

Proyecto Global Integrador: Control de Accionamiento de CA con Motor Sincrónico de Imanes Permanentes

Borquez Juan y Escobar Matías

Abstract

I. INTRODUCCIÓN

Modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un Sistema de Control Automático de Posición y Movimiento para un Accionamiento electromecánico de 4 cuadrantes, compuesto por: máquina eléctrica de corriente alterna (CA) trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentada por inversor trifásico desde fuente de corriente continua (CC); reductor de velocidad de engranajes planetarios de salida hacia la carga mecánica; realimentación con 1 sensor de posición en el eje del motor, más 3 sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor trifásico al estator de la máquina (PMSM) y 1 sensor de temperatura del bobinado de estator.

II. ECUACIONES

Se detallan en esta sección las ecuaciones que modelan las distintas partes del sistema, obtenidas de la guía de referencia ([1]) en donde también se detalla claramente el significado de cada uno de los términos en las ecuaciones.

- Modelo matemático simplificado equivalente no lineal de parámetros variables referido al eje de salida del tren de transmisión:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} = T_q(t) - b_l \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$T_l(t) = k_l \sin(\theta_l(t)) + T_d(t) \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt} \equiv \omega_l(t) \Leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\zeta) d\zeta + \theta_l(0) \quad (3)$$

- Modelo equivalente rígido del tren de transmisión:

$$\omega_l(t) = 1/r \cdot \omega_m(t) \quad (4)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_{dm}(t) \quad (5)$$

- Modelo matemático equivalente del sub-sistema mecánico de la máquina eléctrica.

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_m \omega_m(t) - T_{dm}(t) \quad (6)$$

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \Leftrightarrow \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\tau) d\tau + \theta_m(0) \quad (7)$$

- Coordenadas eléctricas de entrehierro $qd0^r$ (marco de referencia de rotor \neq “sincrónico”):

$$\frac{d\theta_r(t)}{dt} \equiv \omega_r(t) \Leftrightarrow \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\tau) d\tau + \theta_r(0) \quad (8)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \omega_m(t) \quad (9)$$

- Torque electromagnético:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_p [\lambda_m^r i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t) i_{qs}^r(t)] \quad (10)$$

- Balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (referido a coordenadas $qd0^r$):

$$v_{qs}^r(t) = R_s(t) i_{qs}^r(t) + L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)] \omega_r(t) \quad (11)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(t) i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q i_{qs}^r(t) \omega_r(t) \quad (12)$$

$$v_{0s}(t) = R_s(t) i_{0s}(t) + L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} \quad (13)$$

- Modelo matemático de variación de la resistencia eléctrica del bobinado con la temperatura.

$$R_s(t) = R_{sREF} (1 + \alpha_{Cu} (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ)) \quad (14)$$

- Potencia de pérdidas calóricas:

$$P_{s\ perd}(t) = R_s(t) (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = \frac{3}{2} R_s(t) (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)) \quad (15)$$

- Balance térmico de estator:

$$P_{s\ perd}(t) = C_{ts} \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (16)$$

- Vector de estado del sistema físico completo.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Vector de entradas de manipulación al modelo dinámico del sistema físico completo en coordenadas virtuales y reales respectivamente

$$\mathbf{u}_{c(qd0)}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{c(abc)}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

- Vector de entradas de perturbación al modelo dinámico del sistema físico completo.

$$\mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

- Vector de entradas total al modelo dinámico del sistema físico completo.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c(t) \\ \mathbf{u}_d(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

- Sistema de tensiones trifásico a la salida del inversor.

$$v_{as}(t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_{sl}(t) \cdot \cos(\theta_{ev}(t)) \quad (\text{Ec. 4.1}) \quad (21)$$

$$v_{bs}(t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_{sl}(t) \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{Ec. 4.2}) \quad (22)$$

$$v_{cs}(t) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot V_{sl}(t) \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (\text{Ec. 4.3}) \quad (23)$$

$$(24)$$

- Frecuencia eléctrica del sistema de tensiones trifásico y ángulo eléctrica

$$\omega_e(t) \equiv 2\pi \cdot f_e(t) \equiv \frac{d\theta_{ev}(t)}{dt} \iff \theta_{ev}(t) = \int_0^t \omega_e(\xi) d\xi + \theta_{ev}(0) \quad (25)$$

- Ángulo de carga de la máquina eléctrica:

$$\delta(t) \equiv \theta_r(t) - \theta_{ev}(t) = \int_0^t [\omega_r(\xi) - \omega_e(\xi)] d\xi + \theta_r(0) - \theta_{ev}(0) \quad (26)$$

III. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

El problema bajo estudio se encuentra bien detallado en la guía de referencia ([1]), por lo que en esta sección se indican solo los aspectos más relevantes de cada una de las partes del problema, sin hacer énfasis en las ecuaciones que describen los modelos de cada una de las partes ni en los parámetros de cada uno de los subsistemas.

A. carga mecánica

Aplicación simplificada de referencia (adaptado de [2]): control de movimiento de 1 eje (descentralizado) para articulación de brazo manipulador robótico elemental de un grado de libertad (1 g.d.l.) rotacional de eje horizontal sometido a la acción de la aceleración de gravedad (péndulo rígido actuado), con eje de rotación fijo a base en sistema de referencia inercial (fig. 1); con parámetros equivalentes variables según sea la carga útil transportada en el extremo.

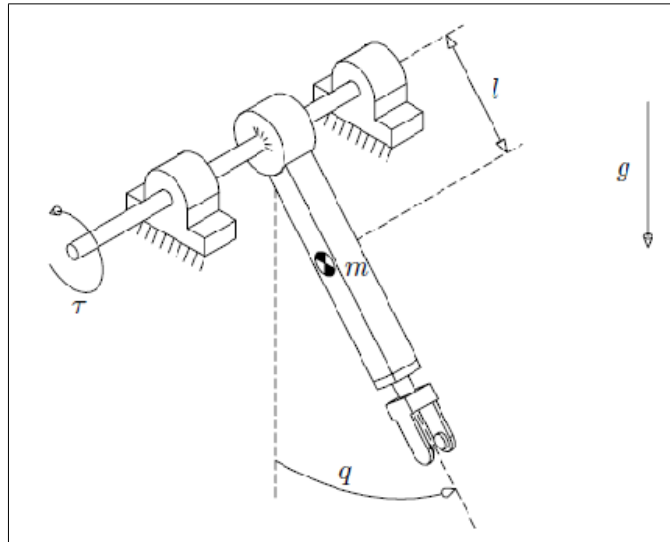


Fig. 1. Robot manipulador elemental de 1 g.d.l. en plano vertical (péndulo rígido actuado) [2].

B. Caja Reductora

Caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, asumiendo acoplamiento rígido (sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejados al eje de entrada y considerados junto con el motor

C. Máquina Eléctrica PMSM

Máquina eléctrica de CA trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM) y estator conectado en estrella (simétrico y equilibrado) accesible en bornes de fases *abc*, con centro de estrella (punto “neutro”) flotante (no accesible).

1) **subsistema térmico:** Modelo simplificado equivalente de primer orden, considerando sólo pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule en bobinado de estator, despreciando pérdidas magnéticas en el núcleo; transferencia de calor por conducción y convección natural, sin ventilación forzada.

D. Inversor trifásico de alimentación (modulador de tensión)

Inversor trifásico de 4 cuadrantes (regenerativo), consistente en puente trifásico con llaves electrónicas semiconductoras alimentado desde fuente de CC de tensión constante, conmutado con modulación de ancho de pulso.

No es parte de este proyecto el análisis del detalle de operación del inversor ni su fuente de energía de CC. Se considera al inversor trifásico y la fuente de CC como un Modulador idealizado de tensión trifásico (vectorial) (modelo promediado que se indica a continuación) para alimentación al estator de la Máq. Eléctrica.

1) **Modelo Promediado:** Se considera un modelo promediado equivalente de tensiones sintetizadas de salida (componente fundamental, sin armónicos). Se trata de un sistema trifásico de tensiones de fase en bornes de estator, senoidales de secuencia positiva *abc*, equilibrado o balanceado, variable en Módulo $V_{sl}(t)$ y Frecuencia $\omega_e(t)$.

E. Sensores de retroalimentación

El sistema cuenta con los siguientes dispositivos físicos y sus canales de medición y acondicionamiento:

- 1 sensor de posición angular (codificador incremental o “encoder”) montado en el eje de motor, asumiendo proceso de “homming” y decodificación idealizados. Se logra la medición de la posición angular absoluta “rectificada” (al girar más de una revolución)

→ variable medida : $\theta_m(t)$

- 3 sensores de corriente instantánea de fase, montados en salida trifásica del inversor hacia bornes del estator.

→ variables medidas : $i_{as}(t), i_{bs}(t), i_{cs}(t)$

- 1 sensor de temperatura (ej. RTD) en bobinado de estator. Se mide la temperatura para monitoreo de calentamiento y estimación de resistencia de estator $R_s(t)$.

→ variable medida : $T_s^\circ(t)$

F. Variables principales en el Modelo Dinámico completo

Se utilizan las siguientes variables para representar el estado, las entradas y las salidas en el modelo del sistema dinámico completo.

a) Excitaciones (entradas) externas:

- Variable manipulada (vectorial): Sistema trifásico de tensiones de fase reales en bornes de estator $v_{abc}(t)$, con $V_{sl}(t)$ y $\omega_e(t)$ ajustables a través de manipulación de la modulación PWM del inversor.
- Variables de perturbación: Torque externo de carga mecánica $T_l(t)$ aplicado en la articulación del brazo manipulador. Temperatura ambiente $T_{amb}^\circ(t)$.

b) Estado interno:

- Posición $\theta_m(t)$ y velocidad $\omega_m(t)$ en eje del motor. Corrientes virtuales equivalentes de estator $i_{qd0s}^r(t)$; temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.

c) Respuestas (salidas) externas:

- Variable controlada, no medida directamente (efector final): Posición angular de eje de la carga $q(t) \equiv \theta_l(t)$.
- Variables medidas (para realimentación): Posición angular de eje del motor $\theta_m(t)$. Sistema trifásico de corrientes de fase reales en bornes de estator $i_{abc}(t)$. Temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.

IV. DESARROLLO DE TAREAS

A. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del SISTEMA FÍSICO a “Lazo Abierto” (Sin Controlador externo de Movimiento)

1) **Modelo sub-sistema mecánico completo referido al eje de la máquina eléctrica:** Multiplicando por r ambos miembros de la eq. (6), sumando miembro a miembro con la eq. (1) y tomando en cuenta $T_q(t)$ según eq. (5) obtenemos:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} + J_m r \frac{d\omega_m(t)}{dt} = r T_m(t) - T_l(t) - b_l \omega_l(t) - b_m r \omega_m(t)$$

Reemplazando en la anterior $\omega_l(t)$ según eq. (4), agrupando términos y dividiendo entre r a ambos miembros, obtenemos:

$$\left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (27)$$

Definimos ahora la inercia equivalente y el amortiguamiento equivalente respectivamente como:

$$J_{eq} = \left(J_m + \frac{J_l}{r^2} \right) \quad (28)$$

$$b_{eq} = \left(b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \quad (29)$$

Reemplazando la eq. (28) y la eq. (29) en la eq. (27) obtenemos el modelo matemático equivalente del sub-sistema mecánico completo con parámetros equivalentes referido al eje del motor (véase diagrama de bloques de la fig. 2):

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (30)$$

El modelo resultante tiene un solo grado de libertad, tal como sucede en el modelo de la carga y en el del subsistema mecánico de la máquina eléctrica sin la transmisión. Esto se debe a la suposición de rigidez ideal y la ausencia de "backlash" en la reducción, permitiendo un "acoplamiento directo" de la carga al eje de la máquina. Dicho de otra manera, la transmisión no incorpora dinámica al subsistema mecánico.

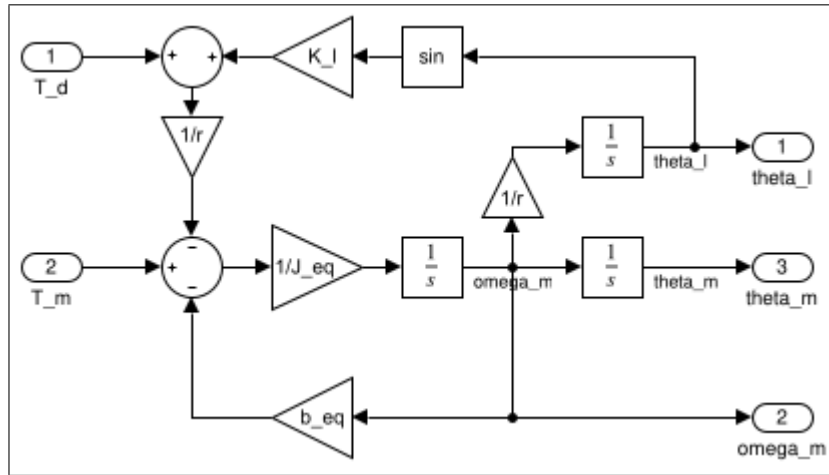


Fig. 2. Diagrama de bloques del sub-sistema mecánico completo.

2) **Modelo dinámico del sistema físico completo:** este incorpora los sub-sistemas electromagnético, mecánico y térmico.

a) **Modelo Global No Lineal:** Al tratarse de un sistema no lineal de parámetros variables y con no-linealidades en las variables de estado, no se puede obtener una expresión de la ecuación de estado y de salida del sistema en la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Sin embargo, se puede obtener una expresión del modelo matemático vectorial en la forma más general:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la definición del estado del sistema (ver eq. (17)) la primera ecuación escalar a considerar en la ecuación vectorial de estado del sistema es la eq. (7). El acoplamiento entre el sub-sistema electromagnético y el mecánico de la máquina eléctrica se da en el $T_m(t)$ dado por la ecuación eq. (10). Reemplazando esta ecuación en la eq. (30) y reordenando obtenemos la segunda ecuación de estado del sistema:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_l(t)}{r J_{eq}} \quad (31)$$

Las siguientes tres ecuaciones de estado del sistema se obtienen de las ecuaciones de balance de tensiones en coordenadas virtuales (eq. (11) eq. (12), eq. (13)). Reemplazando en estas la relación entre $\omega_m(t)$ y $\omega_r(t)$ dada por la eq. (8) obtenemos:

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(t) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \quad (32)$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(t) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \quad (33)$$

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = -\frac{R_s(t) i_{0s}(t)}{L_{ls}} + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \quad (34)$$

La última ecuación de estado se obtiene relacionando las eq. (15) y eq. (16) obteniéndose:

$$\frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)]}{C_{ts}} - \frac{[T_s^o(t) - T_{amb}^o(t)]}{R_{ts} C_{ts}} \quad (35)$$

Cabe mencionar, para las últimas ecuaciones de estado, que aunque se tiene un modelo lineal de evolución de la $R_s(t)$ con la $T_s^o(t)$ dado en la eq. (14) se decide no desarrollar la misma en las ecuaciones anteriores y se deja la dependencia explícita de R_s con t con el objeto de simplificar la notación y no oscurecer la explicación. Con el mismo objeto, se simplifica la notación de R_{ts-amb} a simplemente R_{ts} .

Ecuación vectorial de estado del sistema: se obtiene expresando en forma vectorial las ecuaciones obtenidas, indicándose en la eq. (36) en forma de sistemas de ecuaciones y en forma matricial en la eq. (36)

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{1}{J_{eq}} \left(\frac{3}{2} P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] - b_{eq} \omega_m(t) - \frac{1}{r} T_l(t) \right) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \left(-R_s(t) i_{qs}^r(t) - P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)] + v_{qs}^r(t) \right) \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \left(-R_s(t) i_{ds}^r(t) + P_p \omega_m(t) L_q i_{qs}^r(t) + v_{ds}^r(t) \right) \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \left(-R_s(t) i_{0s}(t) + v_{0s}(t) \right) \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left(\frac{3}{2} R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)] + \frac{1}{R_{ts}} (T_{amb}^o(t) - T_s^o(t)) \right) \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{\frac{3}{2} P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] - b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} \\ -\frac{R_s(t) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} \\ -\frac{R_s(t) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{P_p \omega_m(t) L_q i_{qs}^r(t)}{L_d} \\ -\frac{R_s(t) i_{0s}(t)}{L_{ls}} \\ \frac{\frac{3}{2} R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)] - T_s^o(t)}{C_{ts}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{r J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{ts} R_{ts}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^o(t) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Con condiciones iniciales:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^o \end{bmatrix} \quad (38)$$

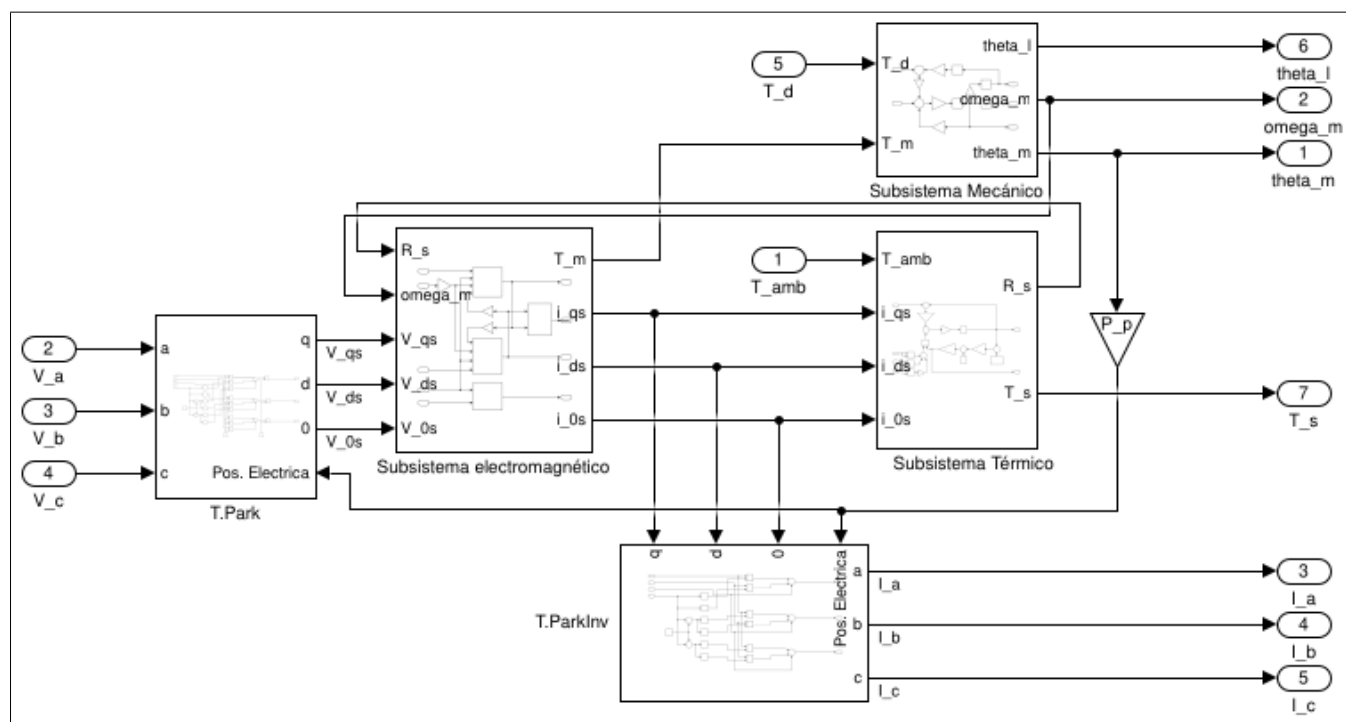
En la eq. (37) se han separado las relaciones que involucran a las variables de estado del sistema de las que involucran a las entradas de manipulación y de las que involucran a las entradas perturbación (ver eq. (17), eq. (18) y eq. (19)). Se puede notar que aunque el sistema es no lineal en las variables de estado (no se puede obtener una expresión de la forma $Ax(t)$ para las relaciones que involucran a las variables de estado), si es lineal en las entradas tanto de perturbación como de control (las relaciones que involucran a las entradas se presentan como producto de matrices) salvo la dependencia de $T_l(t)$ con θ_l y por lo tanto con θ_m dado en eq. (2).

Ecuación vectorial de salida del sistema: se obtiene considerando que la salida de interés del sistema físico es $\theta_m(t)$:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^o(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Diagramas de bloques del sistema físico completo: En la fig. 3 se muestra el diagrama de bloques del sistema físico completo constituido por los sub-sistemas mecánico, térmico y electromagnético cuyos diagramas respectivos se muestran en las fig. 2, fig. 4, y fig. 5. A su vez, los componentes del sub-sistema electromagnético se detallan en las fig. 6, fig. 7, fig. 8, para las corrientes (i_{qs} , i_{ds} , i_{0s} respectivamente) y en la fig. 9 para $T_m(t)$. Finalmente, en las fig. 10 y fig. 11 se detallan las transformaciones de Park directa e inversa respectivamente.

b) Linealización Jacobiana: Se aclara aquí que, solamente para este ejercicio, se considera un vector de entradas de perturbación modificado respecto al indicado en eq. (20) al considerar $T_l(t)$ desarrollada como se indica en la eq. (2). Lo que se hace es reemplazar $T_l(t)$ por $T_d(t)$ en el vector de la eq. (19) lo cual cambia la definición de $\mathbf{u}(t)$ dada por la eq. (20). Luego, el vector de entradas de perturbación y el vector de entradas total del sistema, para este ejercicio, son los que se



The diagram illustrates a control system for a motor, specifically focusing on the calculation of stator resistance (R_s) based on temperature feedback. The system consists of several interconnected blocks and summing junctions:

- Inputs:**
 - T_{amb} (Ambient Temperature, input 1)
 - i_{qs} (d-axis current, input 2)
 - i_{ds} (q-axis current, input 3)
 - i_{0s} (zero-sequence current, input 4)
 - T_{sREF} (Stator Temperature Reference)
 - R_{sREF} (Stator Resistance Reference)
- Processing:**
 - The ambient temperature T_{amb} is subtracted from a reference value (implied to be the initial temperature) at a summing junction, and the result is multiplied by $1/R_{ts_amb}$.
 - The resulting signal is added to the product of i_{qs} and i_{ds} at another summing junction.
 - The output of this summing junction is integrated by $1/C_{ts}$ to produce the temperature T_s (output 2).
 - The temperature T_s is used to calculate the stator resistance R_s (output 1) via a gain block $1/s$.
 - The reference temperature T_{sREF} is compared with the actual temperature T_s at a summing junction.
 - The error signal is processed by a gain block α_{cu} and then added to a constant value of 1 at another summing junction.
 - The output of this summing junction is compared with the reference resistance R_{sREF} at a third summing junction.
 - The resulting error signal is multiplied by a gain of $3/2$ and then added to the product of i_{ds} and i_{0s} (which is also multiplied by a gain of 2) at a final summing junction.
 - The output of this final summing junction is the calculated stator resistance R_s .



