes Permanentes

Borquez Juan y Escobar Matías

## Abstract

## I. INTRODUCCIÓN

Modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un Sistema de Control Automático de Posición y Movimiento para un Accionamiento electromecánico de 4 cuadrantes, compuesto por: máquina eléctrica de corriente alterna (CA) trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentada por inversor trifásico desde fuente de corriente continua (CC); reductor de velocidad de engranajes planetarios de salida hacia la carga mecánica; realimentación con 1 sensor de posición en el eje del motor, más 3 sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor trifásico al estator de la máquina (PMSM) y 1 sensor de temperatura del bobinado de estator.

## II. ECUACIONES

Se detallan en esta sección las ecuaciones que modelan las distintas partes del sistema, obtenidas de la guía de referencia ([1]) en donde también se detalla claramente el significado de cada uno de los términos en las ecuaciones.

- Modelo matemático simplificado equivalente no lineal de parámetros variables referido al eje de salida del tren de transmisión:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} = T_q(t) - b_l \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$T_l(t) = k_l \sin(\theta_l(t)) + T_d(t) \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt} \equiv \omega_l(t) \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\zeta) d\zeta + \theta_l(0) \quad (3)$$

- Modelo equivalente rígido del tren de transmisión:

$$\omega_l(t) = 1/r \cdot \omega_m(t) \quad (4)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_{dm}(t) \quad (5)$$

- Modelo matemático equivalente del sub-sistema mecánico de la máquina eléctrica.

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_m \omega_m(t) - T_{dm}(t) \quad (6)$$

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\tau) d\tau + \theta_m(0) \quad (7)$$

- Coordenadas eléctricas de entrehierro  $qd0^r$  (marco de referencia de rotor  $\neq$  “sincrónico”):

$$\frac{d\theta_r(t)}{dt} \equiv \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\tau) d\tau + \theta_r(0) \quad (8)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \omega_m(t) \quad (9)$$

- Torque electromagnético:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_p [\lambda_m^r i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t) i_{qs}^r(t)] \quad (10)$$

- Balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (referido a coordenadas  $qd0^r$ ):

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) i_{qs}^r(t) + L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)] \omega_r(t) \quad (11)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(t) i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q i_{qs}^r(t) \omega_r(t) \quad (12)$$

$$v_{0s}(t) = R_s(t) i_{0s}(t) + L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} \quad (13)$$

- Modelo matemático de variación de la resistencia eléctrica del bobinado con la temperatura.

$$R_s(t) = R_{sREF} (1 + \alpha_{Cu} (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ)) \quad (14)$$

- Potencia de pérdidas calóricas:

$$P_{s\ perd}(t) = R_s(t) (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = \frac{3}{2} R_s(t) (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)) \quad (15)$$

- Balance térmico de estator:

$$P_{s\ perd}(t) = C_{ts} \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (16)$$

- Vector de estado del sistema físico completo.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Vector de entradas de manipulación al modelo dinámico del sistema físico completo en coordenadas virtuales y reales respectivamente

$$\mathbf{u}_{c(qd0)}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{c(abc)}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

- Vector de entradas de perturbación al modelo dinámico del sistema físico completo.

$$\mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

- Vector de entradas total al modelo dinámico del sistema físico completo.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c(t) \\ \mathbf{u}_d(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

- Sistema de tensiones trifásico a la salida del inversor.

$$v_{as}(t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_{sl}(t) \cdot \cos(\theta_{ev}(t)) \quad (\text{Ec. 4.1}) \quad (21)$$

$$v_{bs}(t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_{sl}(t) \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{Ec. 4.2}) \quad (22)$$

$$v_{cs}(t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_{sl}(t) \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{Ec. 4.3}) \quad (23)$$

$$(24)$$

- Frecuencia eléctrica del sistema de tensiones trifásico y ángulo eléctrica

$$\omega_e(t) \equiv 2\pi \cdot f_e(t) \equiv \frac{d\theta_{ev}(t)}{dt} \iff \theta_{ev}(t) = \int_0^t \omega_e(\xi) d\xi + \theta_{ev}(0) \quad (25)$$

- Ángulo de carga de la máquina eléctrica:

$$\delta(t) \equiv \theta_r(t) - \theta_{ev}(t) = \int_0^t [\omega_r(\xi) - \omega_e(\xi)] d\xi + \theta_r(0) - \theta_{ev}(0) \quad (26)$$

### III. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El problema bajo estudio se encuentra bien detallado en la guía de referencia ([1]), por lo que en esta sección se indican solo los aspectos más relevantes de cada una de las partes del problema, sin hacer énfasis en las ecuaciones que describen los modelos de cada una de las partes ni en los parámetros de cada uno de los subsistemas.

#### A. carga mecánica

Aplicación simplificada de referencia (adaptado de [2]): control de movimiento de 1 eje (descentralizado) para articulación de brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad (1 g.d.l.) rotacional de eje horizontal sometido a la acción de la aceleración de gravedad (péndulo rígido actuado), con eje de rotación fijo a base en sistema de referencia inercial (fig. 1); con parámetros equivalentes variables según sea la carga útil transportada en el extremo.

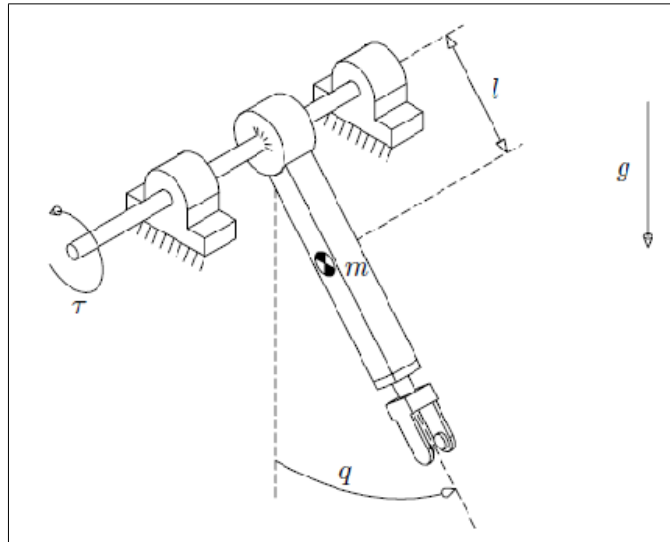


Fig. 1. Robot manipulador elemental de 1 g.d.l. en plano vertical (péndulo rígido actuado) [2].

#### B. Caja Reductora

Caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, asumiendo acoplamiento rígido (sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejados al eje de entrada y considerados junto con el motor

#### C. Máquina Eléctrica PMSM

Máquina eléctrica de CA trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM) y estator conectado en estrella (simétrico y equilibrado) accesible en bornes de fases *abc*, con centro de estrella (punto “neutro”) flotante (no accesible).

1) **subsistema térmico:** Modelo simplificado equivalente de primer orden, considerando sólo pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule en bobinado de estator, despreciando pérdidas magnéticas en el núcleo; transferencia de calor por conducción y convección natural, sin ventilación forzada.

#### D. Inversor trifásico de alimentación (modulador de tensión)

Inversor trifásico de 4 cuadrantes (regenerativo), consistente en puente trifásico con llaves electrónicas semiconductoras alimentado desde fuente de CC de tensión constante, conmutado con modulación de ancho de pulso.

No es parte de este proyecto el análisis del detalle de operación del inversor ni su fuente de energía de CC. Se considera al inversor trifásico y la fuente de CC como un Modulador idealizado de tensión trifásico (vectorial) (modelo promediado que se indica a continuación) para alimentación al estator de la Máq. Eléctrica.

1) **Modelo Promediado:** Se considera un modelo promediado equivalente de tensiones sintetizadas de salida (componente fundamental, sin armónicos). Se trata de un sistema trifásico de tensiones de fase en bornes de estator, senoidales de secuencia positiva *abc*, equilibrado o balanceado, variable en Módulo  $V_{sl}(t)$  y Frecuencia  $\omega_e(t)$ .

**E. Sensores de retroalimentación**

El sistema cuenta con los siguientes dispositivos físicos y sus canales de medición y acondicionamiento:

- 1 sensor de posición angular (codificador incremental o “encoder”) montado en el eje de motor, asumiendo proceso de “homming” y decodificación idealizados. Se logra la medición de la posición angular absoluta “rectificada” (al girar más de una revolución)

→ variable medida :  $\theta_m(t)$

- 3 sensores de corriente instantánea de fase, montados en salida trifásica del inversor hacia bornes del estator.

→ variables medidas :  $i_{as}(t), i_{bs}(t), i_{cs}(t)$

- 1 sensor de temperatura (ej. RTD) en bobinado de estator. Se mide la temperatura para monitoreo de calentamiento y estimación de resistencia de estator  $R_s(t)$ .

