



# Trabajo práctico 1

## Especificación y WP

3 de octubre de 2024

Algoritmos y Estructuras de Datos - DC - UBA

### Grupo AJMS

Integrante	LU	Correo electrónico
Ferechian, Matías	693/23	matifere@gmail.com
Nestmann, Sofía	366/23	sofianestmann@gmail.com
Mirasson, Javier	594/23	javierestebanmn@gmail.com
Ramirez, Ana	931/23	correodeanar@gmail.com



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

# 1. Especificación

## 1.1. grandesCiudades

```
proc grandesCiudades (in ciudades : seq⟨Ciudad⟩) : seq⟨Ciudad⟩{  
  requiere { (∀i, j : ℤ) (  
    0 ≤ i, j < |ciudades| →L ciudades[i]0 ≠ ciudades[j]0  
  ) }  
  asegura { (∀i : ℤ) (  
    (0 ≤ i < |ciudades|) ∧L ((ciudades[i]1 > 50000) →L (ciudades[i] ∈ res))  
  ) }  
}
```

## 1.2. sumaDeHabitantes

```
proc sumaDeHabitantes (in menoresDeCiudades : seq⟨Ciudad⟩, in mayoresDeCiudades : seq⟨Ciudad⟩) : seq⟨Ciudad⟩{  
  requiere { (|menoresDeCiudades| = |mayoresDeCiudades|) ∧ ((∀i : ℤ) (  
    (∃!j : ℤ) (  
      0 ≤ i, j < |menoresDeCiudades| → menoresDeCiudades[i]0 = mayoresDeCiudades[j]0  
    )  
  ) ) }  
  asegura { (∀n, m : ℤ) (  
    (0 ≤ n, m < |menoresDeCiudades|) ∧L ((menoresDeCiudades[n]0 = mayoresDeCiudades[m]0) →L  
    ((res[n]1 = menoresDeCiudades[n]1 + mayoresDeCiudades[m]1) ∧  
    (res[n]0 = menoresDeCiudades[n]0))) }  
}
```

## 1.3. hayCamino

```
proc hayCamino (in distancias : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩, in desde : ℤ, in hasta : ℤ) : Bool{  
  requiere { (∀i, j : ℤ) (  
    (0 ≤ i, j, desde, hasta < |distancias|) ∧L ((i = j) → (distancias[i][j] = 0)) ∧ (distancias[i][j] = distancias[j][i])  
  ) }  
  asegura { res = true ↔ (∃p : seq⟨ℤ⟩) (  
    (|p| ≥ 1) ∧L ((p[0] = desde) ∧ (p[|p| - 1] = hasta) ∧ (∀k : ℤ) (  
      (0 ≤ k < |p| - 1) →L (distancias[p[k]][p[k + 1]] > 0)  
    )  
  ) ) }  
}
```

## 1.4. cantidadCaminosNSaltos

Para la siguiente especificación tendremos en cuenta que: Dada la matriz de orden 1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si queremos encontrar la matriz  $M_2$  de orden 2, nos queda que:

$$M_2 = M_1 \times M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego  $M_2$  contiene la cantidad de 2-saltos asociados a cada par i,j que se encuentre dentro de la matriz

```
proc cantidadCaminosNSaltos (inout conexión : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩, in n : ℤ) : {  
  requiere { n > 0 ∧ (∀i, j : ℤ) (  
    (0 ≤ i, j < |conexión|) →L ((i = j) → (conexión[i][j] = 0) ∧ (conexión[i][j] = conexión[j][i]) ∧ (0 ≤ conexión[i][j] ≤ 1))  
  ) }  
  asegura { (∃p : seq⟨seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩⟩) (  
    (∀i, j, k : ℤ) (  
      ((0 ≤ k < n - 1) ∧ (0 ≤ i, j < |conexión|)) →L (conexión[i][j] = multEntreMatrices(p[k], p[k + 1]))  
    )  
  ) }
```

```

    )
  ) }
}
aux multEntreMatrices (mUno : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩, mDos : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩) : ℤ = (∀i, j : ℤ) (
  (0 ≤ i, j < |mUno|) ∧L ∑k=1|mUno| mUno[i][k] × mDos[k][j]
);