Fig. 5. Diagrama de bloques del sub-sistema electromagnético



Fig. 6. Diagrama de bloques I_{qs}



Fig. 7. Diagrama de bloques I_{ds}

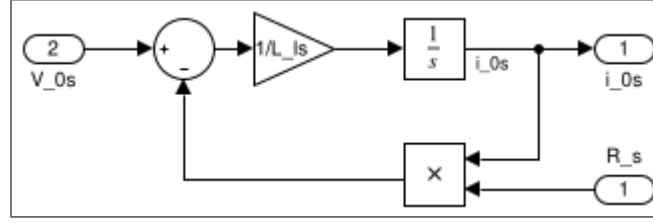


Fig. 8. Diagrama de bloques I_{0s}



Fig. 9. Diagrama de bloques T_m

indican en la eq. (40). Cómo se puede observar, se toman las entradas de tensión de control en el espacio de coordenadas qdo^r .

$$\mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} T_d(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}^r(t) \\ T_d(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Con esta definición del vector de entradas, la ecuación vectorial de estado del sistema es redefinida. Por un lado se debe operar para obtener una expresión de $T_l(t)$ en función de $\theta_m(t)$ y no en función de $\theta_l(t)$ como se indica en la eq. (2) para luego reemplazar la expresión obtenida en la eq. (37). El procedimiento se indica en eq. (41). Finalmente, la ecuación vectorial de estado del sistema queda expresada como se indica en la eq. (42).

$$\begin{aligned} \text{eq. (4) y eq. (3)} &\rightarrow \theta_l(t) = \frac{1}{r} \int_0^t \omega_m(\zeta) d\zeta + \theta_l(0) \\ \text{eq. (7)} &\rightarrow \int_0^t \omega_m(\zeta) d\zeta = \theta_m(t) - \theta_m(0) \\ \text{Reemplazando la segunda en la primera} &\rightarrow \theta_l(t) = \frac{\theta_m(t) - \theta_m(0)}{r} + \theta_l(0) \\ \text{Consideramos que se cumple} &\rightarrow \frac{\theta_m(0)}{r} = \theta_l(0) \\ \text{Luego} &\rightarrow \theta_l(t) = \theta_m(t)/r \\ \text{Finalmente} &\rightarrow T_l(t) = k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right) + T_d(t) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{\frac{3}{2}P_p i_{qs}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{k_l \sin\left(\frac{\theta_m(t)}{r}\right)}{r J_{eq}} \\ -\frac{R_s(t) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} \\ -\frac{R_s(t) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{P_p \omega_m(t) L_q i_{qs}^r(t)}{L_d} \\ -\frac{R_s(t) i_{0s}(t)}{L_{ls}} \\ \frac{\frac{3}{2}R_s(t) [i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2i_{0s}^2(t)]}{C_{ts}} - \frac{T_s^\circ(t)}{R_{ts} C_{ts}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{r J_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} R_{ts}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \\ T_d(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (42)$$

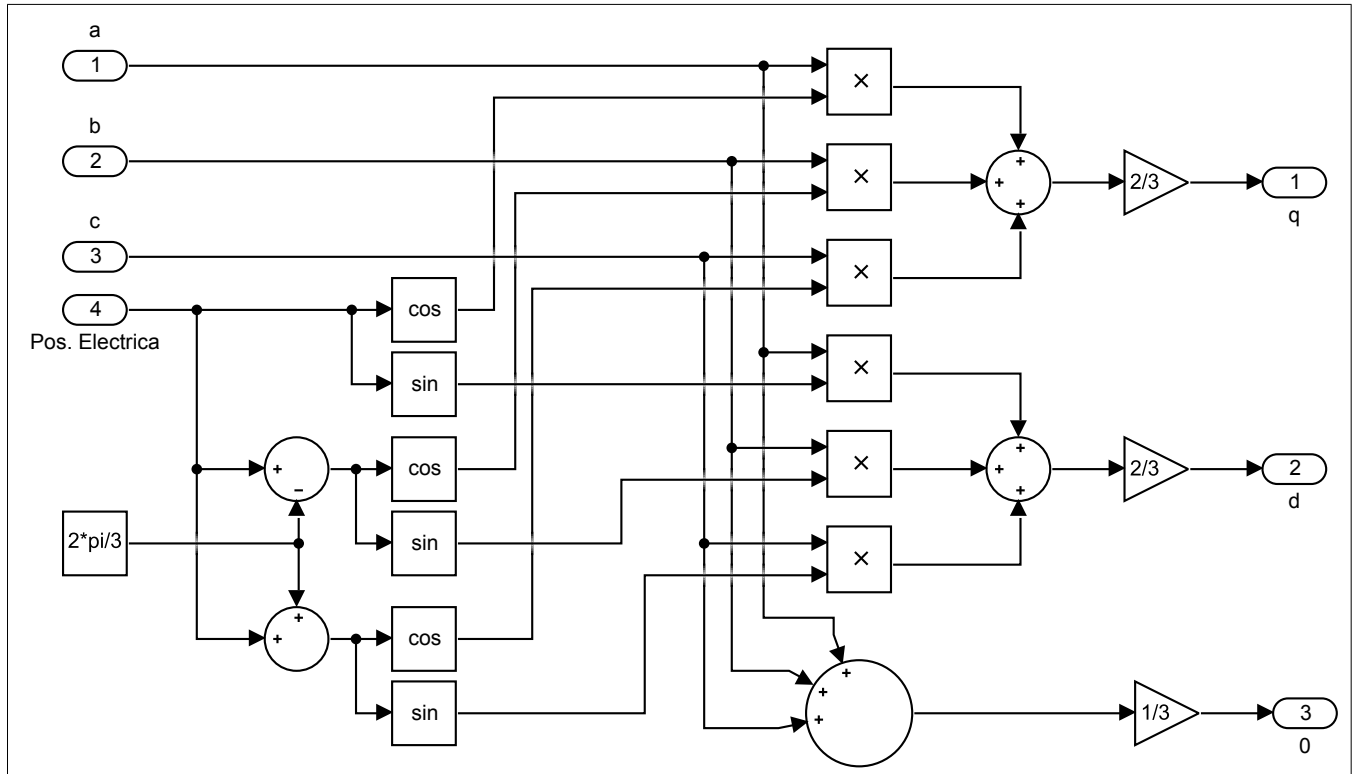


Fig. 10. Transformación de Park Directa

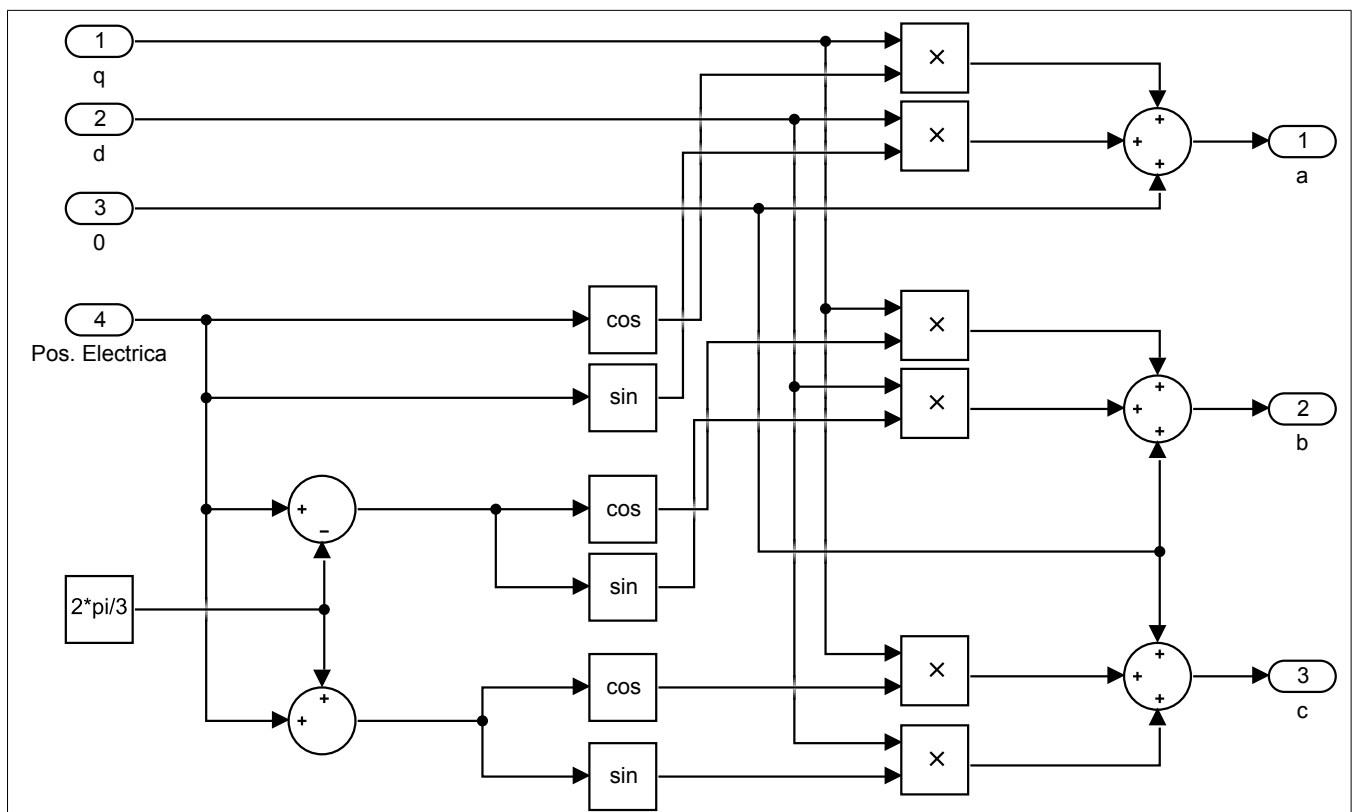


Fig. 11. Transformación de Park inversa

En el modelo de pequeñas desviaciones locales $\delta \mathbf{x}(t)$ respecto de los puntos de equilibrio $\mathbf{X}_o(t)$ se hacen las consideraciones señaladas en la eq. (43).

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}_o(t) + \delta \mathbf{x}(t) \\ \delta \mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{0} \end{cases} \quad (43)$$

Por un lado, la ecuación del **espacio de operación global NL cuasi-estacionario** se muestra en la eq. (44).

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \approx 0/\text{const}; \mathbf{X}_o(0) \equiv \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{Y}_o(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}_o(t) \end{cases} \quad (44)$$

Para nuestro sistema queda expresado como se indica en la eq. (45) para la ecuación de estado.

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_{m-o}(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_{m-o}(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs-o}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds-o}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s-o}(t)}{dt} \\ \frac{dT_{s-o}^o(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{cases} \omega_{m-o}(t) & \approx \omega_{m0} \\ \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p i_{qs-o}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds-o}^r(t)] - b_{eq} \omega_{m-o}(t) - \frac{k_l}{r} \sin\left(\frac{\theta_{m-o}(t)}{r}\right) - \frac{1}{r} T_{d-o}(t) \right] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_q} [-R_{s-o}(t) i_{qs-o}^r(t) - P_p \omega_{m-o}(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds-o}^r(t)] + v_{qs-o}^r(t)] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_d} [-R_{s-o}(t) i_{ds-o}^r(t) + P_p \omega_{m-o}(t) L_q i_{qs-o}^r(t) + v_{ds-o}^r(t)] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_{ls}} [-R_{s-o}(t) i_{0s}(t) + v_{0s-o}(t)] & \approx 0 \\ \frac{3}{2} \frac{R_{s-o}(t)}{C_{ts}} [i_{qs-o}^2(t) + i_{ds-o}^2(t) + 2i_{0s-o}^2(t)] + \frac{1}{R_{ts} C_{ts}} [T_{amb-o}^o(t) - T_{s-o}^o(t)] & \approx 0 \end{cases} \quad (45)$$

Las condiciones iniciales se señalan en la eq. (46).

$$\mathbf{X}_o(0) = \begin{bmatrix} \theta_{m-o}(0) \\ \omega_{m-o}(0) \\ i_{qs-o}^r(0) \\ i_{ds-o}^r(0) \\ i_{0s-o}(0) \\ T_{s-o}^o(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^o \end{bmatrix} \quad (46)$$

En las eq. (45) y eq. (46) el sub-índice $-o$ indica los valores de las variables en el punto de operación.

Consideramos relevante hacer aquí un análisis al respecto del espacio de operación global NL para estem modelo del sistema físico en particular.

Si en lugar de la restricción débil señalada en la primera ecuación de la eq. (44) se toma la restricción fuerte dada por la eq. (47). Tendremos un punto de operación definido como en la eq. (48) tomando en cuenta las condiciones iniciales del modelo señaladas en eq. (45) y la evolución de $\theta_m(t)$ dada por la eq. (7).

$$\frac{d\mathbf{X}_o(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \equiv 0/\text{const} \quad (47)$$

$$\mathbf{X}_o(t) = \begin{bmatrix} \theta_{m-o}(t) \\ \omega_{m-o}(t) \\ i_{qs-o}^r(t) \\ i_{ds-o}^r(t) \\ i_{0s-o}(t) \\ T_{s-o}^o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t \omega_{m-o}(0) d\tau + \theta_{m-o}(0) \\ \omega_{m-o}(0) \\ i_{qs-o}^r(0) \\ i_{ds-o}^r(0) \\ i_{0s-o}(0) \\ T_{s-o}^o(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{m0}t + \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^o \end{bmatrix} \quad (48)$$

Reemplazamos lo obtenido en eq. (48) en la eq. (45) y destacamos la ecuación de estado asociada a $\omega(t)$.

$$\frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p i_{qs0}^r [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds0}^r] - b_{eq} \omega_{m0} - \frac{k_l}{r} \sin\left(\frac{\omega_{m0}t + \theta_{m0}}{r}\right) - \frac{1}{r} T_{d0} \right] = 0 \quad (49)$$

Se puede ver en la eq. (49) que existe una dependencia explícita de t , no solamente de las variables de estado y de las entradas en el punto de operación. Al considerar un punto de operación cuasiestacionario, la eq. (49) se puede expresar de forma simplificada, para mostrar nuestro punto, como en la eq. (50).

$$cte - \frac{k_l}{r} \sin\left(\frac{\omega_{m0}t + \theta_{m0}}{r}\right) - \frac{1}{r} T_{d-o}(t) = 0 \quad (50)$$

Condición que se puede satisfacer solo bajo dos supuestos distintos indicados en la eq. (51). La primera de ellas implica tener control sobre la entrada de perturbación T_{d-o} , lo cual no es posible por definición, o bien si se tuviera un contrapeso que equilibre el torque gravitacional producido por el brazo y la masa que transporta en su extremo. La segunda condición elimina la dependencia explícita de t y no requiere control sobre la entrada de perturbación para lograrse.

$$\begin{cases} T_{d-o}(t) = cte - \frac{k_l}{r} \sin\left(\frac{\omega_{m0}t + \theta_{m0}}{r}\right) \\ \omega_{m0} = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Cuando se asume la segunda condición de la eq. (51), la eq. (45) queda como se indica en la eq. (52). En la que además se toma $v_{0s-o}(t) \equiv 0$ al tratarse de un sistema de tensiones trifásico simétrico balanceado. Eso da por resultado $i_{ds0} = 0$, al ser $R_{s-o} \neq 0$ para las temperaturas normales de operación, y se reemplaza directamente en la ecuación de estado de la T_s° .

$$\begin{cases} \omega_{m0} & = 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p i_{qs0}^r [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds0}^r] - \frac{k_l}{r} \sin\left(\frac{\theta_{m0}}{r}\right) - \frac{1}{r} T_{d-o} \right] & = 0 \\ \frac{1}{L_q} [-R_{s-o} i_{qs0}^r + v_{qs-o}^r] & = 0 \Rightarrow i_{qs0}^r = v_{qs-o}^r / R_{s-o} \\ \frac{1}{L_d} [-R_{s-o} i_{ds0}^r + v_{ds-o}^r] & = 0 \Rightarrow i_{ds0}^r = v_{ds-o}^r / R_{s-o} \\ \frac{1}{L_s} [-R_{s-o} i_{0s}] & = 0 \Rightarrow i_{0s} = 0 \\ \frac{3}{2} \frac{R_{s-o}}{C_{ts}} [i_{qs0}^2 + i_{ds0}^2] + \frac{1}{R_{ts} C_{ts}} [T_{amb-o}^\circ - T_{s0}^\circ] & = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Presentamos aquí las curvas que permitan obtener las entradas de control que es necesario aplicar para obtener una posición del brazo, dado un vector de entradas de perturbación constantes.

En fig. 12 representamos el T_{m-o} que se requiere para una perturbación T_{d-o} dada, en función de la posición del brazo. En donde se consideran los valores extremos de T_{d-o} y un valor de $k_l = 9.807 [N.m]$, ambos en los rangos dados en [1].

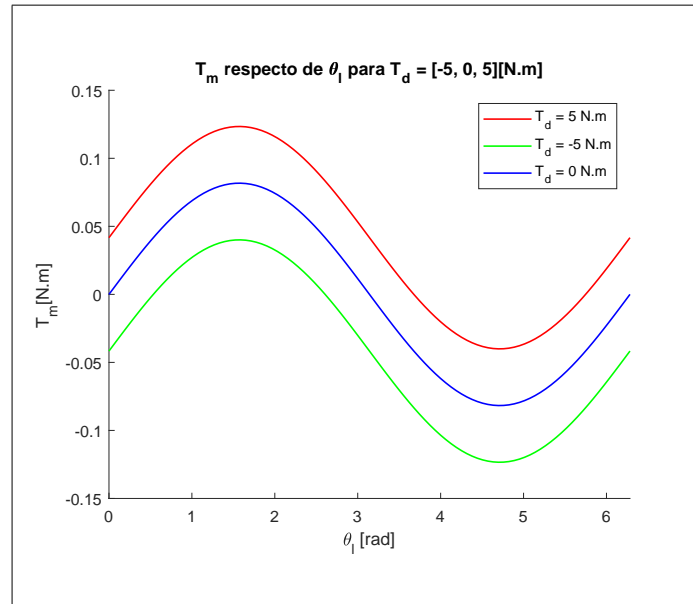


Fig. 12. T_m respecto a T_{d-o} y θ_l

Luego, dado un valor de corriente total junto con un ángulo β como se indica en la eq. (53), y que se pueden relacionar gráficamente como en la fig. 13, podemos expresar las curvas de T_{m-o} en función de i_{qd0s-o}^r con β como parametro, las que se muestran en la fig. 14 y que responden a la eq. (54).

$$(i_{qd0s-o}^r)^2 = (i_{qs0}^r)^2 + (i_{ds0}^r)^2 \quad (53)$$

$$T_m(t) = \frac{3}{2} P_p i_{qd0s-o}^r \sin(\beta) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{qd0s-o}^r \cos(\beta)] \quad (54)$$

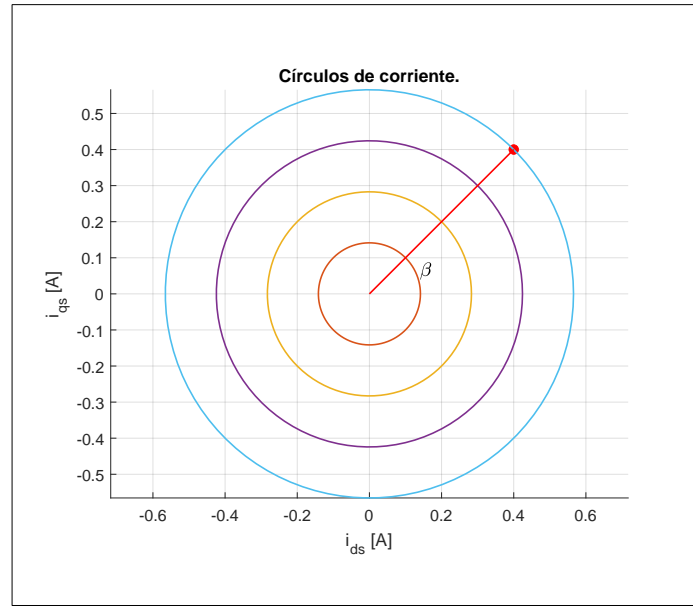


Fig. 13. círculos de corriente total en coordenadas virtuales.

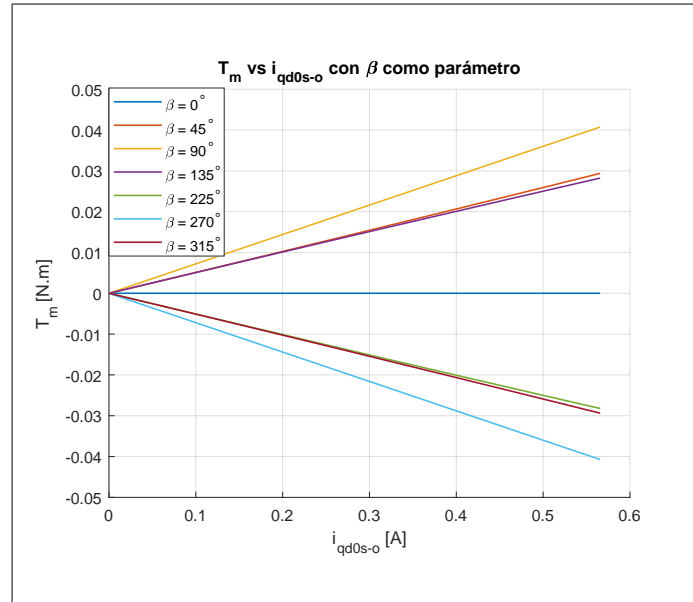


Fig. 14. T_m respecto de i_{qd0s-o}^r con parámetro β .