→ variable medida :  $T_s^\circ(t)$

**F. Variables principales en el Modelo Dinámico completo**

Se utilizan las siguientes variables para representar el estado, las entradas y las salidas en el modelo del sistema dinámico completo.

**a) Excitaciones (entradas) externas:**

- Variable manipulada (vectorial): Sistema trifásico de tensiones de fase reales en bornes de estator  $v_{abc}(t)$ , con  $V_{sl}(t)$  y  $\omega_e(t)$  ajustables a través de manipulación de la modulación PWM del inversor.
- Variables de perturbación: Torque externo de carga mecánica  $T_l(t)$  aplicado en la articulación del brazo manipulador. Temperatura ambiente  $T_{amb}^\circ(t)$ .

**b) Estado interno:**

- Posición  $\theta_m(t)$  y velocidad  $\omega_m(t)$  en eje del motor. Corrientes virtuales equivalentes de estator  $i_{qd0s}^r(t)$ ; temperatura de estator  $T_s^\circ(t)$ .

**c) Respuestas (salidas) externas:**

- Variable controlada, no medida directamente (efector final): Posición angular de eje de la carga  $q(t) \equiv \theta_l(t)$ .
- Variables medidas (para realimentación): Posición angular de eje del motor  $\theta_m(t)$ . Sistema trifásico de corrientes de fase reales en bornes de estator  $i_{abc}(t)$ . Temperatura de estator  $T_s^\circ(t)$ .

**IV. DESARROLLO DE TAREAS****A. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a “Lazo Abierto” (Sin Controlador externo de Movimiento)**

1) **Modelo sub-sistema mecánico completo referido al eje de la máquina eléctrica:** Multiplicando por  $r$  ambos miembros de la eq. (6), sumando miembro a miembro con la eq. (1) y tomando en cuenta  $T_q(t)$  según eq. (5) obtenemos:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} + J_m r \frac{d\omega_m(t)}{dt} = r T_m(t) - T_l(t) - b_l \omega_l(t) - b_m r \omega_m(t)$$

Reemplazando en la anterior  $\omega_l(t)$  según eq. (4), agrupando términos y dividiendo entre  $r$  a ambos miembros, obtenemos:

$$\left( J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - \left( b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (27)$$

Definimos ahora la inercia equivalente y el amortiguamiento equivalente respectivamente como:

$$J_{eq} = \left( J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \quad (28)$$

$$b_{eq} = \left( b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \quad (29)$$

Reemplazando eq. (28) y eq. (29) en eq. (27) obtenemos el modelo matemático equivalente del sub-sistema mecánico completo con parámetros equivalentes referido al eje del motor (véase diagrama de bloques de la fig. 2):

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (30)$$

El modelo resultante tiene un solo grado de libertad, tal como sucede en el modelo de la carga y en el del subsistema mecánico de la máquina eléctrica sin la transmisión. Esto se debe a la suposición de rigidez ideal y la ausencia de "backlash" en la reducción, permitiendo un "acoplamiento directo" de la carga al eje de la máquina. Dicho de otra manera, la transmisión no incorpora dinámica al subsistema mecánico.

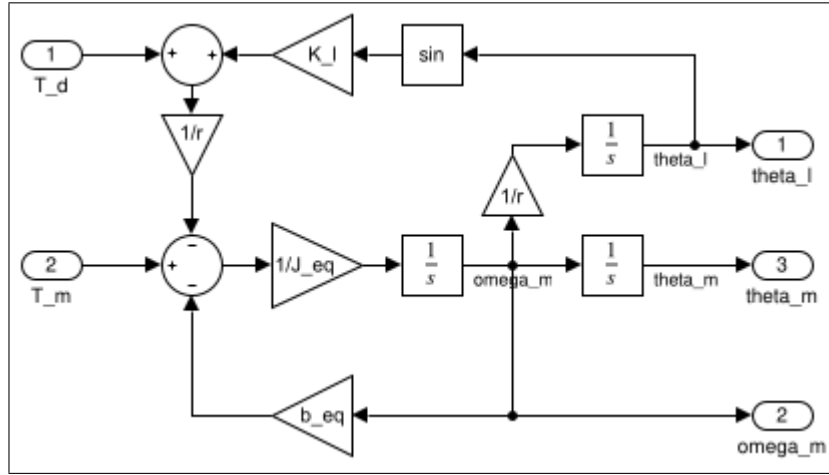


Fig. 2. Diagrama de bloques del sub-sistema mecánico completo.

2) **Modelo dinámico del sistema físico completo:** este incorpora los sub-sistemas electromagnético, mecánico y térmico.

a) **Modelo Global No Lineal:** Al tratarse de un sistema no lineal de parámetros variables y con no-linealidades en las variables de estado, no se puede obtener una expresión de la ecuación de estado y de salida del sistema en la forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Sin embargo, se puede obtener una expresión del modelo matemático vectorial en la forma más general:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición del estado del sistema (ver eq. (17)) la primera ecuación escalar a considerar en la ecuación vectorial de estado del sistema es la eq. (7). El acoplamiento entre el sub-sistema electromagnético y el mecánico de la máquina eléctrica se da en el  $T_m(t)$  dado por la ecuación eq. (10). Reemplazando esta ecuación en la eq. (30) y reordenando obtenemos la segunda ecuación de estado del sistema:

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{3}{2} \frac{P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_l(t)}{r J_{eq}} \quad (31)$$

Las siguientes tres ecuaciones de estado del sistema se obtienen de las ecuaciones de balance de tensiones en coordenadas virtuales (eq. (11) eq. (12), eq. (13)). Reemplazando en estas la relación entre  $\omega_m(t)$  y  $\omega_r(t)$  dada por la eq. (8) obtenemos:

$$\dot{i}_{qs}^r(t) = -\frac{R_s(t) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \quad (32)$$

$$\dot{i}_{ds}^r(t) = -\frac{R_s(t) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \quad (33)$$

$$\dot{i}_{0s}(t) = -\frac{R_s(t) i_{0s}(t)}{L_{ls}} + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \quad (34)$$

La última ecuación de estado se obtiene relacionando las eq. (15) y eq. (16) obteniéndose:

$$\dot{T}_s^o(t) = \frac{3}{2} \frac{R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)]}{C_{ts}} - \frac{[T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)]}{R_{ts} C_{ts}} \quad (35)$$

Cabe mencionar, para las últimas ecuaciones de estado, que aunque se tiene un modelo lineal de evolución de la  $R_s(t)$  con la  $T_s^o(t)$  dado en la eq. (14) se decide no desarrollar la misma en las ecuaciones anteriores y se deja la dependencia explícita de  $R_s$  con  $t$  con el objeto de simplificar la notación y no oscurecer la explicación. Con el mismo objeto, se simplifica la notación de  $R_{ts-amb}$  a simplemente  $R_{ts}$ .

**Ecuación vectorial de estado del sistema:** se obtiene expresando en forma vectorial las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \dot{i}_{0s}(t) \\ \dot{T}_s^o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{\frac{3}{2} P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ -\frac{R_s(t) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} \\ -\frac{R_s(t) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} \\ -\frac{R_s(t) i_{0s}(t)}{L_{ls}} \\ \frac{\frac{3}{2} R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)]}{C_{ts}} - \frac{T_s^o(t)}{R_{ts} C_{ts}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{r J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{ts} R_{ts}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

Con condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^o \end{bmatrix} \quad (37)$$

En la eq. (36) se han separado las relaciones que involucran a las variables de estado del sistema de las que involucran a las entradas de manipulación y de las que involucran a las entradas perturbación (ver eq. (17), eq. (18) y eq. (19)). Se puede notar que aunque el sistema es no lineal en las variables de estado (no se puede obtener una expresión de la forma  $Ax(t)$  para las relaciones que involucran a las variables de estado), si es lineal en las entradas tanto de perturbación como de control (las relaciones que involucran a las entradas se presentan como producto de matrices) salvo la dependencia de  $T_l(t)$  con  $\theta_l$  y por lo tanto con  $\theta_m$  dado en eq. (2).

**Ecuación vectorial de salida del sistema:** se obtiene considerando que la salida de interés del sistema físico es  $\theta_m(t)$ :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^o(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

**Diagramas de bloques del sistema físico completo:** En la fig. 3 se muestra el diagrama de bloques del sistema físico completo constituido por los sub-sistemas mecánico, térmico y electromagnético cuyos diagramas respectivos se muestran en las fig. 2, fig. 4, y fig. 5. A su vez, los componentes del sub-sistema electromagnético se detallan en las fig. 6, fig. 7, fig. 8, para las corrientes ( $i_{qs}$ ,  $i_{ds}$ ,  $i_{0s}$  respectivamente) y en la fig. 9 para  $T_m(t)$ . Finalmente, en las fig. 10 y fig. 11 se detallan las transformaciones de Park directa e inversa respectivamente.

