1 Równania i nierówności z wartością bezwzględną

1.1 Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględna (inaczej moduł) z liczby rzeczywistej nie robi nic z dodatnimi liczbami, a ujemnym usuwa minusa. Przykładowo:

- $|2| = 2$
- $|-8| = 8$

Jeżeli wewnątrz modułu znajduje się liczba niewymierna, to przed opuszczeniem należy przybliżyć tę wartość i zorientować się jaki jest znak.

Przykład 1. Opuść wartość bezwzględną: $|\sqrt{2} - 1|$.
Po pierwsze przybliżam (korzystając z kalkulatora) wartość wewnątrz modułu:

$$\sqrt{2} - 1 \approx 1,41 - 1 = 0,41$$

Liczba ta jest dodatnia:

$$0,41 > 0$$

Zatem opuszczając moduł nie zmieniam znaku. Czyli wynik to:

$$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$$

Przykład 2. Opuść wartość bezwzględną: $|\sqrt{5} - 3|$.
Po pierwsze przybliżam wartość wewnątrz modułu:

$$\sqrt{5} - 3 \approx 2,24 - 3 = -0,76$$

Liczba ta jest ujemna:

$$-0,76 < 0$$

Zatem opuszczając moduł **zmieniam** znak. Czyli wynik to:

$$|\sqrt{5} - 3| = -(\sqrt{5} - 3) = -\sqrt{5} + 3$$

Przykład 3. Oblicz wartość wyrażenia: $|\sqrt{2} - 2| + |\sqrt{2} + 1|$
Po pierwsze przybliżam wartości wyrażeń w modułach:

$$\sqrt{2} - 2 \approx 1,41 - 2 = -0,59 < 0$$

$$\sqrt{2} + 1 \approx 1,41 + 1 = 2,41 > 0$$

Czyli w pierwszym przypadku zamieniam znak po opuszczeniu modułu, a w drugim nie. Dostajemy:

$$|\sqrt{2} - 2| + |\sqrt{2} + 1| = -(\sqrt{2} - 2) + \sqrt{2} + 1 = -\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + 1 = 3$$

1.2 Wartość bezwzględna liczby - zadania

Zadanie 1. Opuść wartość bezwzględną: $|\sqrt{3}-3|$
Zadanie 2. Opuść wartość bezwzględną: $|8-\sqrt{3}|$
Zadanie 3. Opuść wartość bezwzględną: $|3\sqrt{5}-10|$
Zadanie 4. Opuść wartość bezwzględną: $|\sqrt{2}-3|$
Zadanie 5. Obicz wartość wyrażenia: $|2\sqrt{2}-7|+2\cdot|\sqrt{2}-1|$
Zadanie 6. Obicz wartość wyrażenia: $|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}-2|$
Zadanie 7. Obicz wartość wyrażenia: $|2\sqrt{7}-2|-2\cdot|\sqrt{7}+1|$

1.3 Równania z wartością bezwzględną

Jeżeli w równaniu niewiadoma znajduje się w środku modułu, to należy rozpatrzeć dwa przypadki, bo liczba w środku może być zarówno ujemna, jak i dodatnia.
UWAGA. Moduł nie może być przyrównany do liczby ujemnej - jeżeli tak będzie to z miejsca jest sprzeczne.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $|x+1|=5$.
Rozpatrujemy dwa przypadki, w jednym opuszczamy moduł bez zmiany znaku, w drugim znak zmieniamy:

$$|x+1|=5$$

$$\begin{array}{ccc} x+1=5 & \vee & -(x+1)=5 \\ x=4 & & -x-1=5 \\ & & -x=6 \\ & & x=-6 \end{array}$$

Czyli nasze rozwiązania to 4 i -6. Wykonujemy sprawdzenie dla obu (wstawiamy do wyjściowego równania):

$$|4+1|=|5|=5 \checkmark$$

$$|-6+1|=|-5|=5 \checkmark$$

Przykład 2. Rozwiąż równanie $|3-x|=8$.
Rozpatrujemy dwa przypadki, w jednym opuszczamy moduł bez zmiany znaku, w drugim znak zmieniamy:

$$|3-x|=8$$

$$\begin{array}{ccc} 3-x=8 & \vee & -(3-x)=8 \\ -x=5 & & -3+x=8 \\ x=-5 & & x=11 \end{array}$$

Czyli nasze rozwiązania to -5 i -11. Wykonujemy sprawdzenie dla obu (wstawiamy do wyjściowego równania):

$$|3-(-5)|=|3+5|=|8|=8 \checkmark$$

$$|3-11|=|-8|=8 \checkmark$$

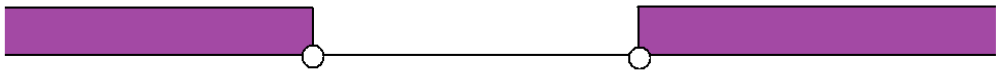
1.4 Równania z wartością bezwzględną - zadania

Zadanie 1. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie: $|x+3| = 7$
Zadanie 2. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie: $|2x+3| = 5$
Zadanie 3. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie: $|6-3x| = 9$
Zadanie 4. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie: $|12x-144| = 12$
Zadanie 5. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie: $|3x+8| = 7$
Zadanie 6. Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie: $|7-4x| = 27$

1.5 Nierówności z wartością bezwzględną

Jeżeli niewiadoma znajduje się wewnątrz modułu w nierówności to musimy rozpatrzyć dwa przypadki. Względem równań dochodzi także konieczność ustalenia spójnika pomiędzy dwoma przypadkami. Są dwie możliwości:

1. Moduł jest większy od liczby, tj. $|x+2| > 3 \Rightarrow$ między przypadkami jest spójnik "lub"($\vee$), zatem przedział jest z lewej i prawej nieograniczony. Na osi liczbowej:



2. Moduł jest mniejszy od liczby, tj. $|x+2| < 3 \Rightarrow$ między przypadkami jest spójnik "i"($\wedge$), zatem przedział jest z lewej i prawej ograniczony. Na osi liczbowej:

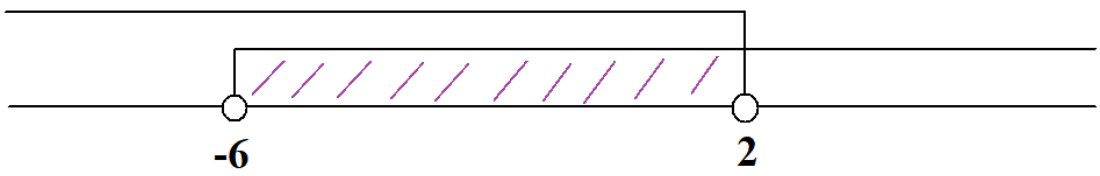
Ponadto, przedział zawsze jest symetryczny względem miejsca zerowego modułu (liczby dla której moduł przyjmuje wartość zero).

Przykład 1. Rozwiąż nierówność: $|x+2| < 4$.
Rozważymy dwa przypadki - w jednym nie zmieniamy znaku, w drugim tak. Ponieważ moduł ma być mniejszy od liczby, między spójnikami będzie spójnik "i".

$$|x+2| < 4$$

$$\begin{array}{ccc} x+2<4 & \wedge & -(x+2)<4 \\ x<2 & & -x-2<4 \\ & & -x<6 \ / \cdot (-1) \\ & & x>-6 \end{array}$$

Ponieważ między przypadkami jest spójnik "i", wybieram część wspólną, to znaczy rysuję przedziały oraz zakreskowuję przedział, gdzie się nachodzą:



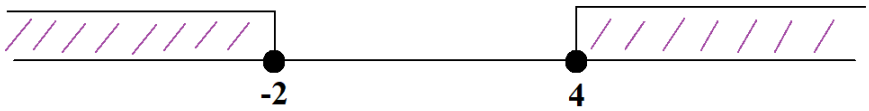
Zatem odpowiedź to $x \in (-6, 2)$.

Przykład 2. Rozwiąż nierówność: $|1-x| \geq 3$ Rozważymy dwa przypadki - w jednym nie zmieniamy znaku, w drugim tak. Ponieważ moduł ma być większy od liczby, między spójnikami będzie spójnik "lub".

$$|1-x| \geq 3$$

$$\begin{array}{ccc} 1-x \geq 3 & \vee & -(1-x) \geq 3 \\ -x \geq 2 \ / \cdot (-1) & & -1+x \geq 3 \\ x \leq -2 & & x \geq 4 \end{array}$$

Ponieważ między przypadkami jest spójnik "lub", biorę sumę przedziałów, to znaczy rysuję przedziały oraz zakreskowuję oba z nich:



Zatem odpowiedź to $x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$.

1.6 Nierówności z wartością bezwzględną - zadania

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność: $|x-3| < 5$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 2. Rozwiąż nierówność: $|2x+1| \leq 4$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 3. Rozwiąż nierówność: $|x+2| > 3$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 4. Rozwiąż nierówność: $|x-1| \geq 2$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 5. Rozwiąż nierówność: $|3x+2| < 7$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 6. Rozwiąż nierówność: $|x-4| \leq 6$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.

Zadanie 7. Rozwiąż nierówność: $|x+1| > 5$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 8. Rozwiąż nierówność: $|x-2| < 4$. Narysuj przedział będący rozwiązaniem.
Zadanie 9. Na rysunku przedstawiono pewien przedział:

Wskaż, której nierówności jest on rozwiązaniem. Następnie rozwiąż wybraną nierówność, żeby uzasadnić swoją odpowiedź:
A. $|x-8| \geq 3$
B. $|x+8| \leq 3$
C. $|x+8| < 3$
D. $|x-8| > 3$
Zadanie 10. Dana jest nierówność:

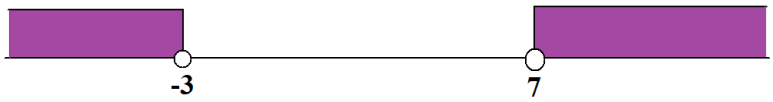
$$|x-2| > 5$$

Wskaż rysunek, na którym prawidłowo zaznaczono przedział będący jej rozwiązaniem:

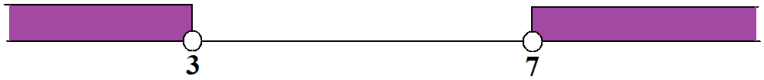
A.

B.

C.



D.



2 Potęgi i pierwiastki

2.1 Wzory

Wzory dla potęg:

Wzór	**Opis**	**Przykład**
$1^n = 1$	Jedynka do dowolnej potęgi daje 1.	$1^{197} = 1$
$n^0 = 1$	Dowolna liczba (oprócz zera) do potęgi zerowej daje 1.	$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-2}\right)^0 = 1$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	Przy mnożeniu potęg o tych samych podstawach dodajemy wykładniki.	$2^2 \cdot 2^3 = 2^5$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	Przy dzieleniu potęg o tych samych podstawach odejmujemy wykładniki.	$4^3 : 4^4 = 4^{-1}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	Jeżeli podnosimy potęgę do potęgi, to mnożymy wykładniki.	$(3^2)^4 = 3^8$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	Mnożenie potęg o tych samych wykładnikach zamieniamy na mnożenie podstaw do potęgi.	$2^3 \cdot 3^3 = 6^3$
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	Dzielenie potęg o tych samych podstawach zamieniamy na dzielenie podstaw do potęgi.	$\frac{2^4}{5^4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Minus w wykładniku odwraca podstawę.	$2^{-2} = \frac{1}{2^2}$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	Mianownik ułamka w wykładniku można zamienić na pierwiastek odpowiedniego stopnia.	$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

Wzory dla pierwiastków:

Wzór	**Opis**	**Przykład**
$\sqrt[n]{1} = 1$	Pierwiastek dowolnego stopnia z jedynki wynosi 1.	$\sqrt[8]{1} = 1$
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Mnożenie pod pierwiastkiem można rozdzielić na mnożenie pierwiastków.	$\sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Dzielenie pod pierwiastkiem można rozdzielić na dzielenie pierwiastków.	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$

Przykład 1. Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{1}{16} \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Zauważam, że 8 mogę rozpisać jako mnożenie i wyciągnąć czynnik spod znaku pierwiastka:

$$\frac{1}{16} \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Skracają się $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}$$

Uważamy na błędne wzory dla pierwiastków, takie jak np. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$!

2.2 Usuwanie niewymierności z mianownika

Jeżeli w końcowym wyniku dowolnego zadania w mianowniku pojawia się liczba niewymierna (najczęściej niewyciągalny pierwiastek) to należy tę niewymierność usunąć z mianownika.

- Jeżeli w mianowniku stoi sam pierwiastek, to rozszerzam ułamek przez ten pierwiastek, np. $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Jeżeli w mianowniku stoi poza pierwiastkiem liczba, to należy skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ i rozszerzyć ułamek przez tzw. sprzężenie mianownika, np. $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$

Przykład 1. Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{2}{\sqrt{2}}$.
Ponieważ w mianowniku stoi sam pierwiastek, ułamek rozszerzymy przez $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Przykład 2. Usuń niewymierność z mianownika: $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$.
Ponieważ w mianownika stoi poza pierwiastkiem także liczba, rozszerzymy przez sprzężenie mianownika, czyli $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}$:

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = \frac{(\sqrt{3}+2)^2}{3-4} = \frac{3+4\sqrt{3}+4}{-1} = -7-4\sqrt{3}$$

2.3 Zadania

Zadanie 1. Oblicz:

$$\frac{\sqrt{5}}{12} \cdot 144 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Zadanie 2. Oblicz:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

Zadanie 3. Oblicz:

$$\frac{2^2 \cdot 3^2}{6^3}$$

Zadanie 4. Oblicz:

$$18^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Zadanie 5. Oblicz:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 12^{-1}}{4 \cdot \sqrt{6}}$$

`Uwaga na niewymierność w mianowniku!`

Zadanie 6. Oblicz:

$$\frac{1}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{64}} \cdot \left(\frac{4}{13}\right)^{-1}$$

Zadanie 7. Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Zadanie 8. Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{3}{\sqrt{5} + 1}$$

3 Wzory skróconego mnożenia

3.1 Teoria

Korzystamy z trzech wzorów skróconego mnożenia:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - kwadrat sumy
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ - kwadrat różnicy
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ - różnica kwadratów

Uważamy na błędne wzory "super skróconego mnożenia", np. $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ **!**

Przykład 1. Oblicz wartość wyrażenia: $(1+\sqrt{3})^2$.
Podstawiamy pod wzór na kwadrat sumy:

$$(1+\sqrt{3})^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$$

Przykład 2. Oblicz wartość wyrażenia: $(4+\sqrt{5})^2(4-\sqrt{5})^2$.
Wyciągam kwadrat nad całe mnożenie dwóch nawiasów (korzystam ze wzoru na mnożenie potęg o tych samych wykładnikach, patrz sekcja 2.1):

$$(4+\sqrt{5})^2(4-\sqrt{5})^2 = [(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})]^2$$

Dalej wewnątrz kwadratowego nawiasu wykorzystuję wzór na różnicę kwadratów:

$$[(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})]^2 = [4^2 - (\sqrt{5})^2]^2 = [16-5]^2 = 11^2 = 121$$

3.2 Zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia:

$$(1+\sqrt{2})^3(1-\sqrt{2})^3$$

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia:

$$(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$$

Zadanie 3. Uprość wyrażenie:

$$(x\sqrt{2} + 2x\sqrt{8})^2$$

Zadanie 4. Oblicz wartość wyrażenia:

$$(3+\sqrt{6})^2 - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$$

Zadanie 5. Zwiń we wzór skróconego mnożenia:

$$x^2 + 2x + 1$$

`Podpowiedź: trzeba znaleźć takie` a `i` b`, żeby` $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2x + 1$

Zadanie 6. Uprość wyrażenie:

$$4 - (x-3)^2$$

4 Logarytmy

4.1 Definicja logarytmu

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Liczbę a nazywamy podstawą logarytmu, a b liczbą logarytmowaną. Powyższą definicję można zapamiętać w postaci pytania:

Do jakiej potęgi muszę podnieść a żeby dostać b?

Odpowiedzią na takie pytanie jest liczba c. Przykładowo:

- $\log_2 8$ - *Do jakiej potęgi muszę podnieść* 2 *żeby dostać* 8*?* Odpowiedź: 3, czyli $\log_2 8 = 3$.
- $\log_3 27$ - *Do jakiej potęgi muszę podnieść* 3 *żeby dostać* 27*?* Odpowiedź: 3, czyli $\log_3 27 = 3$.
- $\log_4 16$ - *Do jakiej potęgi muszę podnieść* 4 *żeby dostać* 16*?* Odpowiedź: 2, czyli $\log_4 16 = 2$.

Jeżeli przy logarytmie nie ma podstawy, to za podstawę przyjmujemy 10, np. $\log 100 = 2$

4.2 Wzory

Wzór	**Opis**	**Przykład**
$\log_a 1 = 0$	Logarytm o dowolnej podstawie z jedynki wynosi 0.	$\log_{100} 1 = 0$
$\log_a a = 1$	Jeżeli logarytm i liczba logarytmowana są takie same, to logarytm wynosi 1.	$\log_{12} 12 = 1$
$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$	Dodawanie logarytmów o tych samych podstawach zamieniamy na iloczyn liczb logarytmowanych	$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$
$\log_a x - \log_a y = \log_a(\frac{x}{y})$	Odejmowanie logarytmów o tych samych podstawach zamieniamy na dzielenie liczb logarytmowanych	$\log_2 27 + \log_2 3 = \log_2 9$
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	Potęgę liczby logarytmowanej można wyciągnąć przed logarytm	$\log_2 16^4 = 4 \cdot \log_2 16$
$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$	Potęgę podstawy logarytmu można wyciągnąć przed logarytm, odwracając ją.	$\log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} \log_2 32$

Uwaga. Nie istnieje wzór na mnożenie logarytmów, tj, $\log_a x \cdot \log_a y$**. Trzeba liczyć oddzielnie.**

4.3 Zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\log_2 32 + \log_2 4$$

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia:

$$2 \log 1000$$

Zadanie 3. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\log_5 25 - \log_5 5$$

Zadanie 4. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\log_7 49 \cdot \log_7 7$$

Zadanie 5. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\log_8 16 + 1$$

Zadanie 6. Wiadomo że $c = \log_2 16$. Czy prawdą jest, że $2^c = 16$?

Zadanie 7. Wskaż liczbę, która spełnia równanie:

$$2^x = 64$$

`Podpowiedź: wziąć logarytm o podstawie dwóch obu stron równania.`

Zadanie 8. Wiadomo, że $a = \log_2 0,25$, $b = \log_3(\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3})$ oraz $c = \log_7 49$. Oblicz wartość sumy $a + b + c$.

Zadanie 9. Zapisz w postaci jednego logarytmu:

$$2 \log_3 10 + \log_3 \frac{1}{10}$$

Zadanie 10. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\log_9(\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot 9^{-1})$$

Zadanie 11. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\log_3 729}{\log_6 36}$$

5 Wyrażenia algebraiczne

Zadania maturalne z tematu wyrażenia algebraiczne polegają na wstawieniu określonych w zadaniu liczb lub zależności do pewnego wyrażenia, a następnie obliczeniu jego wartości.
Przykład 1. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{x^2+y^2}{x \cdot y}$$

jeżeli wiadomo, że $x = 2y$.
Podstawiam daną w zadaniu zależność do wyrażenia za x:

$$\frac{x^2+y^2}{x \cdot y} = \frac{(2y)^2+y^2}{2y \cdot y} = \frac{4y^2+y^2}{2y^2} = \frac{5y^2}{2y^2} = \frac{5}{2}$$

Przykład 2. Oblicz wartość wyrażenia $x^2 + 2y$ dla $x = \sqrt{2} + 1$ oraz $y = -\sqrt{2}$.
Wstawiam podane wartości do wyrażenia:

$$x^2 + 2y = (\sqrt{2}+1)^2 + 2 \cdot (-\sqrt{2})$$

Uwaga! Wzór skróconego mnożenia

$$(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1^2 - 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} = 3$$

5.1 Zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{p+2q}{q-p}$ jeżeli wiadomo, że $p = 3q$.

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a+b}{a-b}$, gdy $b = \frac{1}{2}a$.

Zadanie 3. Wyrażenie $\frac{m-n}{m+n}$ zależy od m i n. Oblicz jego wartość, jeśli $m = 2n$.

Zadanie 4. Oblicz wartość wyrażenia $x^2 + 2x - 1$, gdy $x = -3$.

Zadanie 5. Oblicz wartość wyrażenia $5b + 2c$, gdy $b = 2$, $c = 3$.

Zadanie 6. Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{2x+9}$, gdy $x = 7$.

Zadanie 7. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{6a}{b} + 4$, gdy $a = 3$, $b = 2$.

Zadanie 8. Oblicz wartość wyrażenia $(m+n)^2 - m$, gdy $m = 2$, $n = 5$.

Zadanie 9. Oblicz wartość wyrażenia $3p - q + 5r$, gdy $p = 4$, $q = 7$, $r = -2$.

Zadanie 10. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^2+y^2}{x-y}$, gdy $x = 6$, $y = 2$.

6 Procenty

6.1 Teoria - procenty

Przez procent danej liczby rozumiemy dany ułamek jej wartości, przykładowo:

- 40% liczby 20 to $0,4 \cdot 20 = 8$
- 120% liczby 15 to $1,2 \cdot 15 = 20$

Zadania maturalne z procentów często polegają na znalezieniu ceny przed obniżką, dwiema obniżkami itd. W takim wypadku użyteczne jest wprowadzenie niewiadomej, np. x i ułożenie równania.

Przykład 1. 6% liczby x jest równe 216. Ile wynosi x?
Układam równanie:

$$0,06 \cdot x = 216$$

Dzieląc przez $0,06$:

$$x = \frac{216}{0,06} = 3600$$

Czyli szukana liczba to 3600. Wykonuję sprawdzenie:

$$3600 \cdot 0,06 = 216$$

Przykład 2. Cenę samochodu obniżono o 20%, a następnie jeszcze o 15%. Po obu tych obniżkach cena wyniosła 120000 zł. Oblicz początkową cenę.
Wprowadzam niewiadomą:

$$x - \textit{początkowa cena samochodu}$$

Ponieważ pierwsza obniżka była o 20%, to pozostało 80% ceny sprzed obniżki:

$$(1 - 0,2)x = 0,8x$$

Następnie cenę $0,8x$ obniżono jeszcze o 15% (czyli pozostało 85% ceny sprzed obniżki). Czyli cena po obu obniżkach to:

$$0,85 \cdot 0,8x = 0,68x$$

Z zadania wiem, że ta cena była równa 120000 zł. Układam równanie:

$$0,68x = 120000 \ / : 0,68$$

$$x \approx 176470,59$$

Czyli początkowa cena wynosiła około $176470,59$ zł.

6.2 Teoria - procent składany

Kapitalizacja polega na dopisywaniu odsetek co pewien okres (najczęściej co rok) do kwoty od której liczymy odsetki. Wartość kapitału po n okresach kapitalizacji na lokacie liczymy ze wzoru:

$$K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$$

gdzie:

- K_0 - kapitał początkowy, wpłacony na lokatę
- p - oprocentowanie (podane już w ułamku dziesiętnym!)
- n - liczba okresów kapitalizacji.

Przykład 1. Kwotę 10000 zł wpłacamy na lokatę 4-letnią z oprocentowaniem 5% w skali roku oraz kapitalizacją roczną. Oblicz wartość kapitału po 4 latach.
Mamy:

$$K_0 = 10000$$

$$p = 0,05$$

$$n = 4$$

Podstawiam do wzoru:

$$K_4 = K_0 \cdot (1+p)^n = 10000 \cdot (1+0,05)^4 = 10000 \cdot 1,05^4 \approx 12155,06$$

Czyli kwota po 4 latach wyniesie około 12155,06 zł.

6.3 Zadania

Zadanie 1. Suma liczby x i jej 8% jest równa 216. Oblicz x.

Zadanie 2. 12% liczby x jest równe 144. Oblicz x.

Zadanie 3. Spodnie kosztowały 1200 zł. Ich cenę podwyższono o 20%. Ile kosztują aktualnie?

Zadanie 4. Cenę koszuli obniżono o 10%, a następnie jeszcze o 20%. Po tych obniżkach cena wyniosła 72 zł. Oblicz początkową cenę.

Zadanie 5. Cenę krawatu obniżono o 5%, a następnie jeszcze o 20%. Po tych obniżkach cena wyniosła 50 zł. Oblicz początkową cenę.

Zadanie 6. Janek kupił koszulkę na przecenie - zapłacił 120 zł, a cena była obniżona o 10%. Ile złotych zaoszczędził Janek względem bazowej ceny.

Zadanie 7. W banku oferowane jest oprocentowanie roczne w wysokości 5% z kapitalzacją roczną. Ile wyniesie kapitał po 3 latach, jeśli początkowa kwota wynosiła 1000 zł?

Zadanie 8. Kwota 2000 zł została zainwestowana na 2 lata przy oprocentowaniu 6% rocznie i

kapitalizacji rocznej. Ile wyniesie końcowy kapitał?

Zadanie 9. Inwestycja w wysokości 5000 zł jest oprocentowana w wysokości 4% rocznie przy kapitalzacji rocznej. Ile wyniesie kapitał po 5 latach?

Zadanie 10. Ile lat potrzeba, aby podwoić kapitał 1000 zł, przy oprocentowaniu 8% rocznie i kapitalizacji rocznej?

Zadanie 11. Na lokacie z kapitalizacją roczną znajduje się kwota 3000 zł, oprocentowana 3% rocznie. Ile wyniesie kapitał po 4 latach?

Zadanie 12. Kwota 1500 zł została ulokowana na 3 lata przy oprocentowaniu 7% rocznie i kapitalizacji rocznej. Ile wyniesie końcowa wartość lokaty?

Zadanie 13. Wartość 10 000 zł została zainwestowana na 6 lat przy oprocentowaniu 5% rocznie przy kapitalizacji rocznej. Ile wyniesie końcowa wartość inwestycji?

7 Równania wymierne

7.1 Teoria

Wyrażeniem wymiernym nazywamy ułamek: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami. Każde takie wyrażenie ma swoją dziedzinę, czyli zbiór liczb które mogę wstawić pod x. Przede wszystkim należy zadbać o to, żeby mianownik nie był równy zero (bo nie można dzielić przez zero!). Przykładowo:

- $\frac{x+1}{x-1}$ - dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ - jedynka jest wyłączona, bo jej wstawienie zeruje mianownik.
- $\frac{2x+2}{x+3}$ - dziedziną tego wyrażenia jest zbiór $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ - minus trójka jest wyłączona, bo jej wstawienie zeruje mianownik.

Równania wymierne polegają na przyrównaniu wyrażeń wymiernych do siebie bądź do jakiejś liczby. Schemat rozwiązywania wygląda następująco:

1. Wyznacz dziedzinę równania (mianowniki mają być różne od zera)
2. Pozbądź się ułamków, mnożąc przez mianowniki
3. Rozwiąż otrzymane równanie
4. Rozwiązania skonfrontuj z dziedziną - jeżeli nie należą do dziedziny, to nie są rozwiązaniami.