De la última ecuación en la eq. (52) se puede obtener T_{s0}° a partir del conocimiento de la corriente total. Esto se expresa en la eq. (55) y da como resultado la gráfica mostrada en fig. 15 en donde se grafica la T_{s0}° respecto a i_{qd0s-o}^r con T_{amb-o}° como parámetro.

$$T_{s0}^\circ = \frac{\frac{3}{2} R_{sREF} (\alpha_{cu} T_{sREF}^\circ - 1) \left(i_{qd0s-o}^r \right)^2 - \frac{T_{amb-o}^\circ}{R_{ts-amb}}}{\frac{3}{2} R_{sREF} \alpha_{cu} \left(i_{qd0s-o}^r \right)^2 - \frac{1}{R_{ts-amb}}} \quad (55)$$

Por otro lado, el **Modelo dinámico LPV** se indica en la eq. (56):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) \approx A(t) \delta \mathbf{x}(t) + B(t) \delta \mathbf{u}(t); \delta \mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{y}(t) = C \delta \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (56)$$

Las matrices $A(t)$ y $B(t)$ de la eq. (56) vienen dadas por la eq. (57).

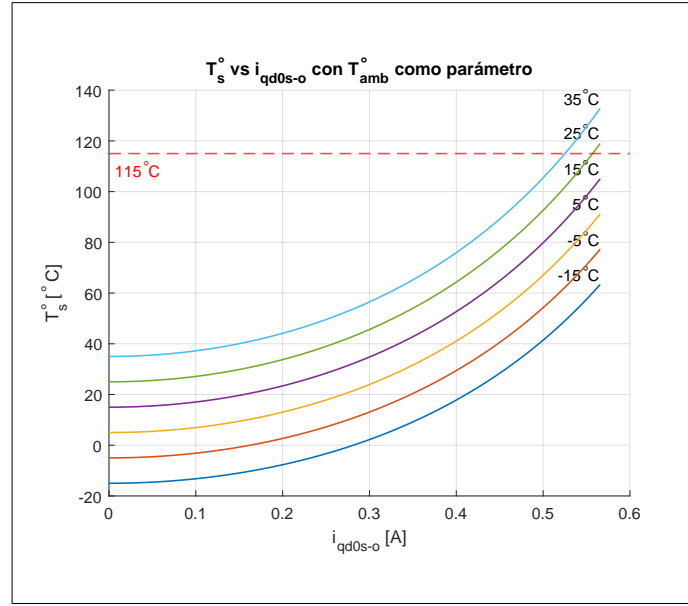


Fig. 15. T_s° respecto de i_{qd0s-o}^r con parámetro T_{amb}° .

$$A(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_o(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\theta_m(t)}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \right) \end{bmatrix} \quad B(t) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{rJ_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts}R_{ts}} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Los gradientes indicados para $A(t)$ en la eq. (57) vienen dados por la eq. (58).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\theta_m(t)}{dt} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) &= \begin{bmatrix} \frac{-K_l \cos(\frac{\theta_m(t)}{r})}{J_{eq} r^2} & \frac{-b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p(\lambda_m + i_{ds}^r(t)(L_d - L_q))}{2J_{eq}} & \frac{3P_p i_{qs}^r(t)(L_d - L_q)}{2J_{eq}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3P_p(i_{ds}^r(t)L_d + \lambda_m)}{2L_q} & \frac{-R_s(t)}{L_q} & \frac{-L_d P_p \omega_m(t)}{L_q} & 0 & \frac{-R_s R_{EF} \alpha_{cu} i_{qs}^r(t)}{L_q} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{L_q P_p i_{qs}^r(t)}{L_d} & \frac{L_q P_p \omega_m(t)}{L_d} & \frac{-R_s(t)}{L_d} & 0 & \frac{-R_s R_{EF} \alpha_{cu} i_{ds}^r(t)}{L_d} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R_s(t)}{L_{ls}} & \frac{-R_s R_{EF} \alpha_{cu} i_{0s}^r(t)}{L_{ls}} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3R_s(t)i_{qs}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{3R_s(t)i_{ds}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{6R_s(t)i_{0s}^r(t)}{C_{ts}} & \frac{3R_s R_{EF} \alpha_{cu} (i_{ds}^r(t)^2 + 2i_{0s}^r(t)^2 + i_{qs}^r(t)^2)}{2C_{ts}} - \frac{1}{C_{ts}R_{ts}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

Nota: Por motivos de legibilidad del modelo matemático LPV completo, decidimos conservar la expresión en esta forma desagregada.

c) **Linealización Por Realimentación No Lineal:** Dado que la dinámica del sub-sistema térmico es comparativamente más lenta que la dinámica del resto del sistema físico, lo que da por resultado una variación relativamente lenta de la $T_s(t)$ y por lo tanto de la $R_s(t)$, en este análisis no se tendrá en cuenta el acoplamiento no lineal con el sub-sistema térmico (el que se da a través de la $R_s(t)$), pero si se considerará su dinámica lineal. Además, teniendo en cuenta que el sistema de tensiones $v_{abcs}(t)$ es un sistema simétrico balanceado, podemos asumir primero $v_{0s}(t) \equiv 0$, lo que da por resultado $i_{0s}(t) \equiv 0$ en estado permanente. Esto sumado a la especificación $i_{ds}^r(t) \equiv 0$, la que imponemos directamente, hace que se pueda considerar para el análisis, un vector de estado reducido dado por eq. (59).

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \quad (59)$$

Las ecuaciones de estado resultantes se indican en la eq. (60). En la que se puede observar que se toma R_s constante en lugar de $R_s(t)$ al no considerar el acoplamiento con el sub-sistema térmico. En concreto se tomará para este ejercicio y mientras no se indique otra cosa, el valor de $R_s(t)$ a la temperatura de referencia de $40^\circ C$ de 1.02Ω , [1]

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P_p i_{qs}^r(t) \lambda_m^r}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_l(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) \lambda_m^r}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \end{cases} \quad (60)$$

Expresándolo en forma de espacio de estados se obtienen las **ecuaciones matriciales LTI de estado y de salida (con estado inicial genérico)** como se indica en eq. (61).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda_m^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix} T_l(t) ; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (61)$$

La dinámica resultante del sub-sistema térmico, indicada en la eq. (62), se obtiene al reemplazar en la ecuación de estado de la T_s° (eq. (37)) las consideraciones indicadas al inicio de este inciso al respecto de las corrientes. En la misma, el término $\frac{3}{2} \frac{R_s}{C_{ts}} i_{qs}^2(t)$ representa la $P_{perd}(t)$, que al considerarse como entrada junto con la $T_{amb}^\circ(t)$ ponen de manifiesto la dinámica lineal indicada.

$$\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{R_s}{C_{ts}} i_{qs}^2(t) + \frac{1}{R_{ts} C_{ts}} [T_{amb}^\circ(t) - T_s^\circ(t)] \quad (62)$$

El **diagrama de bloques de estado del LTI equivalente en forma desagregada**, junto con la dinámica de la $T_s^\circ(t)$, se puede observar en la fig. 16. Mientras que en la fig. 17 se muestra la dinámica de la $i_{ds}^r(t)$ y la $i_{0s}(t)$ bajo las especificaciones indicadas.

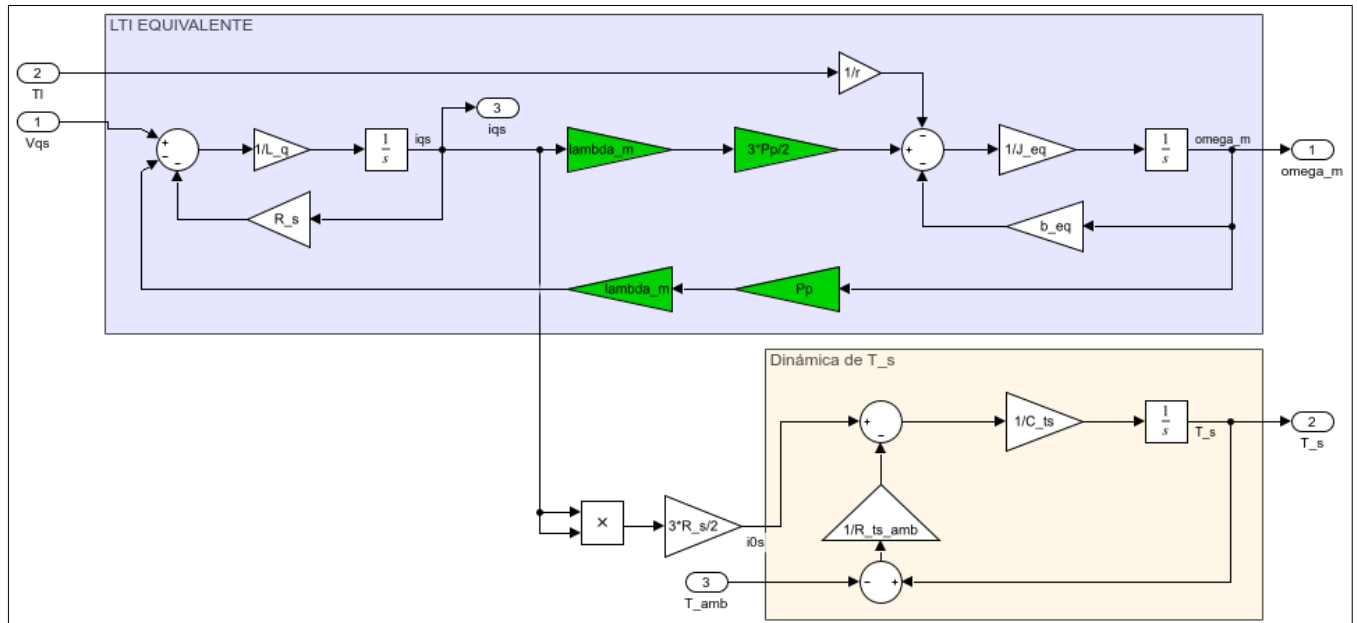


Fig. 16. Diagrama de bloques LTI equivalente.

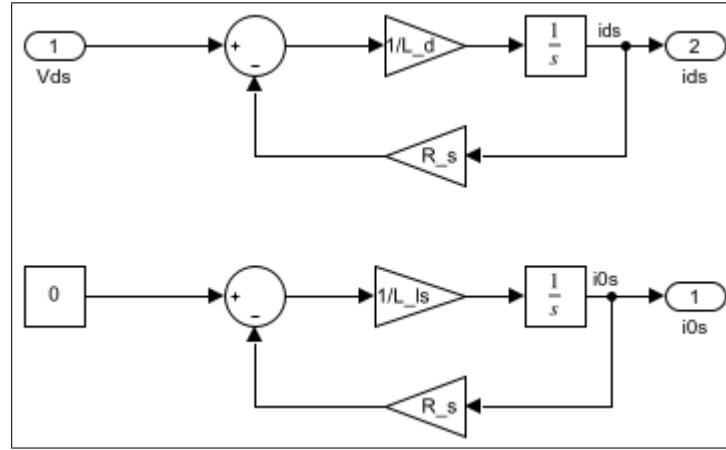


Fig. 17. Dinámica de $i_{ds}^r(t)$ e $i_{qs}(t)$.

Para lograr la especificación indicada para $i_{ds}^r(t)$ es necesario realizar una **Ley de control mínima** que se determina a partir de la ecuación de estado para $i_{ds}^r(t)$ (eq. (33)), partiendo de la hipótesis de que $i_{ds}^r(0) = 0$:

$$0 = \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \Rightarrow v_{ds}^r = -L_q i_{qs}^r(t) P_p \omega_m(t) \quad (63)$$

De esta manera queda determinada la ley de control mínima, que debe aplicarse para lograr el desacoplamiento de los canales de flujo magnético y torque.

La **Implementación**, en el modelo global NL completo, de esta ley de control mínima, mediante un controlador parcial incorporando el inversor (modulador de tensión trifásico equivalente), las Transformaciones de Park y los sensores de realimentación ideal de variables de estado, se puede observar en la fig. 18

Para el caso general en donde no se cumple la hipótesis $i_{ds}^r(0) = 0$, existe una **dinámica residual** en la corriente $i_{ds}^r(t)$. Esta dinámica queda representada con la ecuación diferencial que obtenemos al reemplazar la ley de control mínima (eq. (63)) en la eq. (33):

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s i_{ds}^r(t)}{L_d} \Rightarrow L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} + R_s i_{ds}^r(t) = 0 \quad (64)$$

La cual tiene la siguiente solución:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) e^{-\frac{R_s}{L_d} t} \quad (65)$$

Como se puede observar si $i_{ds}^r(0) \neq 0$, ésta decae exponencialmente hasta llegar a 0. Esto establece un acoplamiento con el eje q , produciendo un comportamiento no lineal, que se termina desvaneciendo con el tiempo a medida que $i_{ds}^r(t)$ decae. Por lo tanto este fenómeno puede ser despreciado para régimen forzado.

Para evitar esto, se puede implementar una **ley de control complementaria mínima** sobre el eje q , y poder eliminar completamente el acoplamiento residual NL, obteniendo así un modelo equivalente lineal del sistema, aún cuando $i_{ds}^r(0) \neq 0$. Esto se logró implementando una ley de control que permita deshacerse del término que contiene a $i_{ds}^r(t)$ en la eq. (32).

$$v_{qs}^r(t) = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r + \underline{P_p \omega_m(t) L_d i_{ds}^r(t)} \quad (66)$$

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^r(t)^* + P_p \omega_m(t) L_d i_{ds}^r(t) \quad (67)$$

$$v_{qs}^r(t)^* = L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s i_{qs}^r(t) + P_p \omega_m(t) \lambda_m^r \quad (68)$$

El modelo **LTI equivalente**(incorporando la **dinámica residual del eje d**) queda como se indica en la eq. (69) y en la fig. 20:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P_p i_{qs}^r(t) \lambda_m^r}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \omega_m(t)}{J_{eq}} - \frac{T_l(t)}{J_{eq}} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) \lambda_m^r}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s i_{ds}^r(t)}{L_d} \end{cases} \quad (69)$$

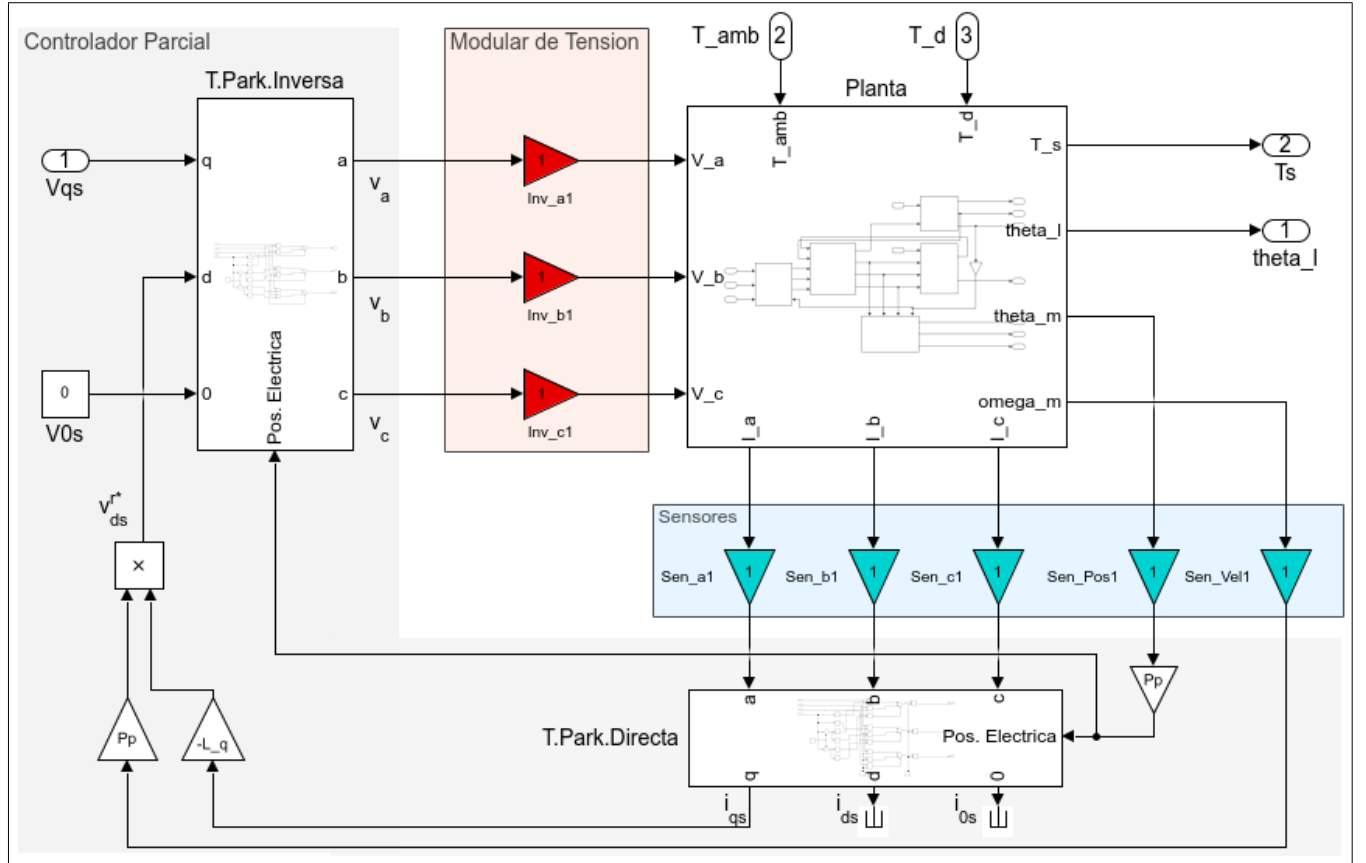


Fig. 18. Implementación de ley de control mínima

El diagrama de bloques del **modelo NL desacoplado con ley de control NL** se observa en la fig. 19

d) **Comparación del modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs. el modelo dinámico global LPV:**

e) **Funciones de Transferencia:** para el modelo LTI equivalente aumentado, desde ambas entradas $V_{qs}^r(s)$ y $T_l(s)$ hacia la salida $\Theta_m(s)$.

Primero se aplicó la Transformada de Laplace a la ecuaciones del sistema LTI equivalente aumentado, considerando condiciones iniciales nulas (eq. (70)):

$$\begin{cases} s\Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s\Omega_m(s) = \frac{3}{2} \frac{P_p I_{qs}^r(s) \lambda_m^r}{J_{eq}} - \frac{b_{eq} \Omega_m(s)}{J_{eq}} - \frac{T_l(s)}{r J_{eq}} \\ sI_{qs}^r(s) = -\frac{R_s I_{qs}^r(s)}{L_q} - \frac{P_p \Omega_m(s) \lambda_m^r}{L_q} + \frac{V_{qs}^r(s)}{L_q} \end{cases} \quad (70)$$

Luego se despejó la salida en función de las entradas, para obtener finalmente las funciones de transferencia (eq. (71), eq. (72) y eq. (73)):

$$\Theta_m(s) = -\frac{R_s \frac{T_l(s)}{r} + L_q \frac{T_l(s)}{r} s - \frac{3}{2} P_p V_{qs}^r(s) \lambda_m^r}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^r{}^2 \right) s} \quad (71)$$

$$G_{V_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m^r}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^r{}^2 \right) s} \quad (72)$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = -\frac{\frac{1}{r} (R_s + L_q s)}{J_{eq} L_q s^3 + (J_{eq} R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^r{}^2 \right) s} \quad (73)$$