**b) Linealización Jacobiana:** Se aclara aquí que, solamente para este ejercicio, se considera un vector de entradas de perturbación modificado respecto al indicado en eq. (20) al considerar  $T_l(t)$  desarrollada como se indica en la eq. (2). Lo que se hace es reemplazar  $T_l(t)$  por  $T_d(t)$  en el vector de la eq. (19) lo cual cambia la definición de  $\mathbf{u}(t)$  dada por la eq. (20). Luego, el vector de entradas de perturbación y el vector de entradas total del sistema, para este ejercicio, son los que se indican en la eq. (39). Cómo se puede observar, se toman las entradas de tensión de control en el espacio de coordenadas  $qdo^r$ .

$$\mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} T_d(t) \\ T_{amb}^o(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \\ T_d(t) \\ T_{amb}^o(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

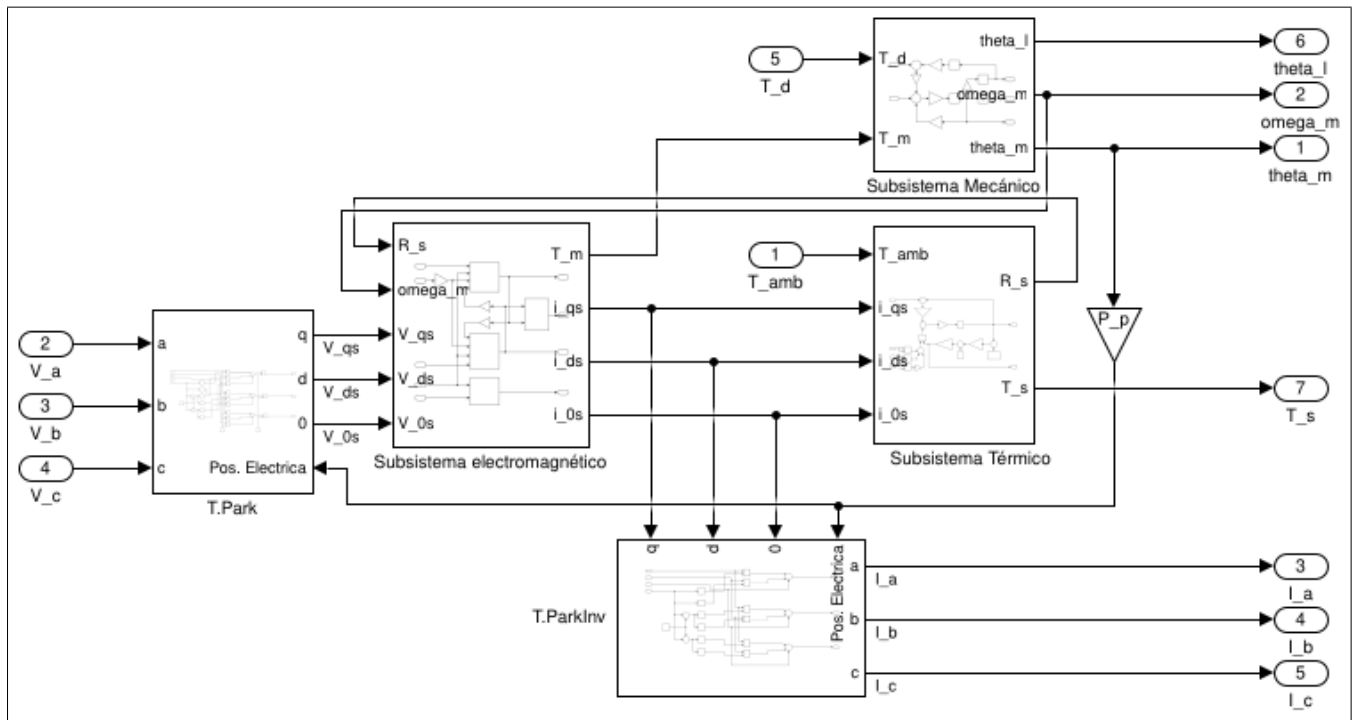


Fig. 3. Diagrama de bloques del sistema físico completo.

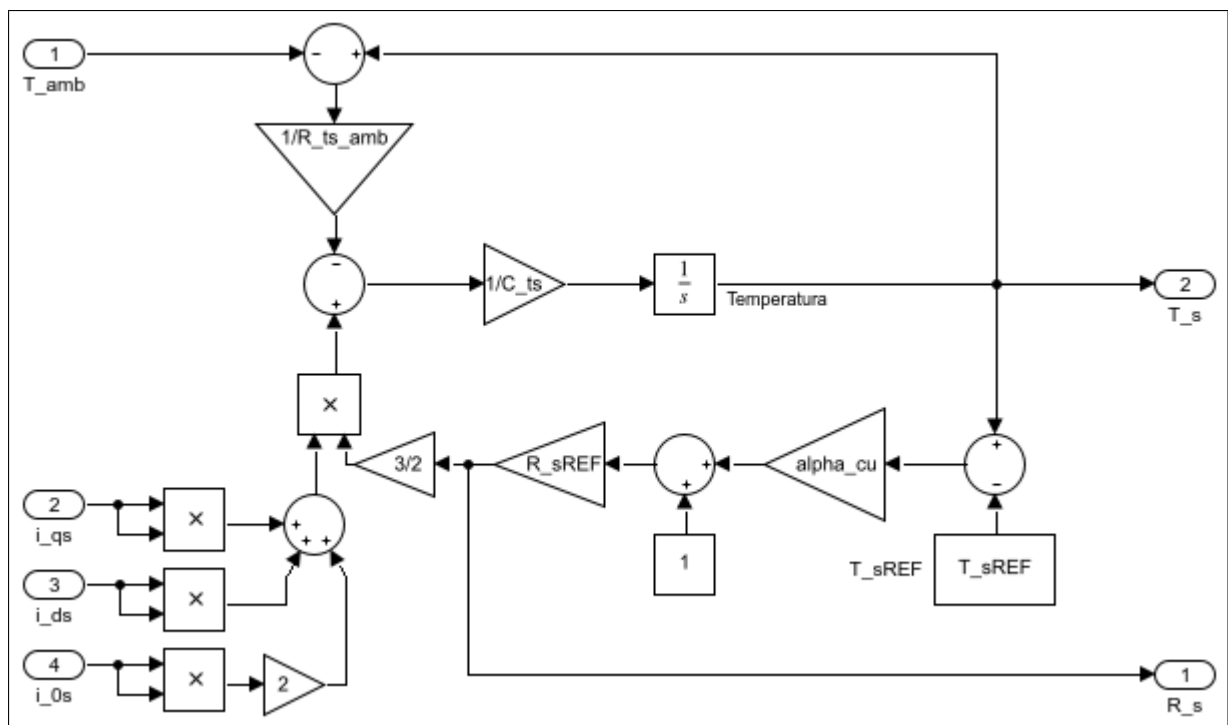


Fig. 4. Diagrama de bloques del sub-sistema térmico



Fig. 5. Diagrama de bloques del sub-sistema electromagnético



Fig. 6. Diagrama de bloques  $I_{qs}$



Fig. 7. Diagrama de bloques  $I_{ds}$



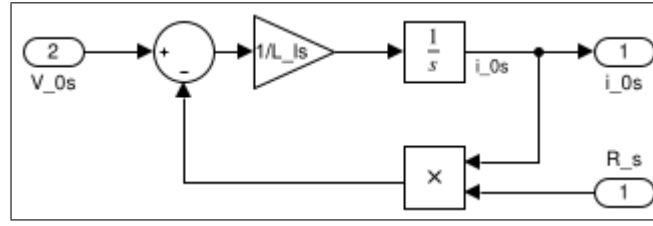


Fig. 8. Diagrama de bloques  $I_{0s}$

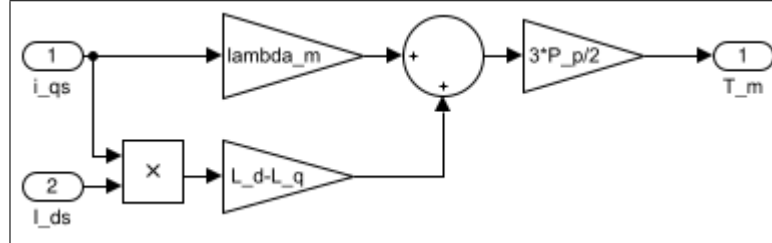


Fig. 9. Diagrama de bloques  $T_m$

Con esta definición del vector de entradas, la ecuación vectorial de estado del sistema es redefinida. Por un lado se debe operar para obtener una expresión de  $T_l(t)$  en función de  $\theta_m(t)$  y no en función de  $\theta_l(t)$  como se indica en la eq. (2) para luego reemplazar la expresión obtenida en la eq. (36). El procedimiento se indica en eq. (40). Finalmente, la ecuación vectorial de estado del sistema queda expresada como se indica en la eq. (41).