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

$$\frac{(x+1)(3-x)}{x-2} = 0$$

Po pierwsze wyznaczam dziedzinę:

$$x - 2 \neq 0$$
$$x \neq 2$$

Czyli:

$$D : x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

Dalej, pozbywam się ułamków:

$$\frac{(x+1)(3-x)}{x-2} = 0 \ / \cdot (x-2)$$
$$(x+1)(3-x) = 0$$
$$x + 1 = 0 \ \vee \ 3 - x = 0$$
$$x = -1 \ \vee \ x = 3$$

Sprawdzam z dziedziną: $-1 \in D$ oraz $3 \in D$. Czyli rozwiązaniami są -1 i 3.

Przykład 2. Rozwiąż równanie:

$$\frac{2x+5}{x-1} = \frac{2x+2}{x+1}$$

Po pierwsze, wyznaczam dziedzinę:

$$x - 1 \neq 0 \ \wedge \ x + 1 \neq 0$$

$$x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1$$

Czyli dziedzina:

$$D : x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$$

Następnie mnożę "na krzyż"w celu pozbycia się ułamków:

$$(2x+5)(x+1) = (2x+2)(x-1)$$

Zawuażę, że z prawej strony z pierwszego nawiasu mogę wyciągnąć 2:

$$(2x+5)(x+1) = 2 \cdot (x+1)(x-1)$$

Przenoszę wszystko na lewą stronę i wyciągam czynnik $(x+1)$ przed nawias:

$$(2x+5)(x+1) - 2 \cdot (x+1)(x-1) = 0$$

$$(x+1) \cdot [(2x+5) - 2 \cdot (x-1)] = 0$$

$$(x+1) \cdot (2x+5-2x+1) = 0$$

$$(x+1) \cdot 6 = 0$$

$$x+1 = 0$$

$$x = -1$$

Sprawdzam z dziedziną: $-1 \in D$, czyli rozwiązanie równania to -1.

7.2 Zadania

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$$\frac{x+3}{x-2} = 0$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

$$\frac{2x}{x+1} - 3 = 0$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

$$\frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+2} = 0$$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie:

$$\frac{3x+1}{x+2} - \frac{2}{x-3} = 0$$

Zadanie 5. Rozwiąż równanie:

$$\frac{x-5}{x+1} + \frac{2x}{x-2} = 0$$

Zadanie 6. Rozwiąż równanie:

$$\frac{4x}{x-1} + \frac{2}{x+3} = 0$$

Zadanie 7. Rozwiąż równanie:

$$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2} = 0$$

Zadanie 8. Ile rozwiązań ma równanie:

$$\frac{(2x+8)(x-7)}{x+4} = 0$$

Zadanie 9. Ile rozwiązań ma równanie:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{6x+12} = 0$$

Zadanie 10. Ile rozwiązań ma równanie:

$$\frac{x^2-4}{(x-1)(x+2)} = 0$$

8 Równania wielomianowe trzeciego stopnia

Równaniem wielomianowym trzeciego stopnia nazywamy równanie postaci:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

gdzie a, b, c, d są znanymi nam współczynnikami. W przypadku zadań z matury podstawowej, współczynniki te zawsze pozwolą nam pogrupować taki wielomian. Schemat rozwiązywania:

1. Porządkuję wielomian - przenoszę wszyskie wyrazy na lewą stronę oraz uszeregowuję potęgi od największej do najmniejszej.
2. Grupuję wyrazy, czyli wyciągam wspólny czynnik z dwóch pierwszych wyrazów, przepisuję nawias zostawiając przerwę i dopisuję współczynnik przed drugim nawiasem.
3. Wyciągam nawias przed nawias
4. Rozwiązuję powstałe równanie w postaci iloczynowej, przyrównując każdy nawias do zera.

Uwaga. Dowolne równanie

$$x^2 = \textit{[liczba ujemna]}$$

jest sprzeczne. Takie równania często pojawiają się podczas rozwiązywania równań wielomianowych trzeciego stopnia.
Uwaga. Pierwiastkując równanie, otrzymujemy dwa rozwiązania, przykładowo:

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Przykład 1. Rozwiąż równanie

$$2x^3 + 5x^2 = 10 + 4x$$

Po pierwsze, przenoszę wszystko na lewą stronę i porządkuję:

$$2x^3 + 5x^2 = 10 + 4x$$

$$2x^3 + 5x^2 - 10 - 4x = 0$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 10 = 0$$

Wyciągam wspólny czynnik z dwóch pierwszych wyrazów:

$$x^2 \cdot (2x + 5) - 4x - 10 = 0$$

Przepisuję nawias i zastanawiam się co muszę przed nim wstawić, aby równanie się zgadzało:

$$x^2 \cdot (2x + 5) + \square(2x + 5) = 0$$

W kwadrat muszę wstawić liczbę -2:

$$x^2 \cdot (2x + 5) - 2 \cdot (2x + 5) = 0$$

Wyciągam czynnik $(2x+5)$ przed nawias:

$$(2x+5)\cdot(x^2-2)=0$$

$$2x+5=0 \ \vee \ x^2-2=0$$
$$2x=-5 \ \vee \ x^2=2$$
$$x=-\frac{5}{2} \ \vee \ x=\sqrt{2} \ \vee x=-\sqrt{2}$$

Rozwiązania: $x \in \{-\frac{5}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

8.1 Zadania

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$$x^3+3x^2+6x=-18$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

$$4x^3+54=-24x-9x^2$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

$$2x^3+4x^2=x+2$$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie:

$$x^3+4x^2-12=3x$$

Zadanie 5. Rozwiąż równanie:

$$3x^3-6x^2+2x-4=0$$

Zadanie 6. Rozwiąż równanie:

$$x^3-5x^2+4x-20=0$$

Zadanie 7. Rozwiąż równanie:

$$x^3+6x^2+4x=-24$$

Zadanie 8. Rozwiąż równanie:

$$2x^3-3x^2+6x=9$$

Zadanie 9. Rozwiąż równanie:

$$x^3+2x^2-5x-10=0$$

Zadanie 10. Rozwiąż równanie:

$$2x-4=-4x^3+8x^2$$

9 Własności funkcji

9.1 Teoria

- **Dziedzina** - Jest to zbiór liczb, dla których określona jest funkcja. Na wykresie można wyobrazić sobie jako pionowy pasek w którym zamykany jest cały wykres funkcji. Uwaga - może on być nieograniczony oraz mieć wyrwy w środku. Zapisujemy $D : x \in (0, 1)$

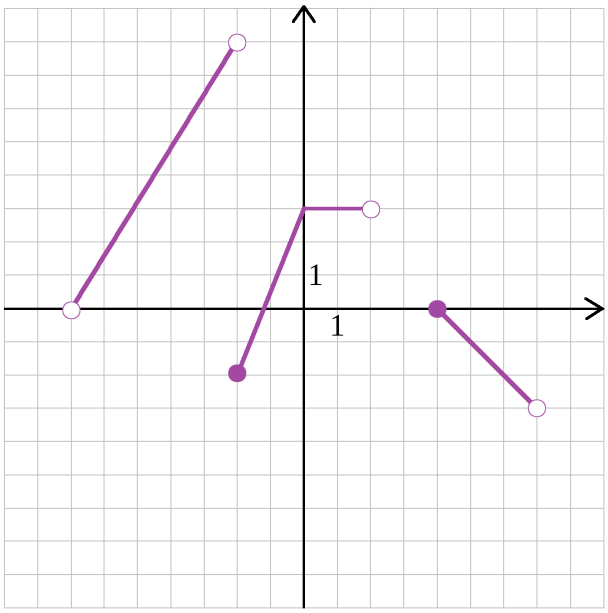
- **Zbiór wartości** - Dla każdej liczby ze zbioru wartości można wskazać taki argument, dla którego funkcja jest równa tej liczbie. Na wykresie można wyobrazić sobie jako poziomy pasek w którym zamykamy wykres funkcji. Ponownie, może on być nieograniczony oraz mieć wyrwy w środku. Zapisujemy: $ZW : y \in (0, 1)$

- **Miejsca zerowe** - argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

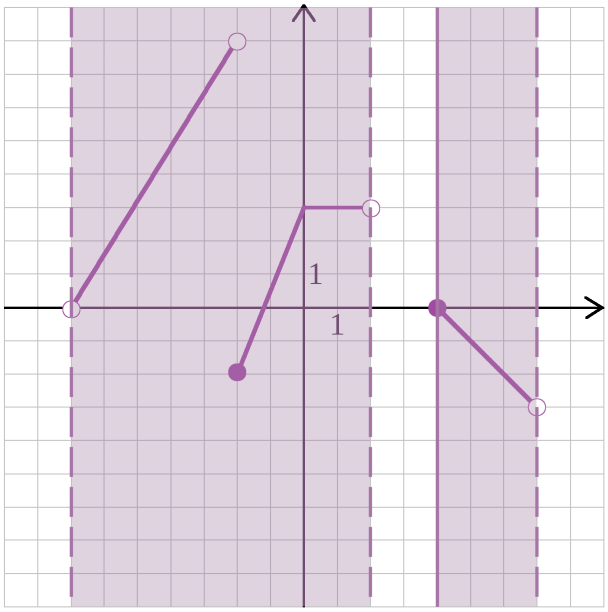
- **Przedziały monotoniczności** - maksymalne przedziały w których funkcja rośnie lub maleje. Zapisujemy:
  $f \nearrow$ dla $x \in (0, 1]$
  $f \searrow$ dla $x \in (1, 4]$
  f stała dla $x \in (4, 5)$

- Mając do rozwiązania nierówność postaci $f(x) > a$ gdzie a jest liczbą (kierunek nierówności może być inny) traktujemy prawą stronę jako funkcję stałą równą a. Rysujemy ją na wykresie (pozioma kreska na odpowiedniej wysokości). W przypadku równań rozwiązaniami są punkty przecięcia, a dla nierówności trzeba określić, gdzie wykres naszej funkcji znajduje się pod/nad kreską.

Przykład 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności tej funkcji. Wskaż argumenty, dla których $f(x) \geq -2$



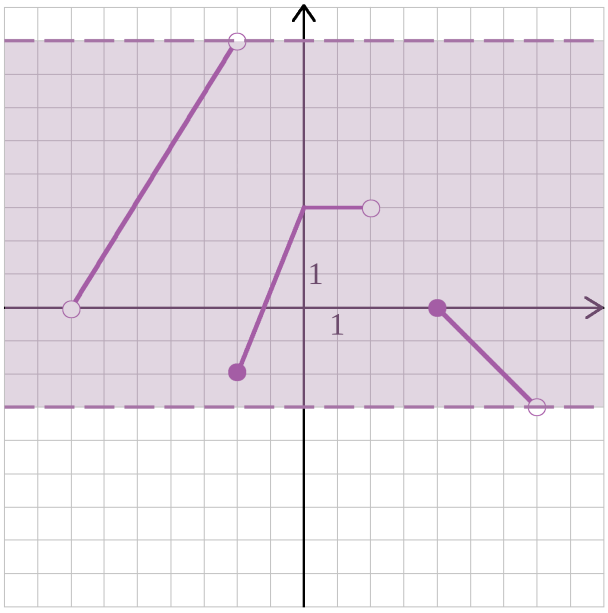
1. **Dziedzina.** Rysujemy pionowy pas w którym zawiera się wykres:



Pas ten jest ograniczony z lewej przez -7, a z prawej przez 7. Dodatkowo, jest w nim luka od 2 do 4. Czyli dziedzina:

$$D : x \in (-7, 2) \cup [4, 7)$$

2. **Zbiór wartości.** Rysujemy poziomy pas, w którym zawiera się funkcja:



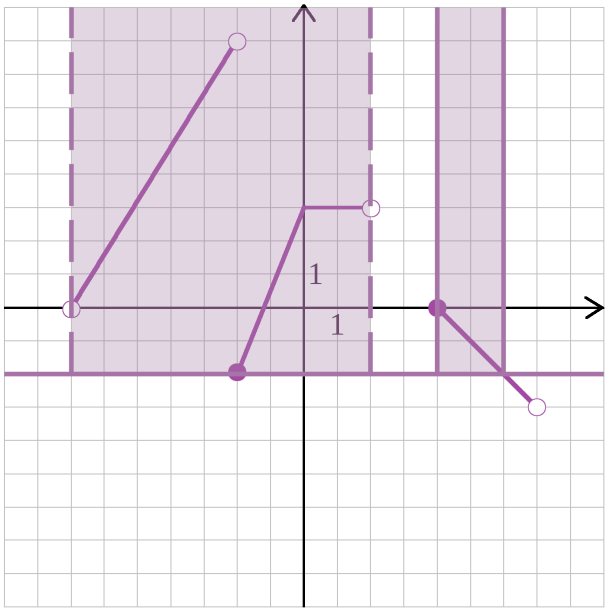
Pas ten jest ograniczony z dołu przez -3 oraz z góry przez 8. Pas nie ma żadnych luk, zatem:

$$ZW : y \in (-3, 8)$$

3. **Miejsca zerowe.** Miejsca zerowe to przecięcia wykresu funkcji z osią OX (poziomą). Czyli w naszym przypadku:
$$f(x) = 0 \text{ dla } x \in \{-1\frac{1}{4}, 4\}$$

4. **Przedziały monotoniczności.** Idąc od lewej strony mamy:
$f \nearrow$ dla $x \in (-7, -2)$
$f \nearrow$ dla $x \in [-2, 0)$
f stała dla $x \in [0, 2)$
$f \searrow$ dla $x \in [4, 7)$

5. **Nierówność.** Rozwiązujemy nierówność:
$$f(x) \geq -2$$
Rysujemy funkcję stałą równą -2, i wybieramy te argumenty, dla których wykres funkcji znajduje się ponad nią:



Z wykresu widzimy, że:
$$f(x) \geq -2 \text{ dla } x \in (-7, 2] \cup [4, 6]$$

Przykład 2. Funkcja g jest dana tabelą:

x	-2	0	2	3	5	7
y	1	7	6	0	7	1

Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 7? Narysuj wykres tej funkcji.

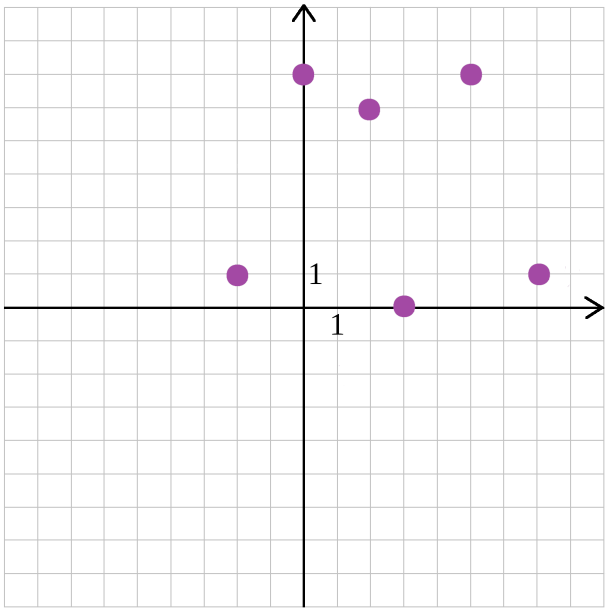
1. **Dziedzina.** Są to x dla których funkcja jest określona, czyli liczby z pierwszego wiersza tabeli. Zatem:
$$D : x \in \{-2, 0, 2, 3, 5, 7\}$$

2. **Zbiór wartości.** Są to y jakie przyjmuje funkcja. Czyli:
$$ZW : y \in \{0, 1, 6, 7\}$$

3. **Miejsca zerowe.** Są to argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości 0. Mamy jedno miejsce zerowe:
$$f(x) = 0 \text{ dla } x = 3$$

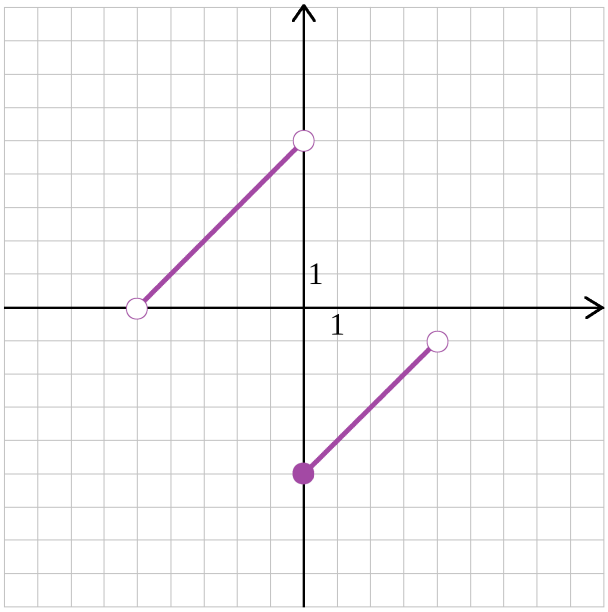
4. **Wartość 7.** Mamy dwa takie argumenty:
$$f(x) = 7 \text{ dla } x \in \{0, 5\}$$

5. **Wykres.** Nanosimy na wykres pojedyncze punkty:

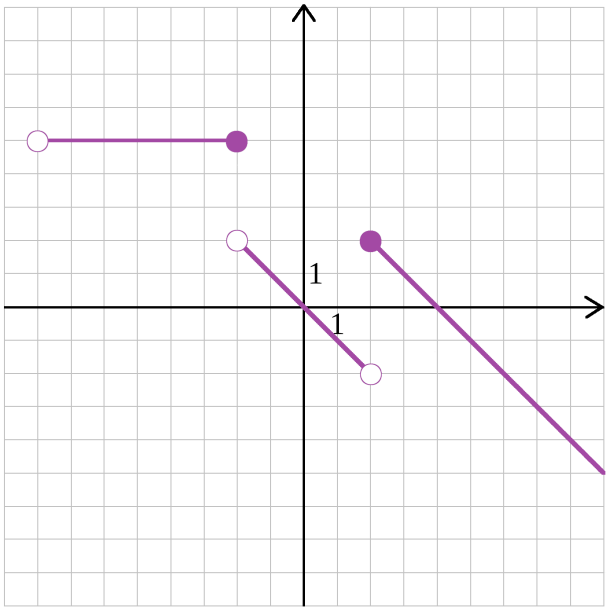


9.2 Zadania

Zadanie 1. Na wykresie przedstawiono funkcję f. Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 3?

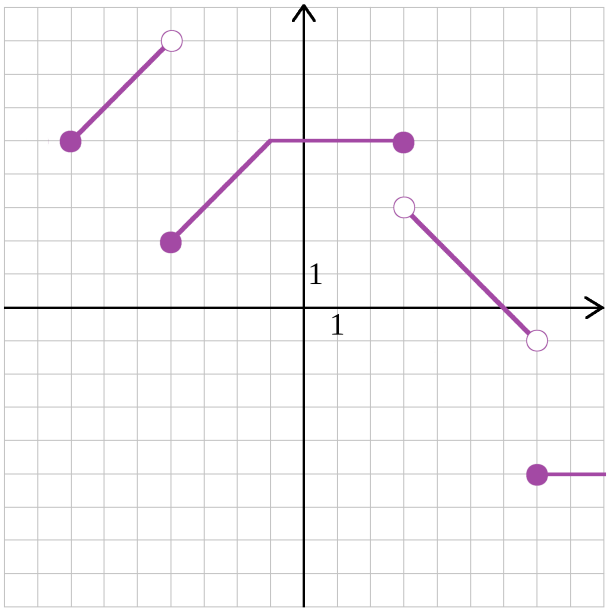


Zadanie 2. Na wykresie przedstawiono funkcję f. Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 5?

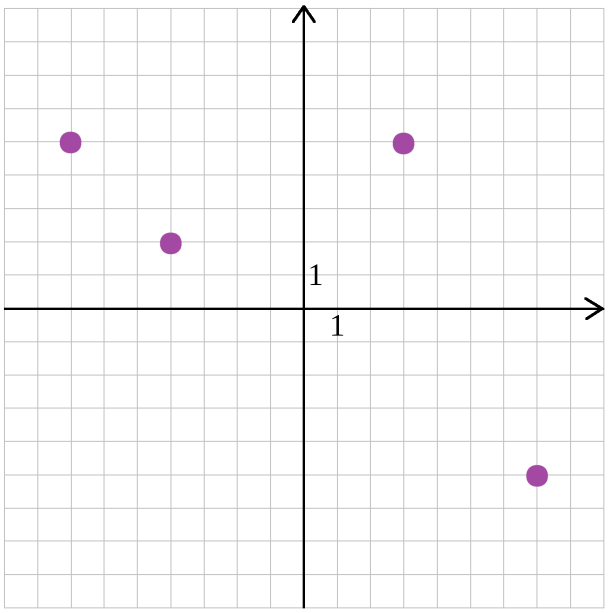


`Uwaga. Jeżeli wykres nie jest zakończony kropką, to ciągnie się w nieskończoność.`

Zadanie 3. Na wykresie przedstawiono funkcję f. Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności. Dla jakich argumentów zachodzi $f(x) < 5$?



Zadanie 4. Na wykresie przedstawiono funkcję f. Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności. Dla jakich argumentów zachodzi $f(x) > 1$?



`Uwaga. Dziedzina oraz zbiór wartości będą tutaj zbiorami skończonymi, a nie przedziałami. Trzeba wymienić elementy tych zbiorów w nawiasach { ... }`

Zadanie 5. Funkcja f jest dana tabelą:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	0	1	2	3	4	5

Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 3? Czy wykres tej funkcji jest symetryczny względem osi OY?.

Zadanie 6. Funkcja f jest dana tabelą:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od zera? Czy wykres tej funkcji jest symetryczny względem osi OY?

Zadanie 7. Funkcja f jest dana tabelą:

x	-1	0	1	2	3
y	1	1	0	1	1

Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1? Czy wykres tej funkcji jest symetryczny względem osi OY?

Zadanie 8. Funkcja f jest dana tabelą:

x	-9	-1	0	1	5
y	9	4	1	0	1

Wyznacz jej dziedzinę, zbiór wartości oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości mniejsze od 4? Czy wykres tej funkcji jest symetryczny względem osi OY?

10 Funkcje liniowe

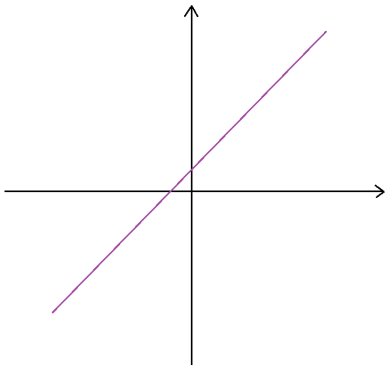
10.1 Teoria

1. **Wzór ogólny funkcji liniowej** to:

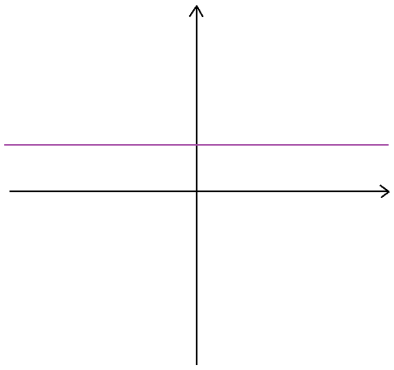
$$f(x) = ax + b$$

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, a b wyrazem wolnym.

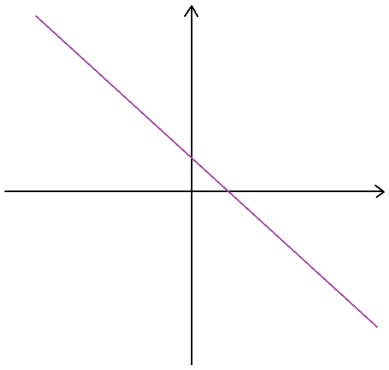
2. **Współczynnik kierunkowy** informuje nas, czy funkcja rośnie, maleje czy jest stała:



$a > 0$
funkcja rosnąca

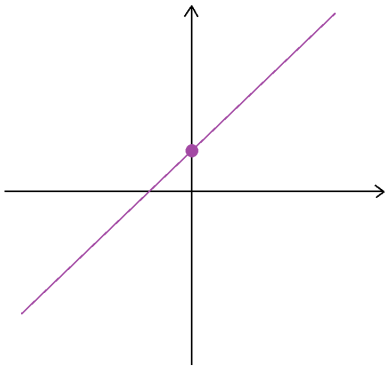


$a = 0$
funkcja stała

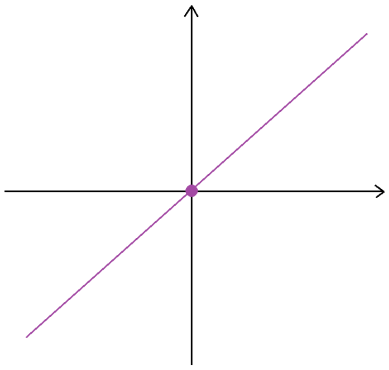


$a < 0$
funkcja malejąca

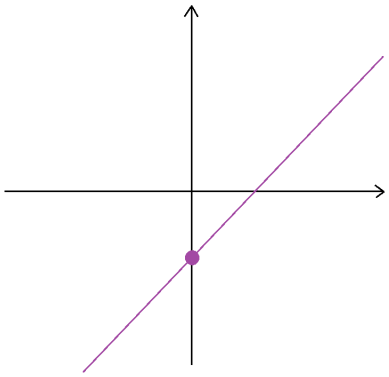
3. **Wyraz wolny** informuje nas w jakim punkcie funkcja przecina oś OY (punkt ten ma współrzędne $(0, b)$):



$b > 0$
przecięcie nad osią OX



$b = 0$
przecięcie w (0,0)



$b < 0$
przecięcie pod osią OX

4. Wykresy funkcji liniowych są **równoległe (inaczej: nie przecinają się nigdy)** jeżeli:

$$a_1 = a_2$$

czyli ich współczynniki kierunkowe są równe.

5. Wykresy funkcji liniowych są **prostopadłe (tworzą ze sobą kąt prosty)** jeżeli:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

czyli ich współczynniki kierunkowe pomnożone przez siebie dają -1.

6. Jeżeli dana jest informacja, że jakiś punkt należy do funkcji, to oznacza, że jego współrzędne spełniają równanie tej funkcji (wstawione do równania dają prawdę). Na tej podstawie można wyliczać np. wartości współczynników. Przykładowo:

$$\text{Funkcja } f(x) = 2x + b \text{ przechodzi przez punkt } P = (2, 1).$$

Chcę znaleźć współczynnik b. Wstawiam współrzędne punktu do równania funkcji:

$$1 = 2 \cdot 2 + b$$

$$b = -3$$

Przykład 1. Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = (m-2)x + 2$ oraz $g(x) = (3m+8)x - 10$ nigdy się nie przecinają?
Jeżeli proste nigdy się nie przecinają, to oznacza, że są równoległe. Czyli musi być:

$$a_1 = a_2$$

Podstawiam współczynniki kierunkowe funkcji $f(x)$ i $g(x)$:

$$m - 2 = 3m + 8$$

$$-2m = 10$$

$$m = -5$$

Czyli dla $m = -5$ wykresy funkcji nigdy się nie przecinają.