3) **Análisis de estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado:**

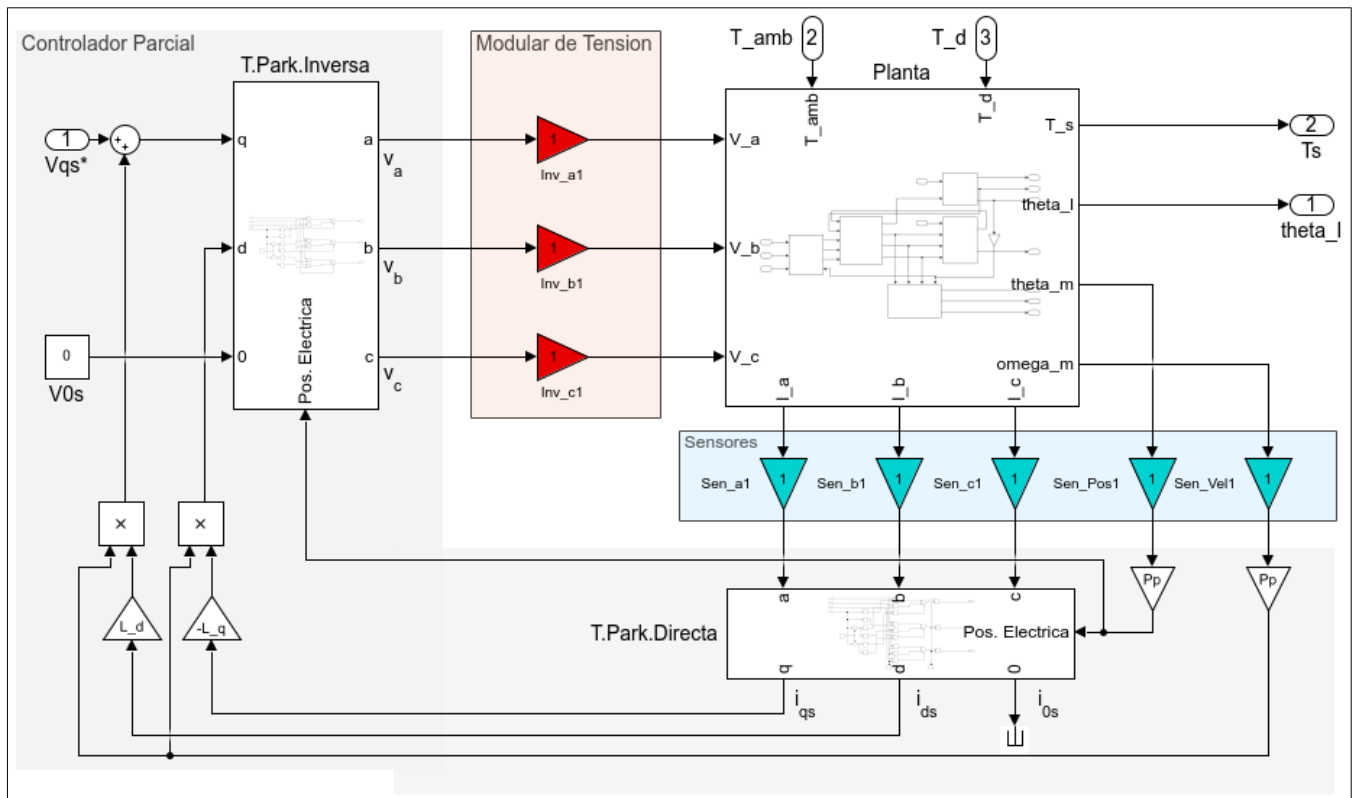


Fig. 19. Implementación de ley de control complementaria

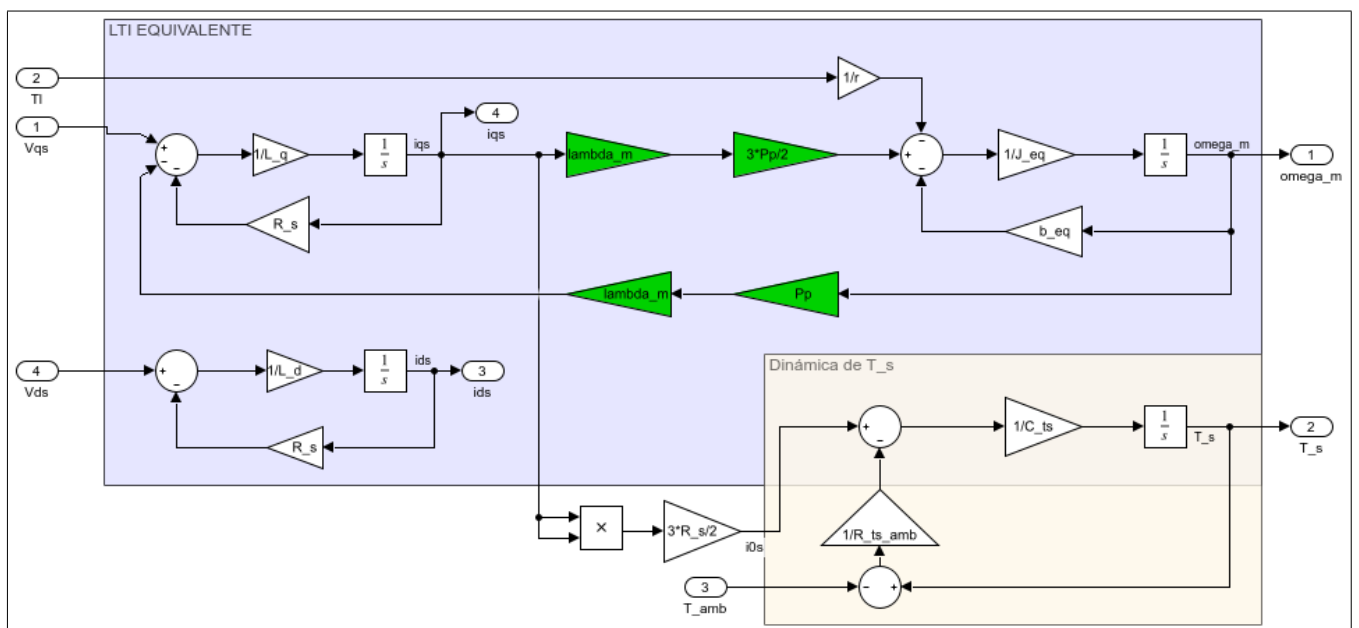


Fig. 20. Diagrama de bloques LTI equivalente aumentado con dinámica residual eje d

a) **Determinación de polos y ceros del sistema:** Para determinar los polos, se resolvió el polinomio característico del sistema (eq. (74)).

$$J_{eq}L_q s^3 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq}) s^2 + \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^2 \right) s = 0 \quad (74)$$

Cuyas soluciones fueron indicadas en la eq. (75) junto con sus valores para los parámetros nominales de la carga. En donde el polo en el origen está asociado al integrador puro a la salida del sistema, correspondiente con el pseudo-estado $\theta_m(t)$. Sin considerar este polo, se tiene un sistema de segundo orden, como lo ponen de manifiesto los dos integradores asociados a $i_{qs}^r(t)$ en el sub-sistema electromagnético y el asociado a $\omega_m(t)$ en el sub-sistema mecánico.

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = \frac{-(L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) + \sqrt{J_{eq}^2 R_s^2 - 6 J_{eq} L_q P_p^2 \lambda_m^2 - 2 J_{eq} L_q R_s b_{eq} + L_q^2 b_{eq}^2}}{2 J_{eq} L_q} = (-77.8 + i143.5 = 163.2e^{i2.07}) \left[\frac{rad}{s} \right] \\ s_3 = \frac{-(L_q b_{eq} + J_{eq} R_s) - \sqrt{J_{eq}^2 R_s^2 - 6 J_{eq} L_q P_p^2 \lambda_m^2 - 2 J_{eq} L_q R_s b_{eq} + L_q^2 b_{eq}^2}}{2 J_{eq} L_q} = (-77.8 - i143.5 = 163.2e^{-i2.07}) \left[\frac{rad}{s} \right] \end{cases} \quad (75)$$

Además, se obtuvieron las expresiones de la frecuencia natural (eq. (78)) y relación de amortiguamiento crítico (eq. (79)), junto con sus valores para los parámetros nominales, al comparar la ecuación característica asociada a los dos polos complejos conjugados (eq. (76)), con la ecuación estándar de un sistema de segundo orden sub-amortiguado (eq. (77)).

$$s^2 + \frac{J_{eq}R_s + L_q b_{eq}}{J_{eq}L_q} s + \frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^2}{J_{eq}L_q} = 0 \quad (76)$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (77)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^2}{J_{eq}L_q}} = 163.2 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (78)$$

$$\zeta = \frac{J_{eq}R_s + L_q b_{eq}}{2\sqrt{J_{eq}L_q \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^2 \right)}} = 0.4868 \quad (79)$$

Se pudo ver que solo la perturbación introduce un cero como se indica en la eq. (80).

$$R_s + L_q s = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_s}{L_q} = -154.54 \left[\frac{rad}{s} \right] \quad (80)$$

Luego se quiere evaluar la variación de polos, frecuencia natural y cero ante la **migración de propiedades** del sistema debida a la variación de los parámetros de la carga J_l y b_l [1].

Al trazar el mapa de polos y ceros del sistema se puede observar que los polos complejos conjugados presentan poca variación relativa ante el cambio de b_l en comparación con la variación ante el cambio de J_l . Por este motivo, en la fig. 21 se presenta, por un lado, el mapa de polos y ceros completo cuando $b_l = b_{lnom} = 0.1 \left[\frac{N \cdot m}{rad \cdot s} \right]$ y J_l varía en todo su rango. Mientras que en la fig. 22 se muestra solo el mapa de los polos complejos cuando b_l toma cinco valores equi-espaciados en su rango, y para cada uno, J_l varía en todo su rango. En estas figuras se indica con $max J_l$ y $min J_l = J_{lnom}$ a los polos correspondientes al máximo y mínimo valor de J_l respectivamente. Luego, en cada curva, J_l varía desde un mínimo a un máximo desde la parte superior izquierda de la gráfica hacia la parte inferior derecha de la misma. Es decir, como se espera, el aumento de J_l produce un correspondiente incremento en J_{eq} , lo que a su vez produce una disminución de la frecuencia natural ω_n asociada a los polos complejos sin un apreciable cambio en el amortiguamiento del sistema.

A continuación se trazaron las curvas que presentan la variación de ω_n (fig. 23) y de ζ (fig. 24). Cómo se anticipó, la variación de b_l no tiene efecto apreciable en el cambio de ω_n y se presentan prácticamente superpuestas las curvas de ω_n respecto a J_l para cada b_l . De manera similar ocurre para la variación de ζ .

4) **Análisis de observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde salida medida $\theta_m(t)$:** Para evaluar la observabilidad desde la salida medida, se determinó la matriz de observabilidad, para luego calcular su rango y compararlo con el orden del sistema.

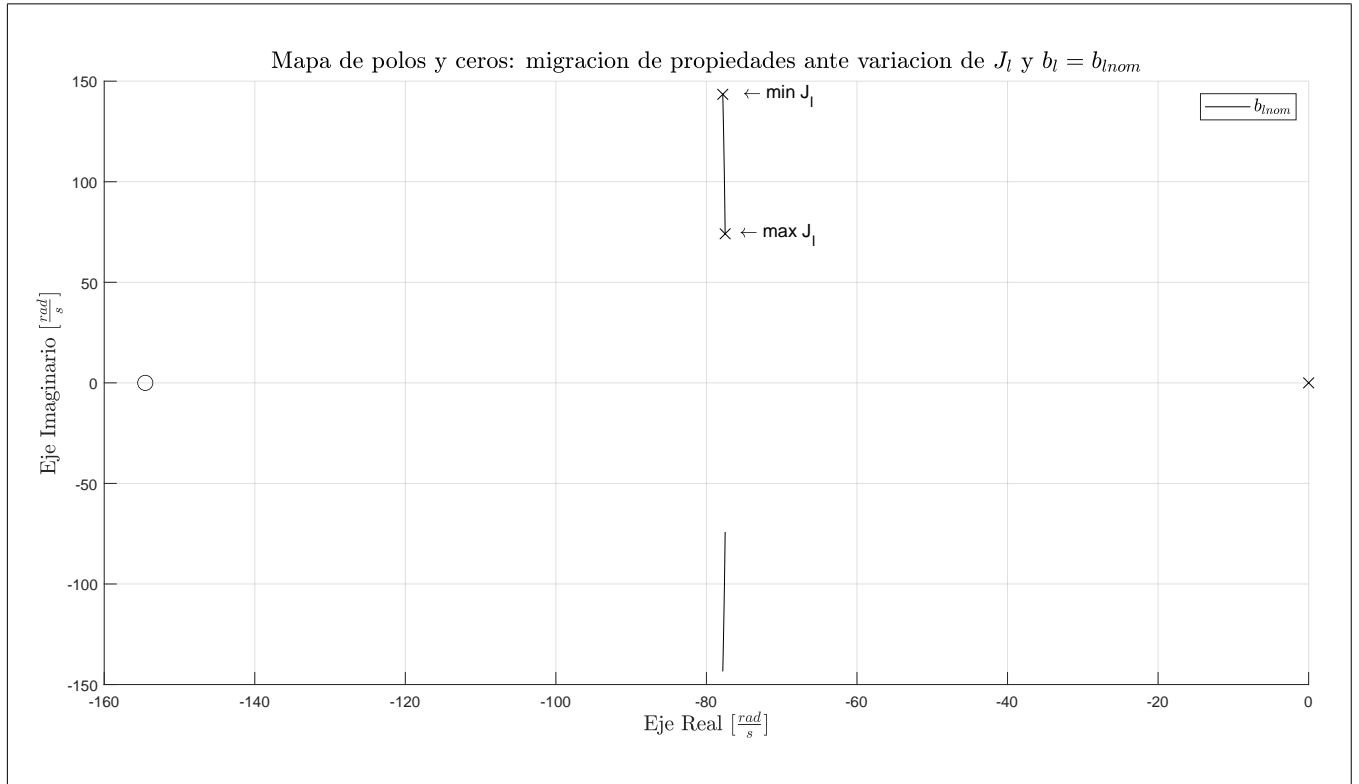


Fig. 21. Mapa de polos completo del sistema ante variación de J_l con $b_l = b_{lnom}$

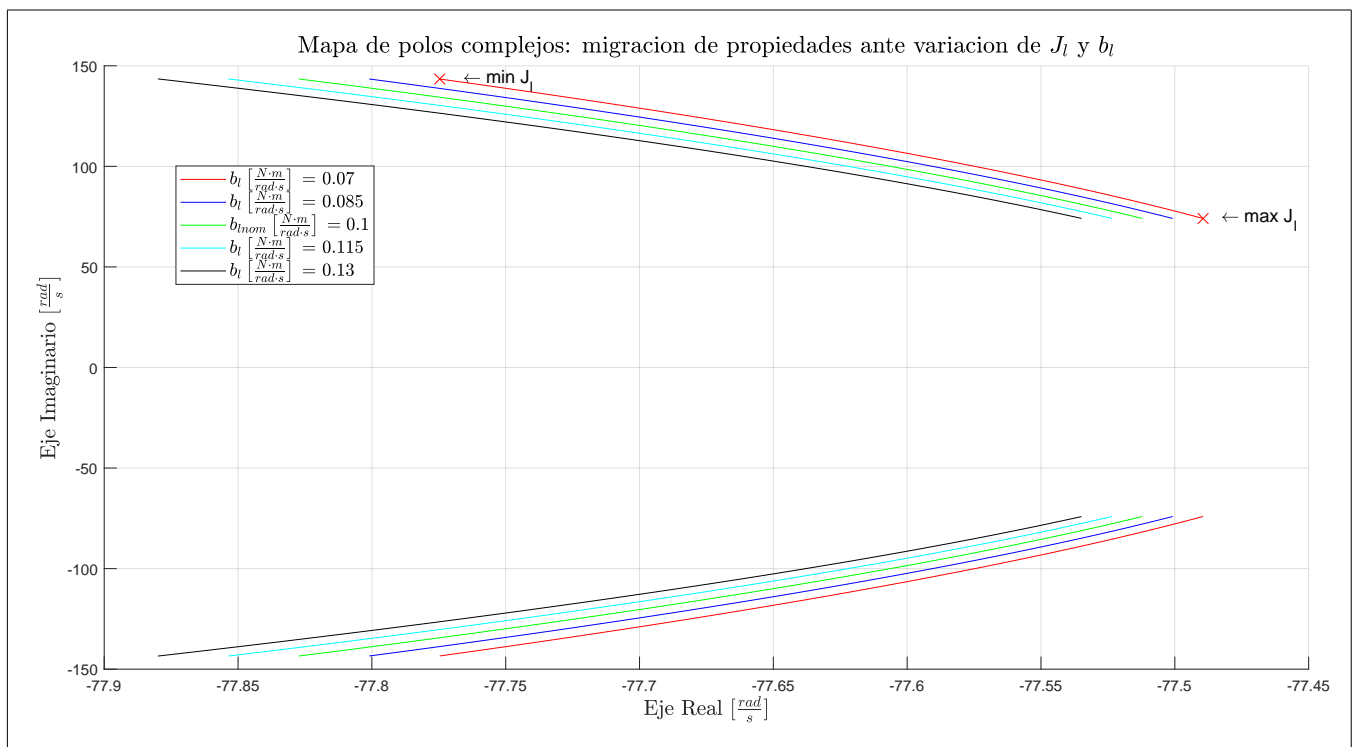


Fig. 22. Mapa de polos complejos del sistema ante variación de parámetros de la carga.

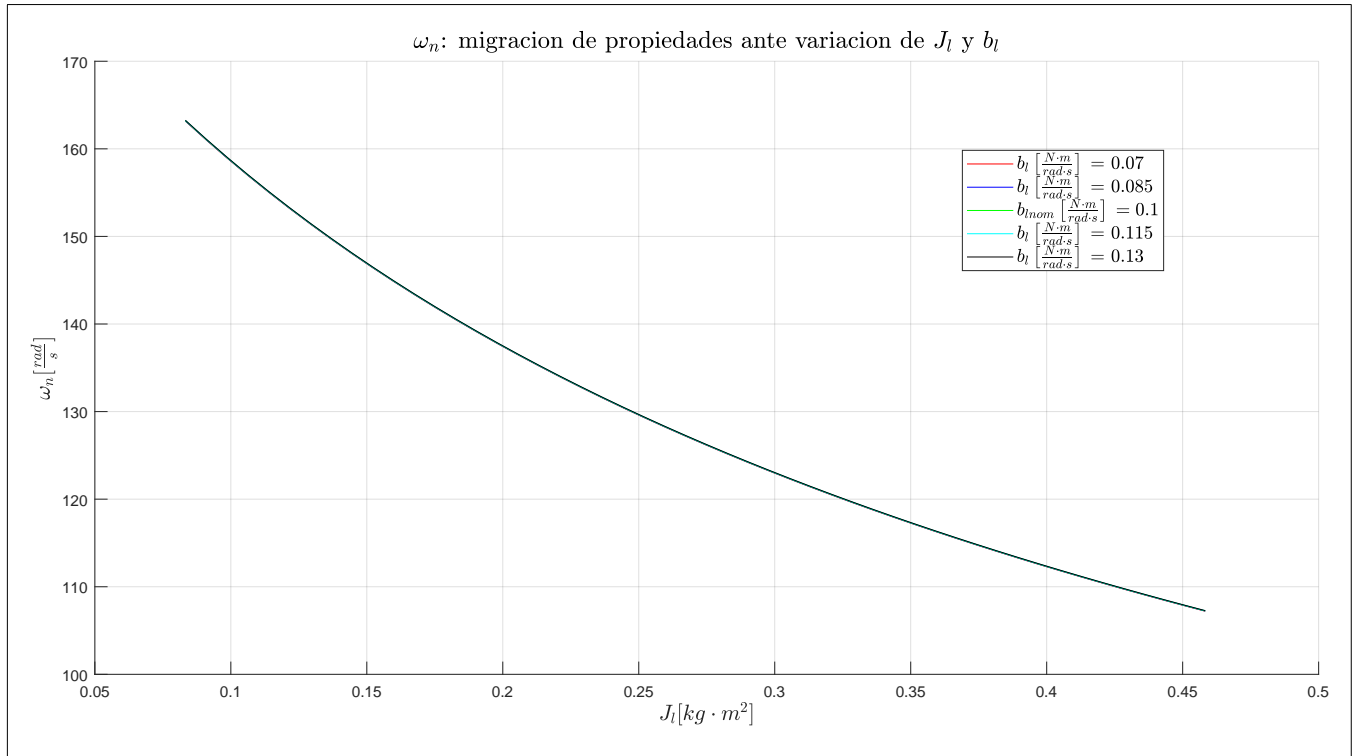


Fig. 23. Variación de la frecuencia natural (ancho de banda del sistema) ω_n ante variación de los parámetros de la carga.

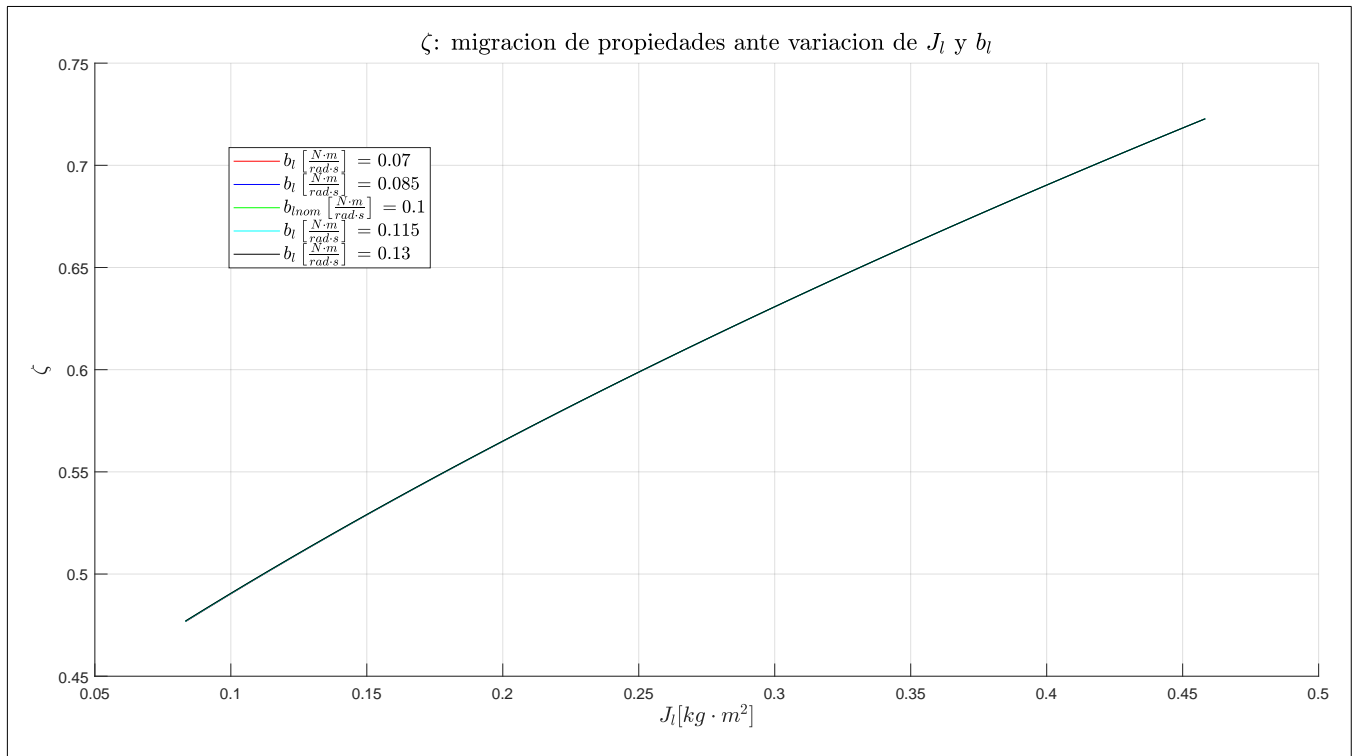


Fig. 24. Variación de la relación de amortiguamiento crítico ζ ante variación de los parámetros de la carga.

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (81)$$

Para nuestro caso, recordando las matrices A y C en eq.(61), la matriz de observabilidad quedó de la siguiente manera:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (82)$$

Al calcular el determinante de esta matriz:

$$\det(O) = \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}} \quad (83)$$

se pudo ver que es distinto de cero, por lo que el rango de O es 3, que es igual al orden del sistema. Entonces, se concluye que el sistema LTI aumentado simplificado es completamente observable desde la posición.

