Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Matematika – teoretična smer (uni)

Matija Pretnar

Sintetična topologija

Diplomsko delo

Ljubljana, 2005

Kazalo

Program diplomskega dela

Že dalj časa je znano, da lahko podatkovne tipe in izračunljive funkcije obravnavamo kot topološke prostore in zvezne funkcije. V zadnjih letih pa so rezultati M. Escardója in P. Taylorja pripeljali do spoznanja, da lahko ta pogled obrnemo in s prijemi iz teorije programskih jezikov dokazujemo lastnosti topoloških prostorov.

V diplomskem delu predstavite sintetično topologijo in dokazovanje topoloških izrekov z lambda računom. Pravilnost dokazov utemeljite z razširitvijo kategorije topoloških prostorov na kartezično zaprto kategorijo ekviloških prostorov. Predstavite tudi Escardójeve pogoje za kategorijo posplošenih topoloških prostorov in jih poskusite poenostaviti, ali kako drugače izboljšati.

Temeljna literatura:

- M.H. Escardó, *Synthetic topology of data types and classical spaces*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **87** (2004), 21–156.
- A. Bauer, L. Birkedal, D.S. Scott, *Equilogical Spaces*, Theoretical Computer Science **315** (2004), št. 1, 35–59.

Ljubljana, 11. 9. 2004

doc. dr. Andrej Bauer

Povzetek

Naloga obravnava osnove in uporabo sintetične topologije — veje topologije, ki za osnovo vzame zveznost namesto odprtosti, za orodje pa kategorije namesto množic.

Najprej pokažemo povezavo med klasično in sintetično topologijo, ki temelji na bijekciji med odprtimi podmnožicami topološkega prostora in zveznimi funkcijami v prostor Sierpinskega. Topološke lastnosti so tako izražene kar z obstojem določenih zveznih funkcij. S pomočjo lambda računa te funkcije sestavljamo v nove in tako dobivamo zelo kratke dokaze znanih trditev.

Ob podrobni raziskavi topologij na prostoru preslikav ugotovimo, da za sintetične dokaze potrebujemo kartezično zaprto kategorijo, kar pa kategorija topoloških prostorov ni. Zato jo vložimo v kategorijo ekviloških prostorov in nato dokažemo, da so trditve, dokazane s sintetičnimi dokazi, veljavne tudi v klasični topologiji.

Na koncu si ogledamo posplošene topološke prostore, ki zajemajo vse kategorije, v katere bi želeli vložiti kategorijo topoloških prostorov. V večji splošnosti dokažemo nekatere povezovalne trditve in nakažemo smer sintetičnih dokazov v drugih posplošenih topoloških prostorih.

Math. Subj. Class. (MSC 2000): 03B40, 18A40, 54A05, 54C05, 54C35, 54J05

Ključne besede:
sintetična topologija, prostori preslikav, eksponenti topoloških prostorov, ekviloški prostori, posplošeni topološki prostori

Keywords:
synthetic topology, function spaces, exponentials of topological spaces, equilogical spaces, generalized topological spaces

Uvod

Želja po poenotenju matematike sili vse njene veje, da gradijo na temeljih teorije množic. Topološki prostor podamo z množico množic, ki jih imenujemo odprte, izmed vseh preslikav pa za zvezne odberemo tiste, pri katerih so praslike odprtih množic odprte. Ker prostor najprej razbijemo na osnovne delce, tak pristop imenujemo *analitičen*. Kljub občutku, da imamo s tako analizo prostor in njegove lastnosti pod večjim nadzorom, nam ti delci včasih uidejo iz rok in potrebno je precej truda, da jih zložimo nazaj v opazovani prostor.

Težava analitičnega pristopa je v oddaljitvi od jedra raziskave. Najpomembnejši koncept v topologiji je zveznost, temelji pa so postavljeni na odprtosti. Drugačno pot uberemo pri *sintetični topologiji*, kjer za osnovne zidake namesto odprtih množic vzamemo zvezne preslikave. Prostori so nedeljive celote in mi zgolj opazujemo odnose oziroma zvezne preslikave med njimi.

Poti, ki se za vsako ceno izogiba odprtim množicam, ne bomo ubrali. Čimveč bomo poskušali postoriti brez odprtih množic, če pa bo nuja, si bomo pomagali tudi z njimi. Sploh na začetku, ko bomo topološke lastnosti na novo izrazili z zveznimi preslikavami. Že tu se bo izkazalo, da novi pojmi niso zgolj dobesedni prevodi starih, ampak so celo naravnejši. Največjo potrditev, da smo res na pravi poti, bomo dobili, ko bomo trditve dokazovali z neverjetno kratkimi in krotkimi dokazi.

Cilj naloge je raziskati osnove sintetične topologije, osvetliti njeno ozadje in klasičnemu topologu pokazati, da so dokazi kljub preprostosti pravilni. Vse z namenom pripeljati to mlado, neznano in lepo vejo med slovenske matematike.

Osnova za diplomsko delo je bilo delo *Synthetic topology of data types and classical spaces* [4], avtorja Martína Escardója. Če avtorji niso posebej navedeni, trditve in pripadajoči dokazi nastopajo v tem delu. Spremembe definicije posplošenih topoloških prostorov so izvirno delo in so podrobneje opisane v zadnjem razdelku. Diagrami so stavljeni s pomočjo paketa *Diagrams*, ki ga je izdelal Paul Taylor.

Malo študentov ima srečo, da jih najde mentor, ki ne bi le presegel naloženih obveznosti, ampak bil hkrati tudi dober prijatelj. Z veseljem priznam, da sem jo sam imel. Kot se mu nikoli ne bom dovolj zahvalil za to, da mi je postavil cilje, ki si jih sam ne bi, tako se nikoli ne bom dovolj zahvalil svojim staršem in bratu za podporo, da sem jih lahko dosegel. Vseeno bom poskusil. Hvala.

Poglavje 1

Prehod v sintetično topologijo

1.1 Prostor Sierpinskega

Naredili bomo prvi korak iz klasične v sintetično topologijo in tokrat odprte množice podali z zveznimi preslikavami.

Osnovne topološke lastnosti so večinoma opisane z odprtimi množicami. Glede na to, da so na enak način podani tudi topološki prostori sami, so take definicije smiselne. Toda kmalu, pri definiciji kompaktnosti na primer, se definicije oddaljijo od intuitivne predstave. Poleg tega se izkaže, da imajo v topologiji zvezne preslikave večjo vlogo od odprtih množic. A kaj, ko je tudi zveznost podana s pomočjo odprtosti. Ali lahko to zvezo obrnemo?

Vemo, da lahko običajne podmnožice predstavimo s *karakterističnimi preslikavami*. Podmnožico A množice X nam predstavlja preslikava $\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$, podana s predpisom

$$\chi_A \colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{če je } x \in A, \\ 1 & \text{če je } x \notin A. \end{cases}$$

Med točkama 0 in 1 ni nobene razlike, zato bi ju v zgornji enačbi med seboj lahko tudi zamenjali. Ko pa na karakteristično preslikavo pogledamo s topologovimi očmi, bi razlika nekje morala biti. Kadar je točka v odprti množici, je v njej tudi neka njena okolica, v nasprotnem primeru pa to ni nujno res. Da bi to razliko upoštevali, moramo tudi na množici $\{0, 1\}$ uvesti topologijo. To, da ima vsaka točka odprte množice odprto okolico najlaže zajamemo tako, da množico $\{1\}$ proglasimo za odprto okolico točke 1 in s tem zmehčamo mejo med točkama. Sedaj točki nista več enakovredni. Enica je na vrhu, ničla pa pod njo, saj nima lastne okolice.

Razliko med starim in novim stanjem zaznamujemo tudi s pisavo. Točko 0 označimo z $\perp$, kar preberemo kot *dno*, točko 1 pa z $\top$, kar preberemo kot *vrh*. Prostoru s topologijo $\{\emptyset, \{\top\}, \{\perp, \top\}\}$ rečemo *prostor Sierpinskega* in ga označimo s $\mathbb{S}$. Pravilnost izbire topologije na $\mathbb{S}$ nam potrdi sledeča trditev.

1.1 Trditev *Podmnožica A prostora X je odprta takrat, ko je zvezna njena karakteristična preslikava $\chi_A \colon X \to \mathbb{S}$, podana s predpisom*

$$\chi_A \colon x \mapsto \begin{cases} \top & \text{če je } x \in A, \\ \bot & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaz Preslikava je zvezna, kadar je praslika vsake odprte množice odprta. Prostor $\mathbb{S}$ vsebuje tri odprte množice. Prasliki množic $\emptyset$ in $\mathbb{S}$ sta $\emptyset$ in X, zato sta vedno odprti. Torej je preslikava χ_A zvezna natanko tedaj, kadar je množica $\chi_A^{-1}(\{\top\}) = A$ odprta. □

Karakteristična preslikava $\chi_A \colon X \to \{0, 1\}$ je zasnovana kot predikat na množici X, podan s predpisom $x \mapsto x \in A$, kjer resničnost izjave označimo z 1, neresničnost pa z 0. To idejo prenesemo tudi na prostor Sierpinskega in resnico označimo z $\top$, neresnico pa z $\bot$.

Kot topologi se omejimo zgolj na zvezne predikate, toda na to ne glejmo kot na omejitev, temveč kot na izbor. Vemo namreč, da je množica točk, na katerih je zvezni predikat resničen, odprta. Tako nam vsaka odprta množica podaja zvezen predikat, vsak zvezen predikat pa odprto množico.

Kakor potenčno množico $\mathcal{P}(X)$ izenačimo z množico 2^X, lahko tudi topologijo $\mathcal{O}(X)$ izenačimo z množico zveznih predikatov $\mathcal{C}(X, \mathbb{S})$. To analogijo bomo kmalu dopolnili, ko bomo množico $\mathcal{C}(X, \mathbb{S})$ opremili s topologijo in dobili topološki prostor $\mathbb{S}^X$.