Przykład 2. Wyznacz równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do prostej $y = 2x + 1$ i przechodzi przez punkt $P = (2, 4)$.
Szukamy równania funkcji liniowej, czyli:

$$y = ax + b$$

Niewiadome to liczby a oraz b. Po pierwsze wiemy, że wykres naszej funkcji jest prostopadły do prostej o współczynniku kierunkowym 2. Wiemy, że proste są prostopadłe jeżeli iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1. Układamy zatem równanie:

$$a \cdot 2 = -1$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

Czyli na ten moment nasza prosta ma równanie $y = -\frac{1}{2}x + b$. Musimy znaleźć jeszcze współczynnik b. Wykorzystujemy drugą informację - do wykresu funkcji należy punkt $P = (2, 4)$. Wstawiamy jego współrzędne do równania funkcji:

$$4 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b$$

$$4 = -1 + b$$

$$b = 5$$

Mamy zatem całe równanie funkcji:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

10.2 Zadania

Zadanie 1. Dla jakiej wartości parametru m wykresy funkcji o równaniach $f(x) = (2m-1)x+2$ oraz $g(x) = (4-3m)x+5$ są prostopadłe?

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru k funkcja $f(x) = (k-2)x+2$ jest rosnąca?

Zadanie 3. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (2k+1)x+2$ jest malejąca?

Zadanie 4. Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = 2x+4$.

Zadanie 5. Dla jakiej wartości parametru m wykresy funkcji o równaniach $f(x) = (2m+1)x+1$ oraz $g(x) = (2m+1)x+3$ są równoległe?

Zadanie 6. Wyznacz równanie funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = 3x+1$ oraz przechodzi przez punkt $A = (0, 2$.

Zadanie 7. Wyznacz równanie funkcji liniowej, jeżeli wiadomo, że jej wykres nigdy nie przecina się z wykresem funkcji $g(x) = 4x-8$ oraz że jej miejsce zerowe wynosi 7.

Zadanie 8. Wyznacz równanie funkcji liniowej przechodzącej przez punkty $A = (1, 3)$ oraz $B = (4, 6)$
`Wskazówka: wstawić oba punkty do szukanego równania funkcji i rozwiązać układ równań.`

Zadanie 9. Wyznacz równanie funkcji liniowej, jeżeli wiadomo, że $f(2) = 4$ oraz $f(1) = 0$.
`Wskazówka: Określić na podstawie informacji z zadania jakie punkty należą do wykresu, a następnie jak w zadaniu 8.`

11 Funkcje liniowe - zadania z treścią

11.1 Teoria

Funkcja liniowa charakteryzuje się stałym tempem zmiany - nadaje się więc do opisu zjawisk, które mają w sobie jakiś stały element, przykładowo:

- Jeżeli maszyna produkuje stałą liczbę produktów na godzinę, na przykład 5, to ilość wyprodukowanych produktów po x godzinach można opisać funkcją liniową $f(x) = 5x$
- Jeżeli wiadro waży 2 kilogramy, a każdy litr wlanej wody waży 1 kg, to wagę wiadra wraz z wodą w zależności od x wlanych litrów można opisać funkcją liniową $f(x) = 1 \cdot x + 2$

Przykład. Bańka z mlekiem waży 6,5 kg, a jeden litr mleka 1,03 kg. Wyznacz wzór funkcji opisującej wagę bańki w zależności od ilości wlanego mleka oraz jej dziedzinę, wiedząc, że jej pojemność wynosi 10 litrów.

Szukamy funkcji liniowej o postaci:

$$f(x) = ax + b$$

gdzie $f(x)$ oznacza wagę bańki wraz z mlekiem, a x liczbę wlanych litrów mleka. Zauważmy, że pusta bańka powinna ważyć 6,5 kg, zatem funkcja powinna spełniać warunek:

$$f(0) = 6,5$$

Jeżeli wlejemy do niej litr mleka, to waga powinna zwiększyć się o dokładnie 1,03 kg. Czyli:

$$f(1) = 1,03 \cdot 1 + 6,5$$

Analogcznie rozpiszmy wartości funkcji przy kolejnych dolewanych litrach:

$$f(2) = 1,03 \cdot 2 + 6,5$$

$$f(3) = 1,03 \cdot 3 + 6,5$$

$$f(4) = 1,03 \cdot 4 + 6,5$$

Zauważmy, że ogólny przepis na policzenie tej wagi to:

$$f(x) = 1,03x + 6,5$$

Dziedziną tej funkcji będzie $x \in [0, 10]$, bo minimalnie możemy wlać 0 litrów mleka, a maksymalnie 10 litrów.

11.2 Zadania

Zadanie 1. Magda pracuje w firmie, gdzie otrzymuje stałą pensję podstawową w wysokości 1000 zł oraz 50 zł za każdą przepracowaną godzinę nadliczbową. Napisz funkcję liniową, która opisuje jej miesięczne wynagrodzenie $W(x)$ w zależności od liczby przepracowanych godzin x. Oblicz, ile zarobi Magda, jeśli przepracuje 20 godzin nadliczbowych.

Zadanie 2. Młode drzewo rośnie o 1,5 m rocznie. W chwili zasadzenia miało wysokość 2 m.

Napisz funkcję liniową $H(x)$ która opisuje wysokość drzewa w metrach po x latach. Oblicz, jaką wysokość osiągnie drzewo po 6 latach.

Zadanie 3. Alicja wpłaciła na konto oszczędnościowe 2000 zł. Co miesiąc odkłada dodatkowo 300 zł. Napisz funkcję liniową $S(x)$ która opisuje wysokość jej oszczędności w złotych po x miesiącach. Oblicz, ile oszczędności będzie miała Alicja po 12 miesiącach.

Zadanie 4. Pracownik od godziny 8 do 12 napisał 12 raportów, po czym udał się na przerwę obiadową. Ile raportów napisze jeszcze tego samego dnia po powrocie z godzinnej przerwy obiadowej, jeżeli kończy pracę o 16? Ile raportów napisze w ciągu całego pięciodniowego tygodnia pracy, zakładając że każdego dnia pracuje w takim samym systemie godzinowym? Załóż, że liczba pisanych raportów na godzinę jest stała.

Zadanie 5. Janek zaczął pracę o godzinie 7. Na przerwę udał się o 13, i wrócił do pracy po godzinie. O 17 miał oheblowane dokładnie 81 desek. Wyznacz funkcję opisującą zależność oheblowanych przez niego desek od liczby przepracowanych godzin, zakładając, że liczbą heblowanych przez niego desek w ciągu godziny jest stała. Jaka jest dziedzina i zbiór wartości tej funkcji, jeżeli wiadomo, że w zakładzie pracy Janka nie wolno pracować krócej niż 6 godzin dziennie oraz więcej niż 10 godzin dziennie?

Zadanie 6. Basen o pojemności 20 000 litrów jest napełniany przez pompę, która pompuje 2000 litrów wody w godzinę. Napełnianie basenu rozpoczęto o godzinie 7, a na początku w basenie było już 4000 litrów wody. Wyznacz funkcję opisującą zależność liczby litrów wody w basenie od liczby godzin, które upłynęły od 7. Jaka jest jej dziedzina i zbiór wartości? O której godzinie basen będzie pełny?

12 Układy równań

12.1 Teoria

Układem równań nazywamy zestaw dwóch lub więcej równań opisujących dwie lub więcej zmiennych. Na maturze podstawowej obowiązują nas układy zawierające dwa równania i dwie zmienne, przykładowo:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

Omówimy dwie metody rozwiązywania takich układów:

1. **Metoda przeciwnych współczynników.** Polega na sprowadzeniu układu do postaci, w której przy jednej ze zmiennych w dwóch równaniach stoją liczby przeciwne (przykładowo liczbami przeciwnymi są 2 i -2 lub 5 i -5). W naszym układzie przeciwne współczynniki ustalimy przy zmiennej y. W tym celu pomnożymy pierwsze równanie przez 2:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \ / \cdot 2 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

Przy y stoją teraz 2 i -2. Dodajmy równania stronami:

$$+\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ \underline{3x - 2y = 8} \end{cases}$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

Następnie doliczamy y wstawiając do pierwszego równania:

$$2 \cdot 2 + y = 3$$

$$y = -1$$

Czyli mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

2. **Metoda podstawiania.** W tej metodzie wyznaczamy z jednego równania jedną ze zmiennych i wstawiamy do drugiego. Rozważmy pierwsze równanie z naszego układu:

$$2x + y = 3$$

Wyznaczmy zmienną y:

$$y = 3 - 2x$$

I podstawmy do drugiego równania:

$$3x - 2y = 8$$

$$3x - 2 \cdot (3 - 2x) = 8$$

$$3x - 6 + 4x = 8$$

$$7x = 14$$

Korzystając z wcześniej wyznaczonej zależności obliczamy y:

$$y = 3 - 2 \cdot 2 = -1$$

Czyli mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

12.2 Układy sprzeczne i nieoznaczone

Jeżeli układ nie ma rozwiązań, to mówimy że jest sprzeczny. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$$

Spróbujemy rozwiązać go metodą przeciwnych współczynników. Pomnożymy pierwsze równanie przez (-2) i dodamy równania stronami:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \ / \cdot (-2) \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$0 = 1$$

Otrzymaliśmy równanie które jest zawsze nieprawdziwe. Wniosek:

Jeżeli w trakcie rozwiązywania układu otrzymamy równanie zawsze nieprawdziwe, to układ jest sprzeczny.

Jeżeli natomiast układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, to mówimy, że jest nieoznaczony. Rozważmy układ:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \ / \cdot (-2) \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie które jest zawsze prawdziwe. Wniosek:

Jeżeli w trakcie rozwiązywania układu otrzymamy równanie zawsze prawdziwe, to układ jest nieoznaczony.

12.3 Rozwiązywanie zadań tekstowych

Przykład. Jeden z boków prostokąta jest o 4 dłuższy od drugiego. Wiadomo także, że obwód tego prostokąta wynosi 20. Oblicz długości jego boków.

Rozwiązywanie zadania tekstowego z układów równań zawsze zaczynamy od wyraźnego wprowadzenia oznaczeń. Przyjmiemy, że:

$$a - \text{krótszy bok prostokąta}$$

$$b - \text{dłuższy bok prostokąta}$$

Następnie zapisujemy informacje z zadania w postaci równania. Informacja pierwsza mówi, że jeden z boków prostokąta jest o 4 dłuższy od drugiego. Inaczej mówiąc, jeżeli krótszy bok wydłużę o 4, to boki będą sobie równe:

$$a + 4 = b$$

Uporządkujmy jeszcze, czyli przenieśmy zmienne na lewą stronę, a liczby na prawą:

$$a - b = -4$$

Następnie zapiszemy informację o obwodzie. Obwód prostokąta to po prostu suma jego boków:

$$2a + 2b = 24$$

Zauważmy jeszcze, że powyższe równanie można obustronnie podzielić przez 2, dostaniemy wtedy:

$$a + b = 12$$

Czyli układ do rozwiązania ma postać:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 12 \end{cases}$$

Dodajmy równania stronami:

$$+\begin{cases} a - b = -4 \\ a + b = 12 \end{cases}$$
$$2a = 8$$
$$a = 4$$

Wstawiając a do pierwszego równania mamy:

$$4 - b = -4$$

$$b = 8$$

Czyli boki prostokąta mają długości 8 i 4.

12.4 Interpretacja geometryczna układów równań

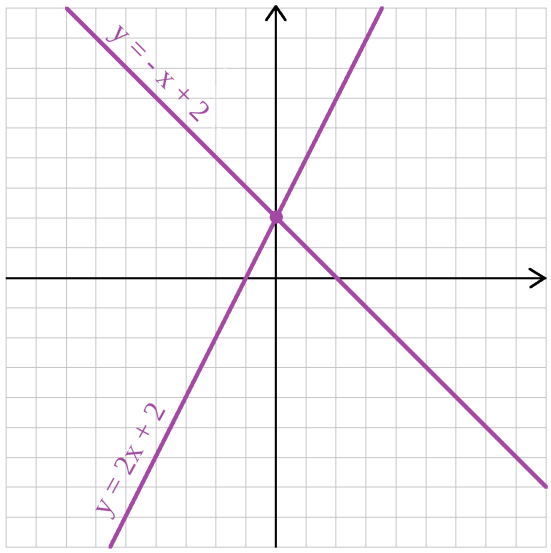
Każdy układ równań liniowych można przedstawić jako parę prostych w układzie współrzędnych. Rozważmy układ

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$$

Z obu równań wyznaczymy teraz y. Inaczej mówiąc, przekształcimy równania prostych do postaci kierunkowej.

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Jedna z prostych jest rosnąca, druga malejąca. Narysujemy je w układzie współrzędnych:



Współrzędne punktu przecięcia tych dwóch prostych są rozwiązaniem naszego układu. W tym przypadku punkt ten ma współrzędne $(0, 2)$, więc rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

Uwaga:

- Jeżeli układ jest sprzeczny, to jego interpretacją geometryczną są dwie równoległe proste (nie ma przecięć, więc nie ma rozwiązań)
- Jeżelu układ jest nieoznaczony, to jego interpretacją geometryczną są dwie pokrywające się proste (przecięć jest nieskończenie wiele)

12.5 Zadania

Zadanie 1. Rozwiąż układy dowolną metodą:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x + 3y = -1 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x + 2y = 8 \\ 3x = 4 - y \end{cases}$

d) $\begin{cases} 22x + 11y = 33 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Zadanie 2. Para liczb $x = 2$ i $y = 4$ są rozwiązaniami układu równań $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ x + 2by = 8 \end{cases}$. Oblicz wartość współczynników a i b.

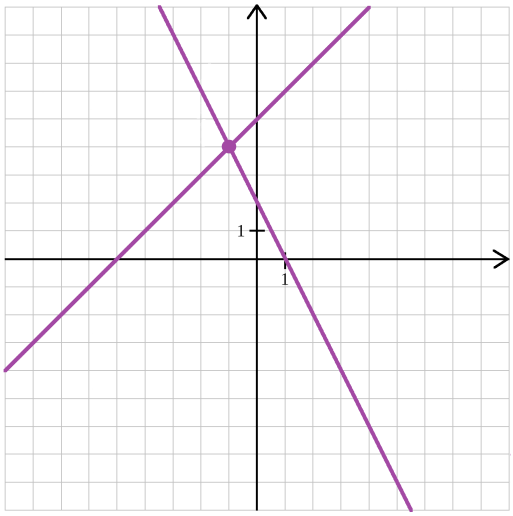
Zadanie 3. Janek za zakup dwóch soków i czterech lizaków zapłacił 26 złotych, a Ania za zakup jednego soku i siedmiu lizaków zapłaciła 14 złotych. Oblicz cenę soku i lizaka.

Zadanie 4. Obwód prostokąta wynosi 60. Jeden z boków jest o 8 krótszy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta.

Zadanie 5. Samochód wyjechał z miejscowości A o godzinie 10 i jechał z prędkością $40\frac{km}{h}$. Rower wyjechał z miejscowości B o tej samej godzinie i jechał z prędkością $20\frac{km}{h}$. Wiedząc, że odległość między miejsowościami A i B wynosi $40km$ oblicz o której godzinie spotkają się rower i samochód.

Zadanie 6. Przedstaw interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -x + y = 3 \end{cases}$ Odczytaj rozwiązanie tego układu z rysunku.

Zadanie 7. Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną pewnego układu równań:



Odczytaj rozwiązanie tego układu, a następnie zapisz ten układ równań.

`Podpowiedź: Należy wyznaczyć równania obu prostych z rysunku.`

13 Funkcje kwadratowe

13.1 Postaci funkcji kwadratowej

1. Postać ogólna:
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
gdzie a, b, c są stałymi, znanymi nam współczynnikami

2. Postać iloczynowa:
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
gdzie x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej

3. Postać kanoniczna:
$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$
gdzie (p, q) to współrzędne wierzchołka wykresu funkcji.

Współczynnik a z powyższych wzorów interpretujemy następująco:

- $a > 0 \Rightarrow$ wykres funkcji (parabola) ma ramiona skierowane do góry
- $a < 0 \Rightarrow$ wykres funkcji (parabola) ma ramiona skierowane do dołu

13.2 Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Szukając miejsc zerowych funkcji kwadratowej po pierwsze należy zastanowić się, z jaką postacią funkcji mamy do czynienia:

- Jeżeli funkcja jest dana w postaci ogólnej, to obliczamy deltę:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
a następnie (o ile $\Delta > 0$) miejsca zerowe ze wzorów:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
Jeżeli $\Delta < 0$ to nie ma miejsc zerowych. Jeżeli $\Delta = 0$ to jest jedno podwójne miejsce zerowe dane wzorem $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Jeżeli funkcja jest w postaci iloczynowej, to od razu dostajemy miejsca zerowe - są to x_1, x_2 ze wzoru danego powyżej.

- Jeżeli funkcja jest w postaci kanonicznej, to na ogół należy przekształcić ją do postaci ogólnej, i postąpić jak w pierwszym podpunkcie (zdarzają się szczególne przypadki, gdzie można prościej)

13.3 Współrzędne wierzchołka wykresu funkcji kwadratowej

Dana jest funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ w postaci ogólnej. Współrzędne jej wierzchołka $W = (p, q)$ możemy obliczyć korzystając z następujących wzorów:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Drugą współrzedną możemy liczyć także jako wartość funkcji w pierwszej współrzędnej, czyli:

$$q = f(p)$$

Ponadto, jeżeli funkcja jest dana w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, to pierwszą współrzędną wierzchołka można obliczyć jako średną arytmetyczna z miejsc zerowych:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

13.4 Przykłady

Przykład 1. Rozwiąż równanie $x^2 - 4 = 0$.
Zauważmy, że funkcja jest tutaj przedstawiona jednocześnie w postaci ogólnej oraz kanonicznej. Równanie jest o tyle szczególne, że $b = 0$ (nie ma x w pierwszej potędze). W takiej sytuacji równanie możemy rozwiązać poprzez np. przeniesienie wyrazu wolnego na prawą stronę:

$$x^2 = 4$$

następnie piewiastkujemy równanie, pamiętając o tym, że $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$|x| = 2$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

Czyli $x \in \{-2, 2\}$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $x^2 - 2x = 0$.
Funkcja jest przedstawiona w postaci ogólnej, jednak wyraz wolny jest równy 0. W takiej sytuacji możemy łatwo przekształcić ją do postaci iloczynowej wyciągając x przed nawias:

$$x(x - 2) = 0$$

Iloczyn dwóch liczb jest zerowy jeżeli co najmniej jedna z liczb jest zerem:

$$x = 0 \vee x - 2 = 0$$

Czyli $x \in \{0, 2\}$.

Przykład 3. Określ, w jakiej postaci przedstawiona jest funkcja $f(x) = 2(x-2)(x-4)$. Przedstaw ją w pozostałych postaciach.

Funkcja z zadania jest przedstawiona w postaci iloczynowej. Przekształcimy ją najpierw do postaci ogólnej - wystarczy wymnożyć nawiasy oraz uporządkować wyrazy:

$$f(x) = 2(x^2 - 4x - 2x + 8)$$

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 16$$

Następnie w celu przedstawienia funkcji w postaci kanonicznej wyznaczymy współrzędne wierzchołka:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$q = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 16 = 18 - 36 + 16 = -2$$

Wstawiamy do wzoru postaci kanonicznej **pamiętając o współczynniku** a:

$$f(x) = 2(x-3)^2 - 2$$

Przykład 4. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkty $(3, 0)$ i $(6, 9)$ oraz jest symetryczny względem osi OY.
Zauważmy, że punkt $(3, 0)$ informuje nas, że miejsce zerowe funkcji $x_1 = 3$. Skoro wykres jest symetryczny względem pionowej osi, to drugim miejscem zerowym musi być $x_2 = -3$. Wstawmy te informacje do wzoru funkcji w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x-3)(x+3)$$

Nie znamy współczynnika a - wykorzystamy teraz punkt $(6, 9)$. Wstawmy współrzędne do powyższego równania:

$$9 = a(6-3)(6+3)$$

$$9 = a \cdot 27$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Czyli wzór funkcji to $f(x) = \frac{1}{3}(x-3)(x+3)$.

13.5 Zadania

Zadanie 1. Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 2x = 3$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:

$$x^2 + 9 = 6x$$

Zadanie 3. Rozwiąż równanie:

$$x^2 - 9 = 0$$

Zadanie 4. Rozwiąż równanie:

$$4x^2 = 16x$$

`Absolutnie nie dzielimy przez x! na jedną stronę i wyciągamy przed nawias.`

Zadanie 5. Określ, w jakiej postaci dana jest funkcja $f(x) = 4(x-2)^2 - 2$. Przedstaw ją w pozostałych postaciach. Określ jej zbiór wartości.

Zadanie 6. Określ, w jakiej postaci dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Przedstaw ją w pozostałych postaciach. Określ jej zbiór wartości.

Zadanie 7. Wyznacz współrzędne wierzchołka funkcji $f(x) = x^2 - 4x$.

Zadanie 8. Wskaż funkcję, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty, -1]$:
A. $f(x) = (x-1)^2 - 4$
B. $f(x) = (x+2)^2 + 1$
C. $f(x) = (x+2)^2 - 1$
D. $f(x) = -(x+2)^2 - 1$

Zadanie 9. O funkcji kwadratowej f wiadomo, że $f(3) = 0$ oraz $\Delta = 0$. Ponadto przechodzi ona przez punkt $(0, 9)$. Wyznacz wzór tej funkcji.
`Wskazówka: jeżeli miejsce zerowe jest jedno, to do postaci iloczynowej pod` x_1 `i` x_2 `wstawiamy tę samą liczbę.`

Zadanie 10. Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej f wynosi -1 dla argumentu $x = 2$. Wiedząc, że $f(0) = 3$ wyznacz wzór tej funkcji.

14 Nierówności kwadratowe

14.1 Teoria

Nierównością kwadratową nazywamy nierówność w jednej z czterech postaci:

$$f(x) > 0$$

$$f(x) < 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$f(x) \leq 0$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją kwadratową. Nierówności kwadratowe rozwiązujemy w następujących krokach:

1. **Przenosimy wszystko na lewą stronę.**
2. **Wyznaczamy miejsca zerowe.** Jest to równoważne z rozwiązaniem równania $f(x) = 0$. Zależnie od postaci funkcji kwadratowej, można rozwiązywać takie równanie różnymi sposobami (patrz poprzedni rozdział).
3. **Określamy znak współczynnika** a. Jeżeli jest dodatni, to parabola ma ramiona do góry, a jeżeli jest ujemny to ma ramiona do dołu.
4. **Szkicujemy funkcję**. Na szkicu wystarczy narysować poziomą oś, zaznaczyć na niej miejsca zerowe (o ile są) oraz poprowadzić parabolę, z odpowiednio skierowanymi ramionami. Na koniec wracamy do wyjściowej nierówności i określamy czy funkcja miała znajdować się nad osią, pod osią itd. i wyznaczamy przedział będący rozwiązaniem.

Przykład 1. Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 2x \leq 3$$

1. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewo:

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

2. Wyznaczamy miejsca zerowe, tj. rozwiązujemy następujące równanie:

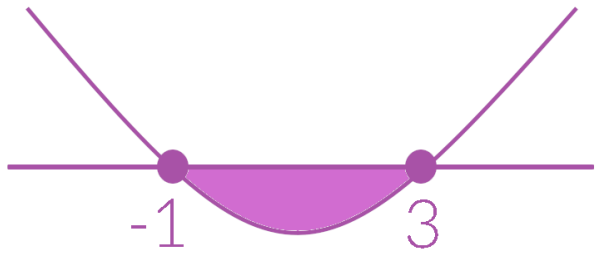
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \ , \ x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

3. $a = 1 > 0$ zatem parabola ma ramiona do góry.

4. Szkicujemy funkcję:



Zaznaczamy przedział, w którym funkcja znajduje się pod osią lub na osi (dlatego kółka zamalowane). Rozwiązanie:

$$x \in [-1, 3]$$

14.2 Zadania

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

$$(x-3)(2-x) \geq 0$$

Zadanie 2. Rozwiąż nierówność:

$$x^2 + 2x + 8 > 0$$

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność:

$$x^2 + 2 < 0$$

`Uwaga: rozwiązaniem może być zbiór pusty.`

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 9 > 0$$

`Można rozłożyć na postać iloczynową ze wzoru skróconego mnożenia`

Zadanie 5. Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - x > 2$$

Zadanie 6. Rozwiąż nierówność:

$$x(x-2) > 0$$

Zadanie 7. Rozwiąz nierówność:

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

`Uwaga: jedno miejsce zerowe.`

Zadanie 8. Rozwiąż nierówność:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 2x^2 - 4x + 2$$

Zadanie 9. Rozwiąz nierówność:

$$3(x+1)^2 + 1 > 0$$

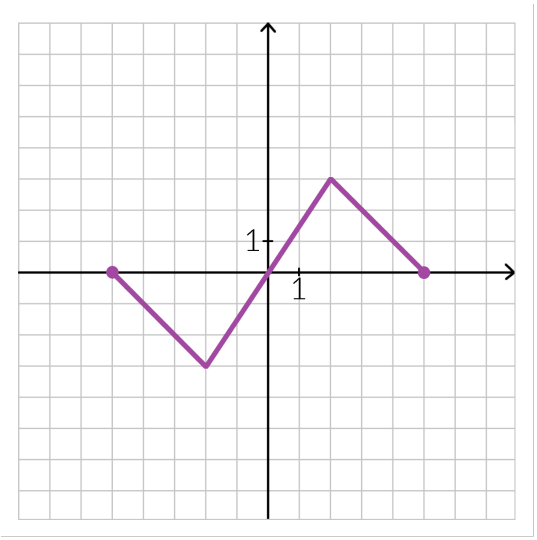
Zadanie 10. Rozwiąż nierówność:

$$(4-2x)(1-x) \leq 0$$

15 Przekształcenia wykresów funkcji

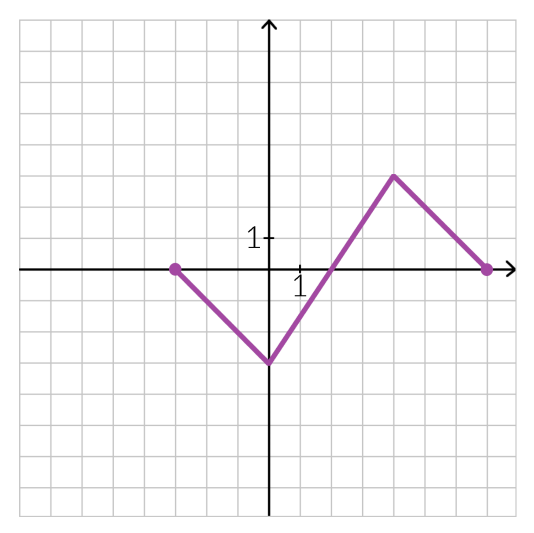
15.1 Teoria

Na maturze podstawowej obowiązują następujące przekształcenia:
1. Przesunięcie wzdłuż osi OX. W tym przypadku wykres funkcji przesuwa się w lewo lub prawo. Na poniższym rysunku przesuniemy wykres o 2 jednostki w prawo (inaczej: przesuniemy o wektor $\overrightarrow{v} = [2, 0]$).