Sin embargo, se debe aclarar que el sistema LTI aumentado con sistemas autónomos desacoplados, es parcialmente observable, ya que los estados $i_{ds}^r(t)$ y $T_s^o(t)$ no pueden ser observados desde la posición.

Se propuso tomar como salida a la velocidad $\omega_m(t)$ y analizar la observabilidad desde ella. En este caso la matriz de salida queda:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Los resultados obtenidos fueron:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}} \\ 0 & \frac{2L_q b_{eq}^2 - 3J_{eq} P_p^2 \lambda_m^r}{2J_{eq}^2 L_q} & -\frac{3P_p\lambda_m^r (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Al calcular el determinante de esta matriz, el resultado fue 0, por lo tanto el rango es menor a 3 y el sistema no es observable desde la velocidad.

Esto ocurre ya que, al conocer la velocidad, no podemos determinar la posición si no conocemos la condición inicial de la posición.

5) **Análisis de controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde entrada manipulada $v_{qs}^r(t)$, sin considerar la perturbación de la carga mecánica:** Para evaluar la controlabilidad desde la entrada manipulada, se determinó la matriz de controlabilidad, para luego calcular su rango y compararlo con el orden del sistema.

$$S = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (86)$$

Para nuestro caso, recordando las matrices A y B en eq.(61), la matriz de controlabilidad quedó de la siguiente manera:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}L_q} \\ 0 & \frac{3P_p\lambda_m^r}{2J_{eq}L_q} & -\frac{3P_p\lambda_m^r (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{2J_{eq} R_s^2 - 3L_q P_p^2 \lambda_m^r}{2J_{eq} L_q^3} \end{bmatrix} \quad (87)$$

Al calcular el determinante de esta matriz:

$$\det(S) = -\frac{9P_p^2 \lambda_m^r}{4J_{eq}^2 L_q^3} \quad (88)$$

al igual que con la observabilidad, se pudo ver que es distinto de cero, por lo que el rango de S es 3, igual al orden del sistema. Entonces, se concluye que el sistema LTI aumentado simplificado es completamente controlable desde $v_{qs}^r(t)$.

Similar a lo que ocurrió con la observabilidad, el sistema LTI aumentado con sistemas autónomos desacoplados, es parcialmente controlable, ya que el estado $i_{ds}^r(t)$ no puede ser controlado desde $v_{qs}^r(t)$. Para lograrlo, deben considerarse otras entradas de control adicionales como $v_{ds}^r(t)$

6) Simulación dinámica en dominio temporal:

B. Modelado, Análisis y Simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente(control vectorial)

1) Modulador de torque equivalente(Controlador interno vectorial de corriente/torque):

a) **Compensación de todas las realimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada:** Para lograrlo primero se analizaron las ecuaciones del modelo NL del subsistema electromagnético:

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(t)i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p\omega_m(t)[\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(t)i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p\omega_m(t)i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = -\frac{R_s(t)i_{0s}(t)}{L_{ls}} + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \end{cases} \quad (89)$$

Se puede ver que, del lado derecho de las ecuaciones, tenemos todas las realimentaciones físicas además de las tensiones de entrada. Por lo tanto, para desacoplar estas realimentaciones, se propusieron las siguientes tensiones como consigna de entrada:

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s(t)i_{qs}^r(t) + P_p\omega_m(t)[\lambda_m^r + L_d i_{ds}^r(t)] \quad (90)$$

$$v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s(t)i_{ds}^r(t) - L_q P_p\omega_m(t)i_{qs}^r(t) \quad (91)$$

$$v_{0s}(t) = v_{0s}^{*}(t) + R_s(t)i_{0s}(t) \quad (92)$$

donde las tensiones $v_{qd0s}(t)^*$ son las nuevas consignas con las realimentaciones ya desacopladas.

Al reemplazar las ecuaciones (90), (91) y (92) en eq.(89), se cancelan los términos de las realimentaciones y se obtiene el siguiente subsistema electromagnético:

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^{r*}(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{v_{ds}^{r*}(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{v_{0s}^{*}(t)}{L_{ls}} \end{cases} \quad (93)$$

De esta manera, quedó un sistema lineal en el cual existe un acceso directo a las corrientes, sin realimentaciones. Cabe destacar que con este método se desacoplaron los efectos que provocan las realimentaciones, ya que estas se deben a principios físicos propios del sistema. Además se esta suponiendo que se tienen los sensores necesarios para medir los estados a realimentar.

b) **Diseño de lazos de control de corrientes $i_{qd0s}^r(t)$:** Luego de haber desacoplado todas las realimentaciones, se incorporaron lazos de control de corriente solamente proporcional (con polos ubicados en $p_i = -5000 \frac{rad}{s}$), con consignas de corriente en lugar de tensiones y así lograr un control mas preciso del torque. Para lograrlo, se definieron las consignas de tensión $v_{qd0s}(t)^*$ de la siguiente manera:

$$v_{qs}^{r*}(t) = R_q [i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)] \quad (94)$$

$$v_{ds}^{r*}(t) = R_d [i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)] \quad (95)$$

$$v_{0s}^{*}(t) = R_0 [i_{0s}^{*}(t) - i_{0s}(t)] \quad (96)$$

donde estas consignas de tensiones son proporcionales al error de corriente, y las constantes de proporcionalidad son resistencias con unidades en ohm.

Para determinar el valor de las ganancias se reemplazaron las ecuaciones (94), (95) y (96) en la eq. (93), y luego se encontraron las funciones de transferencia del sistema resultante.

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{R_q [i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)]}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{R_d [i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)]}{L_d} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{R_0 [i_{0s}^{*}(t) - i_{0s}(t)]}{L_{ls}} \end{cases} \quad (97)$$

$$\begin{cases} sI_{qs}^r(s) = \frac{R_q [I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)]}{L_q} \\ sI_{ds}^r(s) = \frac{R_d [I_{ds}^{r*}(s) - I_{ds}^r(s)]}{L_d} \\ sI_{0s}(s) = \frac{R_0 [I_{0s}^{*}(s) - I_{0s}(s)]}{L_{ls}} \end{cases} \quad (98)$$

$$\begin{cases} G_{I_{qs}}(s) = \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^r(s)^*} = \frac{1}{\frac{L_q}{R_q}s+1} \\ G_{I_{ds}}(s) = \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^r(s)^*} = \frac{1}{\frac{L_d}{R_d}s+1} \\ G_{I_{ls}}(s) = \frac{I_{ls}^r(s)}{I_{ls}^r(s)^*} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R_0}s+1} \end{cases} \quad (99)$$

Al observar estas funciones de transferencia, se puede ver que contienen un solo polo:

$$\frac{L_q}{R_q}s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_q}{L_q} \quad (100)$$

$$\frac{L_d}{R_d}s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_d}{L_d} \quad (101)$$

$$\frac{L_{ls}}{R_0}s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_0}{L_{ls}} \quad (102)$$

que al posicionarlos en $p_i = -5000 \frac{rad}{s}$, se obtuvieron las siguientes ecuaciones para las ganancias:

$$R_q = 5000L_q = 29\Omega \quad (103)$$

$$R_d = 5000L_d = 33\Omega \quad (104)$$

$$R_0 = 5000L_{ls} = 4\Omega \quad (105)$$

c) **Incorporación de consigna de torque:** Luego de haber incorporado los lazos de control de corriente, se hizo la realimentación necesaria para pasar de consignas de corrientes a una consigna de torque. Para esto, primero se analizó la ecuación del torque electromagnético, de donde podemos despejar la consigna de corriente $i_{qs}^r(t)^*$:

$$T_m(t) = \frac{3}{2}P_p[\lambda_m^r i_{qs}^r(t)^* + (L_d - L_q)i_{ds}^r(t)i_{qs}^r(t)^*] \quad (106)$$

$$i_{qs}^r(t)^* = \frac{T_m(t)}{\frac{3}{2}P_p[\lambda_m^r + (L_d - L_q)i_{ds}^r(t)]} \quad (107)$$

Además, se incorporó el termino de fricción para desacoplar este efecto:

$$i_{qs}^r(t)^* = \frac{T_m(t)^* + b_{eq}\omega_m(t)}{\frac{3}{2}P_p[\lambda_m^r + (L_d - L_q)i_{ds}^r(t)]} \quad (108)$$

d) **Compensación del torque de carga por gravedad:** Al analizar la ecuación de estado de la velocidad, luego de haber reemplazado la consigna de corriente:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{T_m(t)^*}{J_{eq}} - \frac{k_l \sin\left(\frac{\theta_m}{r}\right)}{rJ_{eq}} - \frac{T_d(t)}{rJ_{eq}} \quad (109)$$

se pudo ver que es posible compensar el termino del torque de carga por gravedad, proponiendo la siguiente consigna de torque:

$$T_m(t)^* = T_m(t)^{*'} + \frac{k_l \sin\left(\frac{\theta_m}{r}\right)}{r} \quad (110)$$

para que la eq. (109) quede de la siguiente manera:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{T_m(t)^{*'}}{J_{eq}} - \frac{T_d(t)}{rJ_{eq}} \quad (111)$$

2) **Controlador externo de movimiento: posición/velocidad:** Para mejorar la dinámica del sistema, eliminar el error de estado estacionario, y poder seguir consignas de posición/velocidad se añadió un PID, determine el torque necesario para cumplirlas.

$$T_m(s)^{*'} = [\omega_m^*(s) - \omega_m(s)]b_a + \frac{[\omega_m^*(s) - \omega_m(s)]}{s}K_{sa} + \frac{[\omega_m^*(s) - \omega_m(s)]}{s^2}K_{sia} \quad (112)$$

$$J_{eq}s^2\Theta_m(s) = T_m(s)^{*'} - \frac{T_d(s)}{r} \quad (113)$$

$$J_{eq}s^2\Theta_m(s) = [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] \left(b_a s + K_{sa} + \frac{1}{s} K_{sia} \right) - \frac{T_d(s)}{r} \quad (114)$$

$$(J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}) \Theta_m = (b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}) \Theta_m^*(s) - \frac{T_d(s)}{r} s \quad (115)$$

$$\Theta_m(s) = \frac{b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \Theta_m^*(s) - \frac{s}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \frac{T_d(s)}{r} \quad (116)$$

$$G_{\Theta_m^*}(s) = \frac{b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \quad (117)$$

$$G_{T_l}(s) = -\frac{s}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \quad (118)$$

Se puede observar, a partir del teorema del valor final, que al colocar una acción integral, desaparece el error de estado estacionario para una perturbación escalón unitario:

- Si $K_{sia} = 0 \wedge \frac{T_d(s)}{r} = \frac{1}{s} \wedge \Theta_m^*(s) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_m(s) = -\frac{1}{K_{sa}}$
- Si $K_{sia} = 0 \wedge \frac{T_d(s)}{r} = 0 \wedge \Theta_m^*(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_m(s) = 1$
- Si $K_{sia} \neq 0 \wedge \frac{T_d(s)}{r} = \frac{1}{s} \wedge \Theta_m^*(s) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_m(s) = 0$
- Si $K_{sia} \neq 0 \wedge \frac{T_d(s)}{r} = 0 \wedge \Theta_m^*(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_m(s) = 1$

Para encontrar los valores de las ganancias del PID, se utilizó el método de sintonía serie, con $n = 2.5$ y $\omega_{pos} = 800 \frac{rad}{s}$ y J_{eq} nominal. Donde se comparó el polinomio característico:

$$P(s) = s^3 + \frac{b_a}{J_{eq}}s^2 + \frac{K_{sa}}{J_{eq}}s + \frac{K_{sia}}{J_{eq}} \quad (119)$$

con el siguiente polinomio:

$$P(s) = s^3 + n\omega_{pos}s^2 + n\omega_{pos}^2s + \omega_{pos}^3 \quad (120)$$

obteniendo las siguientes ganancias:

$$b_a = n\omega_{pos}J_{eq} = 0.0396 \frac{Nm}{rad/s} \quad (121)$$

$$K_{sa} = n\omega_{pos}^2J_{eq} = 31.6556 \frac{Nm}{rad} \quad (122)$$

$$K_{sia} = \omega_{pos}^3J_{eq} = 10130 \frac{Nm}{rad/s} \quad (123)$$

Los polos para estos valores de ganancias serían los siguientes:

3) **Incorporación de observador de estado de orden reducido para parte mecánica:** Como en este controlador se ha optado por realimentar la velocidad, para evitar la utilización de derivadores, y dado que se cuenta con un encoder para medir posición del eje, fue necesario implementar un observador de estado reducido para poder realimentar la velocidad angular del motor. Se aclara que las corrientes no son observadas, ya que se cuenta con sensores de corriente.

Para diseñar el observador, se analizó el subsistema mecánico resultante luego de todas las compensaciones:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{T_m(t)^{*'}}{J_{eq}} - \frac{T_d(t)}{rJ_{eq}} \end{cases} \quad (124)$$

equivalente en forma de espacio de estados:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} T_m(t)^{*'} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{rJ_{eq}} \end{bmatrix} T_d(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (125)$$

Al asumir un funcionamiento ideal, las ecuaciones del observador quedan similares a las del sistema, con el agregado de un término proporcional al error entre la salida del sistema real y la observada:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{\theta}_m(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{\omega}_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} T_m(t)^{*'} + \begin{bmatrix} K_\theta \\ K_\omega \end{bmatrix} (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (126)$$

Al evaluar la dinámica del error de estimación obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} - \frac{d\tilde{\mathbf{x}}(t)}{dt} \quad (127)$$

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B_c T_m(t)^{*'} + B_d T_d(t) - \left(A\tilde{\mathbf{x}}(t) + B_c T_m(t)^{*'} + K C (\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)) \right) \quad (128)$$

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = (A - KC) \mathbf{e}(t) + B_d T_d(t) \quad (129)$$

donde la matriz que gobierna la dinámica es $(A - KC)$, por lo se busca su polinomio característico:

$$p(s) = \det(sI - (A - KC)) = \det \left(\begin{bmatrix} s + K_\theta & -1 \\ K_\omega & s \end{bmatrix} \right) = s^2 + K_\theta s + K_\omega \quad (130)$$

Luego, se plateó el polinomio de segundo orden con polos deseados reales e iguales en $p_{obs1,2} = -3200 \frac{rad}{s}$, para no interferir con el controlador, y asegurar un decaimiento rápido del error de observación:

$$p(s) = (s + 3200)^2 = s^2 + 6400s + 10240000 \quad (131)$$

Al comparar ambos polinomios obtenemos los valores de las ganancias del observador:

$$K_\theta = 6400 \text{seg}^{-1} \quad (132)$$

$$K_\omega = 10240000 \text{seg}^{-2} \quad (133)$$

El diagrama de bloques resultante queda de la siguiente manera:

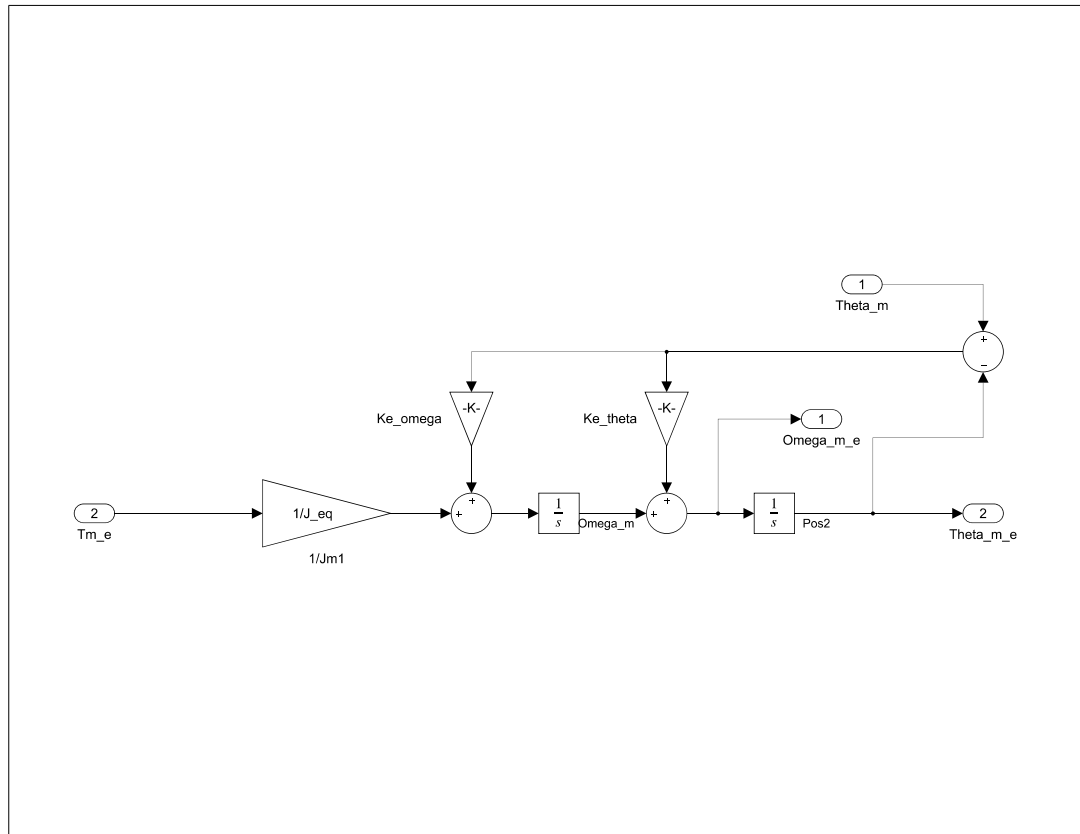


Fig. 25. Diagrama de bloques del observador de estado de orden reducido

4) **Simulación en tiempo continuo con modelo no lineal completo:** Para poder realizar la simulación en tiempo continuo, se integraron todos los bloques del controlador, en un solo diagrama de bloques, separando el controlador de la planta. Además se pueden visualizar el modulador de tensión y los sensores con ganancias unitarias