1.2 Prevod osnovnih topoloških lastnosti

Povezavo med odprtostjo in zveznostjo bomo izkoristili, da prevedemo najenostavnejše topološke lastnosti.

Če so odprte množice enakovredne zveznim predikatom, lahko v definicijah topoloških lastnosti namesto prvih uporabljamo druge. Ker je množica zaprta natanko tedaj, kadar je komplement odprte množice, po trditvi 1.1 iz opisa odprtih takoj dobimo opis zaprtih množic.

1.2 Trditev *Podmnožica A prostora X je zaprta takrat, ko je zvezna karakteristična preslikava njenega komplementa $\chi_{X \setminus A} \colon X \to \mathbb{S}$, podana s predpisom*

$$\chi_{X \setminus A} \colon x \mapsto \begin{cases} \top & \text{če je } x \in X \setminus A \text{ oziroma } x \notin A, \\ \bot & \text{sicer.} \end{cases}$$

Druga znana karakterizacija lastnosti s pomočjo odprte množice je karakterizacija diskretnosti. Prostor X je diskreten takrat, ko je njegova diagonala

$$\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

odprta podmnožica prostora $X \times X$, opremljenega s produktno topologijo. To odprto podmnožico lahko izenačimo z njeno karakteristično preslikavo. Ker par (x, y) leži na diagonali $\Delta(X)$ natanko tedaj, kadar je $x = y$, lahko diskretne prostore opišemo še preprosteje.

1.3 Trditev *Prostor X je diskreten takrat, ko predpis enakosti*

$$=_X : (x, y) \mapsto \begin{cases} \top & \text{če je } x = y, \\ \bot & \text{sicer,} \end{cases}$$

določa zvezen predikat $=_X : X \times X \to \mathbb{S}$.

Trditev 1.3 ima zanimiv dual, saj z njim ne opišemo trivialne topologije, pričakovanega nasprotja diskretne topologije. Diagonala $\Delta(X)$ je namreč zaprta natanko tedaj, kadar je prostor X Hausdorffov. Karakteristično preslikavo tokrat prevedemo na neenakost.

1.4 Trditev *Prostor X je Hausdorffov takrat, ko predpis neenakosti*

$$\neq_X : (x, y) \mapsto \begin{cases} \top & \text{če je } x \neq y, \\ \bot & \text{sicer,} \end{cases}$$

določa zvezen predikat $\neq_X : X \times X \to \mathbb{S}$.

1.3 Kompaktnost

Razmislili bomo o količini množic, ki nastopajo v definiciji kompaktnosti, in zakorakali v temne vode topologije na prostorih zveznih preslikav.

Pri vseh prejšnjih lastnostih smo opazovali zgolj eno odprto množico. Če pa želimo prevesti definicijo kompaktnosti, moramo upravljati z odprtimi pokritji. Družino odprtih množic takoj izenačimo z družino zveznih predikatov. A pri tem se ne ustavimo, saj lahko tudi to družino izenačimo s preslikavo. Zvezni predikati pa so zgolj (resda zelo) poseben primer zveznih preslikav, zato raje poiščimo topologijo na množici $\mathcal{C}(X, Y)$, ki dobro zajame odnose med preslikavami.

Topologija prostora X je natanko opisana z zveznimi preslikavami v prostor Sierpinskega. Podobno lahko to topologijo opišemo tudi s preslikavami v prostor X. Izsledki algebraične topologije nam povedo, da lahko prostor X precej dobro opišemo s preslikavami oblike $S^n \to X$.

Izberimo si poljubno zvezno preslikavo $f : Z \to \mathcal{C}(X, Y)$. Za izbrani $z \in Z$ je $f(z) : X \to Y$ zvezna preslikava, ki jo lahko uporabimo na $x \in X$, da dobimo $f(z)(x) \in Y$. Potem pa na f lahko pogledamo tudi kot na funkcijo dveh elementov $f' : Z \times X \to Y$, podano z $f' : (z, x) \mapsto f(z)(x)$.

1.5 Definicija *Transponirana preslikava* preslikave $f\colon Z \times X \to Y$ je preslikava $\widehat{f}\colon Z \to \mathcal{C}(X, Y)$, definirana s predpisom

$$\widehat{f}\colon z \mapsto (x \mapsto f(z, x)) \,.$$

Druga pomembna operacija na preslikavah je evalvacija. Ta nam omogoča, da elemente množice zveznih preslikav sistematično uporabljamo na argumentih.

1.6 Definicija *Evalvacija* je preslikava $\mathsf{ev}_{X \to Y}\colon \mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y$, podana s predpisom

$$\mathsf{ev}_{X \to Y}\colon (f, x) \mapsto f(x) \,.$$

Združimo ti dve definiciji in poglejmo, kaj je $\widehat{\mathsf{ev}}_{X \to Y}$. Ker je

$$\widehat{\mathsf{ev}}_{X \to Y}(f)(x) = \mathsf{ev}_{X \to Y}(f, x) = f(x)$$

za vse $x \in X$, je $\widehat{\mathsf{ev}}_{X \to Y}$ kar identiteta na množici $\mathcal{C}(X, Y)$. Po drugi strani je

$$\mathsf{ev}_{X \to Y}(\widehat{f}(z), x) = \widehat{f}(z)(x) = f(z, x) \,,$$

zato lahko vsako preslikavo zapišemo s pomočjo njene transponiranke in evalvacije kot

$$f = \mathsf{ev}_{X \to Y} \circ (\widehat{f} \times \mathsf{id}_X) \,.$$

Ker se preslikavi f in $\widehat{f}$ na prvi pogled razlikujeta zgolj v zapisu, bi na množici $\mathcal{C}(X, Y)$ pričakovali tako topologijo, da sta zvezni bodisi obe bodisi nobena. Vendar to v splošnem ne drži. Če je topologija prefina, iz zveznosti f ne sledi zveznost $\widehat{f}$, če pa je pregroba, se zgodi ravno obratno.

1.7 Definicija *Eksponent* prostorov X in Y je prostor Y^X na množici $\mathcal{C}(X, Y)$, za katerega sta preslikava $f\colon Z \times X \to Y$ in njena transponiranka $\widehat{f}\colon Z \to Y^X$ hkrati zvezni.

1.8 Trditev *Eksponent Y^X je enolično določen, če obstaja.*

Dokaz Recimo, da obstaja še prostor E, ki ustreza pogojem v definiciji 1.7. Ker je $\widehat{\mathsf{ev}}_{X \to Y} = \mathsf{id}_{\mathcal{C}(X,Y)}\colon E \to E$ zvezna, je zvezna tudi preslikava

$$\mathsf{ev}_{X \to Y}\colon E \times X \to Y \,.$$

To preslikavo znova transponiramo, da dobimo $\mathsf{id}_{\mathcal{C}(X,Y)}\colon E \to Y^X$. Analogno pokažemo, da je $\mathsf{id}_{\mathcal{C}(X,Y)}\colon Y^X \to E$ zvezna, zato se topologiji prostorov E in Y^X ujemata. □

Obstoj eksponentov bomo podrobno raziskali v drugem poglavju, zato naj skrbi (na žalost upravičene) o neobstoju trenutno počakajo, do takrat pa privzemimo, da eksponenti obstajajo. Ta predpostavka se bo na koncu izkazala za nepotrebno, če pa bi jo hoteli odpraviti sedaj, bi morali precej skreniti s poti.

Druga stvar, katere dokaz bi porušil trenutni tok misli, je karakterizacija kompaktnosti, zato z njim počakajmo do trditve 2.12.

1.9 Trditev *Če prostor $\mathbb{S}^X$ obstaja, je podmnožica A prostora X kompaktna takrat, ko predpis*

$$\forall_A : p \mapsto \begin{cases} \top & \text{če za vsak } x \in A \text{ velja } p(x) = \top, \\ \bot & \text{sicer,} \end{cases}$$

določa zvezen predikat $\forall_A : \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$.

Predpostavke o obstoju $\mathbb{S}^X$ se bomo kasneje znebili, ko bomo domeno kvantifikatorja $\forall_A$ zamenjali s primernejšim prostorom.

V prid taki karakterizaciji govori dejstvo, da je tako opisana kompaktnost res posplošitev končnosti. Za končno množico $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je namreč

$$\forall_A(p) = p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \cdots \wedge p(x_n) \,.$$

Kakor je bila dual enakosti neenakost, je dual univerzalnega kvantifikatorja eksistenčni kvantifikator.

1.10 Definicija Če prostor $\mathbb{S}^X$ obstaja, je podmnožica A prostora X *odkrita* takrat, ko predpis

$$\exists_A : p \mapsto \begin{cases} \top & \text{če obstaja } x \in A, \text{ da je } p(x) = \top, \\ \bot & \text{sicer,} \end{cases}$$

določa zvezen predikat $\exists_A : \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$.

Razlog, da z eksistenčnim kvantifikatorjem nismo opisali že znane lastnosti, je preprost. Vsaka podmnožica A poljubnega topološkega prostora X je odkrita. Tudi dokaz te izjave bo skupaj z odpravo predpostavke o obstoju $\mathbb{S}^X$ počakal na primernejši trenutek.

Odkritost je v klasični topologiji trivialna lastnost in nikakršnega smisla ni v tem, da bi jo nadrobneje raziskovali, v sintetičnem pogledu pa nam pride še kako prav.

1.4 Zasnove sintetičnih dokazov

Zaradi drugačnih definicij bomo tudi dokazovali drugače in videli, da dobra ideja ne zagotavlja dobre izvedbe.

topološka lastnost	zvezni predikat
odprtost A v X	$\chi_A \colon X \to \mathbb{S}$
zaprtost A v X	$\chi_{X \setminus A} \colon X \to \mathbb{S}$
diskretnost X	$=_X \colon X \times X \to \mathbb{S}$
T_2-lastnost X	$\neq_X \colon X \times X \to \mathbb{S}$
kompaktnost A v X	$\forall_A \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$
odkritost A v X	$\exists_A \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$

Tabela 1.1: Prevod topoloških lastnosti na zvezne predikate.