$$\begin{aligned}
 \text{eq. (4) y eq. (3)} &\rightarrow \theta_l(t) = \frac{1}{r} \int_0^t \omega_m(\zeta) d\zeta + \theta_l(0) \\
 \text{eq. (7)} &\rightarrow \int_0^t \omega_m(\zeta) d\zeta = \theta_m(t) - \theta_m(0) \\
 \text{Reemplazando la segunda en la primera} &\rightarrow \theta_l(t) = \frac{\theta_m(t) - \theta_m(0)}{r} + \theta_l(0) \\
 \text{Consideramos que se cumple} &\rightarrow \frac{\theta_m(0)}{r} = \theta_l(0) \\
 \text{Luego} &\rightarrow \theta_l(t) = \theta_m(t)/r \\
 \text{Finalmente} &\rightarrow T_l(t) = k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_d(t)
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \dot{i}_{0s}(t) \\ \dot{T}_s^o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{\frac{3}{2} P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] - b_{eq} \omega_m(t) - k_l \sin(\frac{\theta_m(t)}{r})}{J_{eq}} \\ -\frac{R_s(t) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} \\ -\frac{R_s(t) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} \\ -\frac{R_s(t) i_{0s}(t)}{L_{ls}} \\ \frac{\frac{3}{2} R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)]}{C_{ts}} - \frac{T_s^o(t)}{R_{ts} C_{ts}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{r J_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} R_{ts}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \\ T_d(t) \\ T_{amb}(t) \end{bmatrix} \tag{41}$$

En el modelo de pequeñas desviaciones locales  $\delta \mathbf{x}(t)$  respecto de los puntos de equilibrio  $\mathbf{X}_o(t)$  se hacen las consideraciones señaladas en la eq. (42).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_o(t) + \delta \mathbf{x}(t) \\ \delta \mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{0} \end{cases} \tag{42}$$

Por un lado, el **espacio de operación global NL cuasi-estacionario** se muestra en la eq. (43). Para nuestro sistema queda expresado como se indica en la eq. (44) para el estado. Las condiciones iniciales se señalan en eq. (45). En dichas ecuaciones, el sub-índice  $-o$  indica los valores de las variables en el punto de operación.

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \approx 0/\text{const}; \mathbf{X}_o(0) \equiv \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}_o(t) = \mathbf{C} \mathbf{X}_o(t) \end{cases} \tag{43}$$



Fig. 10. Transformación de Park Directa

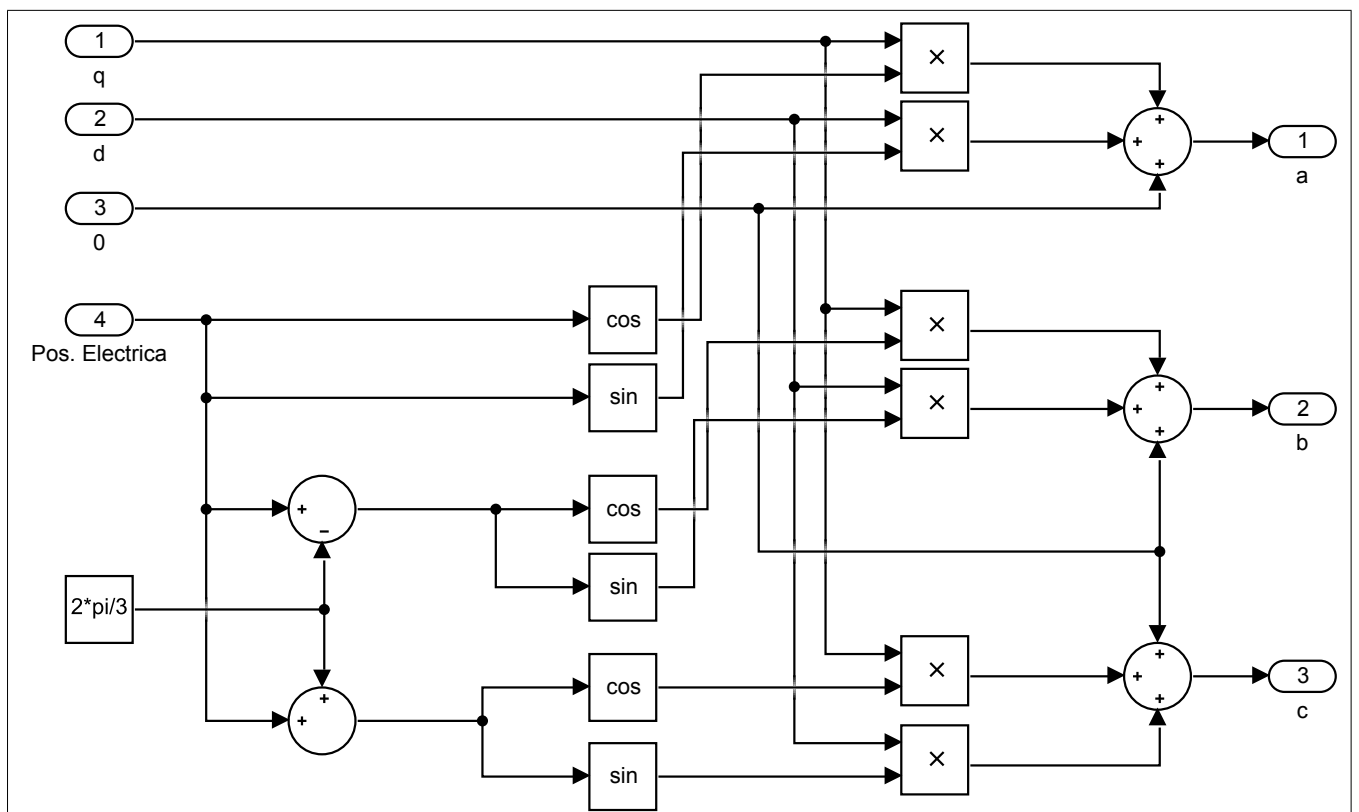


Fig. 11. Transformación de Park inversa

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{m-o}(t) \\ \dot{\omega}_{m-o}(t) \\ \dot{i}_{qs-o}^r(t) \\ \dot{i}_{ds-o}^r(t) \\ \dot{i}_{0s-o}(t) \\ \dot{T}_{s-o}^\circ(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \omega_{m-o}(t) & \approx \omega_{m0} \\ \frac{1}{J_{eq}} \left[ \frac{3}{2} P_p i_{qs-o}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds-o}^r(t)] - b_{eq} \omega_{m-o}(t) - \frac{k_l}{r} \sin\left(\frac{\theta_{m-o}(t)}{r}\right) - \frac{1}{r} T_{d-o}(t) \right] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_q} [-R_{s-o}(t) i_{qs-o}^r(t) - P_p \omega_{m-o}(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds-o}^r(t)] + v_{qs-o}^r(t)] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_d} [-R_{s-o}(t) i_{ds-o}^r(t) + L_q P_p \omega_{m-o}(t) i_{qs-o}^r(t) + v_{ds-o}^r(t)] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_{ls}} [-R_{s-o}(t) i_{0s}(t) + v_{0s-o}(t)] & \approx 0 \\ \frac{3}{2} \frac{R_{s-o}(t)}{C_{ts}} [i_{qs-o}^2(t) + i_{ds-o}^2(t) + 2i_{0s-o}^2(t)] + \frac{1}{R_{ts} C_{ts}} [T_{amb-o}(t) - T_{s-o}^\circ(t)] & \approx 0 \end{cases} \quad (44)$$

$$\mathbf{X}_o(0) = \begin{bmatrix} \theta_{m-o}(0) \\ \omega_{m-o}(0) \\ i_{qs-o}^r(0) \\ i_{ds-o}^r(0) \\ i_{0s-o}(0) \\ T_{s-o}^\circ(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^\circ \end{bmatrix} \quad (45)$$

Por otro lado, el **Modelo dinámico LPV** se indica en la eq. (46):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) \approx A(t) \delta \mathbf{x}(t) + B(t) \delta \mathbf{u}(t); \delta \mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{y}(t) = C \delta \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (46)$$

Las matrices  $A(t)$  y  $B(t)$  de la eq. (46) vienen dadas por la eq. (47).

$$A(t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_o(t) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\theta}_m(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\omega}_m(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{i}_{qs}^r(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{i}_{ds}^r(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{i}_{0s}(t) \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{T}_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad B(t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{r J_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} R_{ts}} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Los gradientes indicados para  $A(t)$  en la eq. (47) vienen dados por la eq. (48).