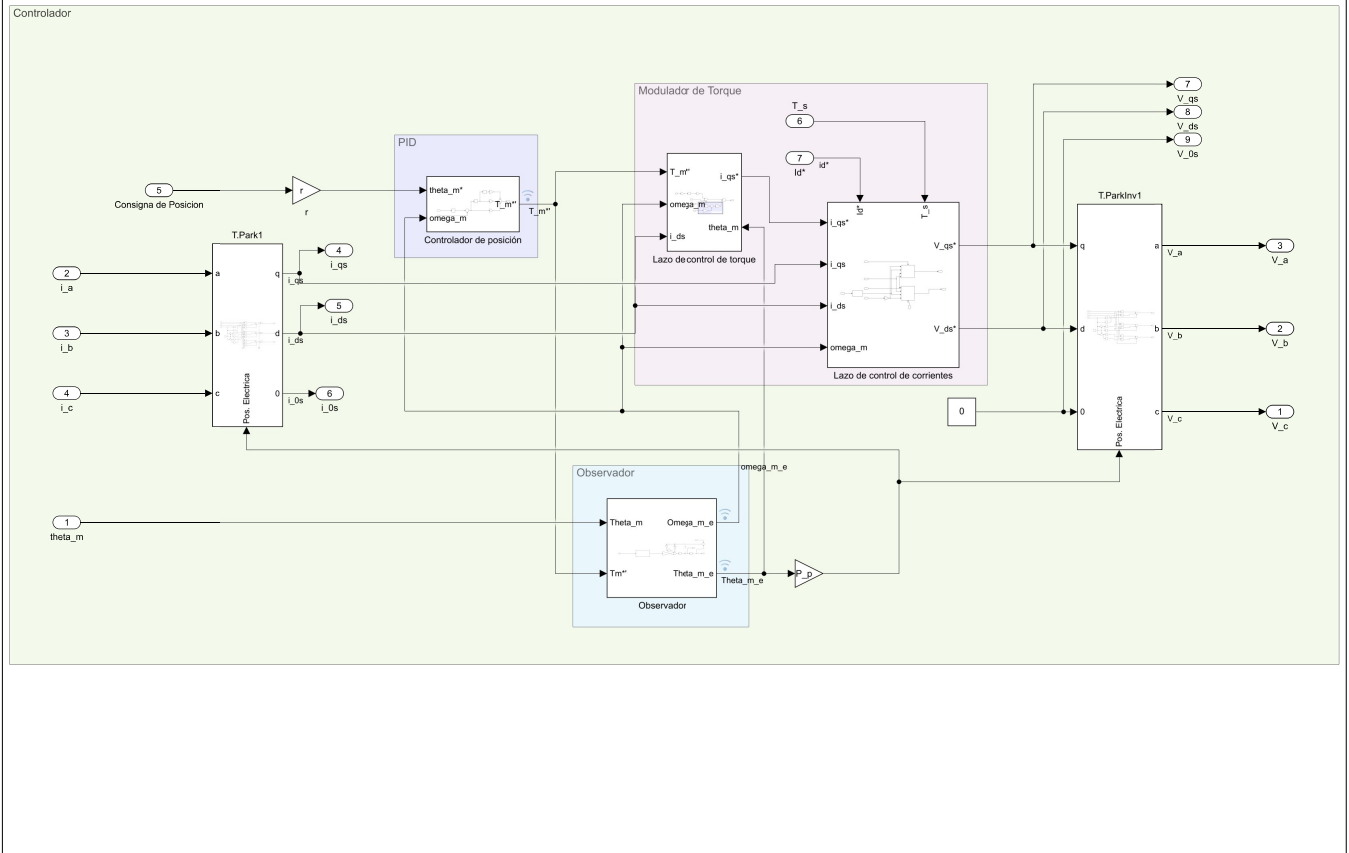


Fig. 26. Diagrama de bloques del controlador completo

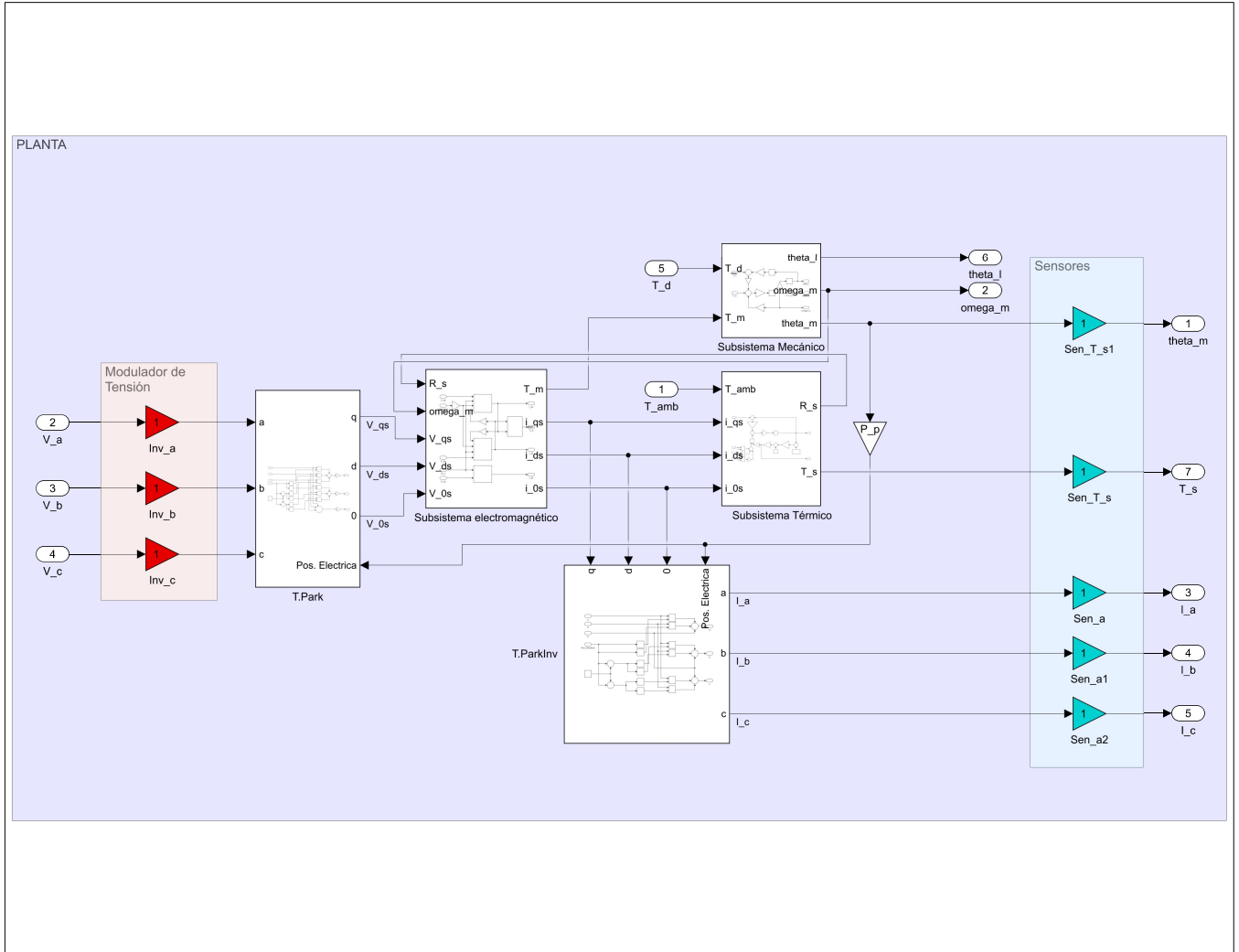


Fig. 27. Diagrama de bloques de la planta

a) Seguimiento de consignas de movimiento: La consigna del sistema sera la posición del brazo $q^*(t) \equiv \frac{1}{r}\theta_m^*(t)$, la cual sera un perfil trapezoidal con las siguientes características:

$$q^*(1) = 0 \text{ [rad]} \rightarrow q^*(6) = 2\pi \text{ [rad]} \rightarrow q^*(11) = 2\pi \text{ [rad]} \rightarrow q^*(16) = 0 \text{ [rad]} \quad (134)$$

Los resultados de la simulación fueron los siguientes:

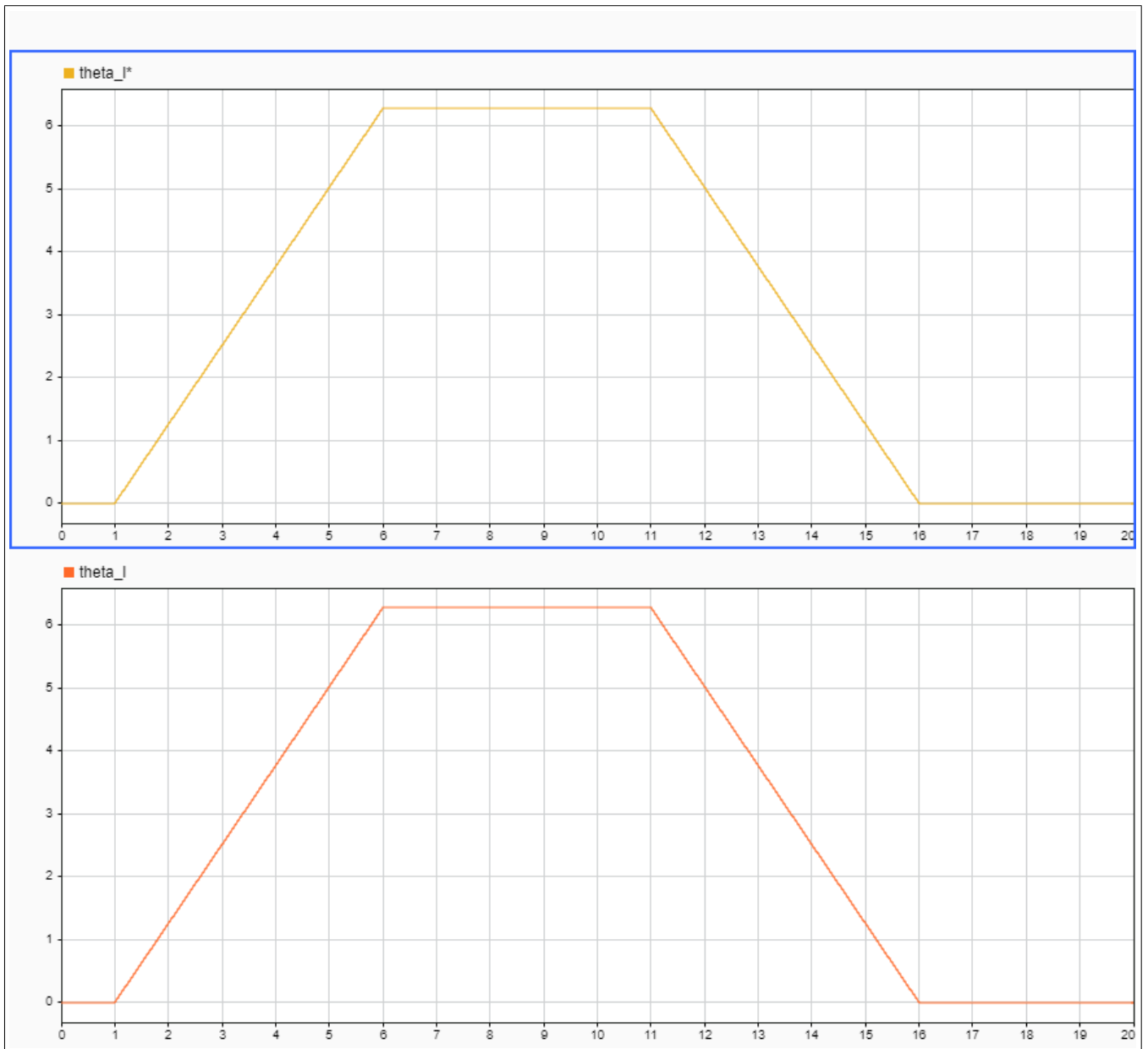


Fig. 28. Gráfica de posición angular consigna y medida

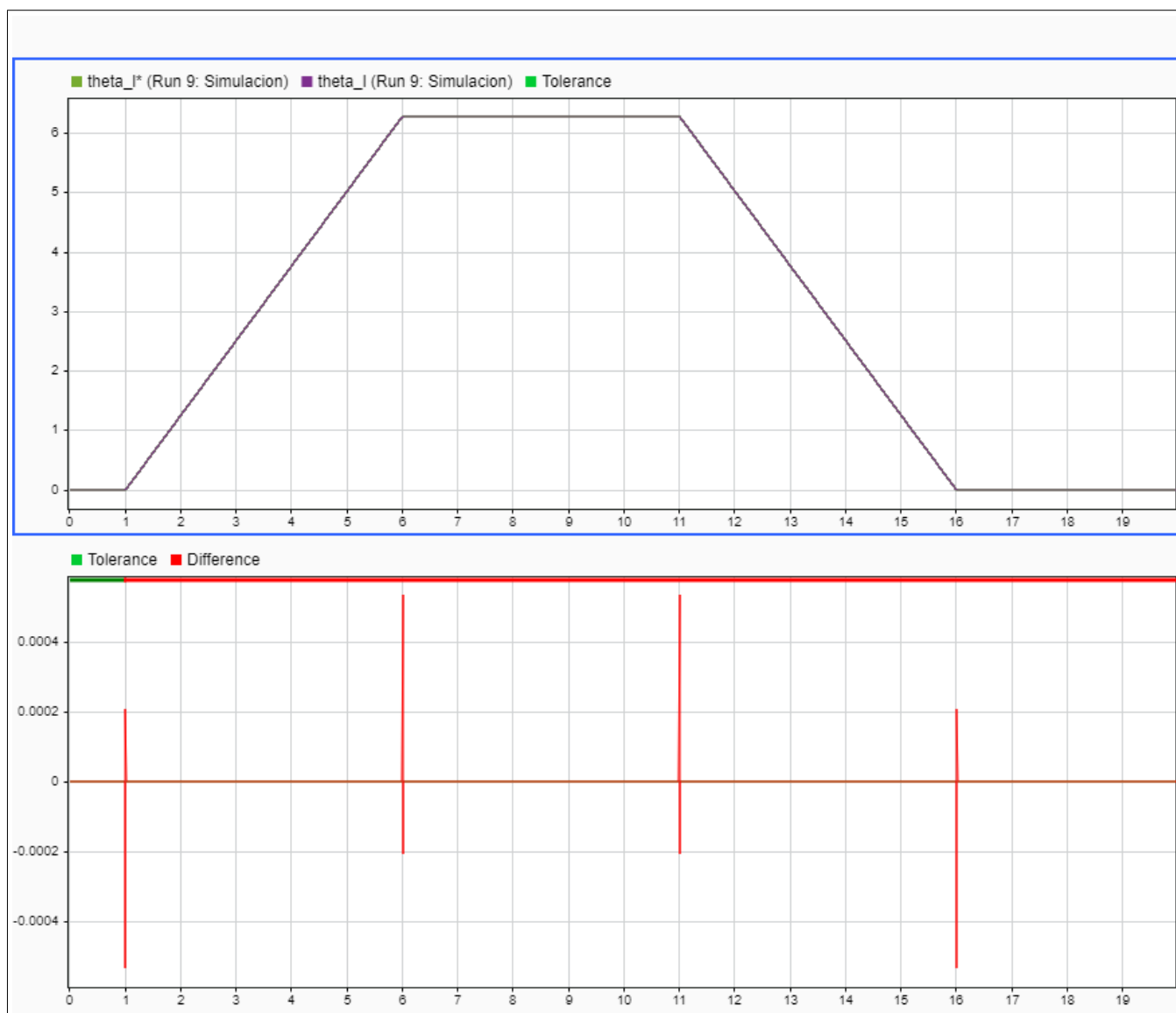


Fig. 29. Gráfica del error entre posición angular consigna y medida

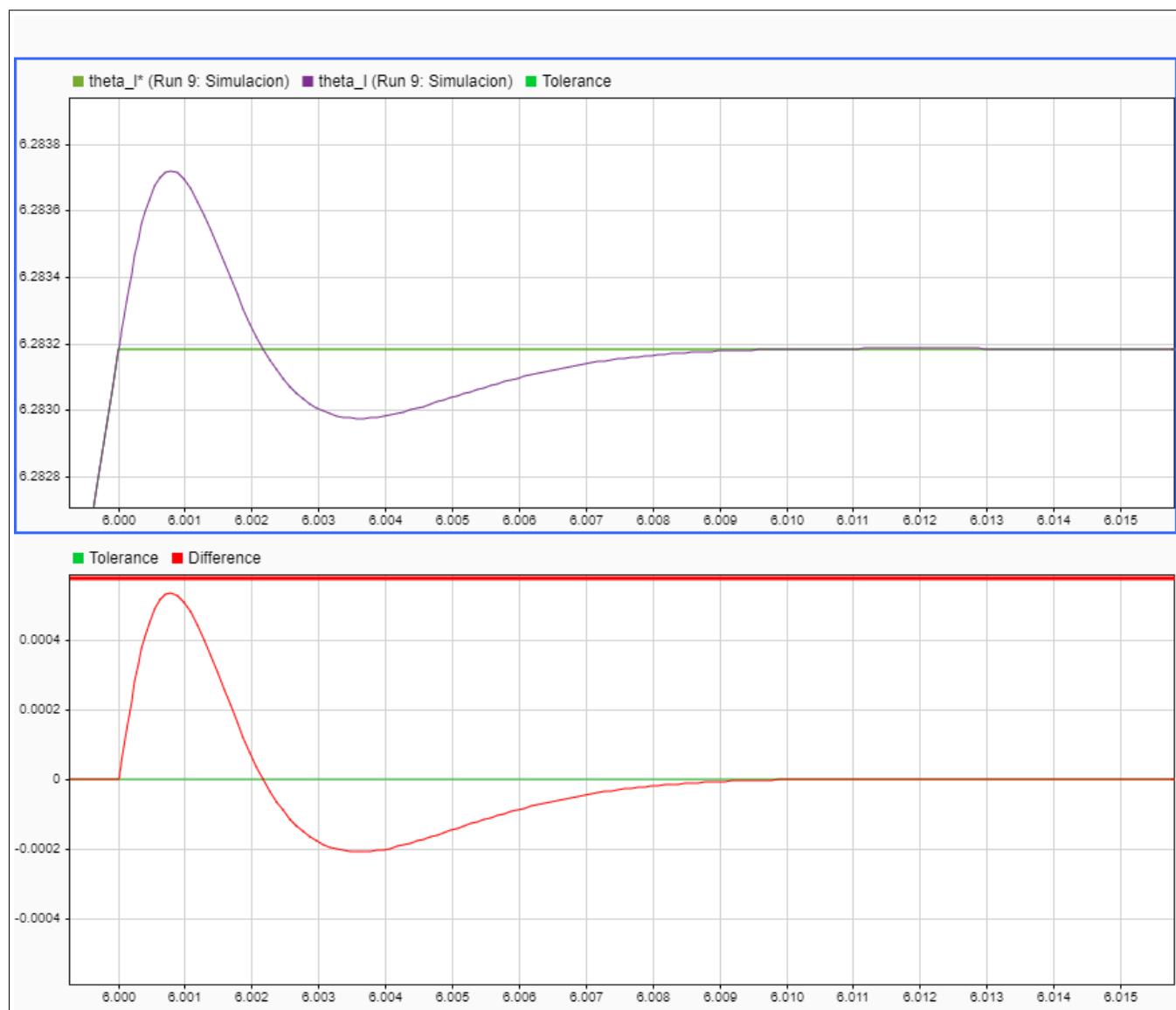


Fig. 30. Detalle del error entre posición angular consigna y medida

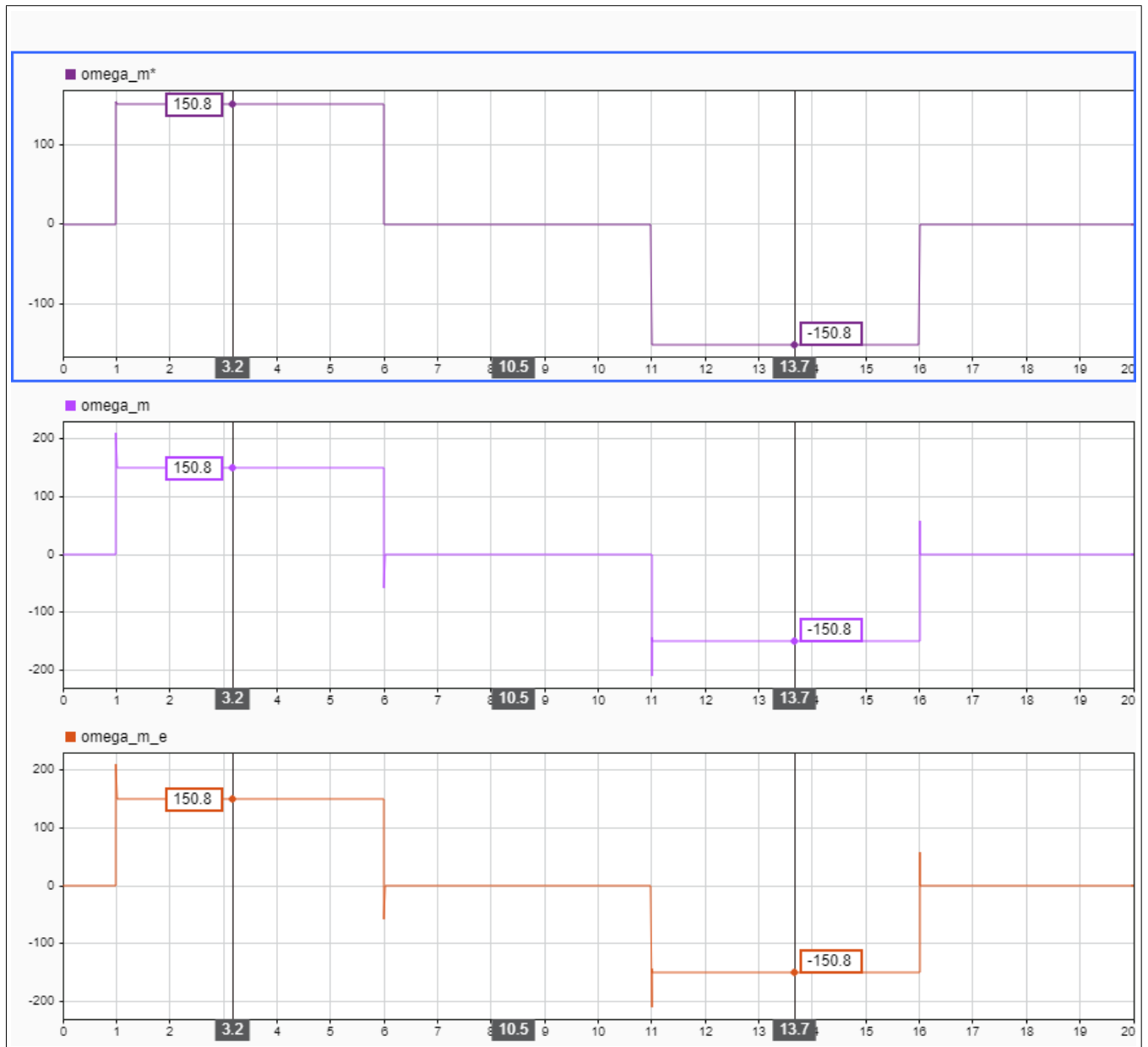


Fig. 31. Gráficas de velocidad del motor consigna, medida y estimada

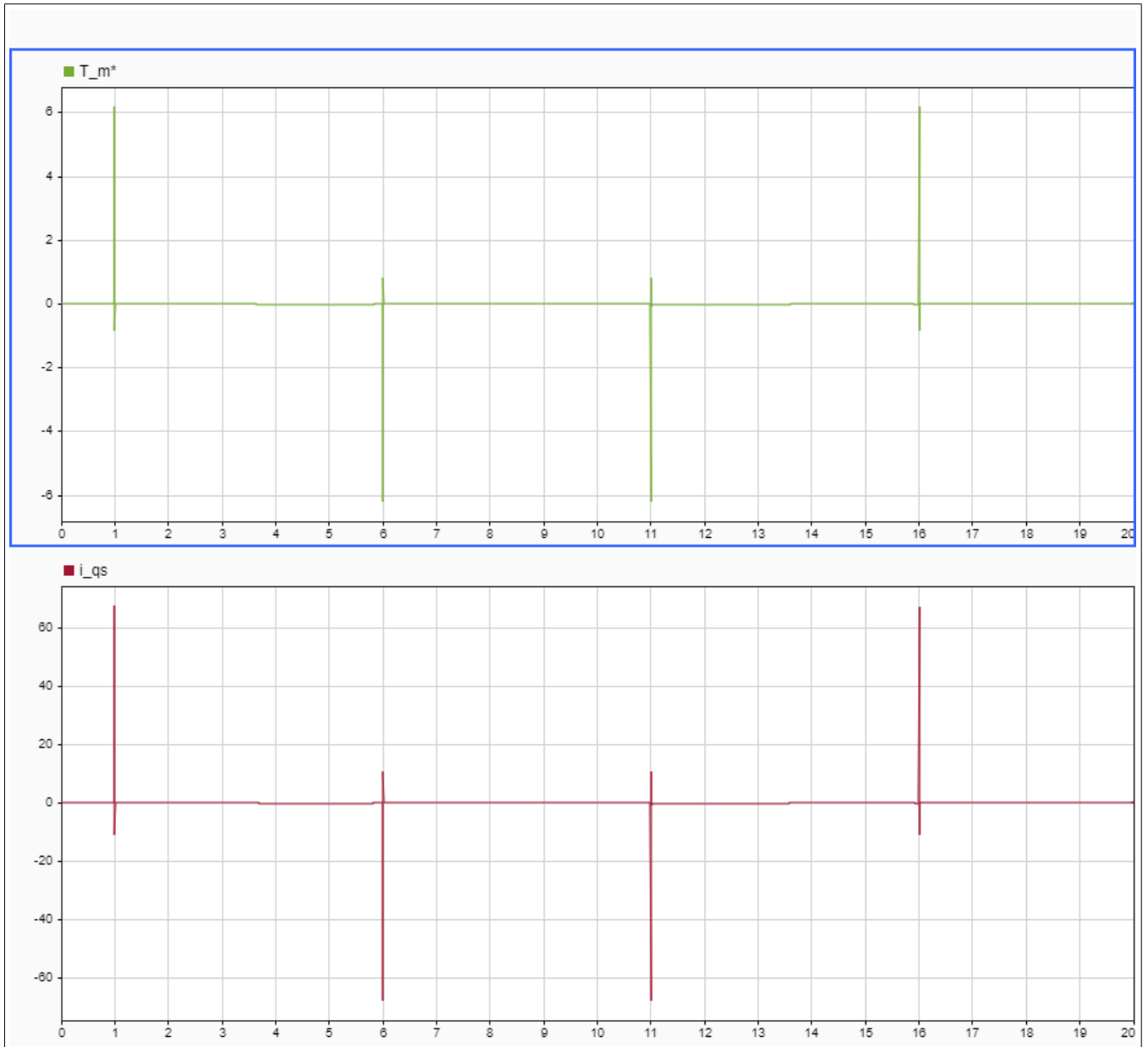


Fig. 32. Gráfica de torque electromagnético y corriente i_{qs}

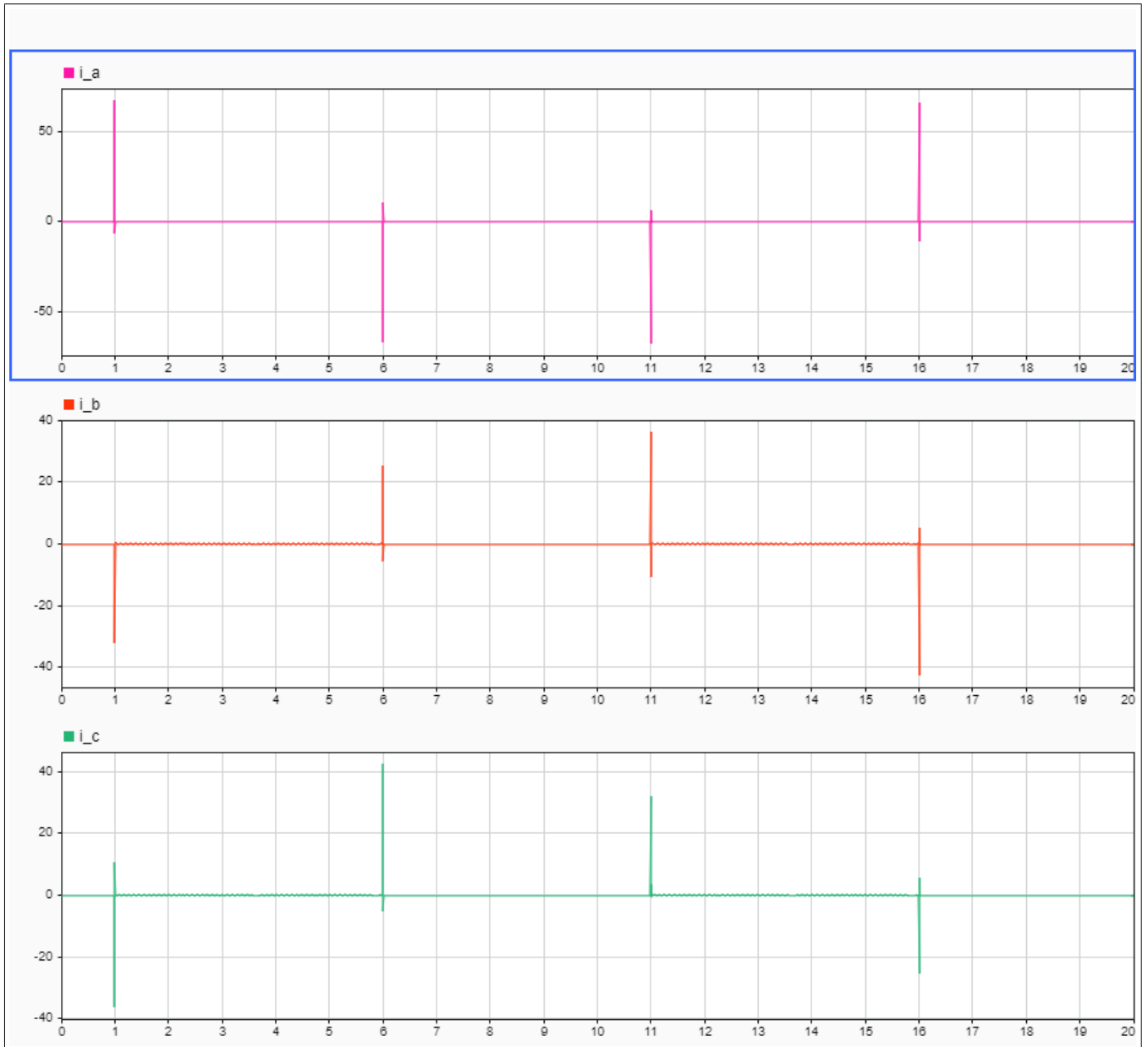


Fig. 33. Gráficas de corrientes abc

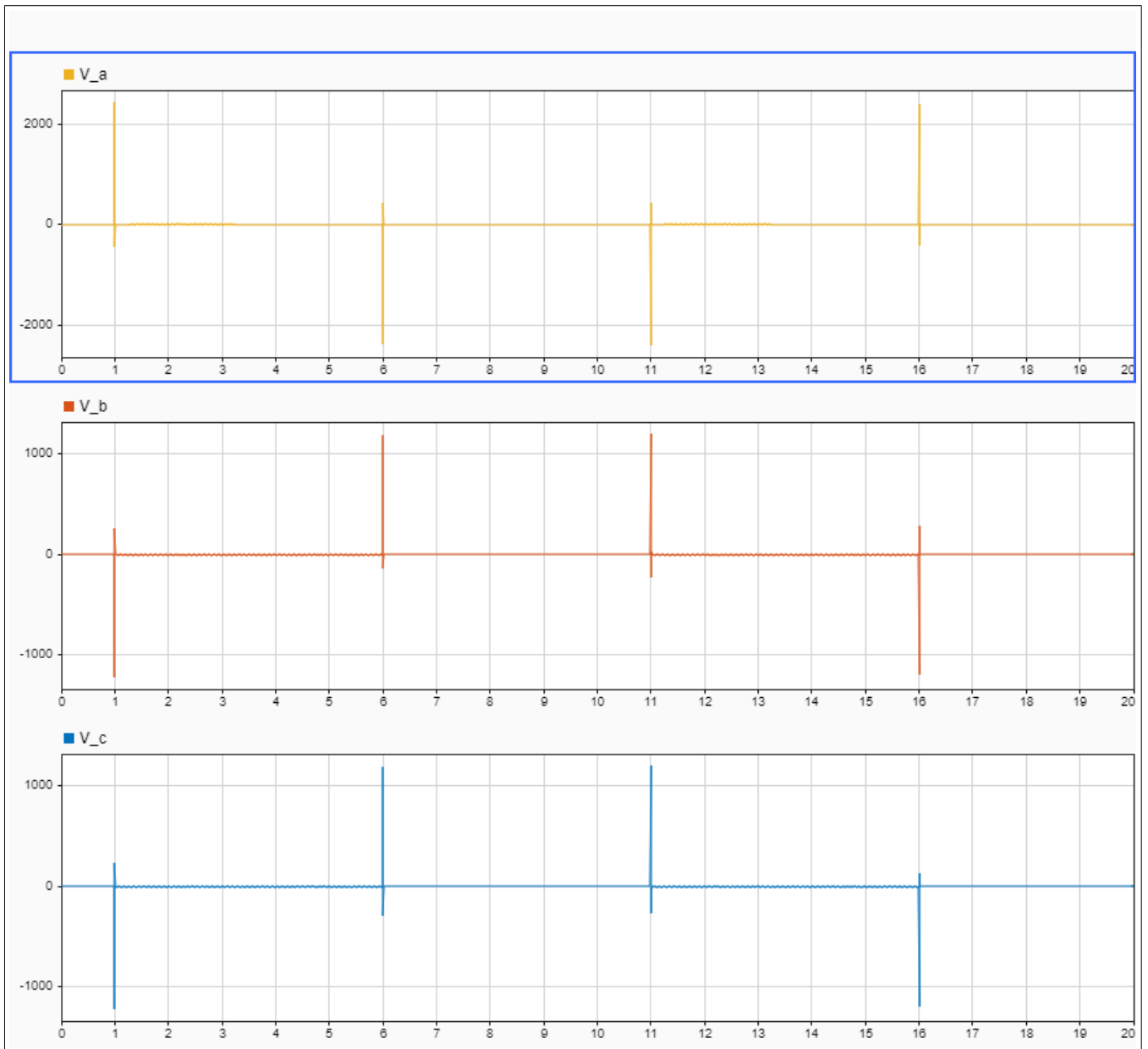


Fig. 34. Gráficas de tensiones abc

b) Rechazo de perturbaciones: Se evaluó el comportamiento del sistema ante torques de perturbación del tipo escalón, considerando valores nominales y variación máxima de los parámetros de carga mecánica física.

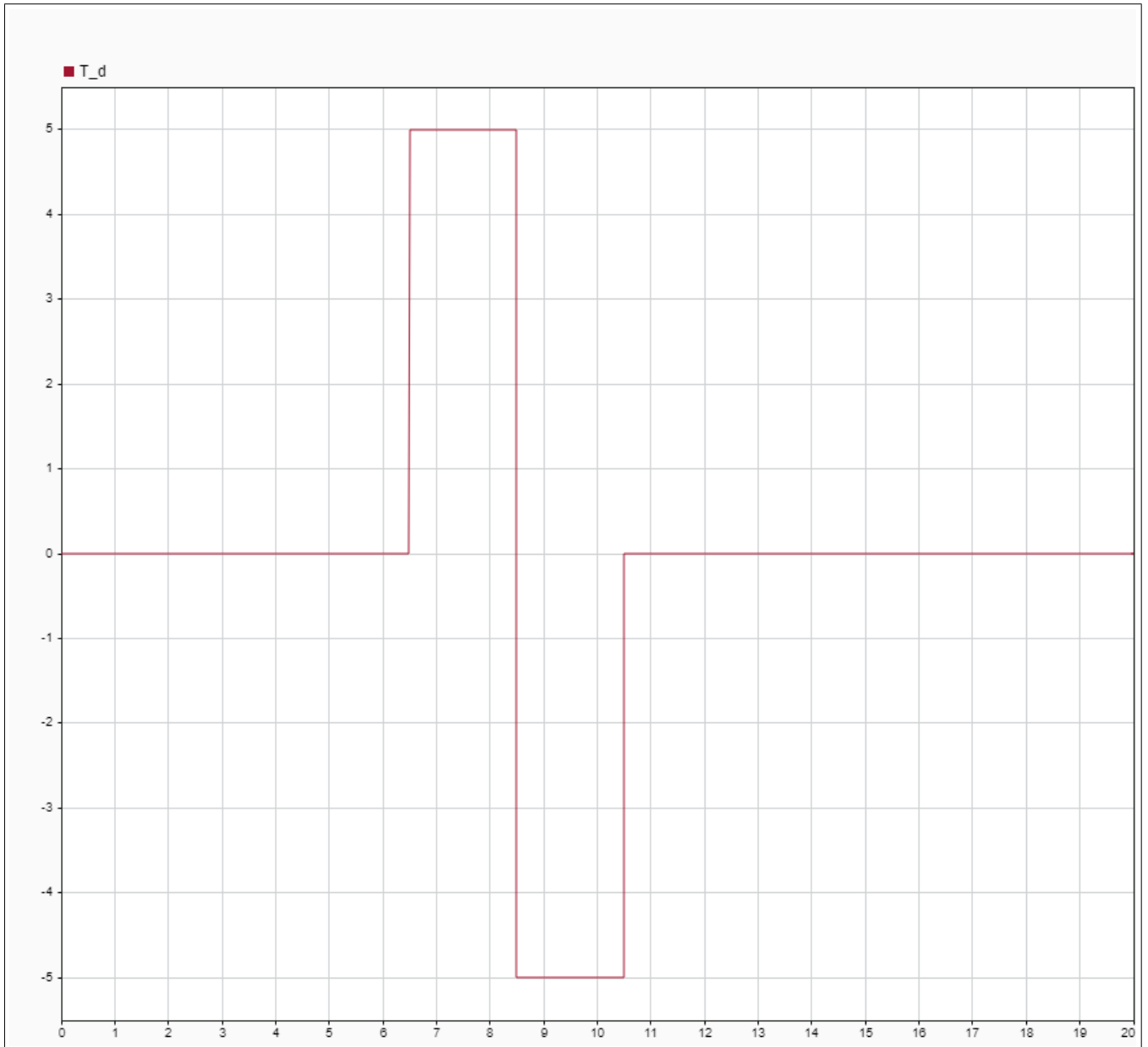


Fig. 35. Torque de perturbación

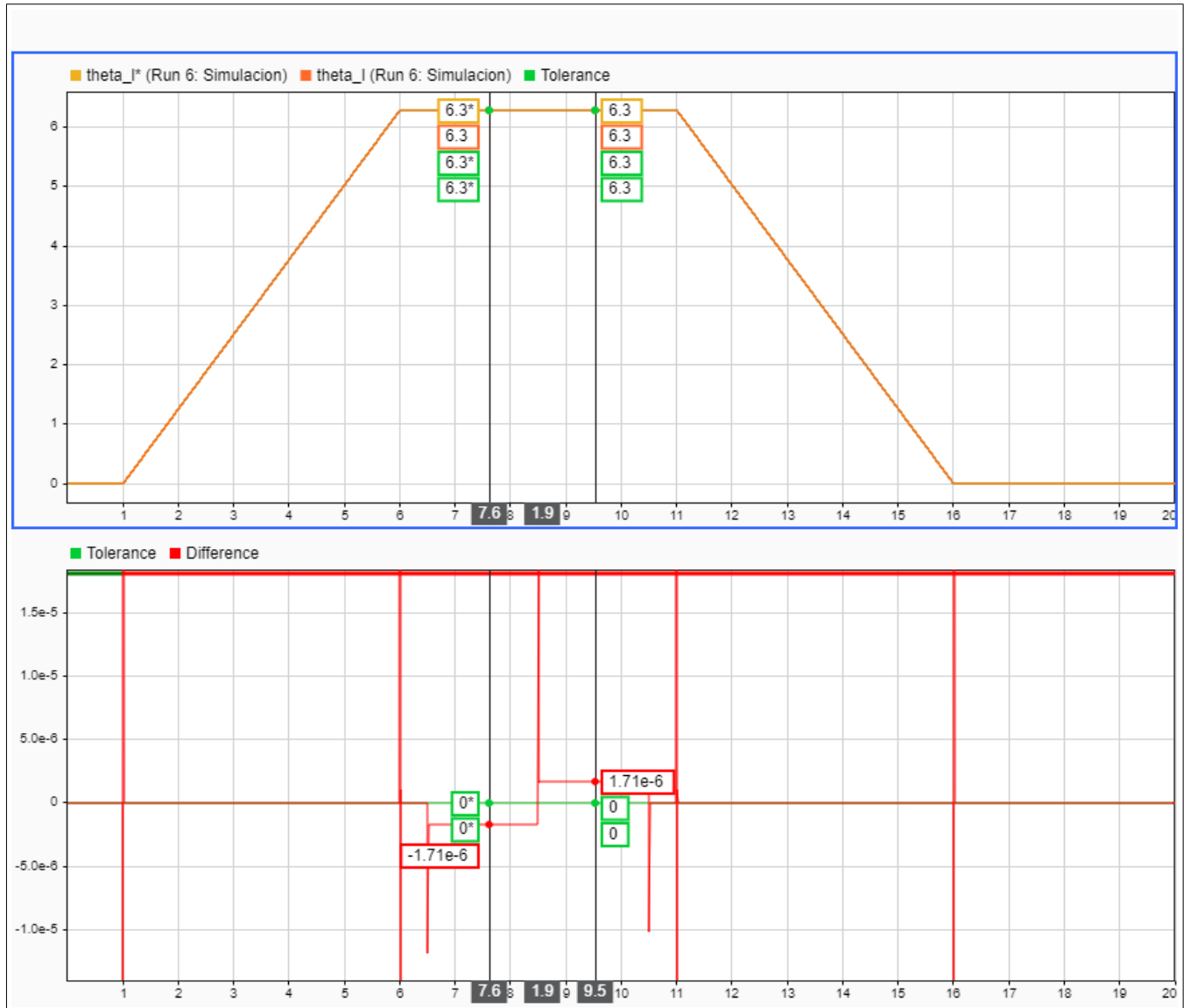


Fig. 36. Error entre posición consigna y medida



Fig. 37. Error entre posición medida y estimada

$$\left(\begin{array}{l} \frac{2 \theta_{m2}}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} - \frac{2 \theta_{m1}}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} \\ \frac{3 \theta_{m1} (t_1 + t_2)}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} - \frac{3 \theta_{m2} (t_1 + t_2)}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} \\ \frac{6 t_1 t_2 \theta_{m2}}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} - \frac{6 t_1 t_2 \theta_{m1}}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} \\ \frac{\theta_{m1} (3 t_1 t_2^2 - t_2^3)}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} - \frac{\theta_{m2} (3 t_1^2 t_2 - t_1^3)}{t_1^3 - 3 t_1^2 t_2 + 3 t_1 t_2^2 - t_2^3} \end{array} \right) \quad (135)$$

5) Verificación de desempeño y mejoras:

a) **Verificación de las especificaciones de operación:** Al comparar los obtenidos en las simulaciones, con los límites de operación, se obtuvieron los siguientes resultados:

	Valores obtenidos de simulación		Especificaciones de operación	
	Régimen Continuo	Valores Pico	Régimen Continuo	Valores Pico
Tension de línea	7.5 V	2374.9 V	24 V	-
Corriente	0.3 A	67.5 A	0.4 A	2 A
Torque motor	0.04 Nm	4.9 Nm	0.142 Nm	0.375 Nm
Velocidad angular del motor	150.8 rad/s	209.4 rad/s	691.15 rad/s	-

Se observa que los valores de tensión, corriente y torque obtenidos en la simulación superan los límites especificados en las condiciones de operación. Este comportamiento se debe a la consigna de posición que se le ha entregado al sistema. Dado que el perfil de posición es trapezoidal, se generan escalones en la velocidad, lo que implicaría aceleraciones infinitas para poder seguir dichos perfiles correctamente. Como resultado, el sistema intenta cumplir estos perfiles con torques, corrientes y tensiones elevadas.

Para solucionar este problema, se propuso un perfil de posición alternativo que sigue cumpliendo con los requisitos de posicionamiento y tiempo, pero en lugar de rampas, se utilizan polinomios de quinto grado. Con esta modificación, las consignas de aceleración se transforman en funciones cúbicas en lugar de impulsos infinitos, lo que resulta en un cambio suave en la tasa de aceleración (jerk). Esto logra una reducción de vibraciones en una aplicación real y una mayor durabilidad del sistema. Para determinar los coeficientes de estos polinomios, es necesario conocer la posición, velocidad y aceleración en los puntos extremos del perfil.

$$q * (t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (136)$$

$$\frac{dq * (t)}{dt} = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (137)$$

$$\frac{d^2q * (t)}{dt^2} = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (138)$$

$$(139)$$

Las aceleraciones y velocidades en los extremos serán cero, las posiciones serán las mismas que en la consigna anterior. Por lo que para la primer giro queda el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0[\text{rad}] &= a_1(1[\text{s}])^5 + b_1(1[\text{s}])^4 + c_1(1[\text{s}])^3 + d_1(1[\text{s}])^2 + e_1(1[\text{s}]) + f_1 \\ 2\pi[\text{rad}] &= a_1(6[\text{s}])^5 + b_1(6[\text{s}])^4 + c_1(6[\text{s}])^3 + d_1(6[\text{s}])^2 + e_1(6[\text{s}]) + f_1 \\ 0[\text{rad/s}] &= 5a_1(1[\text{s}])^4 + 4b_1(1[\text{s}])^3 + 3c_1(1[\text{s}])^2 + 2d_1(1[\text{s}]) + e_1 \\ 0[\text{rad/s}] &= 5a_1(6[\text{s}])^4 + 4b_1(6[\text{s}])^3 + 3c_1(6[\text{s}])^2 + 2d_1(6[\text{s}]) + e_1 \\ 0[\text{rad/s}^2] &= 20a_1(1[\text{s}])^3 + 12b_1(1[\text{s}])^2 + 6c_1(1[\text{s}]) + 2d_1 \\ 0[\text{rad/s}^2] &= 20a_1(6[\text{s}])^3 + 12b_1(6[\text{s}])^2 + 6c_1(6[\text{s}]) + 2d_1 \end{cases} \quad (140)$$

Y para el giro de regreso:

$$\begin{cases} 0[\text{rad}] &= a_2(11[\text{s}])^5 + b_2(11[\text{s}])^4 + c_2(11[\text{s}])^3 + d_2(11[\text{s}])^2 + e_2(11[\text{s}]) + f_2 \\ 2\pi[\text{rad}] &= a_2(16[\text{s}])^5 + b_2(16[\text{s}])^4 + c_2(16[\text{s}])^3 + d_2(16[\text{s}])^2 + e_2(16[\text{s}]) + f_2 \\ 0[\text{rad/s}] &= 5a_2(11[\text{s}])^4 + 4b_2(11[\text{s}])^3 + 3c_2(11[\text{s}])^2 + 2d_2(11[\text{s}]) + e_2 \\ 0[\text{rad/s}] &= 5a_2(16[\text{s}])^4 + 4b_2(16[\text{s}])^3 + 3c_2(16[\text{s}])^2 + 2d_2(16[\text{s}]) + e_2 \\ 0[\text{rad/s}^2] &= 20a_2(11[\text{s}])^3 + 12b_2(11[\text{s}])^2 + 6c_2(11[\text{s}]) + 2d_2 \\ 0[\text{rad/s}^2] &= 20a_2(16[\text{s}])^3 + 12b_2(16[\text{s}])^2 + 6c_2(16[\text{s}]) + 2d_2 \end{cases} \quad (141)$$