Lastnosti topološkega prostora smo izenačili z zveznostjo predikatov. Osnovne trditve v topologiji so sestavljene iz predpostavk o lastnostih prostorov in sklepa o novi lastnosti. Mi raje predpostavimo zveznost predikatov in skušajmo pokazati, da je tudi iskani predikat zvezen.

Najenostavnejši način, s katerim iz danih preslikav sestavljamo nove, je komponiranje. In že s kompozicijo in šestimi lastnostmi, ki smo jih opisali do sedaj, lahko dokažemo kar precej trditev.

1.11 Trditev *Singletoni v Hausdorffovem prostoru so zaprti.*

Dokaz Naj bo X Hausdorffov prostor in $a \in X$. Po predpostavki je predikat $\neq_X \colon X \times X \to \mathbb{S}$ zvezen, pokazati pa moramo zveznost karakteristične preslikave $\chi_{X \setminus \{a\}} \colon X \to \mathbb{S}$. Ideja dokaza se skriva v logični ekvivalenci

$$x \in X \setminus \{a\} \iff x \neq a\ .$$

Oboroženi s to idejo zlahka najdemo primerno zaporedje zveznih preslikav, ki jih združimo v $\chi_{X \setminus \{a\}}$. S k_a smo označili konstantno preslikavo, ki zavzame le vrednost a.

$$X \xrightarrow{(\mathsf{id}_X, \mathsf{k}_a)} X \times X \xrightarrow{\neq_X} \mathbb{S}$$

□

1.12 Trditev *Kompaktne podmnožice Hausdorffovega prostora so zaprte.*

Dokaz Naj bo X Hausdorffov prostor in $A \subseteq X$ kompaktna množica. Ideja je tokrat skrita v ekvivalenci

$$x \in X \setminus A \iff \forall a \in A . x \neq a\ .$$

Ker je $\neq_X \colon X \times X \to \mathbb{S}$ zvezna, iz lastnosti eksponenta $\mathbb{S}^X$ sledi, da je zvezna tudi njena transponiranka $\widehat{\neq_X} \colon X \to \mathbb{S}^X$. Množica A je kompaktna, zato je kvantifikator $\forall_A$ zvezen in karakteristično preslikavo $\chi_{X\setminus A}$ spet lahko zapišemo kot kompozicijo zveznih preslikav.

$$X \xrightarrow{\widehat{\neq_X}} \mathbb{S}^X \xrightarrow{\forall_A} \mathbb{S}$$

$\square$

1.13 Trditev *Zvezna preslikava slika kompaktne množice v kompaktne.*

Dokaz Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava in naj bo A kompakten podprostor prostora X. Tokrat dokaz sloni na

$$\forall y \in f(A).p(y) \iff \forall x \in A.p(f(x)) \ .$$

Ker je $\mathsf{ev}_{Y\to\mathbb{S}}\colon \mathbb{S}^Y \times Y \to \mathbb{S}$ zvezna preslikava, je zvezna tudi preslikava $f'\colon \mathbb{S}^Y \times X \to \mathbb{S}$, sestavljena kot

$$\mathbb{S}^Y \times X \xrightarrow{\mathsf{id}_{\mathbb{S}^Y} \times f} \mathbb{S}^Y \times Y \xrightarrow{\mathsf{ev}_{Y\to\mathbb{S}}} \mathbb{S} \ .$$

S transponiranjem dobimo zvezno preslikavo $\mathbb{S}^f = \widehat{f'}\colon \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}^X$, ki slika s predpisom $\mathbb{S}^f\colon p \mapsto p \circ f$. S pomočjo te preslikave zgradimo iskani kvantifikator $\forall_{f(A)}$.

$$\mathbb{S}^Y \xrightarrow{\mathbb{S}^f} \mathbb{S}^X \xrightarrow{\forall_A} \mathbb{S}$$

$\square$

Dokaz trditve 1.11 je bil lep primer sintetičnega dokaza. Pri dokazu trditve 1.12 smo morali vpeljati transponirano preslikavo, za trditev 1.13 pa smo najprej vpeljali pomožno preslikavo, jo transponirali in šele nato z ostalimi zložili v iskano preslikavo. Tudi v to, da smo res dobili iskano preslikavo, lahko upravičeno podvomimo. Poskusimo poenostaviti premetavanje preslikav.

1.5 Lambda račun

Vsaj deloma se bomo poskusili izvleči izpod gore preslikav, ki so nas zasule med dokazovanjem, in pri tem spoznali droben programski jezik.

Čim v dokazu nastopa več različnih preslikav, ki so si med seboj podobne, nastopijo težave že ob poimenovanju. Očitna rešitev je v tem, da se z imeni sploh ne trudimo. Namesto da bi pisali $f(x) = x+1$ in $g(x) = x^2$, lahko pišemo kar $f = (x \mapsto x+1)$ ali $g = (x \mapsto x^2)$. Na levi strani imamo zapisano ime, na desni pa predpis. Tako kot v definiciji $n = 5$. S takimi predpisi lahko potem tudi računamo:

$$(x \mapsto x+1) \circ (x \mapsto x^2) = (x \mapsto x^2 + 1) \ .$$

V ozadju pa se skrivajo težave. Kako smo sploh izračunali kompozitum $x \mapsto x^2 + 1$? Smo v prvi funkciji na desni strani namesto x zapisali x^2? Kaj pa če bi bila ta funkcija podana z enakovrednim predpisom $y \mapsto y + 1$? Kaj storimo, če imamo funkcijo več spremenljivk? Kako bi zapisali funkcijo, ki funkcije slika v funkcije?

Odgovore na vsa ta vprašanja nam daje *lambda račun*, zato se poslužimo njegovih rezultatov. S splošnim lambda računom, v katerem so vse spremenljivke in preslikave del istega prostora, se ne bomo ukvarjali. Kljub temu, da bi s tem dobili globlji vpogled v lambda račun, ki bi pripomogel tudi k razumevanju snovi diplomskega dela, se mu izognimo. Površna obdelava bi nas še bolj zmedla, za podrobnejšo ni prostora.

Začnimo raje s *tipiziranim* lambda računom. Tu računamo z izrazi, ki predstavljajo elemente topoloških prostorov. Za osnovne izraze si izberimo vse spremenljivke in konstante. Za vsako konstanto $a \in X$ ter spremenljivko x nad prostorom X sta $a : X$ in $x : X$ lambda izraza. Poleg tega lahko poljubna lambda izraza $E : X$ in $F : Y$ sestavimo v par $(E, F) : X \times Y$.

Preden nadaljujemo z bolj raznolikimi izrazi, povejmo, da prostor X v izrazu $E : X$ imenujemo *tip* izraza E. Za konkreten primer si izberimo konstanto π in neko realno spremenljivko x ter iz njiju najprej tvorimo izraza $\pi : \mathbb{R}$ in $x : \mathbb{R}$, nato pa še par $(\pi, x) : \mathbb{R}^2$.

Prva operacija, s katero sestavljamo nove izraze, je *aplikacija*. Recimo, da imamo preslikavo $f\colon X \to Y$. Tedaj imamo tudi izraz $f : Y^X$, ki ga lahko uporabimo na izrazu $E : X$, kar zapišemo z $fE : Y$. Če izraz E na primer predstavlja konstanto $a \in X$, izraz fE predstavlja konstanto $f(a) \in Y$. Enak sklep lahko naredimo za spremenljivke. Vzemimo realno množenje $\mu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in izraz $\mu : \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ aplicirajmo na par $(\pi, x) : \mathbb{R}^2$. Dobimo $\mu(\pi, x) : \mathbb{R}$, kar lahko zapišemo kot $\pi \cdot x : \mathbb{R}$.

Druga operacija pa nam omogoča, da iz predpisov, podanih z lambda izrazi, tvorimo preslikave. Izraz $E : Y$, v katerem prosto nastopa spremenljivka x iz prostora X, nam porodi *abstrakcijo* $\lambda x.E : Y^X$, v katerem je spremenljivka x vezana. Iz izraza $\pi \cdot x : \mathbb{R}$ lahko tvorimo izraz $\lambda x.\pi \cdot x : \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Do imena lambda račun je prišlo po pomoti. Avtor lambda računa *Alonzo Church* je za abstrakcijo uporabljal oznako $\hat{x}.E$. Ker tiskarju tega ni uspelo staviti, je izraze natisnil kot $\wedge x.E$. Naslednji tiskar pa je stvar „popravil" v sedaj sprejeto obliko $\lambda x.E$.

Ker naj bi abstrakcije predstavljale preslikave, takoj dobimo smiselno pravilo, kako aplikacijo združujemo z abstrakcijo. Izraz $(\lambda x.E)F$ poenostavimo v izraz E, v katerem vse pojavitve spremenljivke x zamenjamo z izrazom F. Naš primer lahko pripeljemo do konca z aplikacijo $(\lambda x.\pi \cdot x)2 : \mathbb{R} = 2\pi : \mathbb{R}$.

Iz vseh elementov topoloških prostorov lahko sestavimo lambda izraze. Kakšna pot vodi v drugo smer? Izraz $\lambda x.\pi \cdot x$ nam očitno predstavlja preslikavo $x \mapsto \pi \cdot x$. Toda par (π, x) nam ne predstavlja ne konstante ne spremenljivke nad $\mathbb{R}^2$. Vsak lambda izraz je potrebno interpretirati v kontekstu —

vsaki prosti spremenljivki moramo prirediti neko vrednost.