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\theta}_m(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{\omega}_m(t) &= \begin{bmatrix} \frac{-K_l \cos\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)}{J_{eq} r^2} & \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p(\lambda_m + i_{ds}^r(t)(L_d - L_q))}{2J_{eq}} & \frac{3P_p i_{qs}^r(t)(L_d - L_q)}{2J_{eq}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{i}_{qs}^r(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3P_p(i_{ds}^r(t)L_d + \lambda_m)}{2L_q} & \frac{-R_s(t)}{L_q} & \frac{-L_d P_p \omega_m(t)}{L_q} & 0 & \frac{-R_{sREF} \alpha_{cu} i_{qs}^r(t)}{L_q} \end{bmatrix} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{i}_{ds}^r(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_q P_p i_{qs}^r(t)}{L_d} & \frac{L_q P_p \omega_m(t)}{L_d} & \frac{-R_s(t)}{L_d} & 0 & \frac{-R_{sREF} \alpha_{cu} i_{ds}^r(t)}{L_d} \end{bmatrix} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{i}_{0s}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R_s(t)}{L_{ls}} & \frac{-R_{sREF} \alpha_{cu} i_{0s}(t)}{L_{ls}} \end{bmatrix} \\ \nabla_{\mathbf{x}} \dot{T}_s^\circ(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3R_s(t) i_{qs}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{3R_s(t) i_{ds}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{6R_s(t) i_{0s}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{3R_{sREF} \alpha_{cu} (i_{ds}^r(t)^2 + 2i_{0s}^r(t)^2 + i_{qs}^r(t)^2)}{2C_{ts}} - \frac{1}{C_{ts} R_{ts}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

Nota: Por motivos de legibilidad del modelo matemático LPV completo, decidimos conservar la expresión en esta forma desagregada.

c) **Linealización Por Realimentación No Lineal:** En este análisis no se tendrá en cuenta el acoplamiento no lineal con el subsistema térmico, pero sí su dinámica lineal. Para lograr esto, se impone directamente la especificación  $i_{ds}^r(t) \equiv 0$ . Las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{3}{2} \frac{P_p i_{qs}^r(t) \lambda_m^r}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_l(t)}{r J_{eq}} \\ \dot{i}_{qs}^r(t) = -\frac{R_s i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) \lambda_m^r}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \end{cases} \quad (49)$$

Expresándolo en forma de espacio de estados, el sistema quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix} T_l(t) \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (50)$$

Para lograr esta especificación es necesario realizar una ley de control mínima que se determina a partir de la ecuación de estado para  $i_{ds}^r$  eq. (33), partiendo de la hipótesis de que  $i_{ds}^r(0) = 0$ :

$$0 = \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \Rightarrow v_{ds}^r = -L_q i_{qs}^r P_p \omega_m \quad (51)$$

De esta manera queda determinada la ley de control mínima, que debe aplicarse para lograr el desacoplamiento de los canales de flujo magnético y torque. Luego se implementó, en el modelo global NL completo, esta ley de control mínima mediante un controlador parcial incorporando el inversor (modulador de tensión trifásico equivalente), las Transformaciones de Park y los sensores de realimentación ideal de variables de estado:

Para el caso general en donde no se cumple la hipótesis  $i_{ds}^r(0) = 0$ , existe una dinámica residual en la corriente  $i_{ds}^r$ . Esta dinámica queda representada con la ecuación diferencial que obtenemos al reemplazar la ley de control mínima eq. (51) en eq. (33):

$$i_{ds}^r(t) = -\frac{R_s i_{ds}^r(t)}{L_d} \Rightarrow L_d \dot{i}_{ds}^r(t) + R_s i_{ds}^r(t) = 0 \quad (52)$$

La cual tiene la siguiente solución:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) e^{-\frac{R_s}{L_d} t} \quad (53)$$

Como se puede observar si  $i_{ds}^r(0) \neq 0$ , ésta decae exponencialmente hasta llegar a 0. Esto establece un acoplamiento con el eje  $q$ , produciendo un comportamiento no lineal, que se termina desvaneciendo con el tiempo a medida que  $i_{ds}^r$  decae. Por lo tanto este fenómeno puede ser despreciado para régimen forzado.

Para evitar esto, se puede implementar una ley de control complementaria mínima sobre el eje  $q$ , y poder eliminar completamente el acoplamiento residual NL, obteniendo así un modelo equivalente lineal del sistema, aún cuando  $i_{ds}^r(0) \neq 0$ . Esto se logró implementando una ley de control que permita deshacerse del término que contiene a  $i_{ds}^r$  en la eq. (32).

$$v_{qs}^r(t) = L_q \dot{i}_{qs}^r(t) + R_s(t) i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r + P_p \omega_m(t) L_d i_{ds}^r(t) \quad (54)$$

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^r(t)^* + P_p \omega_m(t) L_d i_{ds}^r(t) \quad (55)$$

$$v_{qs}^r(t)^* = L_q \dot{i}_{qs}^r(t) + R_s(t) i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r \quad (56)$$

El modelo LTI equivalente (incorporando la dinámica residual del eje  $d$ ) queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{3}{2} \frac{P_p i_{qs}^r(t) \lambda_m^r}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_l(t)}{r J_{eq}} \\ \dot{i}_{qs}^r(t) = -\frac{R_s i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) \lambda_m^r}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \dot{i}_{ds}^r(t) = -\frac{R_s i_{ds}^r(t)}{L_d} \end{cases} \quad (57)$$

*d) Comparación del modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs. el modelo dinámico global LPV:*

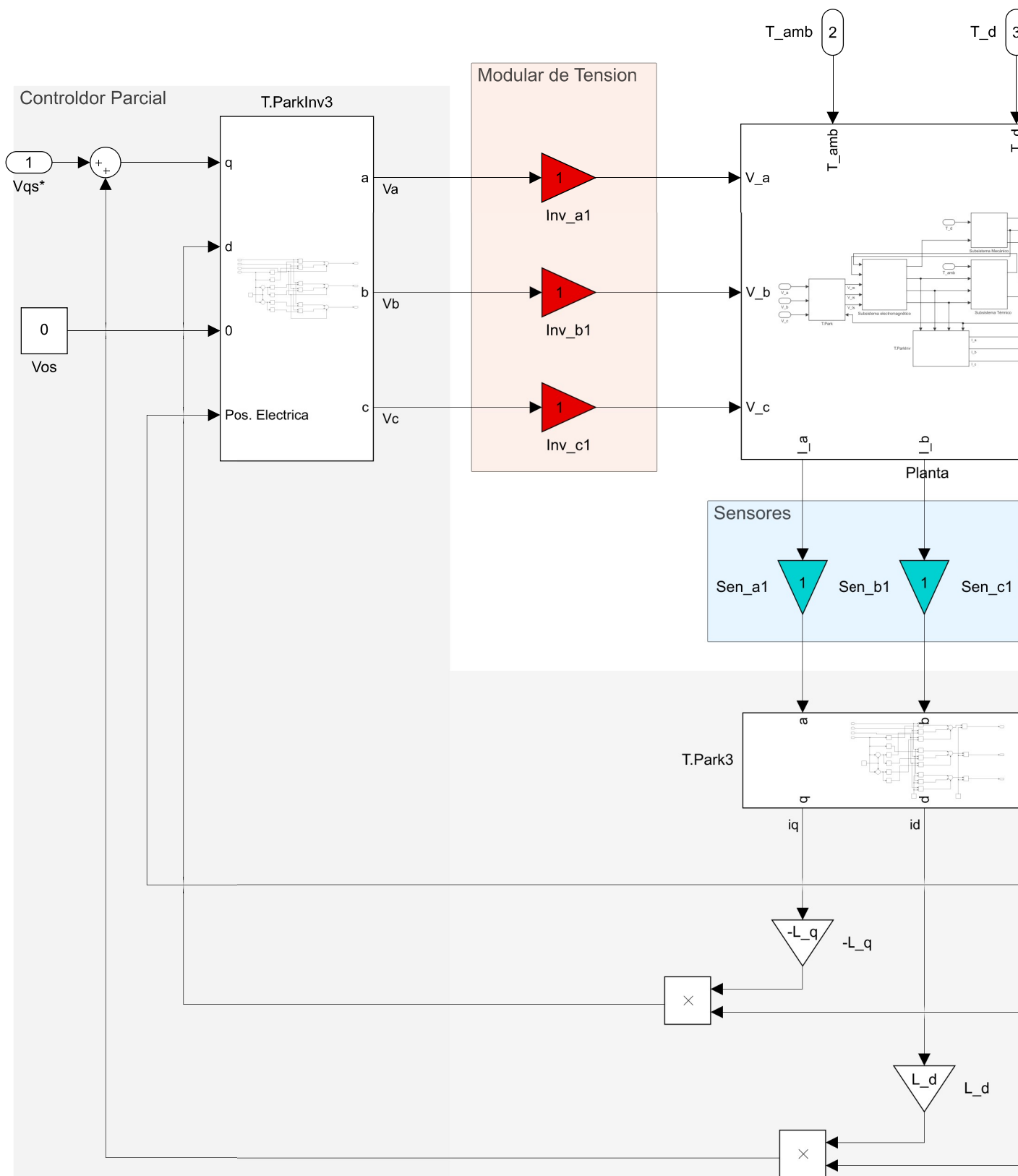


Fig. 12.