Los polinomios resultantes al resolver los sistemas fueron:

$$q * _1 (t) = 0.0121t^5 - 0.2111t^4 + 1.2265t^3 - 2.5334t^2 + 2.1715t - 0.6655 \quad (142)$$

$$q * _2 (t) = -0.0121t^5 + 0.8143t^4 - 21.7348t^3 + 286.6339t^2 - 1868.4283t + 4826.0010 \quad (143)$$

Por lo tanto la consigna resultante fue:

$$q * (t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 0.0121t^5 - 0.2111t^4 + 1.2265t^3 - 2.5334t^2 + 2.1715t - 0.6655 & 1 \leq t \leq 6 \\ 2\pi & 6 < t < 11 \\ -0.0121t^5 + 0.8143t^4 - 21.7348t^3 + 286.6339t^2 - 1868.4283t + 4826.0010 & 11 \leq t \leq 16 \\ 0 & t > 16 \end{cases} \quad (144)$$

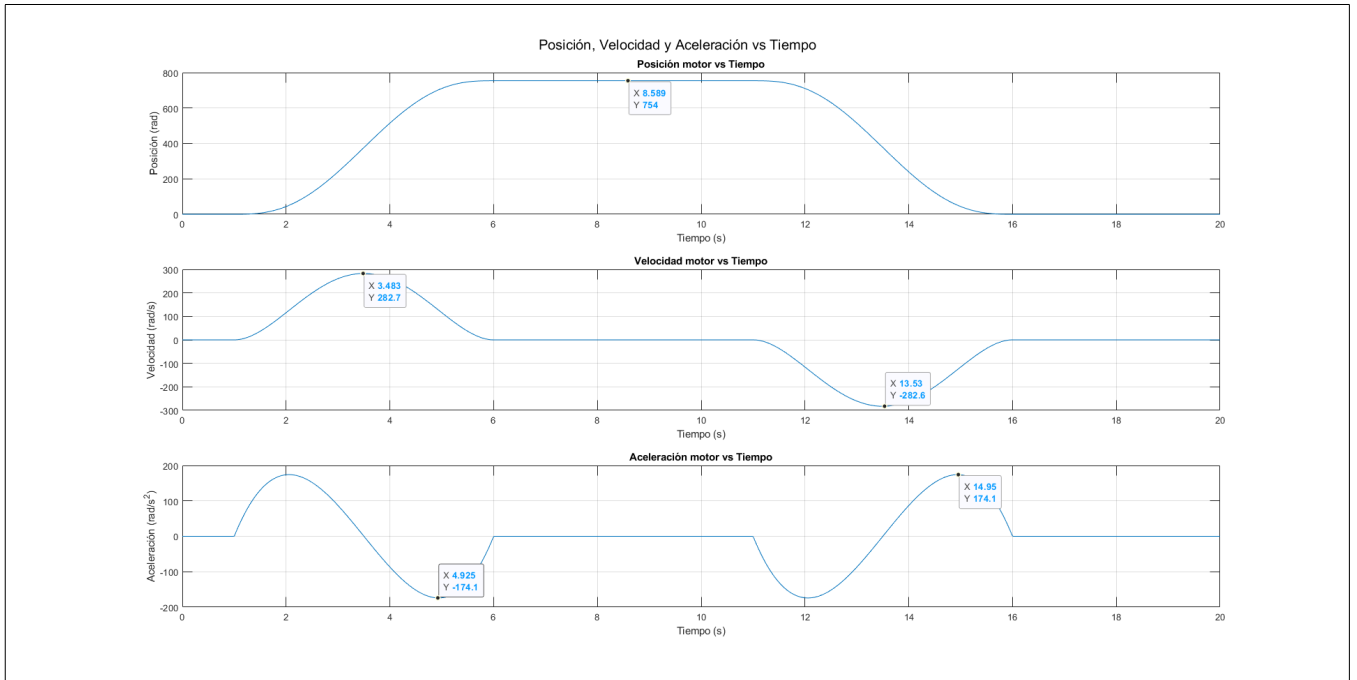


Fig. 38. Nueva consigna de posición, velocidad, aceleración

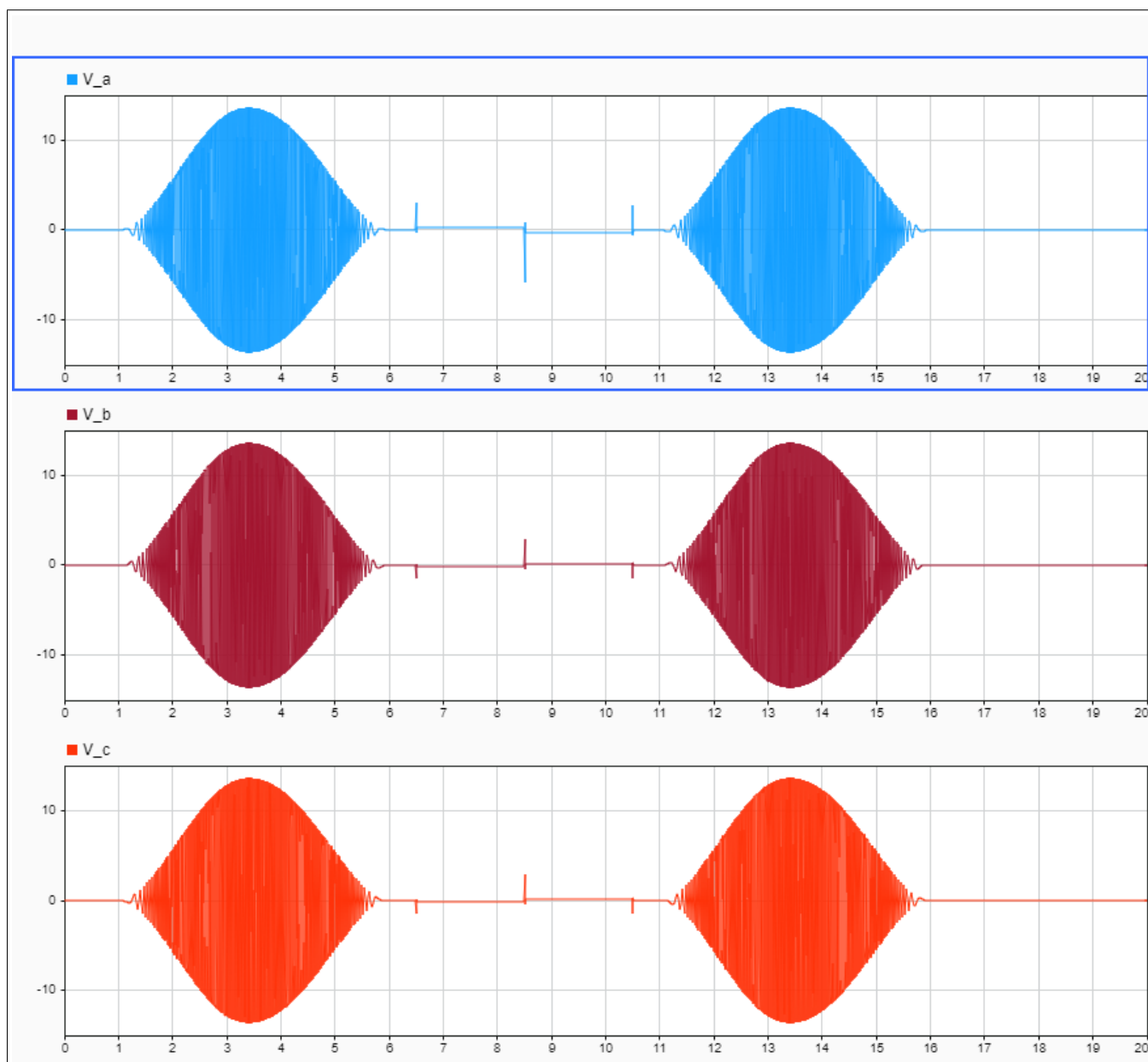


Fig. 39. Tensiones abc con consigna suave

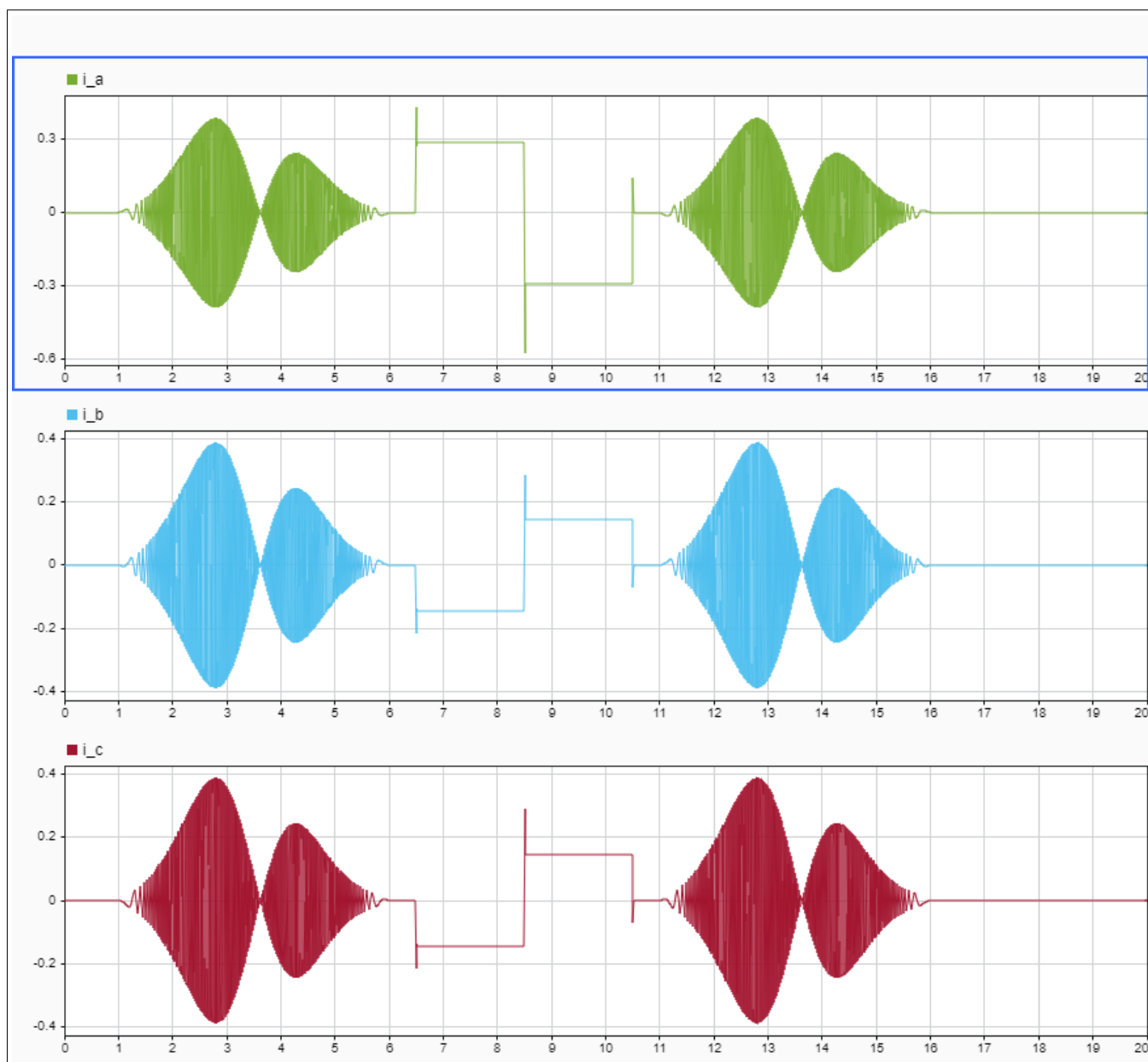


Fig. 40. Corrientes abc con consigna suave

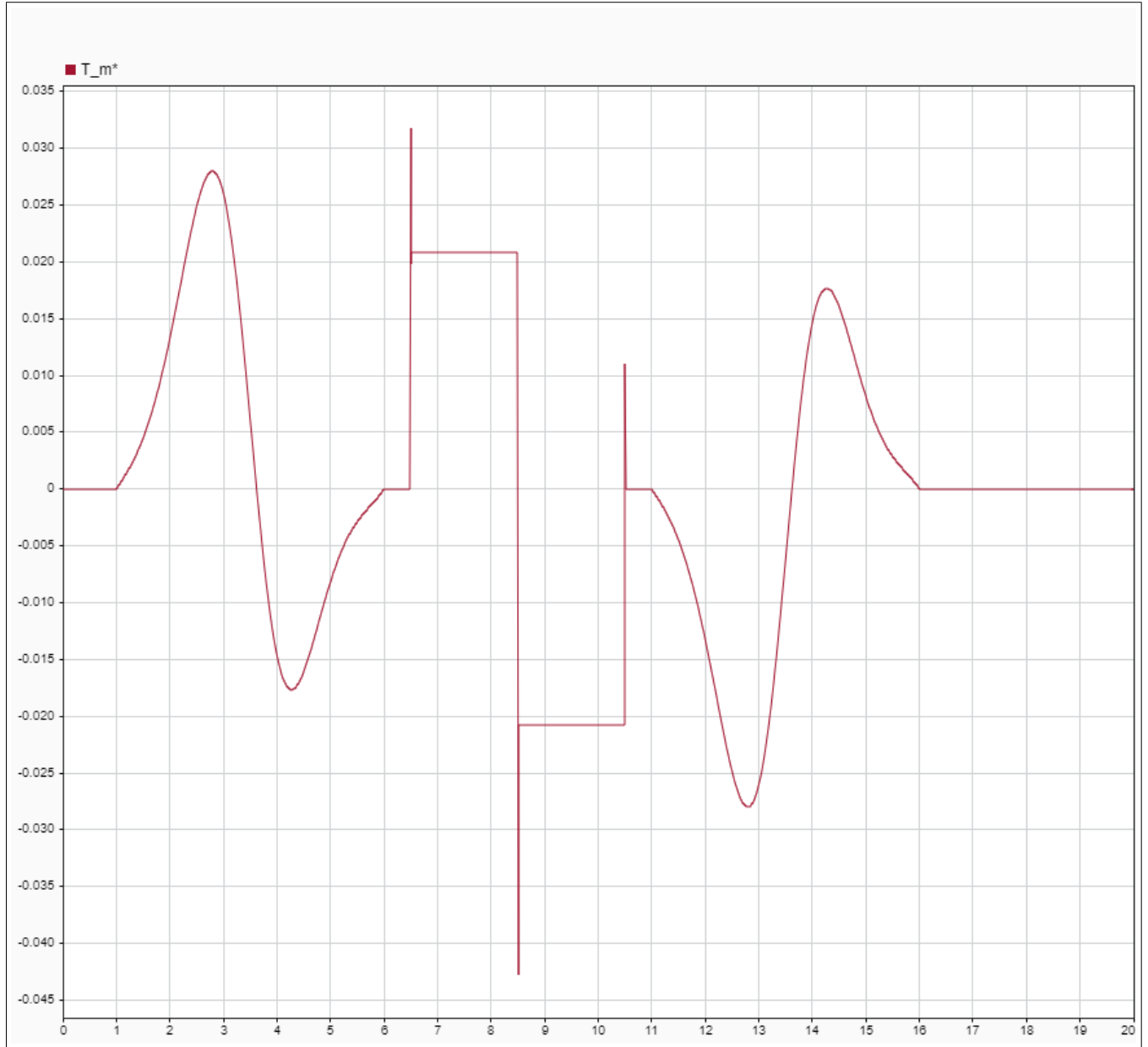


Fig. 41. Torque electromagnético con consigna suave

b) Mejoras en el observador de estado: En las simulaciones se observó la presencia de un error de estado estacionario entre la posición medida del motor y la estimada por el observador cuando se aplica un torque de perturbación a la planta. Este error se debe a que el observador no considera dichas perturbaciones. Si estas fueran medibles, se podrían realimentar al observador; sin embargo, la implementación de un medidor de torque sería muy costosa. Por lo tanto, se optó por agregar una acción integral al observador para eliminar este error.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{\theta}_m(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{\omega}_m(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{z}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix} T_m(t)^{*'} + \begin{bmatrix} K_\theta \\ K_\omega \\ K_i \end{bmatrix} (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (145)$$

$$p(s) = \det(sI - (A - KC)) = \det \begin{pmatrix} s + K_\theta & -1 & 0 \\ K_\omega & s & -1 \\ K_i & 0 & s \end{pmatrix} = s^3 + K_\theta s^2 + K_\omega s + K_i \quad (146)$$

$$p(s) = (s + 3200)^3 = s^3 + 9600s^2 + 3(3200)^2s + (3200)^3 \quad (147)$$

$$K_\theta = 9600 \text{seg}^{-1} \quad (148)$$

$$K_\omega = 3(3200)^2 \text{seg}^{-2} \quad (149)$$

$$K_i = (3200)^3 \text{seg}^{-3} \quad (150)$$

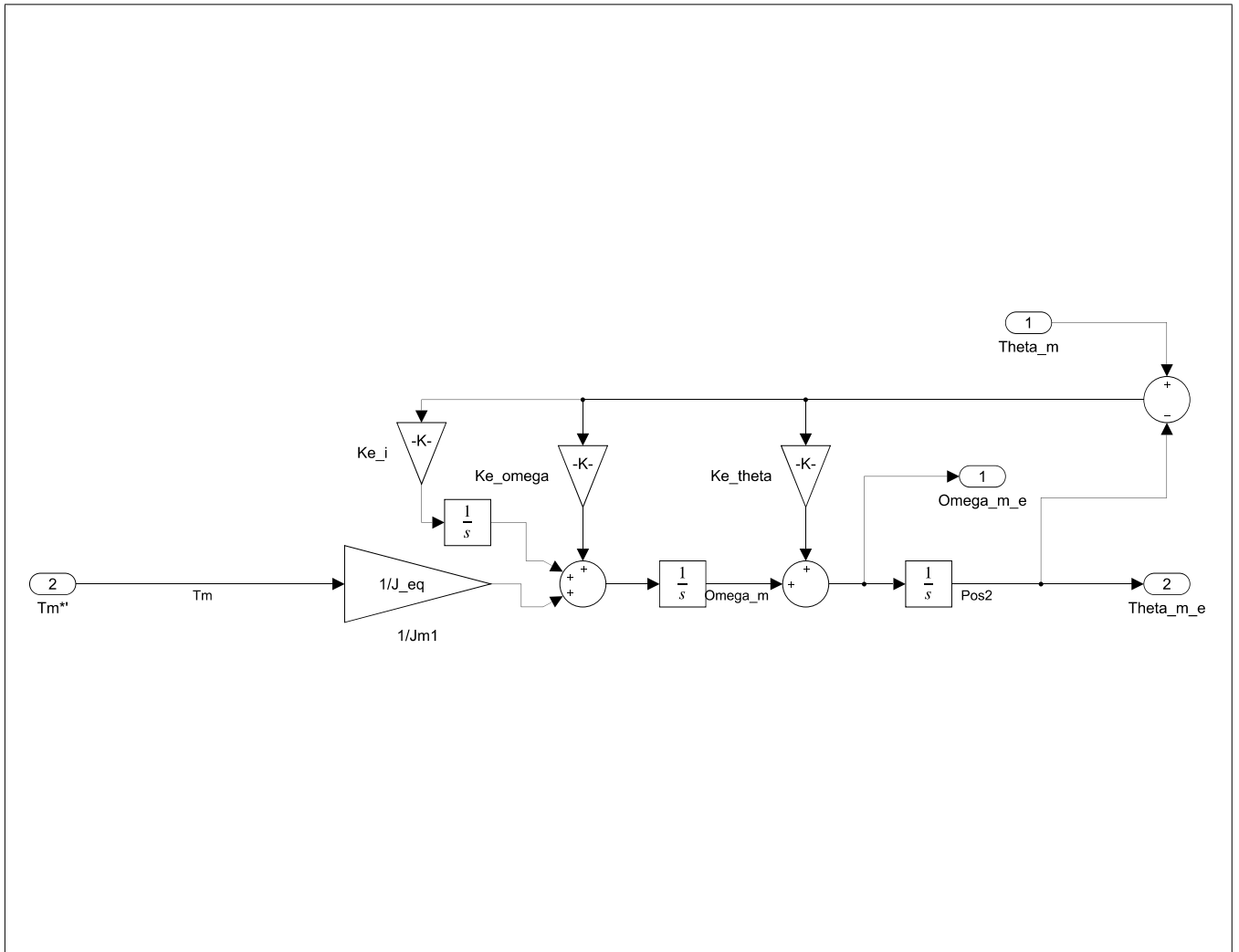


Fig. 42. Diagrama del bloques del observador con acción integral



Fig. 43. Error entre posición medida y observada

c) Comportamiento térmico del motor:

V. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A. Heading 1, etc

B. Figures and Tables

Positioning Figures and Tables: Place figures and tables at the top and bottom of columns. Avoid placing them in the middle of columns. Large figures and tables may span across both columns. Figure captions should be below the figures; table heads should appear above the tables. Insert figures and tables after they are cited in the text. Use the abbreviation “Fig. 1”, even at the beginning of a sentence.

TABLE I
AN EXAMPLE OF A TABLE

One	Two
Three	Four

VI. CONCLUSIONES

APENDICE

Appendixes should appear before the acknowledgment.

REFERENCES

- [1] G. O. Young, "Synthetic structure of industrial plastics (Book style with paper title and editor)," in *Plastics*, 2nd ed. vol. 3, J. Peters, Ed. New York: McGraw-Hill, 1964, pp. 15–64.
- [2] R. Kelly et al, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. Springer, 2005. (Example and Figure 2.2).
- [3] P. Krause et al, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*, 3rd Ed.. IEEE-Wiley, 2013.
- [4] B. Smith, "An approach to graphs of linear forms (Unpublished work style)," unpublished.
- [5] E. H. Miller, "A note on reflector arrays (Periodical style~Accepted for publication)," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, to be publised.
- [6] J. Wang, "Fundamentals of erbium-doped fiber amplifiers arrays (Periodical style~Submitted for publication)," *IEEE J. Quantum Electron.*, submitted for publication.