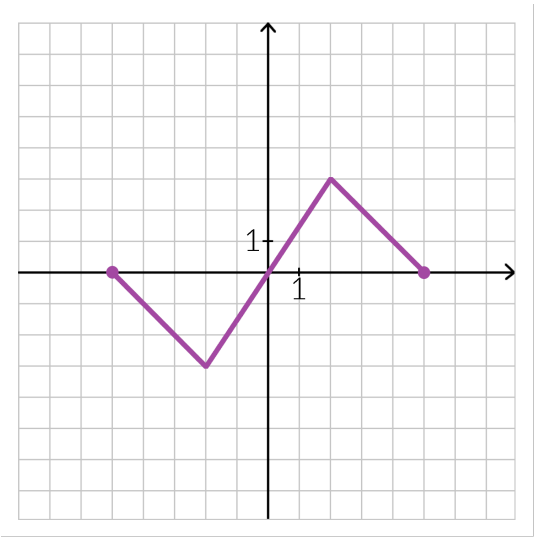
Przesuwamy o wektor:

$\overrightarrow{v} = [2, 0]$



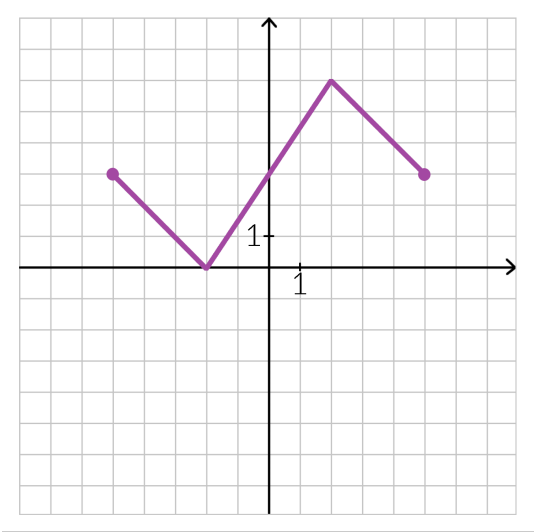
$y = f(x)$ $y = f(x - 2)$

Zauważmy, że w wyniku przesunięcia wzdłuż osi OX, w równaniu funkcji **odejmujemy** liczbę 2 bezpośrednio za argumentem x (patrz podpisy pod wykresami).
2. Przesunięcie wzdłuż osi OY. Tutaj wykres funkcji przesuwa się do góry lub do dołu. Na poniższym rysunku przesuniemy wykres funkcji o 3 jednostki w górę. (inaczej: przesuniemy o wektor $\overrightarrow{v} = [0, 3]$).



Przesuwamy o wektor:

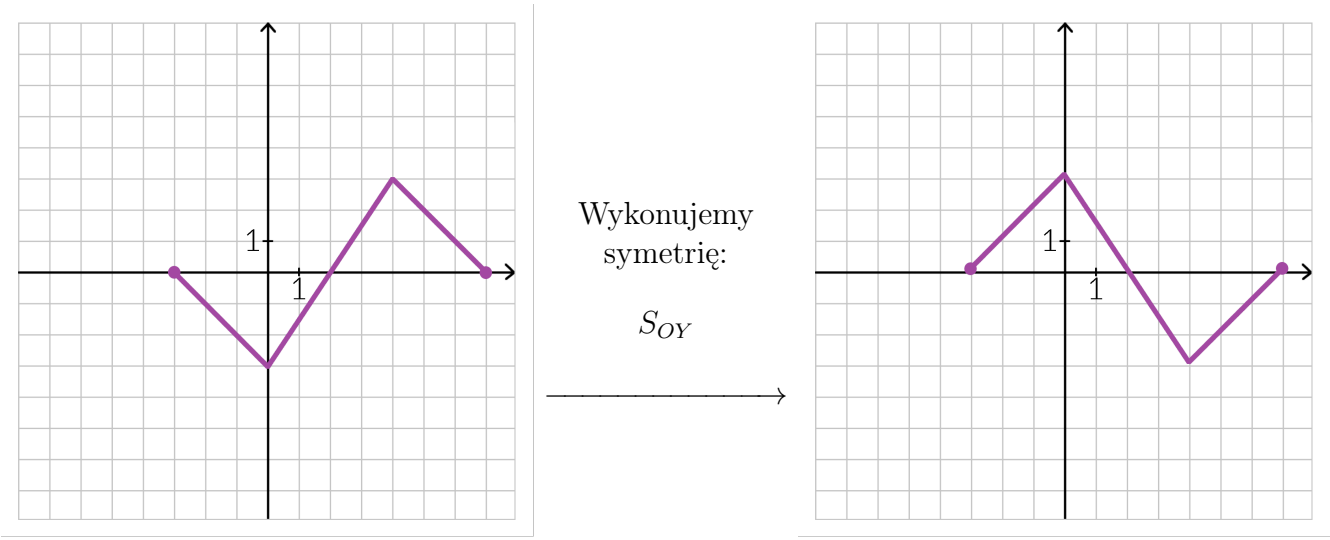
$\overrightarrow{v} = [0, 3]$



$y = f(x)$ $y = f(x) + 3$

Zauważmy, że w wyniku przesunięcia wzdłuż osi OY, w równaniu funkcji dodajemy liczbę 3 bezpośrednio za argumentem x (patrz podpisy pod wykresami).

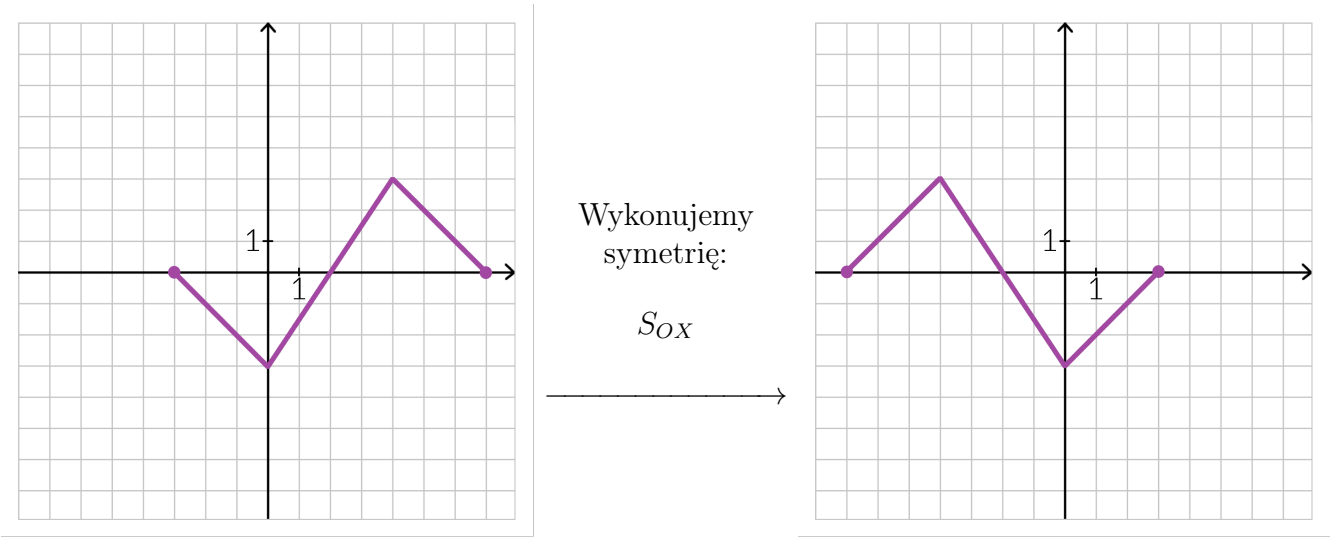
3. Symetria względem osi OY. W tym przypadku wykres funkcji obraca się "do góry nogami".



$y = f(x)$ $y = -f(x)$

Przy tym przekształceniu wstawiamy minusa przed całym równaniem funkcji.

4. Symetria względem osi OX. W tym przypadku wykres funkcji odbija się względem pionowej osi. W równaniu funkcji wstawiamy wówczas minusa przed samym argumentem.



$y = f(x)$ $y = f(-x)$

Przykład 1. Dana jest funkcja $f(x) = 2x + 1$. Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f(x+2) - 1$. Narysuj wykres oraz napisz wzór funkcji $g(x)$.

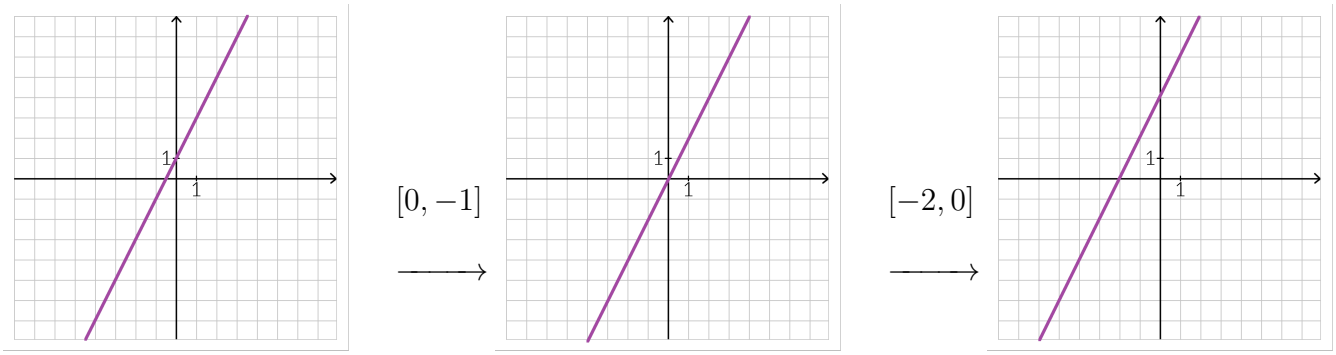
Rozwiązanie. Przeanalizujmy wzór funkcji g:

$$g(x) = f(x+2) - 1$$

Funkcja g jest zatem przesuniętą o pewien wektor funkcją f. Zauważamy dwie rzeczy:

- za całą funkcją odejmujemy 1, zatem wykres funkcji f przesuniemy o jednostkę w dół (wzdłuż osi OY)
- bezpośrednio za argumentem dodajemy 2, zatem wykres funkcji f przesuniemy o dwie jednostki w lewo.

Możemy zatem zapisać, że wykres funkcji f przesuwamy o wektor $\overrightarrow{v} = [-2, -1]$. Wykonamy szkic bazowej funkcji $f(x) = 2x + 1$, a następnie przejdziemy kolejnymi przekszałceniami do wykresu funkcji $g(x)$:



$y = f(x)$ $\qquad$ $y = f(x) - 1$ $\qquad$ $y = f(x+2) - 1$

Na ostatnim rysunku mamy wykres funkcji $g(x)$. Teraz napiszemy wzór tej funkcji, wychodząc od wzoru funkcji f i wprowadzając po kolei zmiany wynikające z przesunięć:

$$2x + 1 \xrightarrow{\overrightarrow{v} = [0,-1]} 2x + 1 - 1 \xrightarrow{\overrightarrow{v} = [-2,0]} 2(x+2) + 1 - 1$$

Uprośćmy wzór po obu przekształceniach:

$$g(x) = 2(x+2) + 1 - 1 = 2x + 4$$

Czyli mamy wzór funkcji.

15.2 Zadania

Zadanie 1. Zapisz wzór funkcji $f(x)$ przesunięty o wektor $\overrightarrow{v}$, jeżeli:

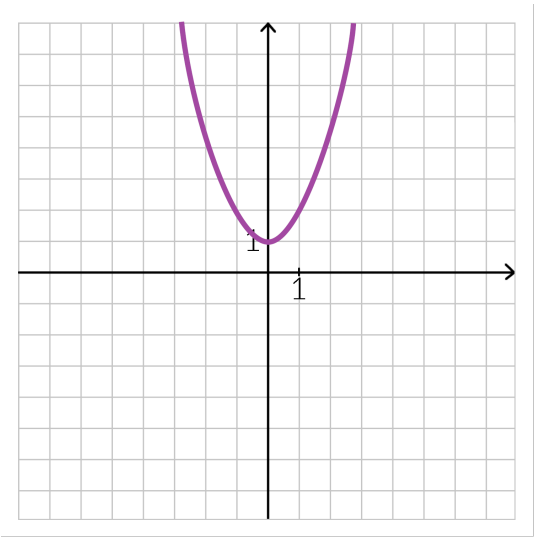
a) $f(x) = x + 1$, oraz $\overrightarrow{v} = [2, -1]$

b) $f(x) = 3x + 4$, oraz $\overrightarrow{v} = [-1, 1]$

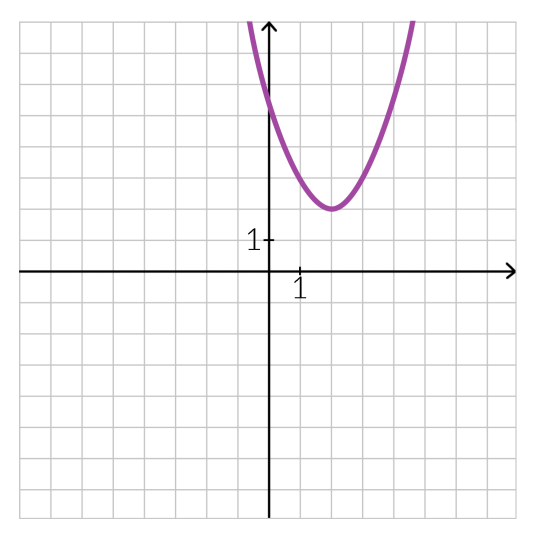
c) $f(x) = \sqrt{x}$, oraz $\overrightarrow{v} = [3, 3]$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, oraz $\overrightarrow{v} = [-1, 2]$

Zadanie 2. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$:



$y = f(x)$



$y = g(x)$

Funkcja $g(x)$ jest określona wzorem:

A. $g(x) = f(x + 1) - 2$

B. $g(x) = f(x + 2) + 1$

C. $g(x) = f(x - 2) + 1$

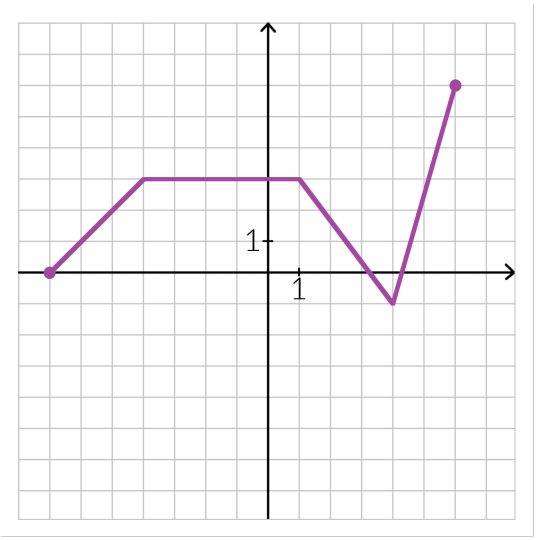
D. $g(x) = f(x - 1) + 2$

Zadanie 3. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Podaj zbiór wartości funkcji $g(x) = f(x - \frac{3}{2}) + 2$.

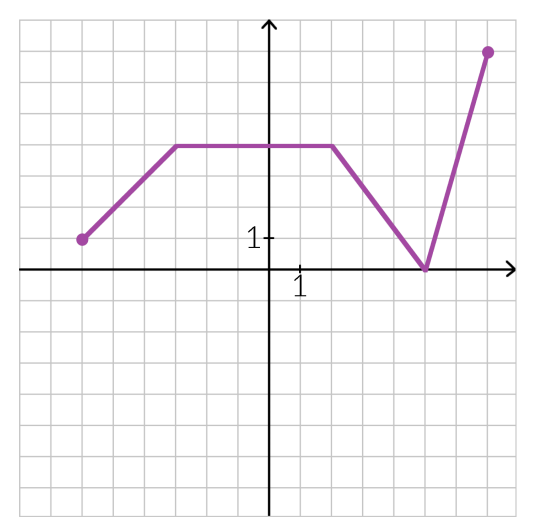
Zadanie 4. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 4$. Podaj zbiór wartości funkcji $g(x) = -f(x)$.

Zadanie 5. Dana jest funkcja $f(x) = -x + 2$. Narysuj wykres i napisz wzór funkcji $g(x) = f(x + 1) - 3$.

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$:



$y = f(x)$



$y = g(x)$

Funkcja $g(x)$ jest określona wzorem:

A. $g(x) = f(x+1) - 1$

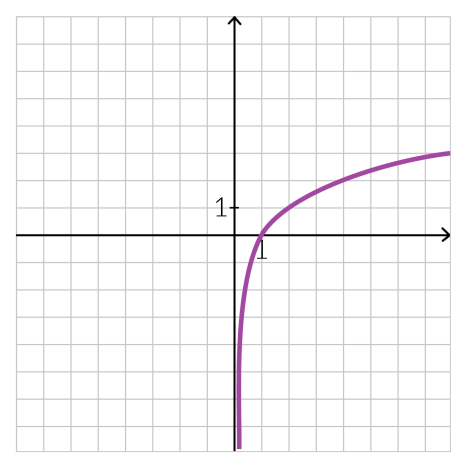
B. $g(x) = f(x+2) + 1$

C. $g(x) = f(x-1) + 1$

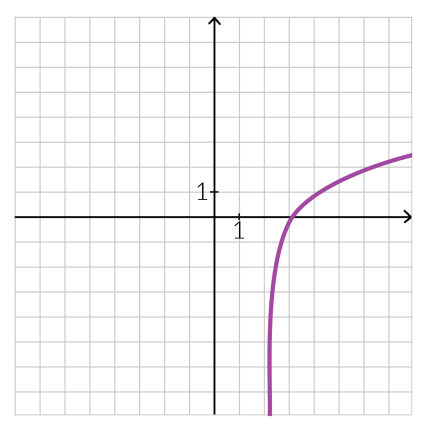
D. $g(x) = f(x-2) + 1$

Zadanie 7. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2$. Narysuj wykres i napisz wzór funkcji $-g(x-1) - 3$. Jaki jest zbiór wartości funkcji g?

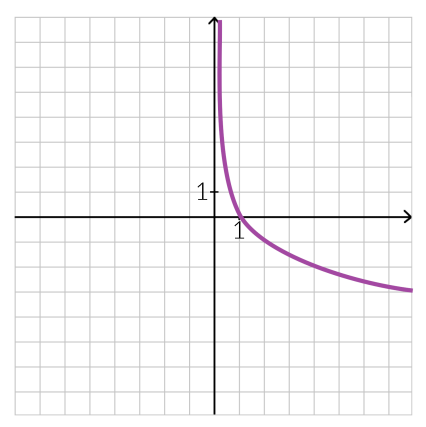
Zadanie 8. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x)$:



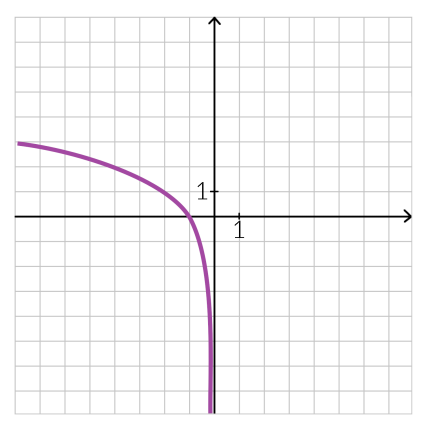
Na którym z poniższych rysunków przedstawiono wykres funkcji $g(x) = f(-x)$?



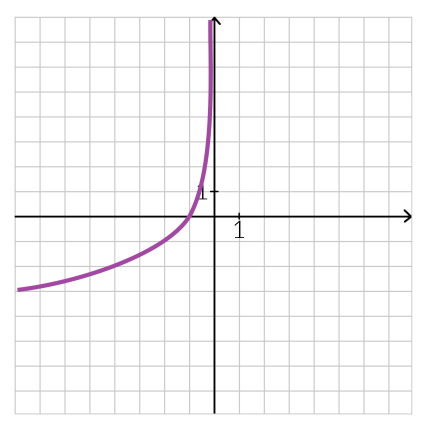
A.



B.



C.



D.

`Dodatkowe pytanie: jak wygląda wzór funkcji f?`

16 Ciągi

16.1 Ciągi arytmetyczne - teoria

Ciągiem arytmetycznym a_n nazywamy sekwencję liczb, w której każda kolejna powstaje przez dodanie do poprzedniej pewnej stałej różnicy r. Przykładowo dla ciągu:

$$2, 5, 8, 11, ...$$

mamy $a_1 = 2$ oraz $r = 3$.

Wzory:

- n-ty wyraz ciągu:
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
- suma n początkowych wyrazów:
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$
lub
$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$
- zależność między trzema kolejnymi wyrazami:
$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Przykład 1. O ciągu arytmetycznym wiadomo, że $a_3 = 4$ oraz $a_8 = 24$. Oblicz pierwszy wyraz oraz różnicę tego ciągu.

Zapiszmy informacje z zadania w układzie równań:

$$\begin{cases} a_3 = 4 \\ a_8 = 24 \end{cases}$$

Rozpiszemy lewe strony powyższych równań korzystając ze wzoru ogólnego na n-ty wyraz ciągu:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 4 \\ a_1 + 7r = 24 \end{cases}$$

Odejmiemy równania stronami:

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 4 \\ \underline{a_1 + 7r = 24} \end{cases}$$
$$-5r = -20$$
$$r = 4$$

Czyli różnica ciągu jest równa 4. Wstawiając do równania pierwszego z układu równań obliczymy a_1:

$$a_1 + 2 \cdot 4 = 4$$

$$a_1 = -4$$

Czyli mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ r = 4 \end{cases}$$

Przykład 2. Ciąg arytmetyczny jest dany wzorem $a_n = 2n + 1$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu trzeba zsumować aby otrzymać liczbę 2303?

Przyjrzyjmy się wzorowi ogólnemu:

$$a_n = 2n + 1$$

Podstawiając kolejne wartości n obliczymy kilka pierwszych wyrazów:

$$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

Z powyższych równań widać, że pierwszy wyraz wynosi 3, a różnica 2. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest dana wzorem:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Wstawmy dane:

$$2303 = \frac{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$$

Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą. Rozwiązujemy:

$$2303 = \frac{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n \ / \cdot 2$$

$$4606 = [6 + 2 \cdot (n-1)] \cdot n$$

$$4606 = (6 + 2n - 2) \cdot n$$

$$4606 = (2n + 4) \cdot n$$

$$4606 = 2n^2 + 4n$$

$$2n^2 + 4n - 4606 = 0 \ / : 2$$

$$n^2 + 2n - 2303 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2303) = 4 + 9212 = 9216 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 96$$

$$n_1 = \frac{-2 - 96}{2} = -49 \ \vee \ n_2 = \frac{-2 + 96}{2} = 47$$

Pierwsze rozwiązanie jest sprzeczne, bo nie możemy sumować ujemnej liczby wyrazów. Zatem należy zsumować 47 początkowych wyrazów tego ciagu aby otrzymać liczbę 2303.

16.2 Ciągi arytmetyczne - zadania

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym a_n mamy $a_2 = 12$ oraz $a_6 = 32$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz jego różnicę. Wyznacz sumę 28 początkowych wyrazów.

Zadanie 2. W ciągu arytmetycznym a_n mamy $a_4 = 20$ oraz $a_2 = 0$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz jego różnicę. Czy ciąg ten jest rosnący?

Zadanie 3. W ciągu arytmetycznym a_n mamy $a_{12} = 26$ oraz $a_{10} = 6$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu oraz jego różnicę. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać liczbę -348?

Zadanie 4. Liczby $(x^2 + 2, 4, x^2 - 12)$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz x. Oblicz wyrazy tego ciągu.
`Uwaga. Rozważ wszystkie możliwości.`

Zadanie 5. Liczby $(2m + 1, m, 4m - 3)$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz m. Oblicz wyrazy tego ciągu.

Zadanie 6. Ciąg arytmetyczny określony jest wzorem $a_n = -n + 2$. Oblicz sumę 40 początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 7. Ciąg arytmetyczny określony jest wzorem $a_n = 14 - 4n$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy zsumować, aby otrzymać liczbę -14?

Zadanie 8. Pan Andrzej spłaca telewizor o wartości 5160 złotych w ratach miesięcznych. Oblicz, ile lat będzie trwała spłata, jeżeli pierwsza rata wynosi 100 zł, a każda kolejna jest o 10 zł większa od poprzedniej (raty 0%).

Zadanie 9. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego a_n wynosi 8, a suma trzech początkowyc wyrazów wynosi 33. Oblicz różnicę $a_{28} - a_{10}$.

16.3 Ciągi geometryczne - teoria

Ciągiem geometrycznym nazywamy sekwencję liczb, w której każda kolejna powstaje przez pomnożenie poprzedniej przez pewien stały iloraz q. Przykładowo dla ciągu:

$$1, 2, 4, 8, 16$$

mamy pierwszy wyraz $a_1 = 1$ oraz $q = 2$.

Wzory:

- n-ty wyraz ciągu:
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
- suma n początkowych wyrazów:
$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ jeżeli } q \neq 1 \\ a_1 \cdot n, \text{jeżeli } q = 1 \end{cases}$$

- zależność między trzema kolejnymi wyrazami:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Przykład 1. Ciąg geometryczny dany jest wzorem $a_n = 3 \cdot 2^n$. Oblicz sumę 8 początkowych wyrazów tego ciągu.

Obliczmy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu podstawiając kolejne wartości n:

$$a_1 = 3 \cdot 2^1 = 3 \cdot 2 = 6$$
$$a_2 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$$
$$a_3 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$$
$$a_4 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

Z powyższych równań widać, że pierwszy wyraz tego ciągu to 6, a iloraz wynosi 2. Podstawmy do wzoru na sumę:

$$S_8 = 6 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} = 6 \cdot \frac{1-128}{-1} = 6 \cdot \frac{127}{1} = 762$$

Przykład 2. O ciągu geometrycznym a_n wiadomo, że $a_3 = 27$ oraz $a_6 = 1$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Zapiszemy informacje z zadania w układzie równań:

$$\begin{cases} a_3 = 27 \\ a_6 = 1 \end{cases}$$

Rozpiszemy lewe strony korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 27 \\ a_1 \cdot q^5 = 1 \end{cases}$$

Podzielmy równania stronami:

$$\frac{a_1 \cdot q^5}{a_1 \cdot q^2} = \frac{1}{17}$$
$$q^3 = \frac{1}{27}$$
$$q = \frac{1}{3}$$

Wstawmy obliczony iloraz do pierwszego równania z układu równań:

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 27$$
$$a_1 \cdot \frac{1}{9} = 27 \ / \cdot 9$$
$$a_1 = 27 \cdot 9$$
$$a_1 = 243$$

Czyli mamy rozwiązanie:

$$\begin{cases} a_1 = 243 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

16.4 Ciąg geometryczny - zadania

Zadanie 1. O ciągu geometrycznym a_n wiadomo, że $a_2 = 2$ oraz $a_5 = 54$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Zadanie 2. O ciągu geometrycznym a_n wiadomo, że $a_5 = \frac{1}{8}$ oraz $a_{10} = 4$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Zadanie 3. Ciąg geometryczny jest określony wzorem $a_n = 2 \cdot (-1)^n$. Jaki jest pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu? Oblicz sumę 12 początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 4. Ciąg geometryczny jest określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Oblicz sumę 20 początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 5. Liczby $(x-1, x+1, 2x+2)$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x.
`Rozważ wszystkie możliwości.`

Zadanie 6. Liczby $(5, 15, \frac{2025}{m})$ tworzą ciąg geometryczny. Oblicz m.

Zadanie 7. Trzy lata temu w pewnym mieście mieszkało 100 000 osób. Każdego roku populacja zmniejsza się o 5%. Oblicz, ile mieszkańców pozostanie w mieście po 10 latach.

Zadanie 8. Pan Andrzej spłaca samochód w ratach miesięcznych. Czas spłaty wynosi 5 lat. Wiedząc, że pierwsza rata wynosiła 1200 zł, a każda kolejna jest o 2% większa od poprzedniej oblicz cenę samochodu (raty 0%).