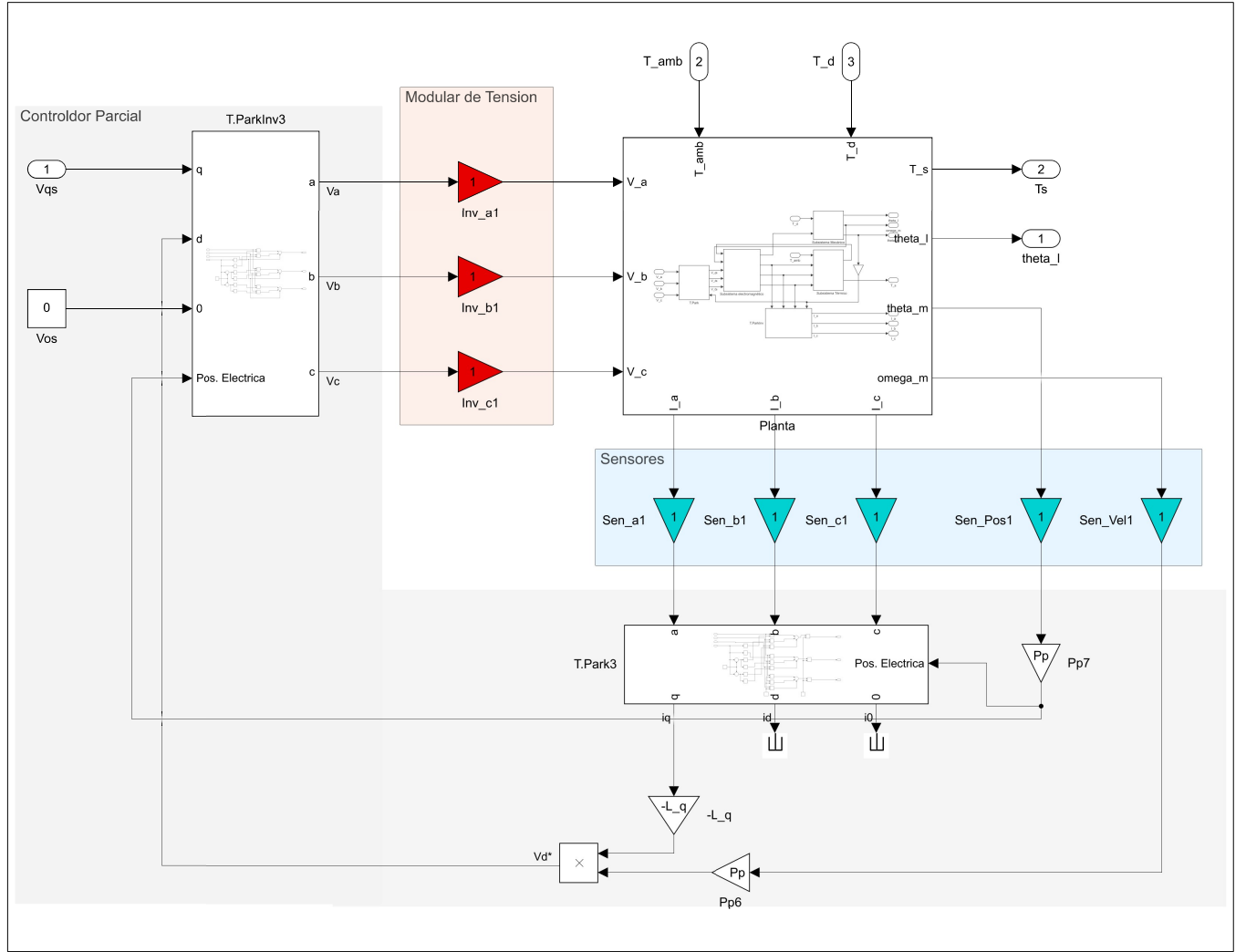


Fig. 13. Implementación de ley de control mínima

**e) Funciones de Transferencia:** para el modelo LTI equivalente aumentado, desde ambas entradas  $V_{qs}^r(s)$  y  $T_l(s)$  hacia la salida  $\Theta_m(s)$ .

Primero se aplicó la Transformada de Laplace a la ecuaciones del sistema LTI equivalente aumentado, considerando condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} s\Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s\Omega_m(s) = \frac{3}{2} \frac{P_p I_{qs}^r(s) \lambda_m^r}{L_q} - \frac{b_{eq} \Omega_m(s)}{L_q} - \frac{T_l(s)}{L_q} \\ sI_{qs}^r(s) = -\frac{R_s I_{qs}^r(s)}{L_q} - \frac{P_p \Omega_m(s) \lambda_m^r}{L_q} + \frac{V_{qs}^r(s)}{L_q} \end{cases} \quad (58)$$

Luego se despejó la salida en función de las entradas, para obtener finalmente las funciones de transferencia:

$$\Theta_m(s) = -\frac{R_s \frac{T_l(s)}{r} + L_q \frac{T_l(s)}{r} s - \frac{3}{2} P_p V_{qs}^r(s) \lambda_m^r}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left( R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^{r^2} \right) s} \quad (59)$$

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left( R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^{r^2} \right) s} \quad (60)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = -\frac{\frac{1}{r} (R_s + L_q s)}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left( R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^{r^2} \right) s} \quad (61)$$

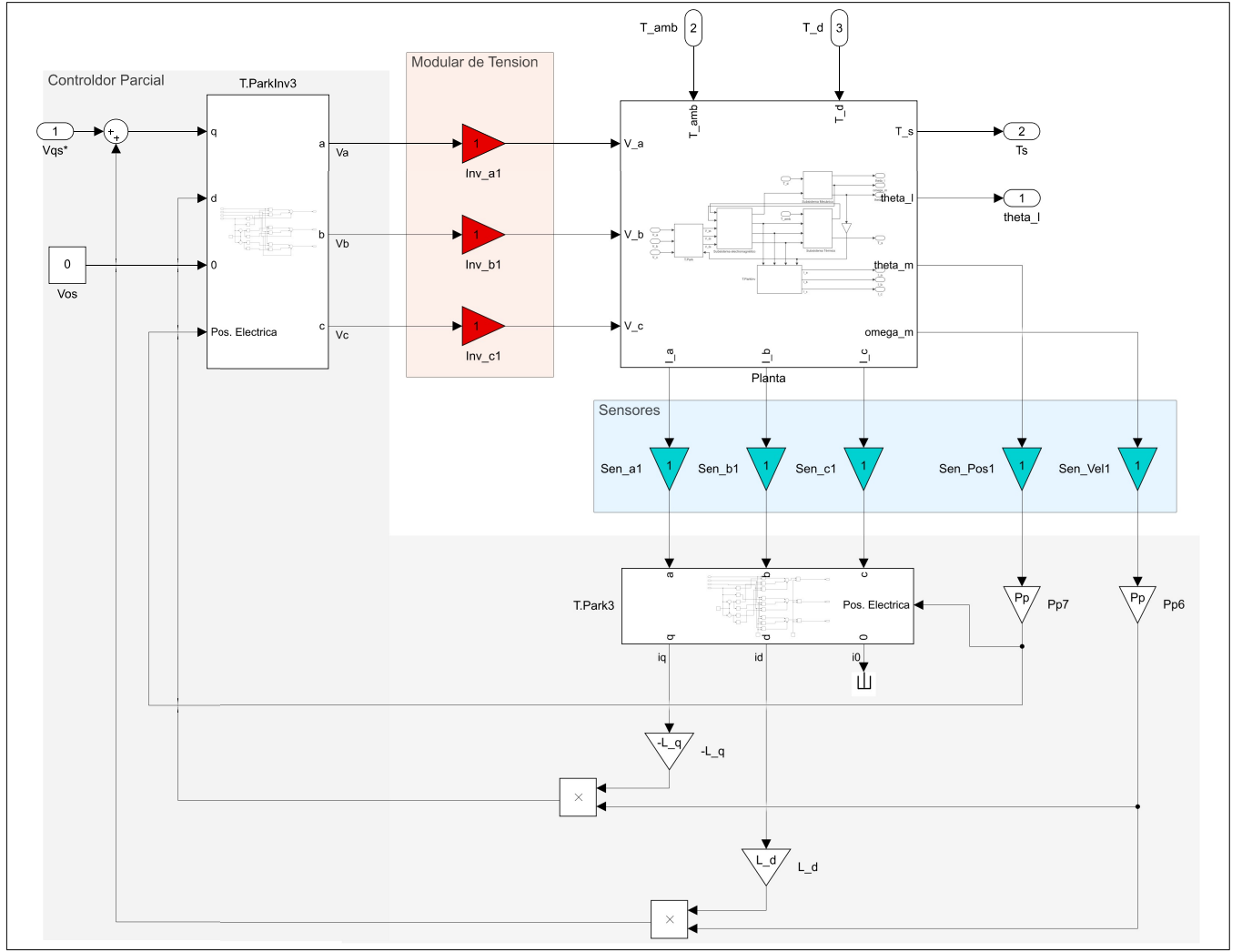


Fig. 14. Implementación de ley de control complementaria

### 3) Análisis de estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado:

a) **Determinación de polos y ceros del sistema:** Para determinar los polos, se resolvió el polinomio característico del sistema.