Za *kontekst*, ki bo predstavljal ogrodje za interpretacijo izrazov, si izberimo produkt topoloških prostorov $\Gamma = \prod_{x_i} X_i$ skupaj s projekcijami $\mathsf{pr}_{x_i} \colon \Gamma \to X_i$, kjer je $\{x_i\}_i$ indeksna množica spremenljivk. Tako za vezane kot za proste spremenljivke moramo vedeti, v katerih prostorih zasedajo vrednosti. Namesto $\lambda x.E : Y^X$ zato raje pišimo $\lambda x : X.E : Y^X$, za interpretacijo izraza $E : X$ v kontekstu Γ pa zahtevajmo, da v indeksni množici produkta Γ nastopajo vse *proste spremenljivke* izraza E, v produktu pa pripadajoči tipi teh spremenljivk. V tem primeru lahko *interpretacijo* podamo z zvezno preslikavo $[\![E]\!] \colon \Gamma \to X$, ki jo gradimo rekurzivno.

konstanta Za poljubno konstanto a iz topološkega prostora X je $a : X$ lambda izraz, ki ga lahko interpretiramo v poljubnem kontekstu Γ s konstantno preslikavo

$$[\![a]\!] = \mathsf{k}_a \colon \Gamma \to X\ .$$

spremenljivka Za poljubno spremenljivko x nad prostorom X je $x : X$ lambda izraz, ki ga v kontekstu Γ lahko interpretiramo s projekcijo

$$[\![x]\!] = \mathsf{pr}_x \colon \Gamma \to X\ .$$

par Kadar sta $E : X$ in $F : Y$ lambda izraza, je $(E, F) : X \times Y$ lambda izraz. Ker so vse proste spremenljivke para (E, F) proste tudi v E in F, lahko najprej zgradimo interpretaciji $[\![E]\!] \colon \Gamma \to X$ in $[\![F]\!] \colon \Gamma \to Y$, ki ju združimo v

$$[\![(E, F)]\!] = ([\![E]\!], [\![F]\!]) \colon \Gamma \to X \times Y\ .$$

Poleg tega lahko tudi vsak par $(E, F) : X \times Y$ razstavimo nazaj na komponenti $\mathsf{pr}_1(E, F) = E : X$ in $\mathsf{pr}_2(E, F) = F : Y$. Interpretacijo podamo prek projekcij $\mathsf{pr}_X \colon X \times Y \to X$ in $\mathsf{pr}_Y \colon X \times Y \to Y$.

abstrakcija Če lahko izraz $E : Y$, v katerem prosto nastopa spremenljivka $x : X$, interpretiramo v kontekstu $\Gamma \times X$ z interpretacijo $[\![E]\!] \colon \Gamma \times X \to Y$, lahko interpretiramo izraz $\lambda x : X.E : Y^X$ v kontekstu Γ s transponiranko

$$[\![\lambda x : X.E]\!] = \widehat{[\![E]\!]} \colon \Gamma \to Y^X\ .$$

aplikacija Tudi za lambda izraza $E : Y^X$ in $F : X$ so proste spremenljivke izraza $EF : Y$ proste tudi v E in F, zato interpretaciji $[\![E]\!] \colon \Gamma \to Y^X$ in $[\![F]\!] \colon \Gamma \to X$ z evalvacijo združimo v interpretacijo

$$[\![EF]\!] = \mathsf{ev}_{X \to Y} \circ ([\![E]\!], [\![F]\!]) \colon \Gamma \to Y\ .$$

1.6 Primeri dokazov

Ob obilici preprostih sintetičnih dokazov bomo videli, da je topologijo smiselno zasnovati na zveznosti.

Oboroženi z lambda računom poskusimo dokaz trditve 1.13 spisati znova.

Dokaz Spomnimo se na idejo, saj nam ta narekuje pot dokaza.

$$\forall y \in f(A).p(y) \iff \forall x \in A.p(f(x))$$

Vzemimo spremenljivki $x : X$ in $p : \mathbb{S}^Y$ ter konstantna izraza $\forall_A : \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ in $f : Y^X$. Z aplikacijo najprej dobimo izraz $f(x) : Y$, iz tega pa še $p(f(x)) : \mathbb{S}$. Ker je spremenljivka x v tem izrazu prosta, uporabimo abstrakcijo, da dobimo $\lambda x : X.p(f(x)) : \mathbb{S}^X$. Z aplikacijo kvantifikatorja dobimo $\forall_A(\lambda x : X.p(f(x))) : \mathbb{S}$. Toda tudi p je prosta spremenljivka, zato izvedemo še eno abstrakcijo in iskani kvantifikator je

$$\forall_{f(A)} = [\![\lambda p : \mathbb{S}^X.\forall_A(\lambda x : X.p(f(x)))]\!] \,.$$

□

Oglejmo si še nekaj primerov sintetičnih dokazov. Zaradi enostavnejšega zapisa označimo interpretacijo lambda izraza kar z izrazom samim. Ker nam vse abstrakcije predstavljajo preslikave, namesto $f = \lambda x : X.E$ pišimo kar $f(x) = E$. Privoščimo pa si tudi preglednejši zapis funkcij, ki predstavljajo predikate, zato na desni strani definicij na primer namesto $\neq_X(x, y)$ pišimo $x \neq_X y$, namesto $\chi_X(x)$ pa $x \in X$.

1.14 Trditev *Naj bo $f : X \to Y$ zvezna preslikava. Tedaj je za vsako odprto množico $V \subseteq Y$ tudi njena praslika $f^{-1}(V)$ odprta.*

Dokaz

$$x \in f^{-1}(V) \iff f(x) \in V$$

$$\chi_{f^{-1}(V)}(x) = (f(x) \in V)$$

□

1.15 Trditev *Naj bo X Hausdorffov prostor. Tedaj je za vsak element $a \in X$ singleton $\{a\}$ zaprta množica.*

Dokaz

$$x \notin \{a\} \iff x \neq a$$

$$\chi_{X \setminus \{a\}}(x) = (x \neq_X a)$$

□

1.16 Trditev *Naj bo X diskreten prostor. Tedaj je poljubna množica $A \subseteq X$ odprta.*

Dokaz

$$x \in A \iff \exists y \in A.x = y$$

$$\chi_A(x) = \exists_A(\lambda y : X.(x =_X y))$$

□

V dokazu smo uporabili odkritost množice A, ki nam zagotavlja, da je $\exists_A : \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ vselej zvezna preslikava.

1.17 Trditev *Naj bo X Hausdorffov prostor. Tedaj je vsaka kompaktna množica $K \subseteq X$ zaprta.*

Dokaz

$$x \notin K \iff \forall y \in K.x \neq y$$

$$\chi_{X \setminus K}(x) = \forall_K(\lambda y : X.(x \neq_X y))$$

□

1.18 Trditev *Naj bo $r \colon X \to A$ retrakcija Hausdorffovega prostora X. Tedaj je množica A zaprta.*

Dokaz

$$x \notin A \iff x \neq r(x)$$

$$\chi_{X \setminus A}(x) = (x \neq_X r(x))$$

□

1.19 Trditev *Naj bo X diskreten prostor. Tedaj je X tudi Hausdorffov.*

Dokaz

$$x \neq y \iff \exists (x', y') \notin \Delta(X).((x' = x) \wedge (y' = y))$$

$$\neq_X(x, y) = \exists_{X \times X \setminus \Delta(X)}(\lambda(x', y') : X \times X.((x' =_X x) \wedge (y' =_X y)))$$

□

Kljub temu, da sta diskretnost in T_2 dualni lastnosti, zaradi odkritosti v topoloških prostorih iz prve sledi druga. Namesto zveznih bi lahko opazovali izračunljive preslikave [4]. V tem primeru bi našli izračunljive množice, na katerih enakost je izračunljiva, neenakost pa ni.

1.20 Trditev *Naj bosta $f, g \colon X \to Y$ zvezni preslikavi v Hausdorffov prostor Y. Tedaj je njuna incidenčna množica $I = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ zaprta.*

Dokaz

$$x \notin I \iff f(x) \neq g(x)$$

$$\chi_{X \setminus I}(x) = (f(x) \neq_Y g(x))$$

□

1.21 Trditev *Naj bo K kompakten prostor. Tedaj je vsaka zaprta množica $A \subseteq K$ tudi kompaktna.*

Dokaz

$$\forall x \in A.p(x) \iff \forall x \in K.(p(x) \vee x \notin A)$$

$$\forall_A(p) = \forall_K(\lambda x : X.(p(x) \vee x \notin A))$$

□

1.22 Trditev *Naj bosta $K \subseteq X$ in $L \subseteq Y$ kompaktni podmnožici. Tedaj je tudi množica $K \times L$ kompaktna.*

Dokaz

$$\forall (x, y) \in K \times L.p(x, y) \iff \forall x \in K.\forall y \in L.p(x, y)$$

$$\forall_{K \times L}(p) = \forall_K(\lambda x : X.\forall_L(\lambda y : Y.p(x, y)))$$

□

1.23 Trditev *Naj bosta $K \subseteq X$ kompaktna in $V \subseteq Y$ odprta množica. Tedaj je*

$$S(K, V) = \{f : X \to Y \mid f(K) \subseteq V\}$$

odprta podmnožica Y^X.

Dokaz

$$f \in S(K, V) \iff \forall x \in K.f(x) \in V$$

$$\chi_{S(K,V)}(f) = \forall_K(\lambda x : X.f(x) \in V)$$

□

1.24 Trditev *Naj bo Y Hausdorffov prostor. Tedaj je za poljuben prostor X tudi prostor Y^X Hausdorffov.*

Dokaz

$$f \neq g \iff \exists x \in X.f(x) \neq g(x)$$

$$\neq_{Y^X}(f, g) = \exists_X(\lambda x : X.f(x) \neq_Y g(x))$$

□

1.25 Trditev *Naj bosta X kompakten in Y diskreten prostor. Tedaj je prostor Y^X diskreten.*

Dokaz

$$f = g \iff \forall x \in X.f(x) = g(x)$$

$$=_{Y^X}(f, g) = \forall_X(\lambda x : X.f(x) =_Y g(x))$$

□

1.26 Trditev *Naj bo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(X)$ poljubna družina odprtih množic. Tedaj je tudi njena unija $\bigcup \mathcal{A}$ odprta.*

Dokaz

$$x \in \bigcup \mathcal{A} \iff \exists U \in \mathcal{A}. x \in U$$
$$\chi_{\bigcup \mathcal{A}}(x) = \exists_{\mathcal{A}}(\lambda U : \mathcal{O}(X). x \in U)$$

□

Na $\mathcal{O}(X)$ smo prek povezave med odprtimi množicami in zveznimi karakterističnimi funkcijami prenesli topologijo prostora $\mathbb{S}^X$. Bolj zanimiv je trditve 1.26, saj posplošuje topološki aksiom o odprtosti končnega preseka odprtih množic.