16.5 Pozostałe ciągi - teoria

Nie każdy ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Rozważmy ciąg dany wzorem:

$$a_n = n^2 - 2$$

Obliczmy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu:

$$a_1 = 1^2 - 2 = -1$$

$$a_2 = 2^2 - 2 = 2$$

$$a_3 = 3^2 - 2 = 7$$

$$a_4 = 4^2 - 2 = 14$$

Łatwo zauważyć, że między kolejnymi wyrazami nie ma stałej różnicy ani stałego ilorazu. Spróbujmy udowodnić ten fakt.

$$r = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 2 - (n^2 - 2) = n^2 + 2n + 1 - 2 - n^2 + 2 = 2n + 1$$

Różnica jest zależna od n (nie jest stała), zatem ciąg nie jest arytmetyczny.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 - 2}{n^2 - 2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 2}{n^2 - 2} = \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - 2}$$

Iloraz jest zależny od n (nie jest stały), zatem ciąg nie jest geometryczny.

Jak rozpoznać rodzaj ciągu po wzorze ogólnym?

- Wzory ciągów arytmetycznych przypominają wzór funkcji liniowej, np.:

  $$a_n = 2n + 1$$

  Ponadto różnicą takiego ciągu jest współczynnik przy n (ten który w równaniu funkcji liniowej nazwalibyśmy kierunkowym). Tutaj $r = 2$.

- Wzory ciągów geometryczych przypominają wzór funkcji wykładniczej, ewentualnie przemnożony przez jakąś stałą, np.:

  $$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

  Ponadto ilorazem takiego ciągu jest podstawa owej funkcji wykładniczej - tutaj $q = \frac{1}{2}$.
  UWAGA: Jeżeli do powyższego ciągu dodalibyśmy stałą, np.:

  $$c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

  to ciąg ten nie jest już geometryczny.

16.6 Pozostałe ciągi - zadania

Zadanie 1. Sprawdź, czy podane ciągi są arytmetyczne:

- $a_n = \frac{2n+1}{4}$
- $b_n = 4 - n$
- $c_n = 2^n$
- n^3

`Należy obliczyć różnicę każdego z tych ciągów i stwierdzić, czy jest zależna od` n.

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane ciągi są geometryczne:

- $a_n = \frac{1}{2^n}$
- $b_n = (-2)^n$
- $c_n = 2^n$
- $d_n = 12n + 2$

`Należy obliczyć iloraz każdego z tych ciągów i stwierdzić, czy jest zależny od` n.

Zadanie 3. Ciąg jest dany wzorem

$$a_n = \log_2 n + 4^n - n^n$$

Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Zadanie 4. Ciąg jest dany wzorem

$$a_n = n! + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} - \sqrt{n}$$

oblicz 6 wyraz tego ciągu.

Zadanie 5. Suma n początkowych wyrazów pewnego ciągu jest dana wzorem $S_n = n^2 + 4n$. Oblicz trzy pierwsze wyrazy tego ciągu. Czy ciąg ten jest arytmetyczny?
`Podpowiedź:` $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Zadanie 6. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg dany wzorem:

$$a_n = n^2 - 2n - 3$$

`Podpowiedź: rozwiązać nierówność i określić ile liczb naturalnych ją spełnia.`

Zadanie 7. Ile wyrazów dodatnich ma ciąg dany wzorem:

$$a_n = -n^2 + 5n + 6$$

Zadanie 8. Ciąg jest dany wzorem

$$a_n = \log_2 \frac{1}{n}$$

Którym wyrazem tego ciągu jest liczba -8?

Zadanie 9. Ciąg jest dany wzorem

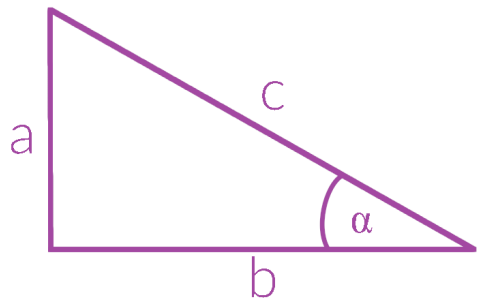
$$a_n = n^2 + n$$

Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 6?

17 Trygonometria - definicje funkcji i zastosowania

17.1 Definicje funkcji trygonometrycznych

Każda funkcja trygonometryczna jest stosunkiem dwóch boków w trójkącie prostokątnym. Rozważmy trójkąt jak na poniższym rysunku:



Boki a oraz b nazwiemy przyprostokątnymi, a c przeciwprostokątną. Określimy funkcje trygonometryczne kąta α:

- funkcja sinus - stosunek przyprostokątnej naprzeciwko kąta do przeciwprostokątnej:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

- funkcja cosinus - stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta do przeciwprostokątnej:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

- funkcja tangens - stosunek przyprostokątnej naprzeciwko kąta do przyprostokątnej przyległej do kąta:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$$

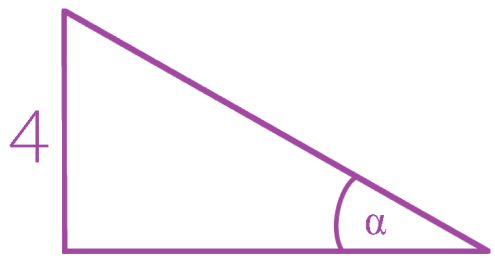
- funkcja cotangens - stosunek przyprostokątnej przyległej do kąta do przyprostokątnej naprzeciwko kąta (odwrotność tangensa):

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Wartości tych funkcji dla charakterystycznych kątów można znaleźć w tabeli trygonometrycznej:

Funkcja	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\text{ctg}\ \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Przykład 1. Na rysunku przedstawiono trójkąt prostokątny. Wiedząc, że $\alpha = 30°$ oblicz długość przeciwprostokątnej.



Oznaczmy szukaną przeciwprostokątną jako x. Sinus kąta $\alpha = 30°$ jest stosunkiem przyprostokątnej o długości 4 do przeciwprostokątnej. Zapiszmy:

$$\sin 30° = \frac{4}{x}$$

Z tabeli trygonometrycznej możemy odczytać, że $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Wstawmy do powyższego równania:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$$

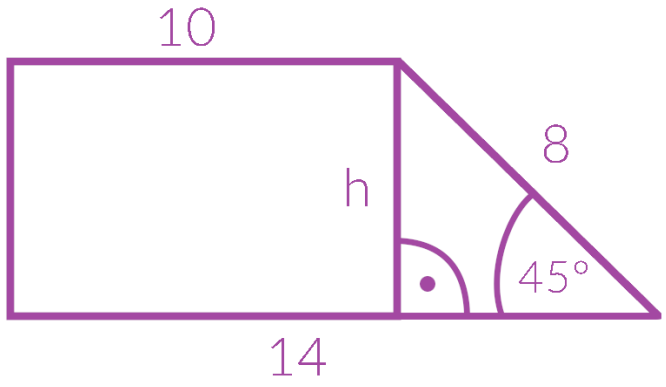
Skąd po rozwiązaniu mamy $x = 8$.

Przykład 2. Kąt ostry w trapezie prostokątnym ma miarę 45°, a jego dłuższe ramię ma długość 8. Wiedząc, że podstawy mają długość 10 i 14 wyznacz pole tego trapezu.

Przypomnijmy wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

gdzie a, b to podstawy trapezu, a h to jego wysokość. Ponieważ długości podstaw są nam dane w zadaniu, naszym zadaniem jest obliczenie wysokości. Wykonajmy rysunek:



Skupmy się na trójkącie prostokątnym powstałym po prawej stronie trapezu. Sinus kąta $\alpha = 45°$ jest stosunkiem przyprostokątnej tego trójkąta (czyli wysokości trapezu) do przeciwprostokątnej trójkąta (będącej dłuższym ramieniem trapezu). Zapiszemy zatem:

$$\sin 45° = \frac{h}{8}$$

Z tabeli trygonometrycznej odczytamy, że $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wstawmy do równania:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{8}$$

Mnożymy na krzyż:

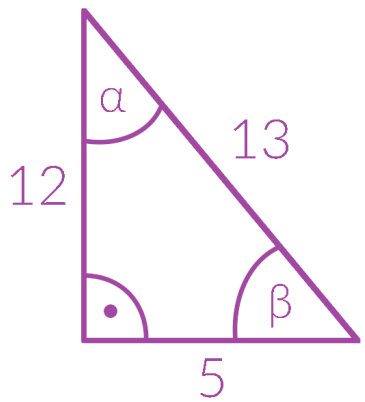
$$8\sqrt{2} = 2h$$
$$h = 4\sqrt{2}$$

Czyli mamy wysokość trapezu. Podstawiamy do wzoru na pole:

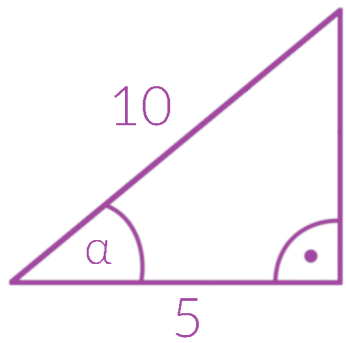
$$P = \frac{(10+14)\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \cdot 2\sqrt{2} = 48\sqrt{2}$$

17.2 Zadania

Zadanie 1. Oblicz wszystkie funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, tangens, cotangens) kątów α i β w poniższym trójkącie:



Zadanie 2. Wyznacz miarę kąta α:



Zadanie 3. Przyprostokątne trójkąta są równe i mają długość 4. Oblicz tangens kąta między przyprostokątną a przeciwprostokątną.

Zadanie 4. Trójkąt prostokątny ma boki długości $2, 4, 2\sqrt{3}$. Oblicz miary jego kątów.
`Ważne pytanie: który z boków jest przeciwprostokątną i dlaczego?`

Zadanie 5. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB jest o 2 dłuższa od przyprostokątnej BC. Oblicz długości boków tego trójkąta, jeżeli kąt ABC ma miarę $60°$.

Zadanie 6. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AB jest dwa razy krótsza od przyprostokątnej BC. Oblicz tangens kąta ACB.

Zadanie 7. Trapez równoramienny ma podstawy długości 12 i 16. Oblicz jego pole, wiedząc, że kąt między ramieniem a dłuższą podstawą ma miarę $60°$.

Zadanie 8. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 8, a kąty przy podstawie mają miary $30°$. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Zadanie 9. Kąt ostry w rombie ma miarę $45°$. Wiedząc, że bok rombu ma długość 4, oblicz jego wysokość.

18 Własności funkcji trygonometrycznych

18.1 Tożsamości

Pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi zachodzą różne zależności. Do zadań maturalnych potrzebne są dwie z nich:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (jedynka trygonometryczna)
- $\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Przykład. Uprość wyrażenie $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha$.

Wyciągnijmy $\sin^2\alpha$ przed nawias:

$$\sin^2\alpha \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

Zauważmy, że w nawiasie pojawiła się jedynka trygonometryczna:

$$\sin^2\alpha \cdot 1 = \sin^2\alpha$$

18.2 Znaki funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne uogólnia się na kąty większe od 90°. Wskutek tej konstrukcji, wartości tych funkcji mają różne znaki w zależności od tego, w jakim przedziale znajduje się kąt. Zbierzmy te informacje w tabeli:

	$\alpha \in (0°, 90°)$ - kąt ostry	$\alpha \in (90°, 180°)$ - kąt rozwarty
$\sin\alpha$	+	+
$\cos\alpha$	+	-

Przykład. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Oblicz wartość $\cos\alpha$.

Wstawmy informacje z zadania do jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{24}{49} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{24}{49}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{49}$$

Pierwiastkujemy obustronnie pamiętając, że musimy wziąć pod uwagę rozwiązanie dodatnie i ujemne:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{49}} \ \vee \ \cos\alpha = -\sqrt{\frac{25}{49}}$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{7} \ \vee \ \cos\alpha = -\frac{5}{7}$$

Teraz należy zdecydować pomiędzy rozwiązaniami. Z treści zadania wiemy, że kąt α jest ostry. Na podstawie tabeli stwierdzamy, że cosinus kąta ostrego jest dodatni, czyli wybieramy rozwiązanie dodatnie. Mamy:

$$\cos\alpha = \frac{5}{7}$$

18.3 Wzory redukcyjne

Chcąc obliczyć funkcję trygonometryczną kąta większego od 90° musimy skorzystać ze wzorów redukcyjnych (znajdują się one w kartach maturalnych). Przykładowe wzory redukcyjne:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

Przykład. Oblicz $\sin 150^\circ$

Wykorzystamy wzór $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$. Zauważmy, że:

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ$$

Wartość $\cos 60^\circ$ odczytamy z tabeli trygonometrycznej - jest to $\frac{1}{2}$. Czyli możemy napisać:

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$$

18.4 Zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha + 2\sin\alpha}$$

jeżeli wiadomo, że $tg\alpha = \frac{1}{2}$.

Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ$.

Zadanie 3. Wiedząc, że $tg\alpha = 2$ oraz $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, oblicz $\sin\alpha$ oraz $\cos\alpha$.

Zadanie 4. Dane jest $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, gdzie α jest kątem ostrym. Oblicz wartość $\cos\alpha$ i $\tan\alpha$.

Zadanie 5. Dla kąta α, gdzie $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz α jest kątem rozwartym, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\tan\alpha$.

Zadanie 6. Dane jest $\sin\beta = \frac{7}{25}$, gdzie β jest kątem ostrym. Oblicz wartość $\cos\beta$ i $\tan\beta$.

Zadanie 7. Dane jest $\sin\gamma = \frac{5}{13}$, gdzie γ jest kątem ostrym. Oblicz wartość $\cos\gamma$ i $\tan\gamma$.

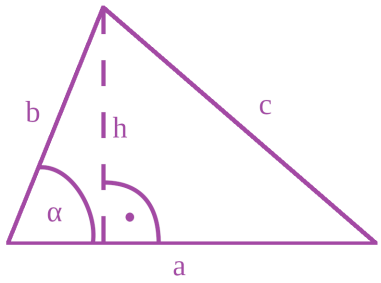
Zadanie 8. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 55^\circ + \cos^2 35^\circ$.

Zadanie 9. Oblicz wartość wyrażenia $\sin 120^\circ + \cos 135^\circ + \sin 240^\circ$.

19 Planimetria - wielokąty

19.1 Trójkąty

Rozważmy przedstawiony na rysunku trójkąt:



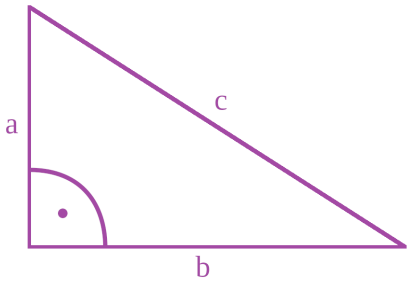
Odcinki a, b, c nazwiemy bokami trójkąta, a odcinek h wysokością trójkąta opadającą na bok a (jest to odcinek zaczynający się w jednym z wierzchołków, opadający na przeciwległy bok i prostopadły do tego boku). Każdy trójkąt ma trzy wysokości. Pole trójkąta możemy wyznaczyć korzystając ze wzorów:

- $P = \frac{1}{2}ah$, gdzie$a$ - bok trójkąta, h - wysokość opadająca na ten bok
- $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$, gdzie a, b - boki trójkąta, α - kąt zawarty **pomiędzy tymi bokami**
- $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c - boki trójkąta, R - promień okręgu opisanego na trójkącie

Suma kątów w trójkącie jest równa 180°.

Trójkąty charakterystyczne:

1. Trójkąt prostokątny - jest to trójkąt, który ma jeden kąt prosty.



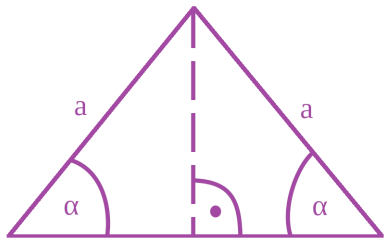
Własności:

a) w dowolnym trójkącie prostokątnym zachodzi twierdzenie Pitagorasa, tj.:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

b) wysokość opadająca na bok b pokrywa się z bokiem a - zatem pole trójkąta dowolnego trójkąta prostokątnego można policzyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab$ gdzie a, b to przyprostokątne trójkąta

2. Trójkąt równoramienny - trójkąt, który ma co najmniej dwa równe boki.

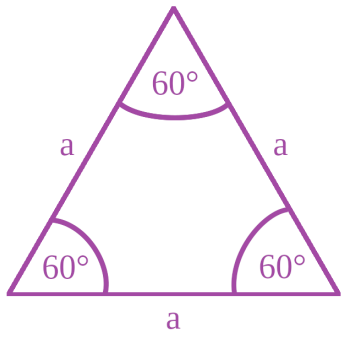


Własności:

a) kąty przy ramionach są sobie równe (patrz rysunek, kąt α)

b) wysokość opadająca na podstawę (patrz rysunek) dzieli trójkąt równoramienny na dwa identyczne trójkąty prostokątne

3. Trójkąt równoboczny - trójkąt, który ma wszystkie boki równe.



Własności:

a) każdy z kątów trójkąta równobocznego ma miarę 60°

b) wysokość trójkąta równobocznego można wyznaczyć ze wzoru:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) pole trójkąta równobocznego można wyznaczyć ze wzoru

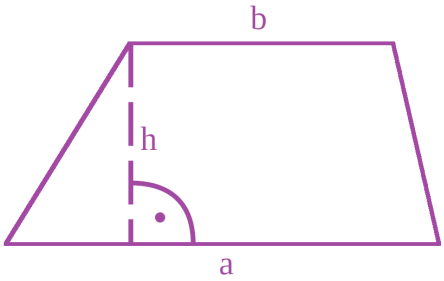
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

19.2 Czworokąty

Suma kątów w dowolnym czworokącie wynosi 360°.

Czworokąty charakterystyczne:

- Trapez - czworokąt wypukły, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.



Pole trapezu liczymy ze wzoru:

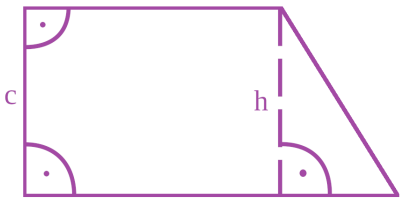
$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

Suma kątów przy ramieniu trapezu jest równa 180°.

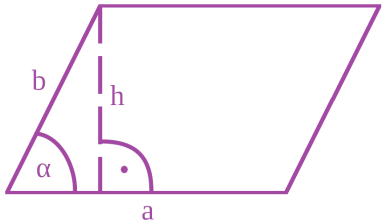
Szczególne trapezy:

a) Trapez równoramienny - trapez, którego ramiona są równe. Wówczas także miary kątów między ramionami a podstawą są równe (patrz rysunek).

b) Trapez prostokątny - trapez, który ma dwa kąty proste. Wówczas jedno z ramion ma tę samą długość co wysokość.



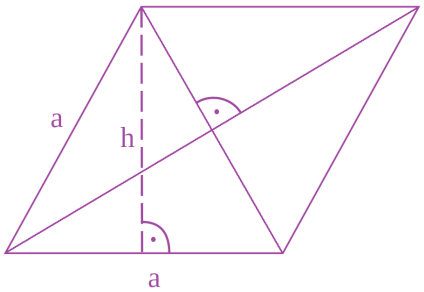
- Równoległobok - czworokąt wypukły, mające dwie pary boków równoległych.



Suma miar kątów przy dowolnym boku równoległoboku wynosi 180°. Pole równoległoboku możemy obliczyć jednym z następujących trzech wzorów;

  - $P = ah$, gdzie a - bok równoległoboku, h - opadająca na ten bok wysokość
  - $P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie a, b - boki równoległoboku, α - kąt pomiędzy bokami równoległoboku
  - $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\gamma$, gdzie d_1, d_2 - przekątne równoległoboku, γ - kąt między przekątnymi.

- Romb - równoległobok, który ma wszystkie boki równe. Ponadto przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.



Pole rombu możemy policzyć ze wzorów:

  - $P = ah$, gdzie a - bok rombu, h - wysokość rombu
  - $P = a^2 \sin\alpha$, gdzie a - bok rombu, α - kąt pomiędzy bokami rombu
  - $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$, gdzie d_1, d_2 - przekątne rombu

Powyższe wzory są w istocie szczególnymi przypadkami wzorów na pole równoległoboku.

19.3 Zadania

Zadanie 1. Pole trójkąta równobocznego wynosi $36\sqrt{3}$. Oblicz obwód tego trójkąta.

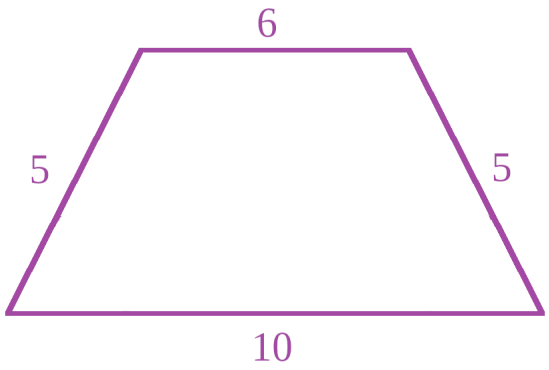
Zadanie 2. W trójkącie ABC miara kąta BAC wynosi 45°, a boki AB i AC mają długości odpowiednio 4 i 8. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 3. W trójkącie równoramiennym kąt rozwarty ma miarę 120°, a ramię ma długość 10. Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jego dwa razy dłuższa od drugiej. Wiedząc, że pole tego trójkąta wynosi 16, wyznacz jego obwód.

Zadanie 5. Przekątne równoległoboku mają długości 7 i 5, a kąt między nimi wynosi 135°. Oblicz pole tego równoległoboku.

Zadanie 6. Oblicz pole przedstawionego na rysunku trapezu równoramiennego.



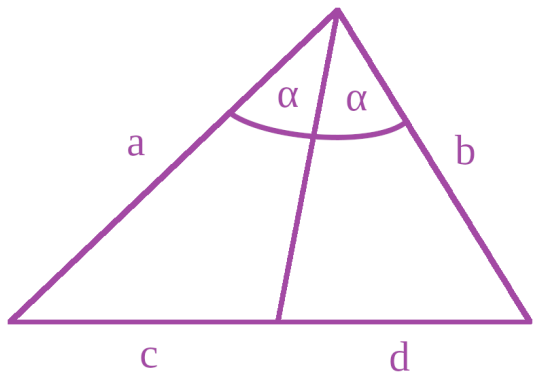
Zadanie 7. Jedna z przekątnych rombu jest o 3 dłuższa od drugiej. Wiedząc, że pole rombu wynosi 2, oblicz długości przekątnych.

Zadanie 8. Przekątne równoległoboku mają długości 3 i 7, a pole wynosi $\frac{21}{4}$. Oblicz miarę kąta między przekątnymi, jeżeli wiadomo, że jest on ostry.

20 Twierdzenie o dwusiecznej

20.1 Teoria

Dwusieczną kąta nazywamy odcinek dzielący kąt na dwie równe części. Rozważmy dwusieczną w trójkącie jak na poniższym rysunku:



Wówczas z twierdzenia o dwusiecznej wynika, że w trójkącie tym zachodzi:

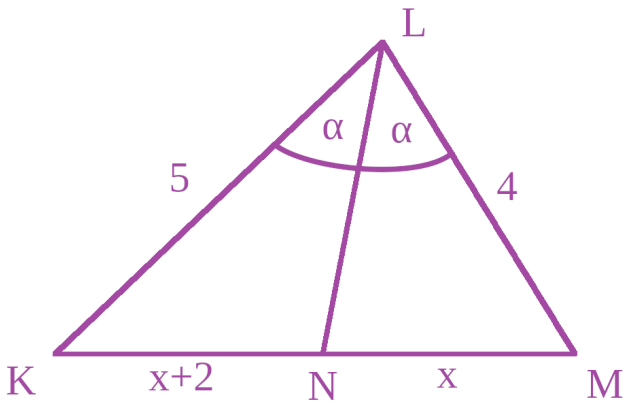
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Prawdziwy jest też stosunek:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Przykład. W trójkącie KLM poprowadzono dwusieczną z wierzchołka L, a punkt w którym opada na bok KM nazwano N. Wiedząc, że $|KL| = 5$, $|LM| = 4$ oraz, że odcinek KN jest o 2 dłuższy od odcinka NM, oblicz obwód tego trójkąta.

Narysujmy trójkąt KLM. Odcinek NM oznaczymy jako x, a odcinek KN, który jest o dwa dłuższy oznaczymy jako $x + 2$:



Z twierdzenia o dwusiecznej zapiszemy stosunek:

$$\frac{5}{4} = \frac{x+2}{x}$$

Mnożąc na krzyż dostajemy:

$$5x = 4(x+2)$$

$$5x = 4x + 8$$

$$x = 8$$

Czyli:

$$|NM| = x = 8$$

$$|KN| = x + 2 = 8 + 2 = 10$$

Zatem obwód trójkąta KLM:

$$Obw_{KLM} = 5 + 4 + 8 + 10 = 27$$

20.2 Zadania

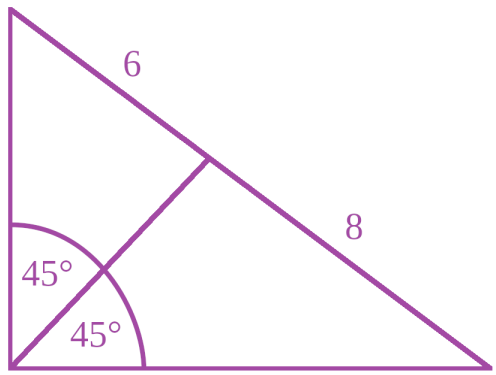
Zadanie 1. Obwód trójkąta ABC wynosi 32. W trójkącie poprowadzono dwusieczną AD. Punkt D podzielił bok BC tak, że:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$$

Wiedząc, że $|AC| = 6$, oblicz długości pozostałych boków trójkąta ABC.

Zadanie 2. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Wiedząc, że $|AC| = 16$, $|BC| = 10$ oraz $|AB| = 13$, wyznacz długości boków AD oraz BD.

Zadanie 3. Oblicz pole przedstawionego na rysunku trójkąta:

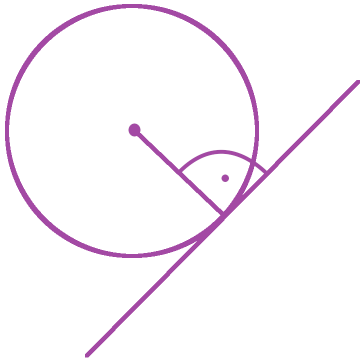


Zadanie 4. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Bok AC jest o cztery dłuższy od boku BC. Wiedząc, że $|AD| = 6$ oraz $|BD| = 3$, wyznacz obwód tego trójkąta.