$$J_{eq}L_q s^3 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left( R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^2 \right) s = 0 \quad (62)$$

$$(63)$$

Cuyas soluciones fueron:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = \frac{-(L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) + \sqrt{J_{eq}^2 R_s^2 - 6 J_{eq} L_q P_p^2 \lambda_m^2 - 2 J_{eq} L_q R_s b_{eq} + L_q^2 b_{eq}^2}}{2 J_{eq} L_q} \\ s_3 = \frac{-(L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) - \sqrt{J_{eq}^2 R_s^2 - 6 J_{eq} L_q P_p^2 \lambda_m^2 - 2 J_{eq} L_q R_s b_{eq} + L_q^2 b_{eq}^2}}{2 J_{eq} L_q} \end{cases} \quad (64)$$

Además, se obtuvieron las frecuencias naturales y relaciones de amortiguamiento, al comparar la ecuación características asociada a los dos polos complejos conjugados, con la ecuación estándar de un sistema de segundo orden.

$$s^2 + \frac{J_{eq} R_s + L_q b_{eq}}{J_{eq} L_q} s + \frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^2}{J_{eq} L_q} = 0 \quad (65)$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (66)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^r}{J_{eq} L_q}} \quad (67)$$

$$\zeta = \frac{J_{eq} R_s + L_q b_{eq}}{2 \sqrt{J_{eq} L_q \left( R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^r \right)}} \quad (68)$$

Se pudo ver que solo la perturbación introduce un cero:

$$R_s + L_q s = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_s}{L_q} \quad (69)$$

Para ver como varían los polos, frecuencia natural y cero, se graficaron en función de los parámetros que se varían.

4) **Análisis de observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde salida medida**  
 $\theta_m(t)$ : Para evaluar la observabilidad desde la salida medida, se determinó la matriz de observabilidad, para luego calcular su rango y compararlo con el orden del sistema.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Para nuestro caso, recordando las matrices A y C en eq.(50), la matriz de observabilidad quedó de la siguiente manera:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p \lambda_m^r}{2J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Al calcular el determinante de esta matriz:

$$\det(O) = \frac{3P_p \lambda_m^r}{2J_{eq}} \quad (72)$$

se pudo ver que es distinto de cero, por lo que el rango de O es 3, que es igual al orden del sistema. Entonces, se concluye que el sistema LTI aumentado simplificado es completamente observable desde la posición.

Sin embargo, se debe aclarar que el sistema LTI aumentado con sistemas autónomos desacoplados, es parcialmente observable, ya que los estados  $i_{ds}^r(t)$  y  $T_s^o(t)$  no pueden ser observados desde la posición.

Se propuso tomar como salida a la velocidad  $\omega_m(t)$  y analizar la observabilidad desde ella. En este caso la matriz de salida queda:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Los resultados obtenidos fueron:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p \lambda_m^r}{2J_{eq}} \\ 0 & \frac{2L_q b_{eq}^2 - 3J_{eq} P_p^2 \lambda_m^r}{2J_{eq}^2 L_q} & -\frac{3P_p \lambda_m^r (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Al calcular el determinante de esta matriz, el resultado fue 0, por lo tanto el rango es menor a 3 y el sistema no es observable desde la velocidad.

Esto ocurre ya que, al conocer la velocidad, no podemos determinar la posición si no conocemos la condición inicial de la posición.



5) **Análisis de controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde entrada manipulada**  $v_{qs}^r(t)$ , **sin considerar la perturbación de la carga mecánica**: Para evaluar la controlabilidad desde la entrada manipulada, se determinó la matriz de controlabilidad, para luego calcular su rango y compararlo con el orden del sistema.

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (75)$$

Para nuestro caso, recordando las matrices A y B en eq.(50), la matriz de controlabilidad quedó de la siguiente manera:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}L_q} \\ 0 & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}L_q} & -\frac{3P_p\lambda_m^r(L_q b_{eq} + J_{eq}R_s)}{2J_{eq}^2L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{2J_{eq}R_s^2 - 3L_qP_p^2\lambda_m^r}{2J_{eq}L_q^3} \end{bmatrix} \quad (76)$$

Al calcular el determinante de esta matriz:

$$\det(S) = -\frac{9P_p^2\lambda_m^r}{4J_{eq}^2L_q^3} \quad (77)$$

al igual que con la observabilidad, se pudo ver que es distinto de cero, por lo que el rango de S es 3, igual al orden del sistema. Entonces, se concluye que el sistema LTI aumentado simplificado es completamente controlable desde  $v_{qs}^r(t)$ .

Similar a lo que ocurrió con la observabilidad, el sistema LTI aumentado con sistemas autónomos desacoplados, es parcialmente controlable, ya que el estado  $i_{ds}^r(t)$  no puede ser controlado desde  $v_{qs}^r(t)$ . Para lograrlo, deben considerarse otras entradas de control adicionales como  $v_{ds}^r(t)$

6) **Simulación dinámica en dominio temporal**:

**B. Modelado, Análisis y Simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente(control vectorial)**

1) **Modulador de torque equivalente(Controlador interno vectorial de corriente/torque)**:

a) **Compensación de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada**: Para lograrlo primero se analizaron las ecuaciones del modelo NL del subsistema electromagnético:

$$\begin{cases} \dot{i}_{qs}^r(t) = -\frac{R_s(t)i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p\omega_m(t)[\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \dot{i}_{ds}^r(t) = -\frac{R_s(t)i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \\ \dot{i}_{0s}(t) = -\frac{R_s(t)i_{0s}(t)}{L_{ls}} + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \end{cases} \quad (78)$$

Se puede ver que, del lado derecho de las ecuaciones, tenemos todas las realimentaciones físicas además de las tensiones de entrada. Por lo tanto, para desacoplar estas realimentaciones, se propusieron las siguientes tensiones como consigna de entrada:

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s(t)i_{qs}^r(t) + P_p\omega_m(t)[\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)] \quad (79)$$

$$v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s(t)i_{ds}^r(t) - L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t) \quad (80)$$

$$v_{0s}(t) = v_{0s}^{*}(t) + R_s(t)i_{0s}(t) \quad (81)$$

donde las tensiones  $v_{qd0s}(t)^*$  son las nuevas consignas con las realimentaciones ya desacopladas.

Al reemplazar las ecuaciones (79), (80) y (81) en eq.(78), se cancelan los términos de las realimentaciones y se obtiene el siguiente subsistema electromagnético:

$$\begin{cases} \dot{i}_{qs}^r(t) = \frac{v_{qs}^{r*}(t)}{L_q} \\ \dot{i}_{ds}^r(t) = \frac{v_{ds}^{r*}(t)}{L_d} \\ \dot{i}_{0s}(t) = \frac{v_{0s}^{*}(t)}{L_{ls}} \end{cases} \quad (82)$$

De esta manera, quedó un sistema lineal en el cual existe un acceso directo a las corrientes, sin realimentaciones. Cabe destacar que con este método se desacoplaron los efectos que provocan las realimentaciones, ya que estas se deben a principios físicos propios del sistema. Además se está suponiendo que se tienen los sensores necesarios para medir los estados a realimentar.

b) **Diseño de lazos de control de corrientes**  $i_{qd0s}^r(t)$ : Luego de haber desacoplado todas las realimentaciones, se incorporaron lazos de control de corriente solamente proporcional (con polos ubicados en  $p_i = -5000 \frac{rad}{s}$ ), con consignas de corriente en lugar de tensiones y así lograr un control mas preciso del torque. Para lograrlo, se definieron las consignas de tensión  $v_{qd0s}(t)^*$  de la siguiente manera:

$$v_{qs}^r(t) = R_q [i_{qs}^r(t)^* - i_{qs}^r(t)] \quad (83)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_d [i_{ds}^r(t)^* - i_{ds}^r(t)] \quad (84)$$

$$v_{0s}(t) = R_0 [i_{0s}(t)^* - i_{0s}(t)] \quad (85)$$

donde estas consignas de tensiones son proporcionales al error de corriente, y las constantes de proporcionalidad son resistencias con unidades en ohm.