1.27 Trditev *Naj bo $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{O}(X)$ kompaktna družina odprtih množic. Tedaj je tudi njen presek $\bigcap \mathcal{K}$ odprta množica.*

Dokaz

$$x \in \bigcap \mathcal{K} \iff \forall U \in \mathcal{K}. x \in U$$
$$\chi_{\bigcap \mathcal{K}}(x) = \forall_{\mathcal{K}}(\lambda U : \mathcal{O}(X). x \in U)$$

□

Privoščimo si še malo drznosti in navedimo ideji za sintetična dokaza dveh trditev o krovnih prostorih. Ker sta enostavni, upamo, da sta tudi pravilni in da se bo našel bralec, ki ju bo podkrepil z dokazom.

1.28 Trditev *Naj bo $p\colon \widetilde{X} \to X$ krovna projekcija na Hausdorffov prostor X. Tedaj je tudi prostor $\widetilde{X}$ Hausdorffov.*

Ideja dokaza Če točki v krovnem prostoru ležita v različnih vlaknih, sta gotovo različni. V nasprotnem primeru ležita v istem vlaknu, ki pa je diskretno in zato Hausdorffovo.

$$\tilde{x} \neq_{\widetilde{X}} \tilde{y} \iff (p(\tilde{x}) \neq_X p(\tilde{y})) \vee (\tilde{x} \neq_{p^{-1}(p(\tilde{x}))} \tilde{y})$$
$$\neq_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (p(\tilde{x}) \neq_X p(\tilde{y})) \vee (\tilde{x} \neq_{p^{-1}(p(\tilde{x}))} \tilde{y})$$

□

1.29 Trditev *Naj bo $\widetilde{X}$ Hausdorffov prostor in $p\colon \widetilde{X} \to X$ krovna projekcija s kompaktnim vlaknom. Tedaj je tudi prostor X Hausdorffov.*

Ideja dokaza Točki v prostoru X sta različni, če imata disjunktni vlakni.

$$x \neq y \iff \forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in p^{-1}(x) \times p^{-1}(y). \tilde{x} \neq \tilde{y}$$
$$\neq_X(x, y) = \forall_{p^{-1}(x) \times p^{-1}(y)}(\lambda(\tilde{x}, \tilde{y}) : p^{-1}(x) \times p^{-1}(y). \tilde{x} \neq_{\widetilde{X}} \tilde{y})$$

□

V obeh dokazih nastopa družina zveznih preslikav, odvisna od argumentov iskanega predikata. V prvi trditvi bi na primer morali pokazati zveznost preslikave $\neq_{p^{-1}(p(-))}\colon X \to \mathbb{S}^{X \times X}$, podane s predpisom $x \mapsto \neq_{p^{-1}(p(\tilde{x}))}$.

Poglavje 2

Prostori zveznih preslikav

2.1 Topologije na množici zveznih preslikav

Med topologijami na množici zveznih preslikav
bomo izbrali tiste, ki so povezane s
transponiranjem, in pogledali njihovo urejenost.

Opogumljeni s kratkostjo in enostavnostjo sintetičnih dokazov se lotimo pereče težave — obstoja eksponentov. Za motivacijo navedimo kruto dejstvo, da eksponent poljubnih dveh topoloških prostorov ne obstaja vedno. Pot do končnega odgovora, nakazana v [5], nas bo vodila prek lastnosti prostora $\mathcal{C}(X, Y)$, zato začnimo pri osnovah.

2.1 Definicija Topologija na prostoru $\mathcal{C}(X, Y)$ se imenuje:

- *šibka*, če iz zveznosti preslikave $f\colon Z \times X \to Y$ sledi zveznost preslikave $\widehat{f}\colon Z \to \mathcal{C}(X, Y)$,
- *močna*, če iz zveznosti preslikave $\widehat{f}\colon Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ sledi zveznost preslikave $f\colon Z \times X \to Y$.

Iz dokaza trditve 1.8 lahko sklepamo, da je eksponent Y^X edini prostor, opremljen s topologijo, ki je hkrati šibka in močna. Taki topologiji rečemo *eksponentna*. Primer šibke topologije je trivialna topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$, saj je vsaka preslikava $\widehat{f}\colon Z \to \mathcal{C}(X, Y)$ zvezna.

2.2 Lema *Topologija na prostoru $\mathcal{C}(X, Y)$ je močna natanko tedaj, kadar je evalvacija $\mathsf{ev}_{X\to Y}\colon \mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y$ zvezna.*

Dokaz Spomnimo se na enakost $\widehat{\mathsf{ev}}_{X\to Y} = \mathsf{id}_{\mathcal{C}(X,Y)}$. Ker je identiteta vedno zvezna, topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ pa je močna, je zvezna tudi evalvacija.

Po drugi strani velja $f = \mathsf{ev}_{X\to Y} \circ (\widehat{f} \times \mathsf{id}_X)$. Če je $\widehat{f}$ zvezna, je f kompozicija zveznih preslikav in zato tudi sama zvezna. □

S pomočjo te karakterizacije vidimo, da je diskretna topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ vedno močna. Vzemimo odprto množico $V \subseteq Y$. Vsak par

$$(f, x) \in \mathsf{ev}_{X\to Y}^{-1}(V)$$

ima odprto okolico

$$\{f\} \times f^{-1}(V) \subseteq \mathsf{ev}_{X\to Y}^{-1}(V) ,$$

zato je $\mathsf{ev}_{X\to Y}^{-1}(V)$ odprta, evalvacija zvezna in diskretna topologija močna.

Sedaj pa upravičimo poimenovanja topologij.

2.3 Trditev *Naj bosta $\mathcal{M}(X, Y)$ in $\mathcal{S}(X, Y)$ prostora, zaporedoma opremljena s poljubno močno in šibko topologijo na množici $\mathcal{C}(X, Y)$. Tedaj velja:*

- *Vsaka topologija, močnejša od topologije na $\mathcal{M}(X, Y)$, je močna.*
- *Vsaka topologija, šibkejša od topologije na $\mathcal{S}(X, Y)$, je šibka.*
- *Topologija na $\mathcal{M}(X, Y)$ je močnejša od topologije na $\mathcal{S}(X, Y)$.*

Dokaz Prvo in drugo točko dokažemo tako, da transponiranko, ki slika v množico $\mathcal{C}(X, Y)$, komponiramo še z identiteto, ki slika v prostor s šibkejšo topologijo in je zato zvezna.

Primerjavo med topologijama $\mathcal{S}(X, Y)$ in $\mathcal{M}(X, Y)$ dobimo tako, da najprej vzamemo evalvacijo $\mathsf{ev}_{X\to Y} \colon \mathcal{M}(X, Y) \times X \to Y$. Ta je po lemi 2.2 zvezna. Ker je topologija $\mathcal{S}(X, Y)$ šibka, je po definiciji 2.1 tudi preslikava

$$\widehat{\mathsf{ev}}_{X\to Y} \colon \mathcal{M}(X, Y) \to \mathcal{S}(X, Y)$$

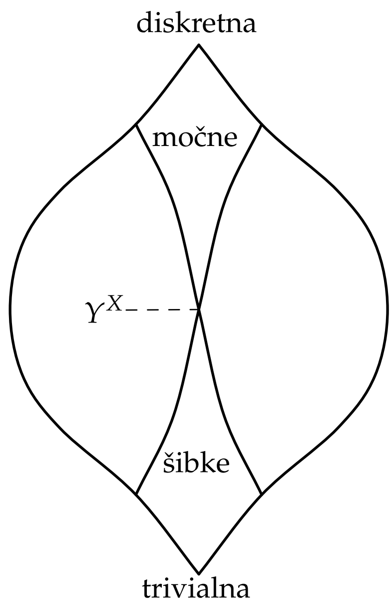
zvezna. Toda $\widehat{\mathsf{ev}}_{X\to Y} = \mathsf{id}_{\mathcal{C}(X,Y)}$, zato ima prostor $\mathcal{M}(X, Y)$ močnejšo topologijo od prostora $\mathcal{S}(X, Y)$. □

Ko smo uvedli interpretacijo lambda izrazov, smo lastnosti eksponenta uporabili le pri interpretaciji abstrakcije in aplikacije. Abstrakcijo smo interpretirali s pomočjo transponiranja, aplikacijo pa z evalvacijo. Torej smo pri interpretaciji abstrakcije potrebovali šibko, pri interpretaciji aplikacije pa močno topologijo. Interpretacija lambda izrazov je zato tesno povezana z obstojem eksponentov — vse lambda izraze lahko interpretiramo le takrat, ko obstajajo vsi eksponenti.

Kot bomo videli v primeru 2.21, v topoloških prostorih eksponenti ne obstajajo, zato se jim poskušajmo čimbolj približati z obstoječimi prostori. Ker je eksponentna topologija močna in šibka, je med drugim tudi najmočnejša šibka topologija. Na to lastnost se zanesemo, ko iščemo eksponentni sorodno topologijo.

2.4 Trditev *Najmočnejši šibki topologiji na $\mathcal{C}(X, Y)$ pravimo* naravna*, prostor, opremljen z njo, pa označimo z $X \to Y$.*

Naravna topologija vedno obstaja in se v primeru, ko eksponentna topologija obstaja, z njo ujema.