21 Kąty środkowe i wpisane

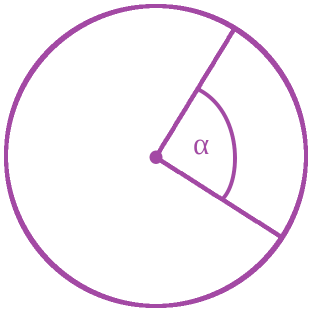
21.1 Definicje

1. **Styczna do okręgu** - prosta, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem:

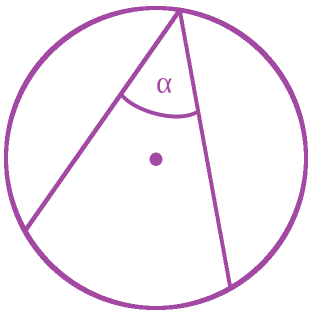


   Ponadto styczna jest prostopadła do promienia okręgu poprowadzonego do punktu styczności (patrz rysunek)

2. **Kąt środkowy** - kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku okręgu, a jego ramiona sa promieniami tego okręgu:

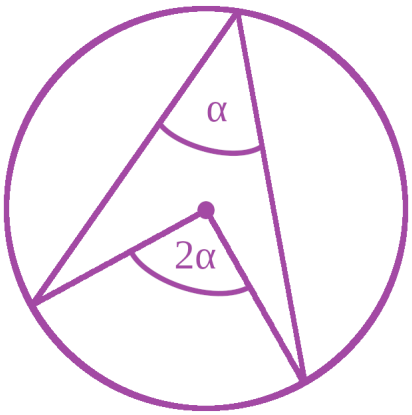


3. **Kąt wpisany** - kąt, którego wierzchołek znajduje się na okręgu, a jego ramiona są cięciwami tego okręgu:

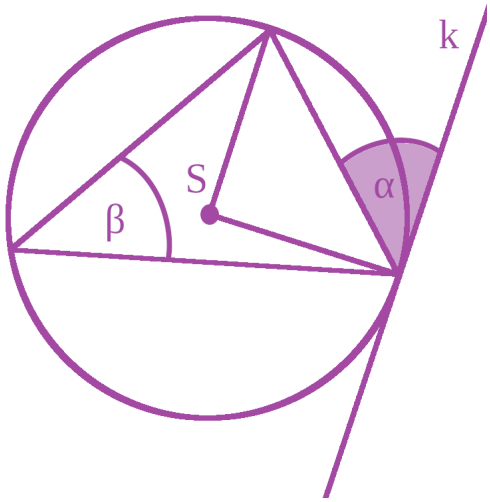


21.2 Twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym

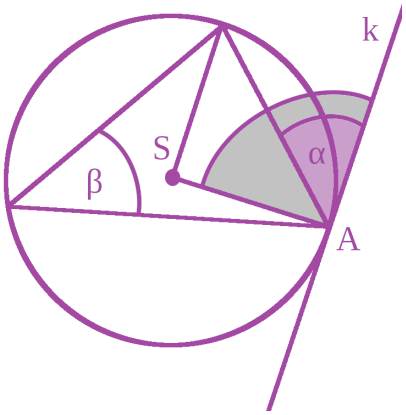
Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym wynika, że **miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.**



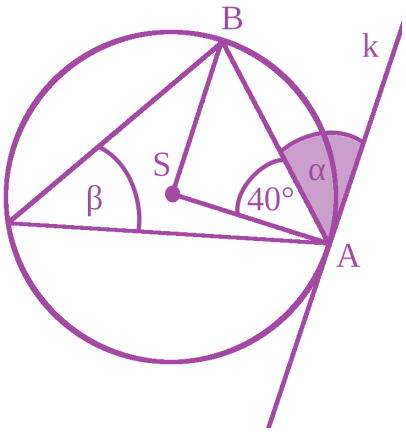
Przykład. Punkt S jest środkiem okręgu, a prosta k jest styczna do tego okręgu. Wiedząc, że kąt α ma miarę $50°$, wyznacz miarę kąta β.



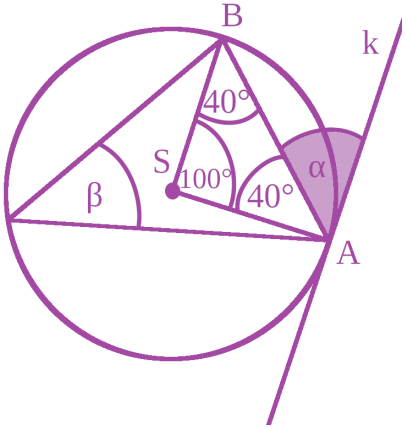
Oznaczmy punkt styczności jako A. Odcinek AS jest promieniem, zatem pomiędzy nim i styczną jest kąt prosty (na rysunku oznaczymy ten kąt kolorem szarym):



Kąt prosty ma miarę 90°, a kąt α ma miarę 50°. Zatem kąt dopełniający α do kąta prostego ma miarę 40°:



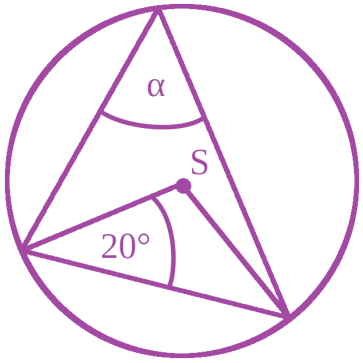
Zauważmy, że trójkąt ASB jest równoramienny, ponieważ jego boki AS i SB są promieniami okręgu, czyli są równe. Zatem kąty przy jego ramionach mają takie same miary. Ponieważ suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°, to kąt ASB musi mieć miarę 100°:



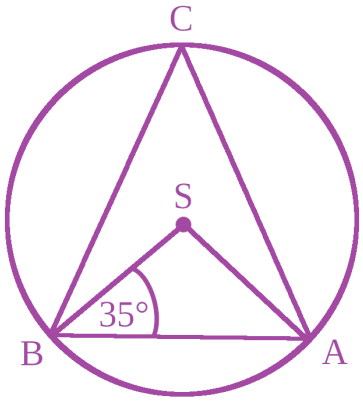
Wreszcie zauważamy, że kąt ASB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany β, więc z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym $\beta = 100° : 2 = 50°$.

21.3 Zadania

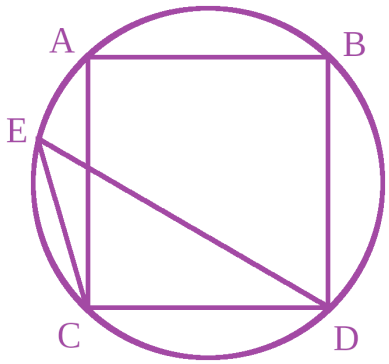
Zadanie 1. Punkt S jest środkiem okręgu. Wyznacz miarę kąta α:



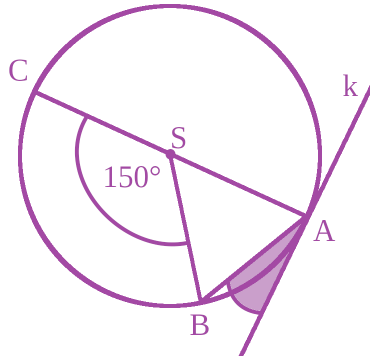
Zadanie 2. Punkt S jest środkiem okręgu oraz $|BC| = |AC|$. Oblicz miarę kąta SAB.



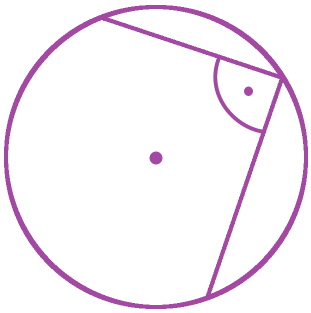
Zadanie 3. Na kwadracie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz miarę kąta CED.



Zadanie 4. Odcinek AC jest średnicą okręgu, a punkt S jego środkiem. Wiedząc, że prosta k jest styczna do okręgu, wyznacz miarę zacieniowanego kąta o wierzchołku w punkcie A.

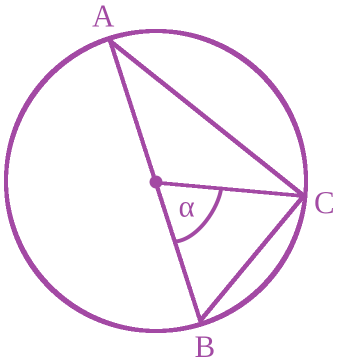


Zadanie 5. Przedstawiony na rysunku kąt wpisany jest prosty. Zaznacz oparty na tym samym łuku kąt środkowy i oblicz jego miarę.



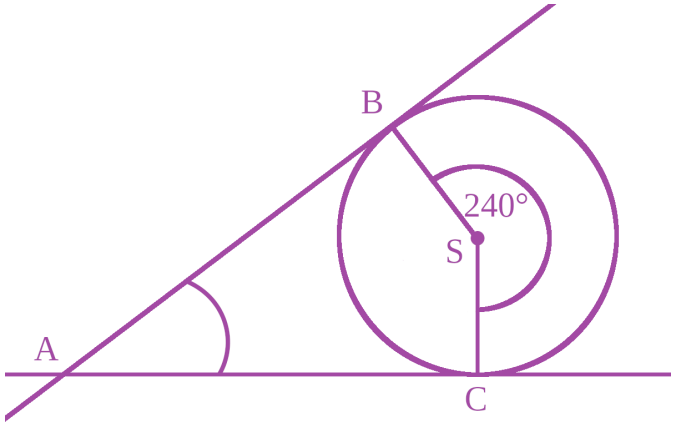
`Jak mają się do siebie przeciwprostokątna i średnica okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym?`

Zadanie 6. Średnica AB przedstawionego na rysunku okręgu ma długość 8, a cięciwa AC ma długość $4\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta α.



`Podpowiedź: wykorzystaj wniosek z poprzedniego zadania i funkcje trygonometryczne.`

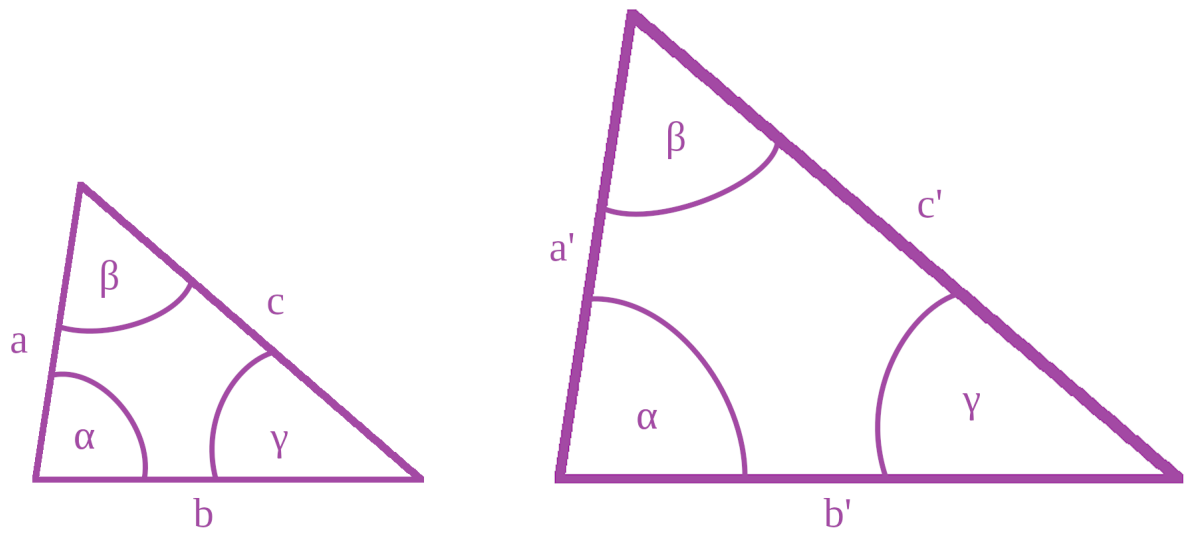
Zadanie 7. Proste AB i AC są styczne do okręgu o środku w punkcie S. Oblicz miarę kąta BAC.



22 Podobieństwo

Dwie figury nazywamy podobnymi, jeżeli ich boki są parami proporcjonalne. Obrazowo można powiedzieć, że figury podobne mają ten sam kształt, ale mogą różnić się rozmiarem.

22.1 Podobieństwo trójkątów



Powyższe trójkąty są podobne, zatem stosunki odpowiadających sobie boków są stałe, co możemy zapisać:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

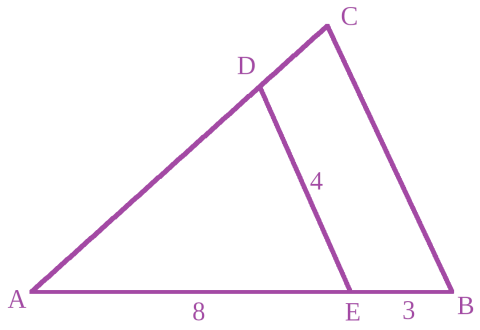
Ponadto mają one równe kąty.

W celu wykazania, że dwa trójkąty są podobne wykorzystujemy cechy podobieństwa trójkątów:

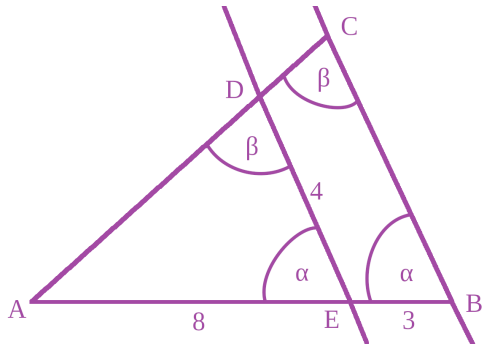
1. **Cecha KKK (kąt kąt kąt)** - jeżeli dwa trójkąty mają taki sam zestaw kątów, to są podobne
2. **Cecha BKB (bok kąt bok)** - jeżeli w dwóch trójkątach znajdziemy równy kąt, oraz stosunek boków będących ramionami tego kąta jest taki sam w obu trójkątach, to trójkąty te są podobne
3. **Cecha BBB (bok bok bok)** - jeżeli w dwóch trójkątach stosunki długości odpowiadających sobie boków są równe, to trójkąty te są podobne.

W praktyce najczęściej wykorzystujemy KKK, rzadziej BKB.

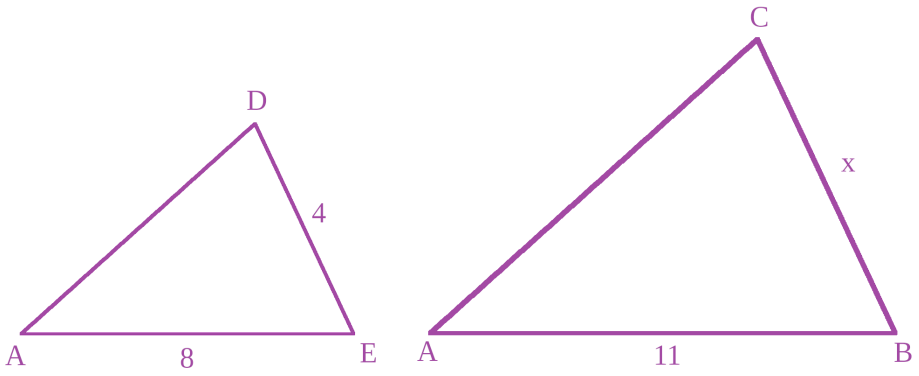
Przykład. Odcinki DE i BC są równoległe. Wyznacz długość odcinka BC.



W pierwszej kolejności wykażemy, że trójkąty ADE i ABC są podobne. Zauważmy, że kąt ADE jest współdzielony przez oba trójkąty, więc oczywiście w obu trójkątach mamy jeden taki sam kąt. W celu wykazania równości pozostałych kątów przedłużymy równoległe odcinki DE i BC, a następnie skorzystamy z kątów naprzemianległych:



Z rysunku widać, że odpowiadające sobie kąty w tych trójkątach są równe, zatem na mocy cechy KKK trójkąty ABC i ADE są podobne (w skrócie można zapisać $\triangle ABC \sim \triangle ADE$). Następnie przerysujmy trójkąty na oddzielne dwa rysunki (oznaczymy szukany odcinek BC jako x):

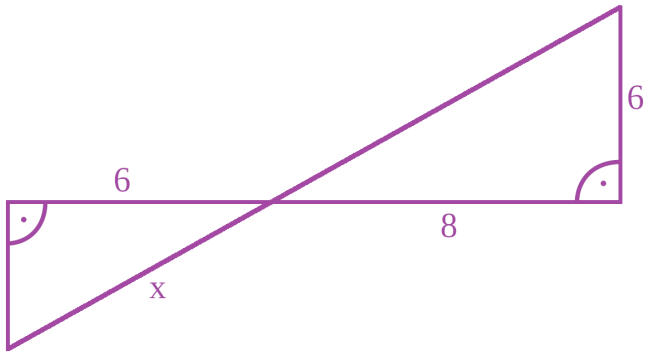


Przyrównajmy stosunki odpowiadających sobie boków:

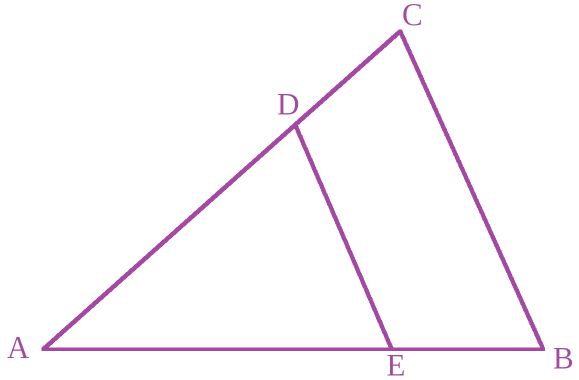
$$\frac{4}{8} = \frac{x}{11}$$
$$8x = 44$$
$$x = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$$

22.2 Zadania

Zadanie 1. Oblicz długość przedstawionego na rysunku odcinka x:

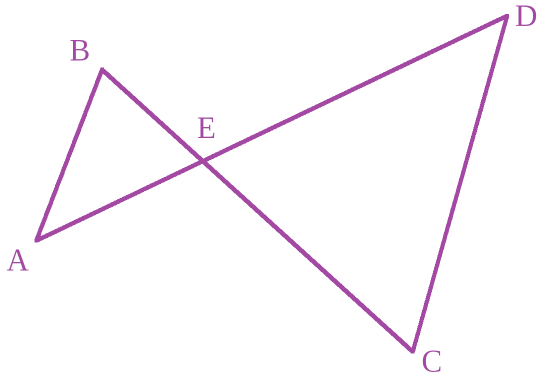


Zadanie 2. Na przedstawionym rysunku punkt E dzieli bok AB na odcinki o długościach 10 i 4. Wiedząc, że $|CD| = 5$, wyznacz długość odcinka AD.

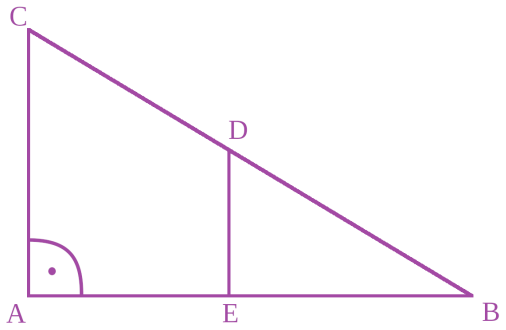


Zadanie 3. W trójkącie prostokątnym ABC, gdzie kąt CAB jest prosty, poprowadzono wysokość z wierzchołka A, a punkt w którym opada na bok BC oznaczono jako D. Wiedząc, że $|AC| = 3$ oraz $|AB| = 4$ oblicz długości odcinków CD i BD.

Zadanie 4. Na przedstawionym rysunku odcinki AB oraz CD są równoległe. Wiedząc, że $|AB| = 4$, $|CD| = 10$ i $|AE| = 3$, wyznacz długość odcinka DE.



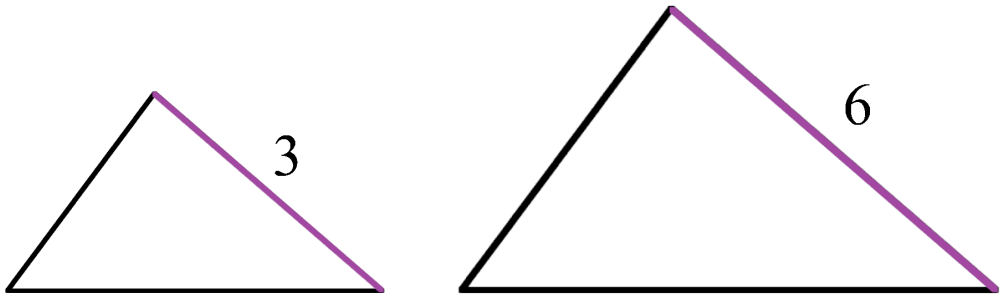
Zadanie 5. Na poniższym rysunku $|CD| = |DB| = 13$ oraz $|AC| = 10$. Oblicz pole trapezu $ACDE$.



23 Skala podobieństwa

23.1 Teoria

Skala podobieństwa to liczba określająca stosunek długości odpowiadających sobie boków w dwóch figurach podobnych. Przykładowo:



Obliczmy skalę podobieństwa k:

$$k = \frac{6}{3} = 2$$

Powiemy, że trójkąt drugi jest podobny do pierwszego w skali 2 : 1. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

- Stosunek pól figur podobnych jest równy ich skali podobieństwa podniesionej **do kwadratu.**

$$\frac{a_1}{a_2} = k \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = k^2$$

- Stosunek objętości brył podobnych jest równy ich skali podobieństwa podniesionej **do sześcianu**

$$\frac{a_1}{a_2} = k \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = k^3$$

Przykład 1. Czworokąt ABCD o polu równym 12 jest podobny do czworokąta KLMN w skali $k = \frac{4}{3}$. Oblicz pole czworokąta KLMN.

Wiemy, pola figur podobnych pozostają w stosunku równym skali podobieństwa do kwadratu, czyli mamy:

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{KLMN}} = k^2 = \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$$

Biorąc skrajne wyrazy równości oraz wstawiając pole czworokąta ABCD otrzymujemy równanie:

$$\frac{12}{P_{KLMN}} = \frac{16}{9}$$

$$12 \cdot 9 = 16 \cdot P_{KLMN}$$

$$P_{KLMN} = 6\frac{3}{4}$$

Pole czworokąta $KLMN$ wynosi $6\frac{3}{4}$.

23.2 Zadania

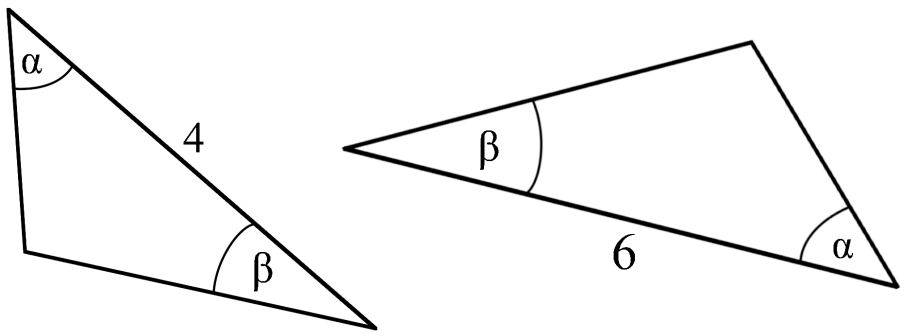
Zadanie 1. Pole powierzchni całkowitej sześcianu S_1 wynosi 49, a pole powierzchni całkowitej sześcianu S_2 wynosi 343. Oblicz stosunek ich objętości.

Zadanie 2. Sześciokąt ABCDEF o obwodzie 44 jest podobny do sześciokąta KLMNOP o obwodzie 32. Oblicz stosunek ich pól.

Zadanie 3. Skala podobieństwa dwóch trójkątów wynosi $\frac{7}{2}$. Pole większego z nich wynosi 10. Oblicz pole mniejszego trójkąta.

Zadanie 4. Trójkąt T_1 jest podobny do trójkąta T_2 w skali $k_1 = \frac{1}{2}$, a trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_3 w skali $k_2 = 4$. Pole trójkąta T_1 wynosi 10. Oblicz pole trójkąta T_3.

Zadanie 5. Oblicz stosunek pól przedstawionych na rysunku trójkątów:



Zadanie 6. Stosunek objętości dwóch podobnych do siebie walców wynosi 64 : 27. Oblicz stosunek promieni ich podstaw.

Zadanie 7. Objętość stożka C_1 wynosi 36π, a objętość stożka C_2 wynosi 108π. Wiedząc, że stożki te są podobne oraz że obwód podstawy większego z nich wynosi 16π wyznacz obwód podstawy mniejszego z nich.

Zadanie 8. Dwie kule są podobne w skali $\frac{3}{2}$. Oblicz stosunek ich pól powierzchni, a nastepnie wyznacz pole powierzchni mniejszej z nich, wiedząc że większa z nich ma objętość 18π.

Zadanie 9. Oblicz skalę podobieństwa okręgów o równaniach:

$$O_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

$$O_2 : (x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$$

Zadanie 10. Oblicz skalę podobieństwa kwadratów o równaniach:

$$K_1 : |x| + |y| = 4$$

$$K_2 : |x| + |y| = 16$$

24 Koła, okręgi, wycinki

24.1 Teoria

Niech r - promień. Wtedy:

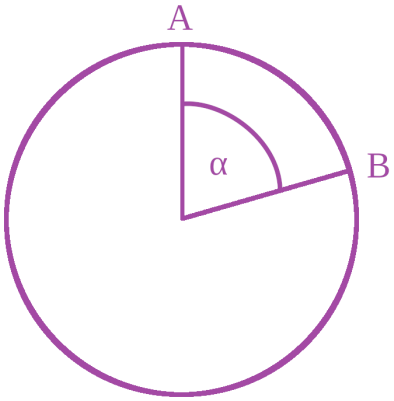
1. **Długość okręgu:**

$$L = 2\pi r$$

2. **Pole koła:**

$$P = \pi r^2$$

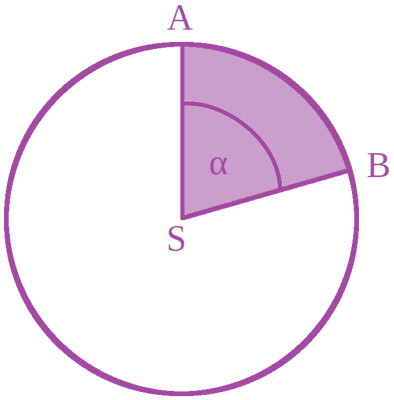
3. **Długość łuku AB:**



$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

W pierwszej części powyższego wzoru określamy, jaką częścią kąta pełnego jest kąt środkowy na którym oparty jest łuk AB. Druga część wzoru to długość całego okręgu.

4. **Pole wycinka ABS:**



$$P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

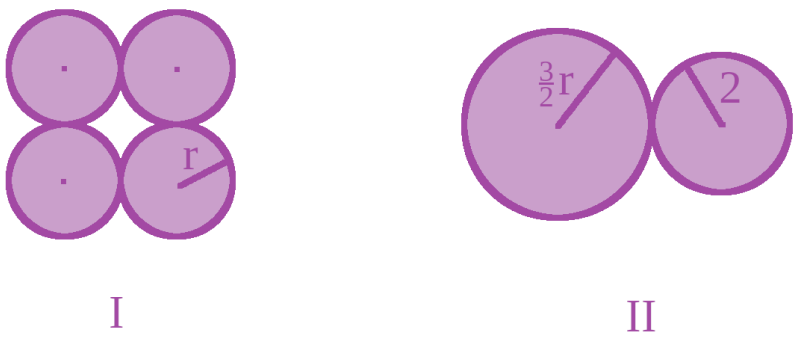
W pierwszej części powyższego wzoru określamy, jaką częścią kąta pełnego jest kąt środkowy na którym oparty jest łuk AB. Druga część wzoru to pole całego koła.