Para determinar el valor de las ganancias se reemplazaron las ecuaciones (83), (84) y (85) en la eq. (82), y luego se encontraron las funciones de transferencia del sistema resultante.

$$\begin{cases} \dot{i}_{qs}^r(t) &= \frac{R_q [i_{qs}^r(t)^* - i_{qs}^r(t)]}{L_q} \\ \dot{i}_{ds}^r(t) &= \frac{R_d [i_{ds}^r(t)^* - i_{ds}^r(t)]}{L_d} \\ \dot{i}_{0s}(t) &= \frac{R_0 [i_{0s}(t)^* - i_{0s}(t)]}{L_{ls}} \end{cases} \quad (86)$$

$$\begin{cases} sI_{qs}^r(s) &= \frac{R_q [I_{qs}^r(s)^* - I_{qs}^r(s)]}{L_q} \\ sI_{ds}^r(s) &= \frac{R_d [I_{ds}^r(s)^* - I_{ds}^r(s)]}{L_d} \\ sI_{0s}(s) &= \frac{R_0 [I_{0s}(s)^* - I_{0s}(s)]}{L_{ls}} \end{cases} \quad (87)$$

$$\begin{cases} G_{I_{qs}^r}(s) &= \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^r(s)^*} = \frac{1}{\frac{L_q}{R_q}s + 1} \\ G_{I_{ds}^r}(s) &= \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^r(s)^*} = \frac{1}{\frac{L_d}{R_d}s + 1} \\ G_{I_{0s}}(s) &= \frac{I_{0s}(s)}{I_{0s}(s)^*} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R_0}s + 1} \end{cases} \quad (88)$$

Al observar estas funciones de transferencia, se puede ver que contienen un solo polo:

$$\frac{L_q}{R_q}s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_q}{L_q} \quad (89)$$

$$\frac{L_d}{R_d}s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_d}{L_d} \quad (90)$$

$$\frac{L_{ls}}{R_0}s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_0}{L_{ls}} \quad (91)$$

que al posicionarlos en  $p_i = -5000 \frac{rad}{s}$ , se obtuvieron las siguientes ecuaciones para las ganancias:

$$R_q = 5000L_q = 29\Omega \quad (92)$$

$$R_d = 5000L_d = 33\Omega \quad (93)$$

$$R_0 = 5000L_{ls} = 4\Omega \quad (94)$$

c) **Incorporación de consigna de torque**: Luego de haber incorporado los lazos de control de corriente, se hizo la realimentación necesaria para pasar de consignas de corrientes a una consigna de torque. Para esto, primero se analizó la ecuación del torque electromagnético, de donde podemos despejar la consigna de corriente  $i_{qs}^r(t)^*$ :

$$T_m(t) = \frac{3}{2}P_p[\lambda_m^r i_{qs}^r(t)^* + (L_d - L_q)i_{ds}^r(t)i_{qs}^r(t)^*] \quad (95)$$

$$i_{qs}^r(t)^* = \frac{T_m(t)}{\frac{3}{2}P_p[\lambda_m^r + (L_d - L_q)i_{ds}^r(t)]} \quad (96)$$

Además, se incorporó el termino de fricción para desacoplar este efecto:

$$i_{qs}^r(t)^* = \frac{T_m(t)^* + b_{eq}\omega_m(t)}{\frac{3}{2}P_p[\lambda_m^r + (L_d - L_q)i_{ds}^r(t)]} \quad (97)$$

*d) Compensación del torque de carga por gravedad:* Al analizar la ecuación de estado de la velocidad, luego de haber reemplazado la consigna de corriente:

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{T_m(t)^*}{J_{eq}} - \frac{k_l \sin\left(\frac{\theta_m}{r}\right)}{r J_{eq}} - \frac{T_d(t)}{r J_{eq}} \quad (98)$$

se pudo ver que es posible compensar el termino del torque de carga por gravedad, proponiendo la siguiente consigna de torque:

$$T_m(t)^* = T_m(t)^{*'} + \frac{k_l \sin\left(\frac{\theta_m}{r}\right)}{r} \quad (99)$$

para que la eq. (98) quede de la siguiente manera:

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{T_m(t)^{*'}}{J_{eq}} - \frac{T_d(t)}{r J_{eq}} \quad (100)$$

**2) Controlador externo de movimiento: posición/velocidad:** Para mejorar la dinámica del sistema, eliminar el error de estado estacionario, y poder seguir consignas de posición/velocidad se añadió un PID, determine el torque necesario para cumplirlas.

$$T_m(s)^{*'} = [\omega_m^*(s) - \omega_m(s)] b_a + \frac{[\omega_m^*(s) - \omega_m(s)]}{s} K_{sa} + \frac{[\omega_m^*(s) - \omega_m(s)]}{s^2} K_{sia} \quad (101)$$

$$J_{eq} s^2 \Theta_m = T_m(s)^{*'} - \frac{T_d(s)}{r} \quad (102)$$

$$J_{eq} s^2 \Theta_m = [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] \left( b_a s + K_{sa} + \frac{1}{s} K_{sia} \right) - \frac{T_d(s)}{r} \quad (103)$$

$$(J_{eq} s^3 + b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}) \Theta_m = (b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}) \Theta_m^*(s) - \frac{T_d(s)}{r} s \quad (104)$$

$$\Theta_m = \frac{b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}}{J_{eq} s^3 + b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}} \Theta_m^*(s) - \frac{s}{J_{eq} s^3 + b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}} \frac{T_d(s)}{r} \quad (105)$$

$$G_{\Theta_m^*}(s) = \frac{b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}}{J_{eq} s^3 + b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}} \quad (106)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{s}{J_{eq} s^3 + b_a s^2 + K_{sa} s + K_{sia}} \quad (107)$$

$$P(s) = \quad (108)$$

**3) Incorporación de observador de estado de orden reducido para parte mecánica:**

**4) Simulación en tiempo continuo con modelo no lineal completo:**

**5) Verificación de desempeño:**

## V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

$$\frac{3 \lambda_m \left( v_{qs} - P_p \lambda_m \omega_m + \frac{L_d P_p \omega_m v_{ds}}{R_s} \right)}{2 \left( R_s - \frac{L_d L_q P_p^2 \omega_m^2}{R_s} \right)} + \frac{3 (L_d - L_q) \left( v_{ds} + \frac{L_q P_p \omega_m \left( v_{qs} - P_p \lambda_m \omega_m + \frac{L_d P_p \omega_m v_{ds}}{R_s} \right)}{R_s - \frac{L_d L_q P_p^2 \omega_m^2}{R_s}} \right)}{2 R_s \left( R_s - \frac{L_d L_q P_p^2 \omega_m^2}{R_s} \right)} \left( v_{qs} - P_p \lambda_m \omega_m + \frac{L_d P_p \omega_m}{R_s} \right) \quad (109)$$

**A. Heading 1, etc**

**B. Figures and Tables**

Positioning Figures and Tables: Place figures and tables at the top and bottom of columns. Avoid placing them in the middle of columns. Large figures and tables may span across both columns. Figure captions should be below the figures; table heads should appear above the tables. Insert figures and tables after they are cited in the text. Use the abbreviation “Fig. 1”, even at the beginning of a sentence.

## VI. CONCLUSIONES

### APENDICE

Appendixes should appear before the acknowledgment.

TABLE I  
AN EXAMPLE OF A TABLE

One	Two
Three	Four

#### REFERENCES

- [1] G. O. Young, "Synthetic structure of industrial plastics (Book style with paper title and editor)," in *Plastics*, 2nd ed. vol. 3, J. Peters, Ed. New York: McGraw-Hill, 1964, pp. 15–64.
- [2] R. Kelly et al, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer, 2005. (Example and Figure 2.2).
- [3] P. Krause et al, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*, 3rd Ed., IEEE-Wiley, 2013.
- [4] B. Smith, "An approach to graphs of linear forms (Unpublished work style)," unpublished.
- [5] E. H. Miller, "A note on reflector arrays (Periodical style~Accepted for publication)," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, to be published.
- [6] J. Wang, "Fundamentals of erbium-doped fiber amplifiers arrays (Periodical style~Submitted for publication)," *IEEE J. Quantum Electron.*, submitted for publication.