Slika 2.1: Mreža topologij na $\mathcal{C}(X, Y)$, kadar Y^X obstaja.

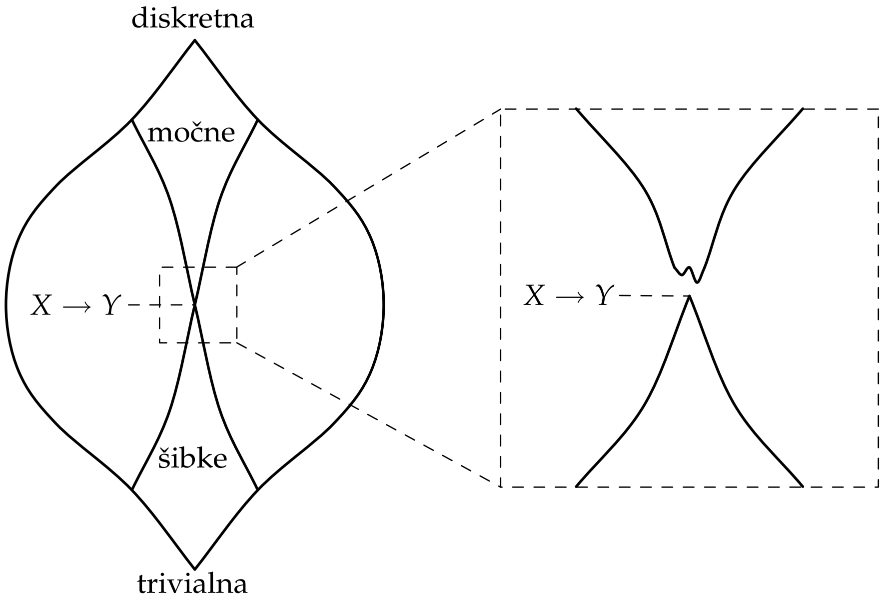
Dokaz Izberimo si vse množice $U \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$, za katere je $\widehat{f}^{-1}(U)$ odprta za vsako zvezno preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$. Ni težko videti, da taka družina res tvori topologijo, mi pa preverimo, da je ta topologija šibka in hkrati močnejša od poljubne šibke.

Za vsako zvezno preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$ in odprto množico $U \subseteq X \to Y$ je $\widehat{f}^{-1}(U)$ po definiciji odprta. Zato je $\widehat{f}$ zvezna in topologija na $X \to Y$ je šibka.

Sedaj pa vzemimo še poljubno šibko topologijo $\mathcal{S}(X, Y)$ in odprto množico $U \subseteq \mathcal{S}(X, Y)$. Za poljubno $f\colon Z \times X \to Y$ je $\widehat{f}\colon Z \to \mathcal{S}(X, Y)$ zvezna, množica $\widehat{f}^{-1}(U)$ pa odprta. Torej je U odprta tudi v $X \to Y$, zato je $X \to Y$ močnejša od $\mathcal{S}(X, Y)$. □

Z gotovostjo lahko trdimo, da je naravna topologija najboljši približek eksponentne. Najšibkejše močne topologije nismo izpostavili, saj v splošnem ne obstaja. Videli bomo, da se v primeru, ko obstaja, ujema z eksponentno, torej s tem nismo pridobili nobene nove topologije.

Če topologije uredimo po moči, dobimo delno urejeno množico, ki ima poleg tega strukturo polne mreže. Kadar eksponent obstaja, so vse topologije nad njim močne, tiste pod njim pa šibke. V tem primeru tudi močne in šibke topologije tvorijo polni mreži. Hassejev diagram si lahko ogledamo na sliki 2.1.



Slika 2.2: Mreža topologij na $\mathcal{C}(X, Y)$, kadar Y^X ne obstaja.

Ko pa eksponenta ni, njegovo vlogo prevzame naravna topologija. Ta je šibka, zato šibke topologije spet tvorijo polno mrežo. Pri močnih topologijah pa se zgodba ne ponovi, saj presek vseh močnih topologij tokrat ni močna topologija. Približno skico strukture si lahko ogledamo na sliki 2.2. S topologijami, ki niso ne močne ne šibke, se ne ukvarjajmo, kljub temu, da jih je mnogo več.

2.2 Topologije topologij

Znanje o topologijah na preslikavah bomo prenesli na odprte množice odprtih množic v topologiji topologije.

Zvezne preslikave v prostor Sierpinskega natanko opisujejo topologijo prostora X, zato je $\mathcal{C}(X, \mathbb{S})$ najpomembnejši primer prostora zveznih preslikav. Ker smo odprte množice izenačili z zveznimi predikati, lahko topologijo s $\mathcal{C}(X, \mathbb{S})$ prenesemo na $\mathcal{O}(X)$.

Če opazujemo odprte množice odprtih množic, ni odveč paziti, da ne pride do zmešnjave. Tako v primeru $x \in A \in \mathcal{A}$ recimo, da je x element množice A, množica A pa *članica družine* $\mathcal{A}$. Če družina $\mathcal{A}$ vsebuje odprto poddružino $\mathcal{U}$, tako da velja $A \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$, imenujemo družino $\mathcal{A}$ okolica množice A. To imenovanje se razlikuje od ustaljenega, kjer je okolica množice A taka množica B, za katero obstaja odprta množica U, da je $A \subseteq U \subseteq B$.

2.5 Definicija Topologija na $\mathcal{O}(X)$ se imenuje:

- *šibka*, kadar je za vsako odprto množico $W \subseteq Z \times X$ preslikava

$$W_{-} : Z \to \mathcal{O}(X) ,$$

  definirana s predpisom

$$W_{-} : z \mapsto W_z = \{x \in X \mid (z, x) \in W\} ,$$

  zvezna. Množico W_z imenujemo *z-prerez množice* W.

- *močna*, kadar je graf relacije vsebovanosti

$$\Gamma_{\ni} = \{(U, x) \in \mathcal{O}(X) \times X \mid x \in U\}$$

  odprta množica.

2.6 Pripomba Topologija na $\mathcal{C}(X, \mathbb{S})$ je po lemi 2.2 močna, kadar je $\mathsf{ev}_{X \to \mathbb{S}}$ zvezna, torej kadar je

$$\mathsf{ev}^{-1}_{X \to \mathbb{S}}(\{\top\}) = \{(\chi_U, x) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}) \times X \mid \chi_U(x) = \top\}$$

odprta množica. Poimenovanje topologij na $\mathcal{O}(X)$ tedaj dobimo s prenosom pojmov med zveznimi predikati in odprtimi množicami.

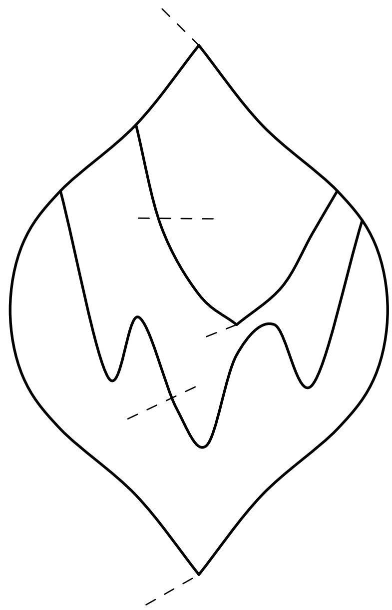
Eno najpreprostejših topologij na $\mathcal{O}(X)$ dobimo, če $\mathcal{O}(X)$ delno uredimo z relacijo $\subseteq$. Družina $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}(X)$ je *odprta družina Aleksandrova*, kadar iz $U \in \mathcal{U}$ in $U \subseteq V \in \mathcal{O}(X)$ sledi $V \in \mathcal{U}$. Družino

$$\uparrow U = \{V \in \mathcal{O}(X) \mid U \subseteq V\}$$

imenujemo *zgornji odsek* množice U.

Tudi vse odprte množice, urejene z vsebovanostjo, tvorijo polno mrežo s prazno množico na dnu in vsem prostorom na vrhu. Odprte družine Aleksandrova si na taki mreži lahko predstavljamo kot množice, ki se pno do vrha. Kljub temu, da je slika mreže odprtih množic podobna sliki mreže topologij, je med njima bistvena razlika. Pri prvi so elementi mreže odprte množice, pri drugi pa celotne topologije.

2.7 Lema *Vse odprte družine Aleksandrova tvorijo* topologijo Aleksandrova*, ki je močna topologija. Bazo topologije Aleksandrova tvorijo zgornji odseki odprtih množic.*



Slika 2.3: Odprta družina $\mathcal{U}$ in zgornji odsek $\uparrow U$ v topologiji Aleksandrova na $\mathcal{O}(X)$.

Dokaz Preverimo, da taka družina množic res tvori topologijo, saj bomo njej podobne družine še srečali. Očitno sta $\emptyset$ in $\mathcal{O}(X)$ odprti družini Aleksandrova. Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ odprti družini Aleksandrova in naj bo $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ odprta ter $U \subseteq V \in \mathcal{O}(X)$. Po definiciji topologije Aleksandrova je $V \in \mathcal{U}$ in $V \in \mathcal{V}$, zato je $V \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Torej je tudi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ odprta družina Aleksandrova.

Vzemimo še družino $\{\mathcal{U}_\mu\}_\mu$ odprtih družin Aleksandrova. Če množica U leži v uniji $\bigcup_\mu \mathcal{U}_\mu$, obstaja družina $\mathcal{U}_\mu$, da je $U \in \mathcal{U}_\mu$. Če je $U \subseteq V \in \mathcal{O}(X)$, je $V \in \mathcal{U}_\mu \subseteq \bigcup_\mu \mathcal{U}_\mu$. Torej je tudi $\bigcup_\mu \mathcal{U}_\mu$ odprta družina Aleksandrova in vse take družine res tvorijo topologijo.