```

## 1.5. caminoMinimo

```

proc caminoMinimo (in origen : ℤ, in destino : ℤ, in distancias : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩) : seq⟨ℤ⟩ {
  requiere { (∀i, j : ℤ) (
    (0 ≤ i, j < |distancias|) ∧L ((i = j) → (distancias[i][j] = 0)) ∧ (distancias[i][j] = distancias[j][i])
  )
  asegura { (hayCamino(distancias, origen, destino) ∧ ((∀k : seq⟨ℤ⟩)(∃p : seq⟨ℤ⟩)(esCamino(distancias, origen, destino, p) ∧
    (sumaDistancias(distancias, origen, destino, p) ≤ sumaDistancias(distancias, origen, destino, k))) → res = p) ∧
    ((¬hayCamino(distancias, origen, destino) ∨ (origen = destino)) → res = [ ]))
  }

  pred esCamino (distancias : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩, origen : ℤ, destino : ℤ, p : seq⟨ℤ⟩)
    { (∀k : ℤ) (
      (0 ≤ i, j, origen, destino < |p|) ∧L distancias[p[k]][p[k+1]]
    )
    }

  aux sumaDistancias (distancias : seq⟨seq⟨ℤ⟩⟩, origen : ℤ, destino : ℤ, s : seq⟨ℤ⟩) : ℤ = ∑j=origendestino distancias[j][j+1];

```

## 2. Demostraciones de correctitud

### 2.1. Demostración de implementación

Definimos como precondition y postcondicion de nuestro programa:

```

P ≡ { (∃i : ℤ) (0 ≤ i < |ciudades|) ∧L ciudades[i].habitantes > 50,000 ∧ (∀j : ℤ) (
  (0 ≤ j < |ciudades| →L ciudades[j].habitantes ≥ 0) ∧ (∀i, j : ℤ) (
    (0 ≤ i, j < |ciudades| →L ciudades[j].nombre ≠ ciudades[i].nombre)
  )
)}
Q ≡ { ∑i=0|ciudades|-1 ciudades[i].habitantes }

```

Para demostrar la correctitud del programa probamos que:

{P}S1;S2;S3;S4{Q} es válida, con:

```

S1 ≡ res := 0
S2 ≡ i := 0
S3 ≡
  while(i < ciudades.length) do
    res = res + ciudades[i].habitantes
    i = i + 1
  endwhile
S4 ≡ skip

```

Se busca por monotonía demostrar que:

1.  $P \rightarrow_{wp} \{S1;S2,P_c\}$
2.  $P_c \rightarrow_{wp} \{S3,Q_c\}$
3.  $Q_c \rightarrow_{wp} \{S4,Q\}$

Esto permite demostrar que  $P \longrightarrow wp\{S1;S2;S3;S4,Q\}$   
Es verdadera por lo cual la Tripla de Hoare es válida .

Elijo  $Q_c = Q$

Demuestro:  
 $Q_c \longrightarrow wp(S4, Q)$

Por el **Axioma 2**:  
 $wp(S4, Q_c) \equiv Q_c$

Para demostrar  $P_c \longrightarrow wp\{S3, Q_c\}$  se prueba la correctitud del ciclo mediante:

## Teorema del Invariante y Teorema de Terminación

### Teorema del Invariante:

Si existe un predicado I tal que:

1.  $P_c \longrightarrow I$
2.  $\{I \wedge B\}S\{I\}$
3.  $I \wedge \neg B \longrightarrow Q_c$

(1)

Entonces el ciclo es parcialmente correcto respecto de la especificación

### ■ Definimos

$$\begin{aligned}
 P_c &\equiv \{ \text{res} = 0 \wedge i = 0 \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |\text{ciudades}|) \wedge_L \text{ciudades}[i].\text{habitantes} > 50,000 \wedge (\forall j : \mathbb{Z}) ( \\
 &\quad (0 \leq j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \geq 0) \wedge (\forall i, j : \mathbb{Z}) ( \\
 &\quad (0 \leq i, j < |\text{ciudades}| \longrightarrow_L \text{ciudades}[j].\text{nombre} \neq \text{ciudades}[i].\text{nombre}) \\
 &\quad ) \} \\
 Q_c &\equiv \{ \text{res} = \sum_{i=0}^{|\text{ciudades}|-1} \text{ciudades}[i].\text{habitantes} \} \\
 B &\equiv \{ i < |\text{ciudades}| \} \\
 I &\equiv \{ 0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \wedge \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \}
 \end{aligned}$$