24.2 Zadania

Zadanie 1. Obwód koła wynosi 18π. Oblicz pole tego koła.

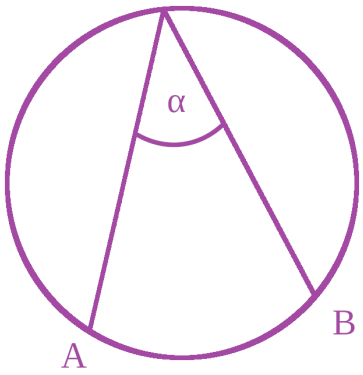
Zadanie 2. Na kwadracie opisano okrąg o długości 16π. Oblicz pole kwadratu.

Zadanie 3. Na rysunku przedstawiono dwie figury złożone z kół o promieniach jak na rysunku. Wiedząc, że pola obu figur są równe, wyznacz wartość r.



Zadanie 4. W okrąg wpisano sześciokąt foremny o polu $\frac{75}{2}\sqrt{3}$. Oblicz długość okręgu.

Zadanie 5. Promień przedstawionego na rysunku okręgu wynosi 4. Wiedząc, że $\alpha = 20°$, oblicz długość łuku AB.

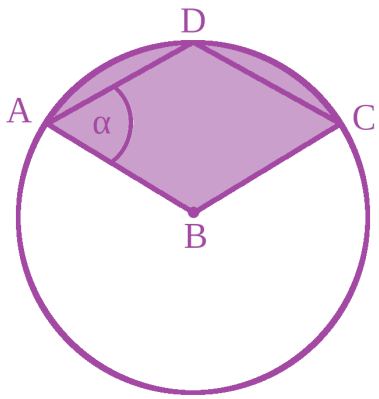


`Podpowiedź: Twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym.`

Zadanie 6. Pole wycinka koła jest równe 6π, a długość łuku opartego na tym samym kącie środkowym wynosi 4π. Oblicz promień okręgu.

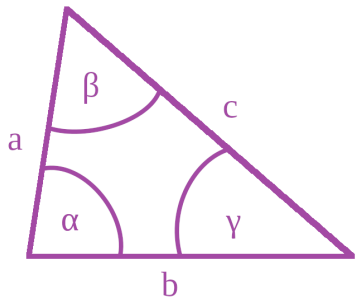
Zadanie 7. Oblicz pole koła, jeżeli jego wycinek o polu 24π jest oparty na kącie środkowym o mierze $60°$.

Zadanie 8. Przedstawiony na rysunku czworokąt $ABCD$ jest rombem o boku 2. Wiedząc, że kąt α ma miarę $30°$, oblicz pole zacieniowanej figury.



25 Twierdzenie cosinusów

Twierdzenie cosinusów jest uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa (czyli może być stosowane w dowolnych trójkątach, nie tylko prostokątnych). Rozważmy trójkąt jak na poniższym rysunku:



Wtedy z twierdzenia cosinusów wynika następujący wzór:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Prawdziwe są także wersje z cosinusami pozostałych kątów (oczywiście dobieramy wówczas odpowiednio boki):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

Wniosek: W każdym trójkącie można zapisać trzy równości wynikające z twierdzenia cosinusów.

25.1 Zadania

Zadanie 1. W trójkącie ABC kąt CBA ma miarę $60°$. Ponadto $|BC| = 5$ oraz $|AB| = 6$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Zadanie 2. W trójkącie KLM poprowadzono środkową o długości 10 z wierzchołka K. Miara kąt KLM wynosi $60°$, a długość odcinka KL wynosi 8. Oblicz długość boku ML.

Zadanie 3. W trójkącie ABC poprowadzono środkową o długości $4\sqrt{7}$ z wierzchołka A. Kąt ACB ma miarę $120°$. Wiedząc, że $|AC| = 8$, oblicz obwód trójkąta ABC.

Zadanie 4. W trójkącie ABC mamy $|AC| = 4$, $|BC| = 5$ oraz $|AB| = 8$. Oblicz cosinus kąta ACB. Czy trójkąt ABC jest rozwartokątny?

26 Graniastosłupy i ostrosłupy

26.1 Graniastosłupy

Graniastosłupem nazywamy bryłę, której wierzchołki leżą na dwóch równoległych płaszczyznach. Na maturze podstawowej zajmujemy się **graniastosłupami prostymi** (w których ściany boczne są prostopadłe do podstaw). **Graniastosłupem prawidłowym** nazywamy graniastosłup mający w podstawie wielokąt foremny (wielokąt foremny ma wszystkie kąty i boki równe, np. trójkąt równoboczny, kwadrat itd.)

Objętość graniastosłupa liczymy ze wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p - pole podstawy graniastosłupa, H wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa liczymy ze wzoru:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

gdzie P_p - pole podstawy graniastosłupa, P_b - pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

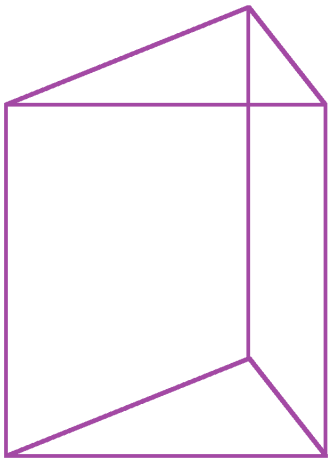
Szczególne graniastosłupy:

Graniastosłup prawidłowy trójkątny
W podstawie ma trójkąt równoboczny, którego pole można policzyć ze wzoru $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Zatem:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Wszystkie jego ściany boczne są identycznymi prostokątami o wymiarach $a \times H$. Zatem:

$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

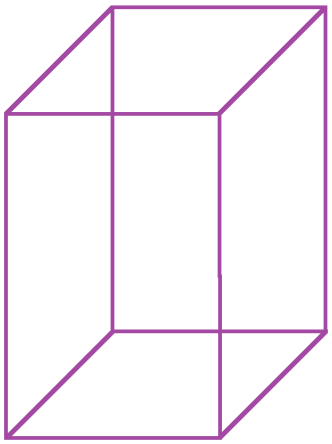


Graniastosłup prawidłowy czworokątny
W podstawie ma kwadrat, którego pole można policzyć ze wzoru a^2. Zatem:

$$V = a^2 \cdot H$$

Wszystkie jego ściany boczne są identycznymi prostokątami o wymiarach $a \times H$. Zatem:

$$P_c = 2 \cdot a^2 + 4aH$$

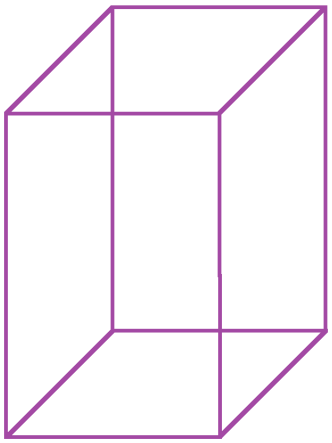


Prostopadłościan
W podstawie ma prostokąt, którego pole można policzyć ze wzoru ab

$$V = ab \cdot H$$

Ma dwie pary identycznych ścian - jedna o wymiarach $a \times H$, druga $b \times H$. Zatem:

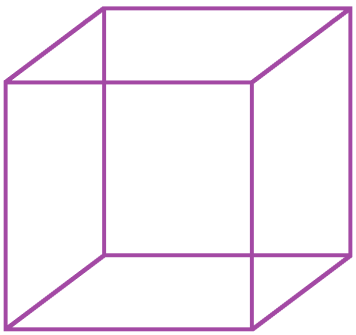
$$P_c = 2ab + 2aH + 2bH$$



Sześcian
Wszystkie jego ściany są identycznymi kwadratami.

$$V = a^3$$

$$P_c = 6a^2$$



26.2 Ostrosłupy

Ostrosłupem nazywamy bryłę o jednej podstawie, której wszystkie ściany boczne zbiegają się w jednym punkcie zwanym wierzchołkiem. **Ostrosłup prawidłowy** ma w podstawie wielokąt foremny.

Objętość ostrosłupa liczymy ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$$

gdzie P_p - pole podstawy ostrosłupa, H - wysokość ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa liczymy ze wzoru:

$$P_c = P_p + P_b$$

gdzie P_p - pole podstawy ostrosłupa, P_b - pole powierzchni bocznej.

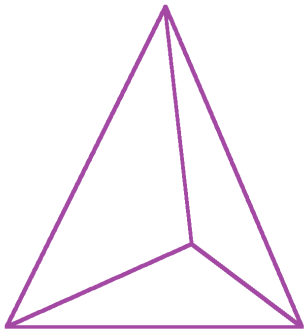
Szczególne ostrosłupy:

Ostrosłup prawidłowy trójkątny
Ma w podstawie trójkąt równoboczny, którego pole można policzyć ze wzoru $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, zatem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

Wszystkie jego ściany są identycznymi trójkątami, o podstawie a i wysokości h_b, zatem:

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} a h_b$$

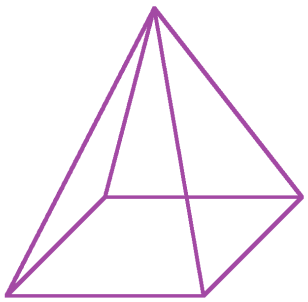


Ostrosłup prawidłowy czworokątny
Ma w podstawie kwadrat, którego pole można policzyć ze wzoru a^2, zatem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

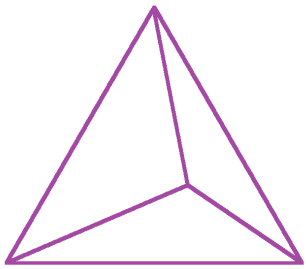
Wszystkie jego ściany są identycznymi trójkątami, o podstawie a i wysokości h_b, zatem:

$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a h_b$$



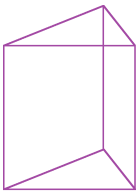
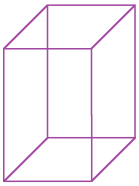
Czworościan foremny
Wszystkie jego ściany są identycznymi trójkątami równobocznymi. Zatem:

$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



26.3 Liczby krawędzi, ścian, wierzchołków

W poniższej tabeli przedstawimy liczbę krawędzi i ścian w kolejnych graniastosłupach (o coraz większej liczbie wierzchołków w podstawie):

n	Kształt podstawy	Rysunek	Liczba ścian bocznych	Liczba ścian ogółem	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi
3	trójkąt		3	5	6	9
4	czworokąt		4	6	8	12

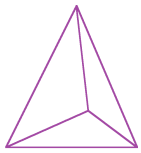
...

n	n-kąt	-	n	$n+2$	$2n$	$3n$

Zatem:

- Liczba ścian w graniastosłupie o podstawie n-kąta: $n+2$
- Liczba wierzchołków w graniastosłupie o podstawie n-kąta: $2n$
- Liczba krawędzi w graniastosłupie o podstawie n-kąta: $3n$

Podobną tabelę wykonamy dla kolejnych ostrosłupów:

n	Kształt podstawy	Rysunek	Liczba ścian bocznych	Liczba ścian ogółem	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi
3	trójkąt		3	4	4	6
4	czworokąt		4	5	5	8
		...				
n	n-kąt	-	n	$n+1$	$n+1$	$2n$

Zatem:

- Liczba ścian w ostrosłupie o podstawie n-kąta: $n+1$
- Liczba wierzchołków w ostrosłupie o podstawie n-kąta: $n+1$
- Liczba krawędzi w ostrosłupie o podstawie n-kąta: $2n$

Na koniec dodajmy, że n, czyli liczba wierzchołków podstawy musi być liczbą naturalną i większą lub równą 3 - ponieważ nie istnieją wielokąty o liczbie wierzchołków mniejszej niż 3.

26.4 Zadania

Zadanie 1. Pole powierzchni całkowitej sześcianu wynosi 150. Oblicz objętość tego sześcianu.

Zadanie 2. Podaj ilość ścian, wierzchołków i krawędzi dla:

a) ostrosłupa o podstawie siedmiokąta

b) graniastosłupa o podstawie dziesięciokąta

c) graniastosłupa o podstawie pięciokąta

Zadanie 3. Czy istnieje ostrosłup, który ma tyle samo ścian co wierzchołków? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. W pewnym graniastosłupie liczba ścian jest o 14 mniejsza od liczby krawędzi. Jaki wielokąt stoi w podstawie tego graniastosłupa?

Zadanie 5. Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego mają długość 5. Oblicz

pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa i jego objętość.

Zadanie 6. Długości krawędzi prostopadłościanu pozostają w stosunku 2 : 5 : 8. Wiedząc, że objętość wynosi 640, oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu.

Zadanie 7. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wiedząc, że objętość wynosi 16, oblicz pole podstawy.

Zadanie 8. Suma długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 108, a jego pole powierzchni całkowitej wynosi 192. Oblicz długości krawędzi oraz objętość tego graniastosłupa.

27 Bryły obrotowe

27.1 Teoria

Bryły obrotowe powstają poprzez obrót dwuwymiarowych figur wokół pewnej osi. Na maturze obowiązują nas walec, stożek i kula.

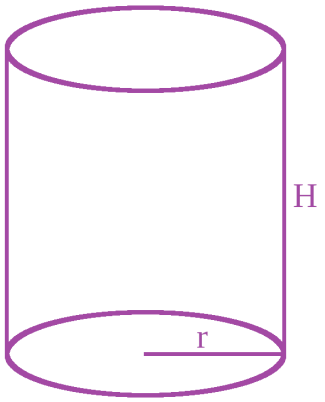
Walec

Powstaje przez obrót prostokąta wokół jednej z jego osi symetrii. Ma dwie podstawy w postaci identycznych kół. Objętość liczymy ze wzoru:

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

Powierzchnia boczna po wypłaszczeniu będzie prostokątem o wymiarach $2\pi r \times H$ ($2\pi r$ to obwód koła). Zatem:

$$P_c = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H$$



Stożek

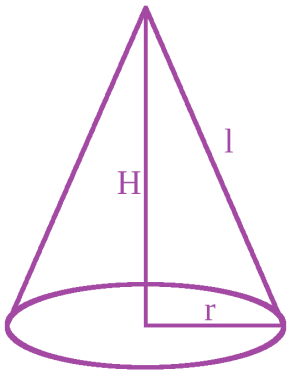
Powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół jednej z przyprostokątnych. Ma jedną podstawę w kształcie koła. Objętość liczymy ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$$

Powierzchnia boczna po wypłaszczeniu będzie wycinkiem koła o polu $\pi r l$. Pole powierzchni całkowitej:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

Odcinek l nazywamy tworzącą stożka. **Uwaga:** Wysokość, tworząca i promień podstawy tworzą trójkąt prostokątny.



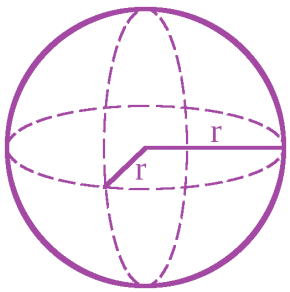
Kula

Powstaje przez obrót koła wokół średnicy. Objętość liczymy ze wzoru:

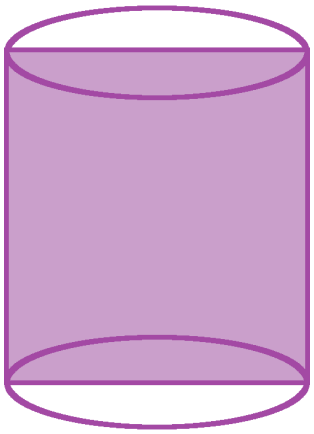
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pole powierzchni całkowitej:

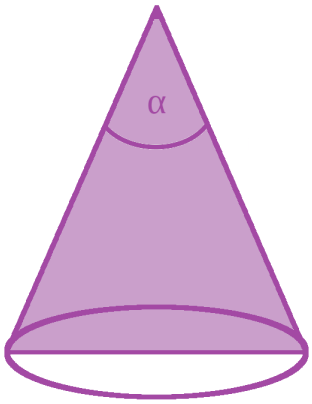
$$P_c = 4\pi r^2$$



Zacieniowane na poniższych rysunkach figury płaskie nazywamy przekrojami osiowymi, odpowiednio walca i stożka:



Przekrój osiowy walca ma kształt prostokąta. Jeden z jego boków jest równy średnicy podstawy, a drugi wysokości walca.



Przekrój osiowy stożka ma kształt trójkąta równoramiennego. Jego ramiona są równe tworzącej stożka, a podstawa jest równa średnicy podstawy. Ponadto, zaznaczony na rysunku kąt α nazywamy kątem rozwarcia stożka.

27.2 Zadania

Zadanie 1. Pole powierzchni całkowitej kuli wynosi 144π. Oblicz objętość tej kuli.

Zadanie 2. Tworząca stożka ma długość 5, a jego wysokość 3. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

Zadanie 3. Walec i stożek mają identyczne podstawy oraz równe objętości. Wiedząc, że wysokość walca wynosi 8, oblicz wysokość stożka.

Zadanie 4. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku 10. Oblicz objętość walca.

Zadanie 5. Kąt rozwarcia stożka wynosi $120°$, a jego objętość jest równa 27π. Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
`Podpowiedź: funkcje trygonometryczne.`

Zadanie 6. Przekrój stożka ma kształt trójkąta równobocznego o boku 4. Oblicz objętość tego stożka.

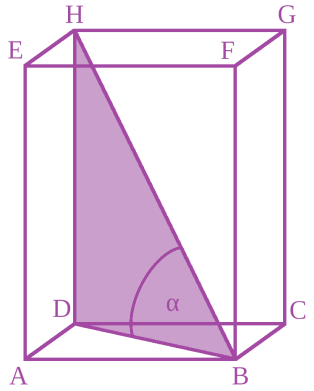
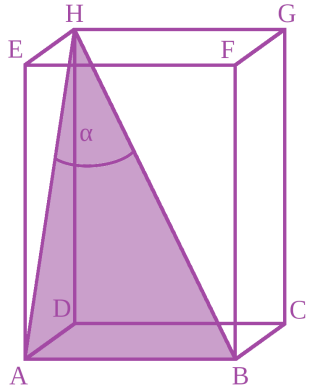
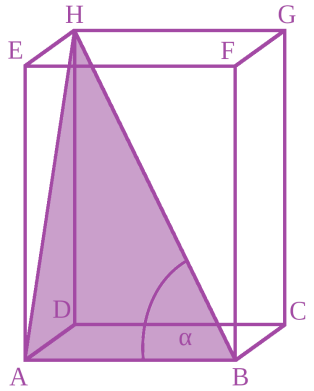
Zadanie 7. Tworząca stożka ma długość 14, a jego wysokość jest równa 7. Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.

Zadanie 8. Tworząca i średnica podstawy stożka pozostają w stosunku $5 : 8$. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego stożka wynosi 144π, oblicz jego objętość.

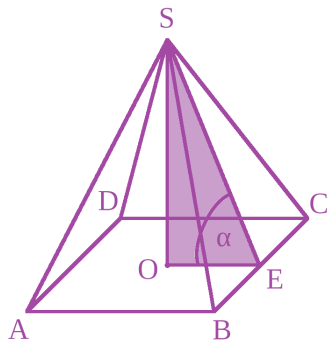
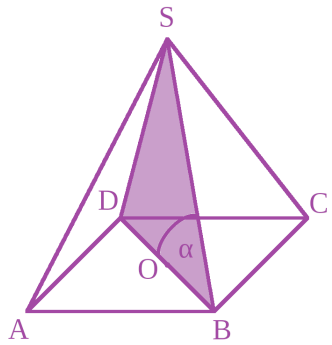
28 Kąty w bryłach

Zadania ze stereometrii zawierające informacje o kątach najczęściej opierają się na zaznaczeniu odpowiedniego kąta, znalezieniu trójkąta prostokątnego w którym kąt się znajduje, i wykorzystaniu twierdzenia Pitagorasa lub funkcji trygonometrycznych. Najtrudniejszym etapem jest często zaznaczenie kąta. Przedstawimy na rysunkach kilka najczęściej pojawiających się w zadaniach kątów.

28.1 Kąty w graniastosłupach

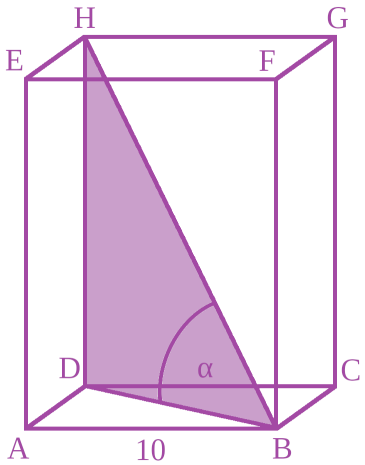
Kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą (płaszczyzną podstawy)		Odcinek BH jest przekątną graniastosłupa, DH jego wysokością, a BD przekątną podstawy. Zacieniowany trójkąt jest prostokątny.
Kąt między przekątną graniastosłupa a ścianą boczną		Odcinek BH jest przekątną graniastosłupa, AH przekątną ściany bocznej, a AB krawędzią graniastosłupa. Zacieniowany trójkąt jest prostokątny.
Kąt między przekątną graniastosłupa krawędzią podstawy		Odcinek BH jest przekątną graniastosłupa, AH przekątną ściany bocznej, a AB krawędzią graniastosłupa. Zacieniowany trójkąt jest prostokątny.

28.2 Kąty w ostrosłupach

Kąt między ścianą boczną a podstawą (płaszczyzną podstawy)		Odcinek OE należy do podstawy, odcinek SB jest wysokością ściany bocznej, a odcinek SO jest wysokością ostrosłupa. Zacieniowany trójkąt jest prostokątny.
Kąt między krawędzią boczną a podstawą (płaszczyzną podstawy)		Odcinek DB jest przekątną podstawy, SB i SD są krawędziami bocznymi. **Uwaga: trójkąt BDS jest równoramienny, niekoniecznie prostokątny.**

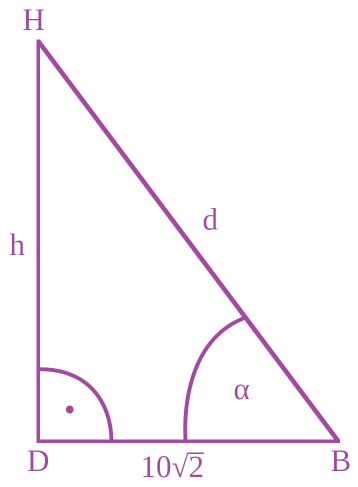
Przykład. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10, a jego przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Oblicz objętość graniastosłupa.

Narysujmy graniastosłup i zaznaczmy w nim kąt α:



Ponieważ graniastosłup jest prawidłowy, to jego podstawa, czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, wobec czego długość przekątnej wynosi $10\sqrt{2}$. Odcinki BD - przekątna podstawy, HD - wysokość

graniastosłupa oraz BH - przekątna graniastosłupa tworzą trójkąt prostokątny (zacieniowany na rysunku). Narysujmy trójkąt BDH na oddzielnym rysunku:



Korzystając z faktu, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, możemy zapisać:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{d}$$

$$d\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

$$d = 30$$

Dalej, korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$h^2 + (10\sqrt{2})^2 = 30^2$$

$$h^2 + 200 = 900$$

$$h^2 = 700$$

$$h = 10\sqrt{7}$$

Czyli mamy wysokość graniastosłupa. Teraz wstawiając do wzoru na objętość:

$$V = P_p \cdot h = a^2 \cdot h = 10^2 \cdot 10\sqrt{7} = 1000\sqrt{7}$$

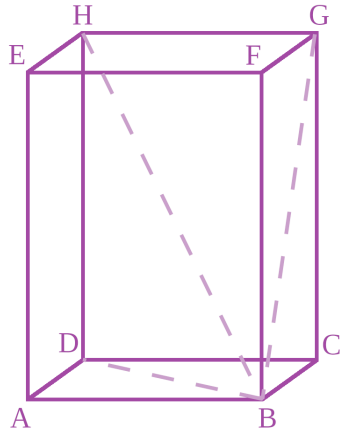
28.3 Zadania

Zadanie 1. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 45°$. Wiedząc, że podstawa ma pole 16, wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 2. Kąt między krawędzią boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego a jego podstawą ma miarę 30°. Wiedząc, że wysokość tego ostrosłupa wynosi $4\sqrt{3}$, oblicz jego objętość.

Zadanie 3. Objętość sześcianu wynosi 216. Oblicz długość przekątnej sześcianu.

Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono graniastosłup $ABCDEFGH$:



Kąt pomiędzy ścianą boczną $BCFG$ a przekątną BH to:

A. DBH

B. BHG

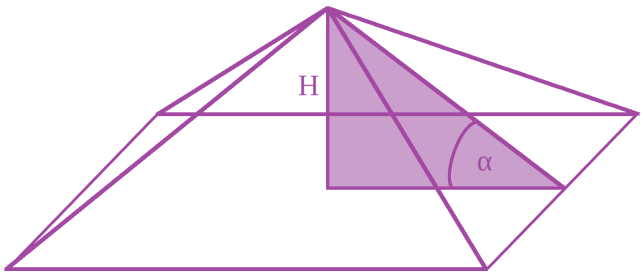
C. GBH

D. HGB

Zadanie 5. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi, każdy o polu $36\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 6. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem α takim, że $tg\alpha = 2$. Wiedząc, że pole podstawy wynosi $6\sqrt{3}$, oblicz objętość graniastosłupa.

Zadanie 7. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny. Pole zacieniowanego trójkąta wynosi $12\sqrt{3}$, a miara kąta α wynosi $30°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

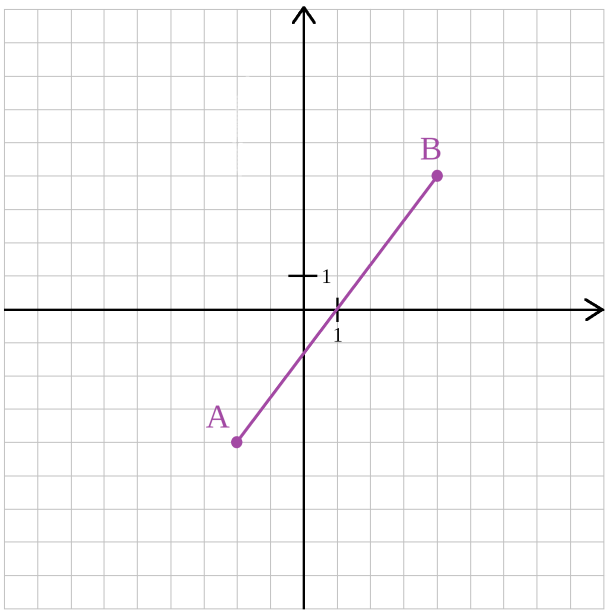


Zadanie 8. Miara kąta między najdłuższą przekątną graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego a płaszczyzną podstawy wynosi $60°$. Wiedząc, że pole podstawy tego graniastosłupa wynosi $54\sqrt{3}$, oblicz jego objętość.