Topologija Aleksandrova je močna, če je graf $\Gamma_\ni$ odprt. Pokažimo, da ima vsak par $(U, x) \in \Gamma_\ni$ odprto okolico, ki prav tako leži v grafu. Množica $\uparrow U \times U$ je odprta, hkrati pa iz $u \in U$ sledi, da je $u \in V$ za vsak $V \in \uparrow U$. Torej je $(U, x) \in \uparrow U \times U \subseteq \Gamma_\ni$ in graf vsebovanosti je odprt, topologija Aleksandrova pa močna. □

Odprte družine Aleksandrova imajo lahko „oster rob“. Če si ogledamo topologijo Aleksandrova na odprtih množicah realnih številih, lahko rečemo, da naraščajoče zaporedje intervalov

$$(-1/2, 1/2), (-2/3, 2/3), (-3/4, 3/4), \ldots$$

„konvergira“ k svoji uniji $(-1,1)$. Vendar vsi členi zaporedja ležijo izven njene (najmanjše) okolice $\uparrow(-1,1)$. To konvergenco odprtih množic formalizirajmo, odprtim družinam Aleksandrova pa zmehčajmo rob.

2.8 Definicija Izberimo si družino $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(X)$. Odprto družino Aleksandrova $\mathcal{U}$ imenujemo *$\mathcal{A}$-aproksimativna*, kadar v primeru, ko je $\mathcal{A}$ odprto pokritje neke članice $U \in \mathcal{U}$, torej je $U \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, obstaja končno podpokritje neke članice $V \in \mathcal{U}$.

Vzemimo družino $\mathcal{A}$ in recimo, da v njej obstaja naraščajoče zaporedje $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ odprtih množic. Naj bo $U = \bigcup_i U_i$ in $\mathcal{U}$ njena $\mathcal{A}$-aproksimativna okolica. Zaporedje $U_1, U_2, \ldots$ pleza po mreži $\mathcal{O}(X)$ in v limiti pokrije množico $U \in \mathcal{U}$. Tedaj pa obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, ki pokriva neko množico $V \in \mathcal{U}$. Zato so vsi členi zaporedja od U_n dalje tudi v množici $\mathcal{U}$.

Za poljubno družino $\mathcal{A}$ vse $\mathcal{A}$-aproksimativne družine tvorijo topologijo $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, kar pokažemo podobno kot v lemi 2.7 za topologijo Aleksandrova.

2.9 Lema *Za vsako družino $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{O}(X)$ je $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ močna topologija.*

Dokaz Spet pokažimo, da ima vsaka točka v grafu vsebovanosti odprto okolico, saj je v tem primeru graf odprt, topologija $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ pa močna. Naj bo $(U, x) \in \Gamma_{\ni}$. Ločimo dva primera.

Če je $x \in \bigcup \mathcal{A}$, je $x \in V$ za neko odprto množico $V \in \mathcal{A}$. Tedaj zgornji odsek $\uparrow(U \cap V)$ leži v $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, saj $\mathcal{A}$ vsebuje končno podpokritje $\{V\}$ množice $U \cap V$. V tem primeru je $(\uparrow(U \cap V)) \times (U \cap V)$ odprta okolica para (U, x), ki je vsebovana v $\Gamma_{\ni}$.

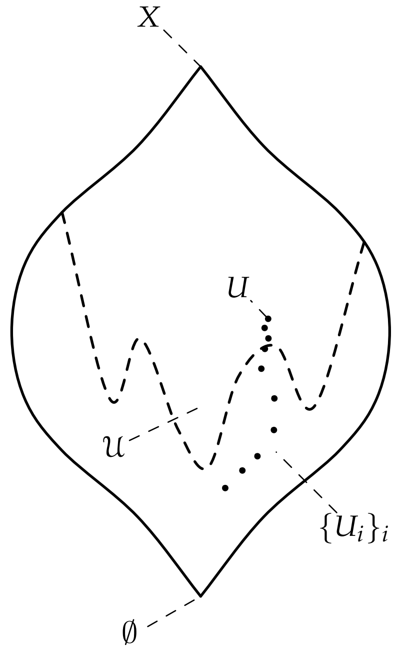
Kadar pa x ne leži v $\bigcup \mathcal{A}$, družina $\mathcal{A}$ ni pokritje nobene množice $V \in \uparrow U$, zato je družina $\uparrow U$ trivialno odprta in iskana okolica para (U, x) je $(\uparrow U) \times U$. V obeh primerih smo našli odprto okolico za (U, x), ki je vsebovana v $\Gamma_{\ni}$, zato je $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ močna topologija. □

2.3 Scottova topologija

Našli bomo najpomembnejšo topologijo na množici odprtih množic in z njo končno na sintetičen način opisali kompaktnost.

Poljubna $\mathcal{A}$-aproksimativna družina $\mathcal{U}$ ne vsebuje „odprtih“ okolic vseh svojih članic. Le zaporedja iz $\mathcal{A}$, ki konvergirajo k $U \in \mathcal{U}$, so od nekod naprej v $\mathcal{U}$. Če zaporedje ne leži v celoti v $\mathcal{A}$, takega zagotovila nimamo. Navajeni smo, da okolica točke vsebuje dovolj pozne člene *vseh* zaporedij, ki konvergirajo k tej točki.

Tak pogoj preprosto vsilimo tudi na topologijo na $\mathcal{O}(X)$. Presek topologij je topologija, zato vzamemo kar presek vseh $\mathcal{A}$-aproksimativnih topologij. Tako porojeno topologijo imenujemo *Scottova topologija*. Če je $\mathcal{U}$ Scottovo odprta



Slika 2.4: Odprta družina $\mathcal{U}$ in zaporedje v Scottovi topologiji na $\mathcal{O}(X)$.

družina, vsako odprto pokritje članice $U \in \mathcal{U}$ vsebuje končno podpokritje neke druge članice $V \in \mathcal{U}$.

2.10 Trditev *Scottova topologija je naravna.*

Dokaz Ker je Scottova topologija presek močnih topologij, je zaradi urejenosti topologij na $\mathcal{C}(X, Y)$ po trditvi 2.3 močnejša od poljubne šibke topologije. Če pokažemo, da je za poljubno odprto množico $W \subseteq Z \times X$ preslikava $W_- : Z \to \mathcal{O}(X)$ zvezna, je Scottova topologija po definiciji 2.5 tudi šibka.

Naj bosta $z \in Z$ in $\mathcal{U}$ okolica odprte množice W_z. Izberimo si vse kvadratne odprte množice $U_\mu \times V_\mu \subseteq W$, za katere je U_μ okolica točke z. Ker je množica W odprta, je družina odprtih množic $\{V_\mu\}_\mu$ pokritje množice W_z.

Ker je družina $\mathcal{U}$ Scottovo odprta okolica W_z, v njej obstaja končno podpokritje $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ neke množice $V \in \mathcal{U}$. Po drugi strani je za pripadajoče množice $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ njihov končen presek $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ okolica točke z.

Ker je $U \times V \subseteq W$, za poljuben $u \in U$ velja $V \subseteq W_u$, zato je $W_-(U) \subseteq \mathcal{U}$ in preslikava W_- je zvezna. □

Iz konstrukcije Scottove topologije vidimo, da najšibkejša močna topologija na $\mathcal{O}(X)$ ne obstaja nujno. V tem primeru bi morala biti šibkejša od vseh $\mathcal{A}$-aproksimativnih topologij, zato bi bila šibkejša tudi od njihovega preseka.

Ta presek pa je Scottova topologija, ki je šibka. Najšibkejša močna topologija bi bila zato močna in šibka hkrati, torej bi bila eksponentna. V primeru 2.21 vidimo, da eksponentna topologija na $\mathcal{O}(\mathbb{Q})$, kjer so $\mathbb{Q}$ racionalna števila, opremljena z evklidsko topologijo, ne obstaja. Zaradi tega bo množica $\mathcal{O}(X)$, če ne rečemo drugače, vedno opremljena s Scottovo topologijo.

Definicija Scottove topologije diši po kompaktnosti, zato si z njo pomagamo pri sintetični karakterizaciji.

2.11 Lema *Družina $\uparrow K$ je v prostoru $\mathcal{O}(X)$ Scottovo odprta natanko tedaj, ko je K kompaktna podmnožica prostora X.*

Dokaz Vzemimo najprej Scottovo odprto družino $\uparrow K$ in odprto pokritje $\{U_\mu\}_\mu$ množice K. Tedaj je $\bigcup_\mu U_\mu$ odprta množica, ki vsebuje K, zato leži v $\uparrow K$. Ker je ta družina Scottovo odprta, obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ neke druge članice $V \in \uparrow K$. Toda to pokritje množice V pokriva tudi množico K, ki je zato kompaktna.

Če pa je K kompaktna množica in $\{U_\mu\}_\mu$ odprto pokritje neke članice $V \in \uparrow K$, je $\{U_\mu\}_\mu$ tudi odprto pokritje množice K. Zaradi kompaktnosti obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, ki pokriva K. Ker je $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ odprta množica, ki vsebuje K, je $U \in \uparrow K$. Našli smo končno podpokritje neke druge članice družine $\uparrow K$, zato je ta družina odprta. □

Tudi kompaktnost smo prevedli na odprtost ene same množice, tokrat v prostoru $\mathcal{O}(X)$. To odprtost prevedimo še na zveznost karakteristične preslikave družine $\uparrow K$. Kdaj je $U \in \uparrow K$? Po definiciji družine $\uparrow K$ je to takrat, ko je $K \subseteq U$. Če se spomnimo še definicije podmnožic, pa je to tedaj, ko velja

$$\forall x \in K. x \in U \,.$$

Uporabimo še zvezo med odprtimi množicami in zveznimi predikati na prostoru X, da dobimo

$$U \in \uparrow K \iff \forall x \in K. \chi_U(x) \,.$$

2.12 Trditev *Podmnožica A prostora X je kompaktna natanko tedaj, kadar je univerzalni kvantifikator $\forall_A : (X \to \mathbb{S}) \to \mathbb{S}$, podan s predpisom*

$$\forall_A : p \mapsto \begin{cases} \top & \text{če za vsak } x \in A \text{ velja } p(x) = \top, \\ \bot & \text{sicer,} \end{cases}$$

zvezna preslikava.