Según el teorema del invariante

1.  $P_c \longrightarrow I$

$$\blacksquare 0 \leq i \leq |\text{ciudades}| \equiv 0 \leq 0 \leq |\text{ciudades}|$$

$$\blacksquare \text{res} = 0 \wedge i = 0 \longrightarrow \text{res} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} \equiv \sum_{j=0}^{0-1} \text{ciudades}[j].\text{habitantes} = 0$$

$P_c \longrightarrow I$  es válido

Ahora demuestro que:

2.  $\{I \wedge B\}S\{I\} \longleftrightarrow I \wedge B \longrightarrow wp(S, I)$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare wp(S, I) &\equiv wp(\mathbf{S1}; \mathbf{S2}, I) \\
 &\equiv wp(\mathbf{S1}, wp(\mathbf{S2}, I)) \\
 &\equiv wp(\mathbf{S1}; i:=i+1, I) \\
 &\equiv wp(\text{res}:=\text{res} + \text{ciudades}[j].\text{habitantes}; i:=i+1, I)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv wp \left( res := res + ciudades[j].habitantes, wp \left( i := i, (0 \leq i \leq |ciudades|) \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \right) \right) \\
&\equiv wp \left( res := res + ciudades[j].habitantes, 0 \leq i+1 \leq |ciudades| \wedge \sum_{j=0}^{i+1-1} ciudades[j].habitantes \right) \\
&\equiv wp \left( res := res + ciudades[j].habitantes, -1 \leq i \leq |ciudades| - 1 \wedge \sum_{j=0}^i ciudades[j].habitantes \right) \\
&\equiv wp \left( res := res + ciudades[j].habitantes, i < |ciudades| \wedge \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes + ciudades[i].habitantes \right) \\
&\equiv i < |ciudades| \wedge res + ciudades[j].habitantes = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes + ciudades[i].habitantes \\
&\equiv i < |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes
\end{aligned}$$

3.  $\{I \wedge \neg B\} \longrightarrow Qc$

$$\begin{aligned}
&I \wedge \neg B \\
&\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| - 1 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge \neg(i < |ciudades|) \\
&\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| - 1 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge i \geq |ciudades| \\
&\equiv \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Invariante podemos concluir que el ciclo es parcialmente correcto respecto de la especificación  
**Teorema de Terminación**

$$\begin{aligned}
&4. \{I \wedge B \wedge fv = V_o\} \mathbf{S} \{fv < V_o\} \\
&5. (I \wedge fv \leq 0) \longrightarrow \neg B
\end{aligned} \tag{2}$$

Elijo como función variante:

$$fv = |ciudades| - i \tag{3}$$

■ Verifico 4.

$$\begin{aligned}
&\{I \wedge B \wedge fv = V_o\} \mathbf{S} \{fv < V_o\} \longleftrightarrow \{I \wedge B \wedge fv = V_o\} \longrightarrow wp(S, fv < V_o) \\
&wp(S, fv < V_o) \equiv wp(res := res + ciudades[i].habitantes; i := i + 1, |ciudades| - i < V_o) \\
&\equiv wp(res := res + ciudades[i].habitantes, wp(i : i + 1; |ciudades| - i < V_o)) \\
&\equiv wp(res := res + ciudades[i].habitantes, |ciudades| - 1 - i < V_o) \\
&\text{Puedo ignorar la res ya que no es relevante en este caso} \\
&\equiv |ciudades| - 1 - i < |ciudades| - i \\
&- 1 < 0
\end{aligned} \tag{4}$$

■ Verifico 5.

$$\begin{aligned}
&(I \wedge fv \leq 0) \longrightarrow \neg B \\
&(I \wedge fv \leq 0) \equiv 0 \leq i \leq |ciudades| - 1 \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge |ciudades| - i \leq 0 \\
&\text{Ignoro res} \\
&\equiv i \leq |ciudades| \wedge |ciudades| \leq i \longleftrightarrow |ciudades| = i \longrightarrow \neg(i < |ciudades|) \\
&\equiv |ciudades| = i \longrightarrow \neg(i < |ciudades|)
\end{aligned} \tag{5}$$

Queda verificado el Teorema de Terminación por lo que podemos concluir que el ciclo termina  
 Como ambos teoremas se cumplen, **el ciclo es correcto**.