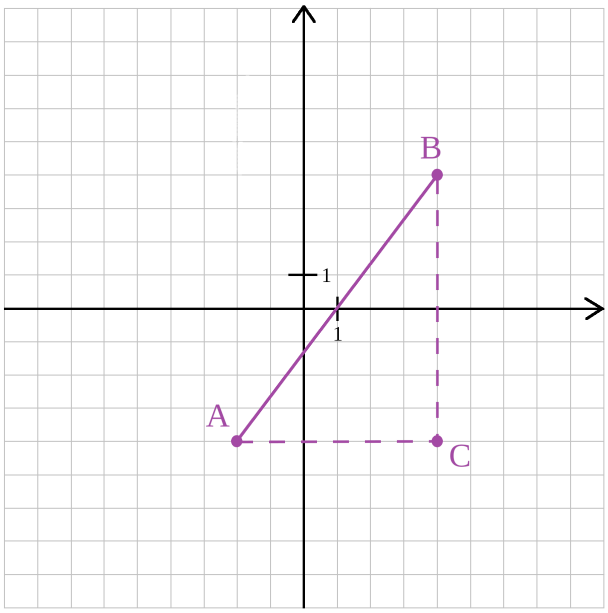
29 Geometria analityczna - odcinki

29.1 Teoria

Odcinkiem nazywamy fragment prostej zawarty między dwoma punktami. Wyprowadzimy wzór na długość dowolnego odcinka w kartezjańskim układzie współrzędnych. Rozważmy odcinek o końcach w punktach $A = (-2, -4)$ oraz $B = (4, 4)$:



Dorysujmy teraz dwa odcinki tak, aby powstał trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną będzie nasz odcinek AB:



Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, możemy zapisać (korzystając z twierdzenia Pitagorasa):

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

Zauważmy, że odcinek AC ma w naszym przypadku długość 6 - jest to różnica pomiędzy x-owymi współrzędnymi punktów A i B. Podobnie odcinek BC jest różnicą pomiędzy y-owymi współrzędnymi punktów. Nieformalnie zapiszemy zatem:

$$[\text{Różnica na współrzędnych } x]^2 + [\text{Różnica na współrzędnych } y]^2 = |AB|^2$$

Formalnie zapiszemy:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = |AB|^2$$

Po spierwiastkowaniu stronami otrzymujemy wzór:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

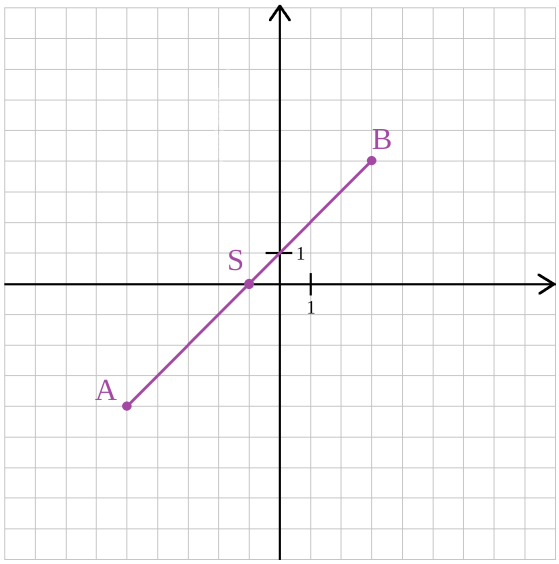
W naszym przypadku mamy:

$$|AB| = \sqrt{(-2-4)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Środek odcinka - obliczając współrzędne środka odcinka wystarczy wziąć średnią arytmetyczną ze współrzędnych końców odcinka:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Rozważmy odcinek o końcach w punktach $A = (-5, -4)$ i $B = (3, 4)$.



$$x_S = \frac{-5+3}{2} = -1 \qquad y_S = \frac{-4+4}{2} = 0$$

Zatem $S = (-1, 0)$, co widać na rysunku.

Przykład. Punkty $A = (0, -2)$ i $C = (3, 1)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Oblicz pole tego kwadratu.

Skoro A i C są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu, to odcinek AC jest jego przekątną. Obliczymy jego długość:

$$|AC| = \sqrt{[\text{Różnica na } x]^2 + [\text{Różnica na } y]^2}$$

$$|AC| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Przekątna kwadratu o boku a jest dana wzorem $a\sqrt{2}$, zatem:

$$a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$a = 3$$

Zatem pole kwadratu $P = 3^2 = 9$.

29.2 Zadania

Zadanie 1. Oblicz długość oraz podaj współrzędne środka odcinka o końcach w punktach:

a) $A = (3, 1)$, $B = (7, 2)$

b) $A = (7, 5)$, $B = (14, 1)$

c) $A = (-2, 3)$, $B = (8, 11)$

d) $A = (-7, 0)$, $B = (-10, -3)$

Zadanie 2. Punkty $A = (7, 1)$ i $B = (3, 4)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu. Oblicz długość przekątnej tego kwadratu.

Zadanie 3. Oblicz pole koła, którego średnicą jest odcinek o końcach w punktach $A = (1, 8)$ i $B = (6, -4)$.

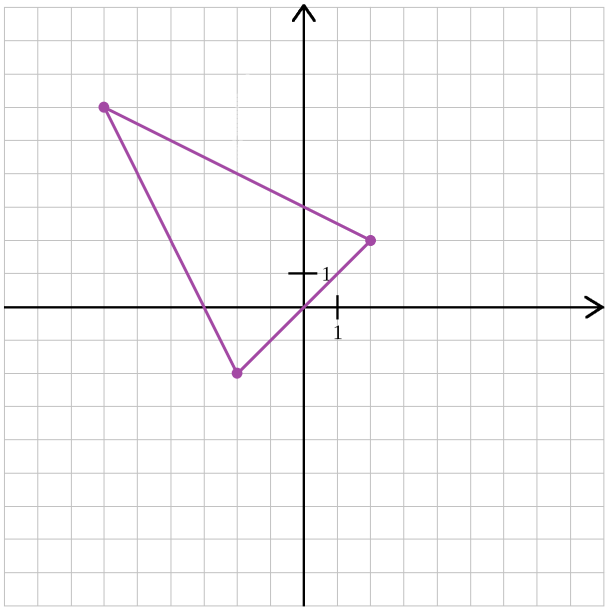
Zadanie 4. Punkt $S = (0, 4)$ jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że $A = (8, -4)$ oblicz współrzędne punktu B.

Zadanie 5. Punkt $S = (3, 2)$ jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu. Wiedząc, że punkty $A = (0, 0)$ i $B = (5, -1)$ są sąsiednimi wierzchołkami tego kwadratu, wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków. Oblicz pole tego kwadratu.

Zadanie 6. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = (-2, 4)$. Wiedząc, że $A = (0, 1)$ i $B = (-5, -2)$ są sąsiednimi wierzchołkami, oblicz długość boku AC.

Zadanie 7. Wierzchołki rombu mają współrzędne $A = (-3, -3), B = (-1, 0), C = (2, 2), D = (0, -1)$. Oblicz pole rombu.

Zadanie 8. Oblicz pole przedstawionego na rysunku trójkąta:



30 Geometria analityczna - równania prostej

30.1 Teoria

Równanie prostej w układzie współrzędnych możemy przedstawiać w dwóch postaciach:

- **Postać kierunkowa** - postać ta jest bezpośrednio powiązana z równaniem funkcji liniowej:

$$y = ax + b$$

  a - współczynnik kierunkowy, b - wyraz wolny.

- **Postać ogólna** - postać, w której wszystkie elementy zostały przerzucone na jedną stronę znaku równości:

$$Ax + By + C = 0$$

Przykład 1. Przedstaw prostą o równaniu $y = 2x + 1$ w postaci ogólnej.

Aby przekształcić równanie prostej do postaci ogólnej, wystarczy przenieść wszystkie wyrazy na jedną stronę znaku równości:

$$y = 2x + 1$$

$$-2x + y - 1 = 0$$

Przykład 2. Przedstaw prostą o równaniu $4x + 2y + 6 = 0$ w postaci kierunkowej.

Aby przekształcić równanie prostej do postaci kierunkowej, wystarczy wyznaczyć z równania y:

$$4x + 2y + 6 = 0$$

$$2y = -4x - 6 \ / : 2$$

$$y = -2x - 3$$

Równoległość i prostopadłość:
Dwie proste są równoległe, jeżeli $a_1 = a_2$, czyli ich współczynniki kierunkowe są równe.

Dwie proste są prostopadłe, jeżeli $a_1 \cdot a_2 = -1$, czyli iloczyn ich współczynników kierunkowych wynosi -1.

Uwaga: Dowolne równanie postaci $x =$ [liczba] reprezentuje pionową prostą w układzie współrzędnych. Prostej takiej nie da się przedstawić w postaci kierunkowej (nie jest funkcją).

30.2 Zadania

Zadanie 1. Sprawdź, czy punkt A należy do prostej k, jeżeli:

a) $A = (2, 4)$, $k : 2x + y + 1 = 0$

b) $A = (-1, 3)$, $k : y = 2x + 5$

c) $A = (-2, -4)$, $k : 2x - 8y - 28 = 0$

d) $A = (7, 7)$, $k : x - 7 = 0$

Określ, w jakiej postaci dana jest prosta k.

Zadanie 2. Przekształć równania następujących prostych do postaci ogólnej:

a) $y = x + 1$

b) $y = 2x + 2$

c) $y = 1 - 3x$

d) $y = x$

Zadanie 3. Przekształć równania następujących prostych do postaci kierunkowej:

a) $x + y + 1 = 0$

b) $2x - y + 8 = 0$

c) $4x - 3y - 2 = 0$

d) $x - y + 8y - 5 = 0$

Zadanie 4. Wskaż równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 2x + 1$:

A. $y = 2x + 3$ B. $y = -2x + 1$

C. $y = \frac{1}{2}x + 3$ D. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Zadanie 4. Wskaż równanie prostej równoległej do prostej $y = -x+2$ i przechodzącej przez punkt $(0, 3)$:

A. $y = -x - 3$ B. $y = x - 3$

C. $y = x + 3$ D. $y = -x + 3$

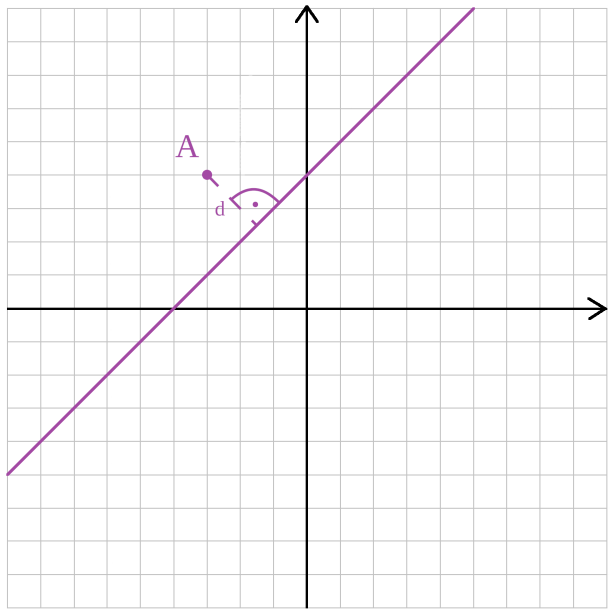
Zadanie 5. Określ wzajemne położenie prostych k i m w układzie współrzędnych:

$$k : 2x + y + 1 = 0$$

$$m : y = -2x + 4$$

31 Geometria analityczna - odległość punktu od prostej

Rozważmy prostą k o równaniu $y = x + 4$ oraz punkt A o współrzędnych $(-3, 4)$:



Długość odcinka oznaczonego na rysunku literą d nazywamy odległością punktu od prostej. Wyraża się ona wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

gdzie A, B, C są współczynnikami prostej w **postaci ogólnej**, a x_0, y_0 są współrzędnymi punktu. Przekształćmy prostą k z powyższego rysunku do postaci ogólnej:

$$y = x + 4$$

$$-x + y - 4 = 0$$

Czyli $A = -1$, $B = 1$ i $C = -4$. Natomiast współrzędne punktu A to $x_0 = -3$, $y_0 = 4$. Wstawiamy do wzoru:

$$d = \frac{|(-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 4 + (-4)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{|3 + 4 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

31.1 Zadania

Zadanie 1. Wyznacz odległość punktu A od prostej k, jeżeli:

a) $A = (1, 4)$, $k : y = -x - 4$

b) $A = (-2, 0)$, $k : y = 2x + 4$

c) $A = (0, 2)$, $k : y = x - 2$

d) $A = (-3, 3)$, $k : y = x$

Zadanie 2. Bok AB trójkąta ABC jest zawarty w prostej o równaniu $y = -x - 1$. Wiedząc, że wierzchołek C ma współrzędne $(2, 2)$, oblicz wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C. `Odległość punktu` C `od prostej jest wysokością trójkąta. Narysować!`

Zadanie 3. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $A = (0, 2)$, $B = (3, 1)$ i $C = (4, 3)$. `Obliczyć długość jednego z boków, wyznaczyć prostą w której jest zawarty - dalej jak w poprzednim zadaniu`

32 Geometria analityczna - równanie okręgu

32.1 Teoria

Okrąg w układzie współrzędnych jest opisany równaniem:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

gdzie (a, b) są współrzędnymi środka okręgu, a r jego promieniem. Przykładowo:

- $x^2 + y^2 = 1$ opisuje okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1 (tzw. okrąg jednostkowy)
- $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ opisuje okrąg o środku w punkcie $(2, 1)$ i promieniu $\sqrt{9} = 3$
- $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ opisuje okrąg o środku w punkcie $(-2, -1)$ i promieniu $\sqrt{4} = 2$.

Uwaga: Okrąg nie jest funkcją.

Prosta jest styczna do okręgu, jeżeli jej odległość od środka okręgu jest równa promieniowi.

Przykład. Sprawdź, czy prosta o równaniu $3x - 2y + 13 = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 13$.

Bezpośrednio z równania okręgu mamy, że promień okręgu wynosi $r = \sqrt{13}$, a jego środek znajduje się w punkcie $S = (0, 0)$. Korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej, obliczymy odległość prostej z zadania od środka okręgu:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 13|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

Usuwamy niewymierność z mianownika:

$$d = \frac{13}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13} = \sqrt{13} = r$$

Czyli odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi okręgu, zatem prosta jest styczna do okręgu.

32.2 Zadania

Zadanie 1. Podaj współrzędne środka okręgu oraz jego promień, narysuj go:

a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

b) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 16$

c) $x^2 + (y-1)^2 = 4$

d) $x^2 + y^2 = 25$

Zadanie 2. Oblicz odległość między środkami okręgów O_1 i O_2 o równaniach:

$$O_1 : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$$
$$O_2 : (x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$$

Zadanie 3. Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (1, 3)$ i promieniu $r = 6$.

Zadanie 4. Oblicz długość okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 49$. Podaj pole koła ograniczonego przez ten okrąg.

Zadanie 5. Sprawdź, czy punkt A należy do okręgu O, jeżeli:

a) $A = (0, 2)$, $O : x^2 + (y+1)^2 = 9$

b) $A = (1, -1)$, $O : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4$

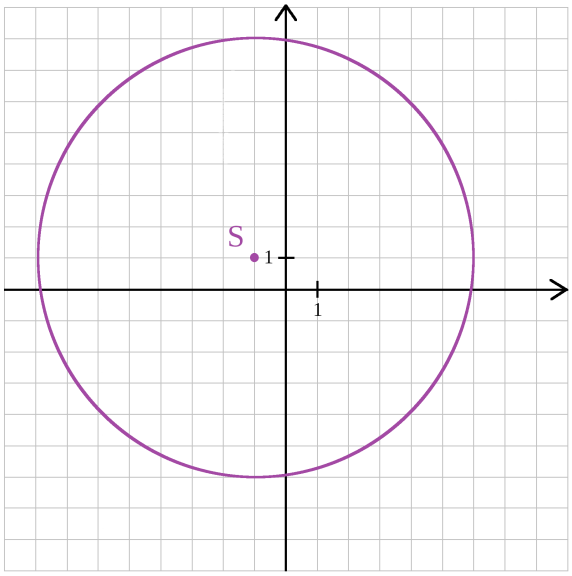
c) $A = (3, 4)$, $O : x^2 + y^2 = 9$

`Wstawiamy współrzędne punktu do równania okręgu i sprawdzamy czy otrzymana równość jest prawdziwa.`

Zadanie 6. Dane są punkty $A = (2, 1)$ oraz $B = (0, 7)$. Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Zapisz równanie tego okręgu.

Zadanie 7. Sprawdź, czy prosta dana równaniem $2x - y + 18 = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2 + (y-1)^2 = 17$.

Zadanie 8. Napisz równanie przedstawionego na rysunku okręgu:



Zadanie 9. Ile punktów wspólnych ma okrąg $x^2 + (y-1)^2 = 4$ z prostą $y = x$?
`Rysujemy! Bonusowe pytanie: jakie są możliwe ilości punktów wspólnych prostej i okręgu?`

33 Statystyka

33.1 Statystyki opisowe

Rozważmy pewien zbiór danych złożony z n obserwacji. Pojedyncze obserwacje oznaczymy jako $x_1, x_2, ..., x_n$.

Średnią arytmetyczną nazywamy wartość:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

`Sumujemy wszystkie obserwacje i dzielimy przez ich ilość.`

Medianą nazywamy wartość środkową. Jeżeli liczba danych jest nieparzysta, to wybieramy środkową wartość. Jeżeli liczba danych jest parzysta, to bierzemy średnią arytmetyczna z dwóch środkowych wartości.

Dominantą nazywamy najczęściej występującą wartość w zbiorze danych.

Wariancją nazywamy wartość:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

Odchyleniem standardowym nazywamy pierwiastek z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$$

33.2 Sposoby przedstawiania danych

Szereg prosty to najprostszy sposób przedstawienia danych. Polega na wypisaniu wszystkich obserwacji. Przykładowo:

Uczniowie klasy 1A otrzymali ze sprawdzianu następujące oceny: $2, 3, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 4, 6$.

Szereg rozdzielczy polega na podaniu liczby obserwacji o danej wartości. Przykładowo:

W tabeli przedstawiono oceny, jakie uczniowie klasy 1A otrzymali ze sprawdzianu:

Ocena (x_i)	Liczba uczniów (n_i)
1	1
2	3
3	3
4	2
5	0
6	1

Graficznie, szereg rozdzielczy bardzo często pojawia się w postaci **histogramu.**

33.3 Przykłady

Przykład 1: Szereg prosty. Wyznacz statystyki opisowe dla zestawu danych:

$$-3, 2, -3, -5, -3, -4, -6, 0, 2, 3$$

1. Średnia arytmetyczna:

$$\overline{x} = \frac{-3+2-3-5-3-4-6+0+2+3}{10} = \frac{-17}{10} = -1.7$$

2. Mediana: uporządkujmy zestaw danych rosnąco:

$$-6, -5, -4, -3, -3, -3, 0, 2, 2, 3$$

Ponieważ liczba obserwacji jest parzysta, weźmiemy średnią arytmetyczną z liczb stojących na 5 i 6 pozycji:

$$Me = \frac{-3+(-3)}{2} = -3$$

3. Dominanta: Najczęściej, bo 3 razy występuje obserwacja -3. Czyli

$$D = -3$$

4. Wariancja: Sporządzimy tabelę. W pierwszej kolumnie przedstawiamy obserwacje, w kolejnej odejmujemy od każdej z nich średnią (u nas $\overline{x} = -1.7$), a w ostatniej tę różnicę podnosimy do kwadratu. Na końcu zsumujemy ostatnią kolumnę.

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - x)^2$
-6	-4.3	18.49
-5	-3.3	10.89
-4	-2.3	5.29
-3	-1.3	1.69
-3	-1.3	1.69
-3	-1.3	1.69
0	1.7	2.89
2	3.7	13.69
2	3.7	13.69
3	4.7	22.09
	SUMA	92.1

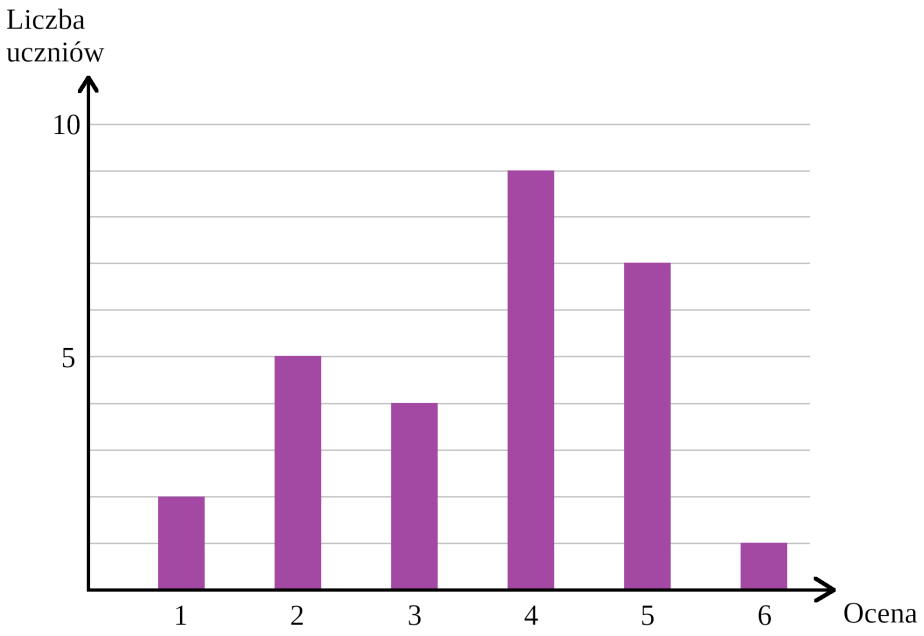
Czyli $(x_1 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2 = 92.1$. Wstawiamy do wzoru na wariancję:

$$\sigma^2 = \frac{92.1}{10} = 9.21$$

5. Odchylenie standardowe: pierwiastkujemy wariancję:

$$\sigma = \sqrt{9.21} \approx 3.03$$

Przykład 2: Szereg rozdzielczy. Na histogramie przedstawiono oceny uczniów klasy 1A ze sprawdzianu:



Wyznacz statystyki opisowe ocen z tego sprawdzianu.

Zbierzemy dane w tabeli:

Ocena (x_i)	Liczba uczniów (n_i)
1	2
2	5
3	4
4	9
5	7
6	1

1. Średnia arytmetyczna: Rozszerzymy naszą tabelę o dodatkową kolumnę, w której wymnożymy ocenę z liczbą uczniów, którzy ją otrzymali:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
1	2	2
2	5	10
3	4	12
4	9	36
5	7	35
6	1	6
SUMA	28	101

Otrzymaną sumę iloczynów dzielimy przez liczbę wszystkich uczniów:

$$\overline{x} = \frac{101}{28} \approx 3.61$$

2. Mediana: Mamy 28 obserwacji - liczba jest parzysta, zatem będziemy brać średnią arytmetyczną z 14. i 15. obserwacji. Idąc w kolejności mamy: 2 jedynki, 5 dwójek, 4 trójki, 9 czwórek (czyli na 14. i 15. miejscu stoi czwórka). Zatem:

$$Me = \frac{4+4}{2} = 4$$

3. Dominanta: bezpośrednio z histogramu widać, że najczęściej występującą oceną, bo aż 9 razy jest czwórka. Czyli

$$D = 4$$

4. Wariancja: Postępujemy podobnie jak w przypadku szeregu prostego - układamy tabelę, odejmujemy od obserwacji średnią, różnicę podnosimy do kwadratu, mnożymy razy liczbę obserwacji danej oceny, i sumujemy ostatnią kolumnę:

x_i	n_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$
1	2	-2.61	6.81	13.62
2	5	-1.61	2.59	12.96
3	4	-0.61	0.38	1.49
4	9	0.39	0.15	1.37
5	7	1.39	1.93	13.52
6	1	2.39	5.71	5.71
SUMA	28			48.68

Wstawiamy do wzoru na wariancję:

$$\sigma^2 = \frac{48.68}{28} \approx 1.74$$

5. Odchylenie standardowe: pierwiastkujemy wariancję:

$$\sigma = \sqrt{1.74} \approx 1.32$$

33.4 Zadania

Zadanie 1. Średnia arytmetyczna zestawu liczb: $1, 3, 3, 7, 6, x, 4$ wynosi 4. Oblicz x, a następnie wyznacz medianę.

Zadanie 2. Pewna agencja w lutym sprzedała 6 mieszkań, za średnią kwotę 600 000 zł. Wiedząc, że pierwsze 5 mieszkań kosztowało 400 000 zł, oblicz cenę szóstego.

Zadanie 3. Mediana zestawu danych $10, 4, 5, 12, x, 8$ wynosi 7. Wyznacz x oraz średnią arytmetyczną.

Zadanie 4. W tabeli przedstawiono rozkład zarobków w pewnej firmie. Oblicz średnie zarobki pracownika tej firmy.

Wysokość zarobków (zł)	Liczba pracowników
12000	2
9000	3
6000	10
4500	5
2800	1

Zadanie 5. W tabeli przedstawiono temperatury powietrza w kolejnych dniach tygodnia. Oblicz odchylenie standardowe temperatury w tym tygodniu.

Dzień tygodnia	Temperatura (°C)
Poniedziałek	5
Wtorek	2
Środa	10
Czwartek	5
Piątek	3
Sobota	3
Niedziela	7

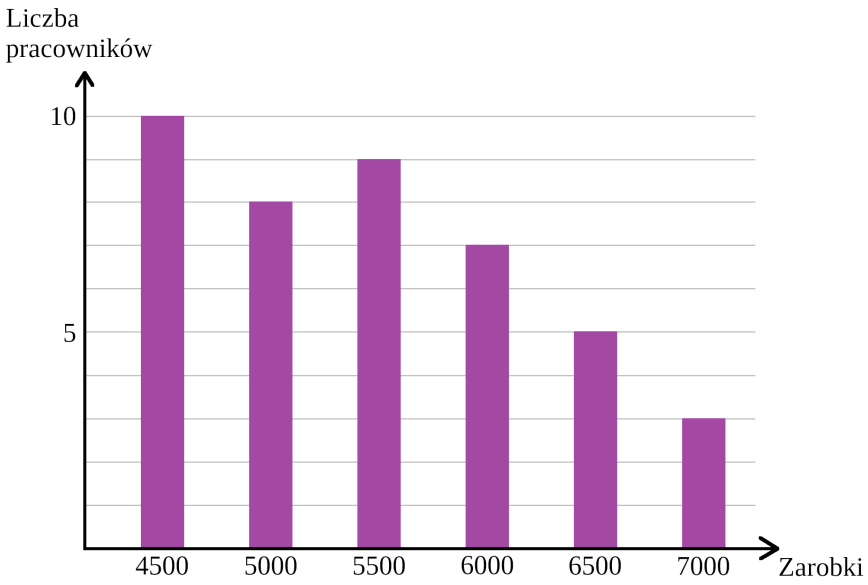
Zadanie 6. W tabeli przedstawiono wyniki ankiety dotyczącej liczby spożywanych dziennie filiżanek kawy.

Liczba filiżanek kawy	Liczba respondentów
0	10
1	12
2	x
3	2

Wiedząc, że średnia liczba spożywanych filiżanek wyniosła 1, oblicz, ilu respondentów zadeklarowało spożywanie 2 filiżanek dziennie.

Zadanie 7. Uczniowe klasy 1A (liczącej 20 uczniów) uzyskali średnio 20 punktów na sprawdzianie ze statystyki. Oblicz, jaki był średni wynik w klasie 1B (liczącej 30 uczniów), jeżeli wiadomo, że łączny średni wynik obu klas wyniósł 35 punktów.

Zadanie 8. Na histogramie przedstawiono rozkład zarobków w pewnej firmie:



Oblicz:

a) średnie zarobki

b) odchylenie standardowe zarobków

c) medianę zarobków

d) dominantę zarobków.