Luego me falta ver que  $P \longrightarrow wp(S1; S2, P_c)$

$$wp(S1; S2, P_c) \equiv wp(res := 0; i := 0, P_c) \equiv wp(res := 0, def(i) \wedge_L P_c) \equiv def(res) \wedge_L P_c \equiv P_c$$

$$P \longrightarrow P_c$$

Queda demostrado que la tripla  $\{P\}S1;S2;S3;S4\{Q\}$  es válida

## 2.2. Demostracion $res > 50000$

Se utiliza la misma definición del ejercicio anterior para  $P, B, fv$ . Se redefinen:

$$\begin{aligned} I &\equiv \{0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades|) \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50,000 \wedge (\forall j : \mathbb{Z}) ( \\ &\quad (0 \leq j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].habitantes \geq 0) \wedge (\forall i, j : \mathbb{Z}) ( \\ &\quad \quad (0 \leq i, j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].nombre \neq ciudades[i].nombre) \\ &\quad ) \} \\ Q &\equiv \{res = \sum_{i=0}^{|ciudades|-1} ciudades[i].habitantes \wedge res > 50000\} \end{aligned}$$

Se procede de manera similar al ejercicio anterior probando por monotonía la validez del programa y la tripla de Hoare. Resta chequear la validez del ciclo con el nuevo invariante y postcondicion.

**Teorema del invariante**

$$P_c \longrightarrow I$$

Como se probó en el punto anterior, las implicancias para  $0 \leq i < |ciudades|$  y  $res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes$

se analiza lo agregado al invariante. Como lo agregado esta presente en  $P_c$  queda probado trivialmente que  $P_c \longrightarrow I$

$$\{I \wedge B\}S\{I\} \longleftrightarrow I \wedge B \longrightarrow wp(S, I)$$

Lo agregado al invariante no afecta a la implicancia. Luego vale que:  $I \wedge B \longrightarrow wp(S, I)$

$$\{I \wedge \neg B\} \longrightarrow Q_c$$

$$\begin{aligned} I \wedge \neg B &\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades|) \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50,000 \\ &\wedge (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].habitantes \geq 0) \wedge \neg(i < |ciudades|) \\ &\equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades|) \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50,000 \\ &\wedge (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].habitantes \geq 0) \wedge i \geq |ciudades| \\ &\equiv i = |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades|) \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50,000 \\ &\wedge (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].habitantes \geq 0) \\ &\equiv res = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades|) \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50,000 \\ &\wedge (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].habitantes \geq 0) \end{aligned}$$

Sea  $k$  una posición en la sucesión  $ciudades$  que cumple con la precondition de tener mas de 50000 habitantes

$\sum_{j=0}^{k-2} ciudades[j].habitantes$  Para los elementos a la izquierda de la k-esima posición

$n$  para el numero de habitantes de la k-esima posición

$\sum_{j=k+1}^{i-1} ciudades[j].habitantes$  Para los elementos a la derecha de la k-esima posición

Luego

$$res = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades|) \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50,000$$

$$\wedge (\forall j : \mathbb{Z}) (0 \leq j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[j].habitantes \geq 0) \equiv res = \sum_{j=0}^{|ciudades|-1} ciudades[j].habitantes \wedge$$

$$res > 50000$$

$$\{I \wedge \neg B\} \longrightarrow Q_c$$

Las implicancias del teorema de terminación no se ven afectadas por los cambios en el invariante y la postcondicion. Luego siguen

Habiendo analizado todos los cambios y siguiendo los razonamientos del ejercicio anterior,

queda demostrado que el resultado devuelto es mayor a 50000