Popravimo še definicijo odkritosti in pokažimo, da je vsaka podmnožica topološkega prostora odkrita.

2.13 Definicija Podmnožica A prostora X je *odkrita* natanko tedaj, kadar je eksistenčni kvantifikator $\exists_A : (X \to \mathbb{S}) \to \mathbb{S}$, podan s predpisom

$$\exists_A : p \mapsto \begin{cases} \top & \text{če obstaja } x \in A \text{, da je } p(x) = \top, \\ \bot & \text{sicer,} \end{cases}$$

zvezna preslikava.

2.14 Trditev *Vsaka podmnožica A poljubnega topološkega prostora X je odkrita.*

Dokaz Kvantifikator $\exists_A$ je zvezen, če je družina $\exists_A^{-1}(\{\top\})$ odprta. To družino v Scottovi topologiji izenačimo z družino

$$\mathcal{A} = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid U \cap A \neq \emptyset\}\ .$$

Naj bo $\{U_\mu\}_\mu$ odprto pokritje neke množice $U \in \mathcal{A}$. Ker $\{U_\mu\}_\mu$ pokriva tudi množico $U \cap A$, v tem pokritju obstaja neka članica U_1, ki ima z množico A neprazen presek. Končno podpokritje $\{U_1\}$ pokriva množico $U_1 \in \mathcal{A}$, zato je družina $\mathcal{A}$ Scottovo odprta in kvantifikator $\exists_A$ je zvezen. □

Če se še enkrat ozremo na sintetične karakterizacije, vidimo, da v njih nastopajo le eksponenti oblike $\mathbb{S}^X$. Ker ima prostor $\mathbb{S}$ enostavno zgradbo, upamo, da vsaj eksponent $\mathbb{S}^X$ obstaja za poljuben prostor X. Lepa, a kruta trditev pa nam to upanje hitro pobije.

2.15 Trditev *Eksponent $\mathbb{S}^X$ poljubnega topološkega prostora X obstaja natanko tedaj, ko za vsak prostor Y obstaja eksponent Y^X.*

Dokaz Dokazati je potrebno le eno smer sklepa, saj je druga očitna. Pokažimo, da šibke topologije na $\mathcal{O}(X)$ inducirajo šibke, močne pa močne topologije. Eksponentna topologija bi zato na $\mathcal{C}(X,Y)$ inducirala eksponentno topologijo in eksponent Y^X bi obstajal.

S topologijo $\mathcal{T}$ na $\mathcal{O}(X)$ *inducirana topologija* na $\mathcal{C}(X,Y)$ je topologija, podana s podbaznimi družinami oblike

$$S(\mathcal{U}, V) = \{f \in C(X,Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{U}\}\ ,$$

kjer sta $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ odprta družina in $V \in \mathcal{O}(Y)$ odprta množica.

Najprej si na $\mathcal{O}(X)$ izberimo šibko topologijo in pokažimo, da iz zveznosti $f\colon Z \times X \to Y$ sledi zveznost preslikave $\widehat{f}\colon Z \to \mathcal{C}(X,Y)$. Dovolj je, da pokažemo, da so praslike podbaznih družin $\widehat{f}^{-1}(S(\mathcal{U},V))$ odprte.

Ker je f zvezna preslikava, je $W = f^{-1}(V)$ odprta množica. Iz enakosti

$$\begin{aligned} W_z &= \{x \in X \mid (z,x) \in W\} \\ &= \{x \in X \mid f(z,x) \in V\} \\ &= \{x \in X \mid \widehat{f}(z)(x) \in V\} \\ &= \widehat{f}(z)^{-1}(V) \end{aligned}$$

sledi, da je $W_z \in \mathcal{U}$ natanko tedaj, kadar je $\widehat{f}(z)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ oziroma kadar $\widehat{f}(z)$ leži v $S(\mathcal{U},V)$. Če se znebimo spremenljivke z, dobimo

$$\widehat{f}^{-1}(S(\mathcal{U},V)) = W_{-}^{-1}(\mathcal{U})\ .$$

Zaradi šibkosti topologije $\mathcal{T}$ je preslikava W_- po definiciji 2.5 zvezna, zato je $\widehat{f}^{-1}(S(\mathcal{U}, V))$ odprta množica in preslikava $\widehat{f}$ je zvezna.

Sedaj pa si za $\mathcal{T}$ izberimo močno topologijo. Po lemi 2.2 moramo pokazati, da je evalvacija $\mathsf{ev}_{X\to Y}\colon \mathcal{C}(X, Y) \times X \to Y$ zvezna, saj je tedaj topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$ močna. Vzemimo odprto množico $V \subseteq Y$ in poiščimo odprto okolico para $(f, x) \in \mathsf{ev}^{-1}_{X\to Y}(V)$.

Ker je $x \in f^{-1}(V)$, je $(f^{-1}(V), x) \in \Gamma_\ni$. Topologija $\mathcal{T}$ je močna in graf $\Gamma_\ni$ je po definiciji 2.5 odprt. Zato ima par $(f^{-1}(V), x)$ škatlasto odprto okolico $\mathcal{U} \times U \subseteq \Gamma_\ni$, torej velja $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ oziroma $f \in S(\mathcal{U}, V)$.

Pokažimo, da okolica $S(\mathcal{U}, V) \times U$ leži v $\mathsf{ev}^{-1}_{X\to Y}(V) \subseteq \mathcal{C}(X, Y) \times X$. Za poljuben par $(g, x') \in S(\mathcal{U}, V) \times U$ velja $(g^{-1}(V), x') \in \mathcal{U} \times U \subseteq \Gamma_\ni$, zato je $x' \in g^{-1}(V)$ oziroma $g(x') \in V$. Praslika $\mathsf{ev}^{-1}_{X\to Y}(V)$ je odprta, evalvacija je zvezna in inducirana topologija je močna. □

Kljub temu, da trditev 2.15 ni vzpodbudna, nam vseeno nudi odskočno desko za študij eksponentov. Eksponent Y^X obstaja, če obstaja eksponent $\mathbb{S}^X$. Ta pa obstaja, če je Scottova topologija tudi močna in s tem eksponentna.

2.4 Jedrno kompaktni prostori

Prostore, ki imajo eksponente, bomo opisali na klasičen način: z goro točk, okolic in pogojnim stavkom.

Zvezo med pokritji ene in končnimi podpokritji druge množice, ki je nastopala v definiciji $\mathcal{A}$-aproksimativnih in Scottove topologije, lahko posplošimo do relacije. Pravimo, da je odprta množica U *daleč pod* odprto množico V, kar označimo kot $U \ll V$, če vsako pokritje množice V vsebuje končno podpokritje množice U. Primer takega para dobimo, kadar obstaja kompaktna množica K, da velja $U \subseteq K \subseteq V$.

2.16 Definicija Prostor X je *jedrno kompakten*, če za vsako odprto okolico V točke x obstaja odprta okolica U točke x, da velja $U \ll V$.

Jedrna kompaktnost je ekvivalentna pogoju, da je vsaka odprta množica V unija vseh odprtih množic U, za katere je $U \ll V$. Opazimo še, da so vsi lokalno kompaktni prostori tudi jedrno kompaktni.

2.17 Lema *Če je X jedrno kompakten in je odprta množica U daleč pod odprto množico W, potem obstaja odprta množica V, da velja $U \ll V \ll W$.*

Dokaz Naj bo $\{U_\mu\}_\mu$ družina vseh odprtih množic U_μ, za katere obstaja V, da je $U_\mu \ll V \ll W$. Pokažimo, da je ta družina zaprta za končne unije. Če je $U_1 \ll V_1 \ll W$ in $U_2 \ll V_2 \ll W$, je $U_1, U_2 \ll V_1 \cup V_2$. Po drugi strani zlahka preverimo, da je $V_1 \cup V_2 \ll W$, zato je $U_1 \cup U_2 \ll V_1 \cup V_2 \ll W$.

Ker je prostor X jedrno kompakten, je W unija vseh $V \ll W$, vsaka množica V pa unija vseh $U_\mu \ll V$. Družina $\{U_\mu\}_\mu$ je torej pokritje množice W, zato obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, ki pokriva množico $U \ll W$. Ker je družina $\{U_\mu\}_\mu$ zaprta za končne unije, obstaja tak V, da je

$$U \subseteq (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n) \ll V \ll W .$$

□

2.18 Lema *Če je X jedrno kompakten, družine*

$$\Uparrow U = \{V \in \mathcal{O}(X) \mid U \ll V\} ,$$

kjer je $U \subseteq X$ odprta množica, tvorijo bazo Scottove topologije.

Dokaz Takoj vidimo, da je $\Uparrow U$ odprta družina Aleksandrova. Izberimo si odprto pokritje $\{U_\mu\}_\mu$ množice $W \in \Uparrow U$. Ker je $U \ll W$, po lemi 2.17 obstaja množica V, da je $U \ll V \ll W$. Po eni strani pokritje $\{U_\mu\}_\mu$ vsebuje končno podpokritje množice V, po drugi strani pa je $V \in \Uparrow U$, zato je $\Uparrow U$ odprta.

Izberimo še množico W in njeno odprto okolico $\mathcal{W}$. Vse množice $U_\mu \ll W$ tvorijo odprto pokritje W, zato pokritje $\{U_\mu\}_\mu$ vsebuje končno podpokritje $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ neke druge množice $V \in \mathcal{W}$. Ker je družina $\{U_\mu\}_\mu$ zaprta za končne unije, je $V \subseteq (U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n) \ll W$. Torej ima W tudi bazno okolico $\Uparrow V \subseteq \mathcal{W}$. □

Če je prostor X lokalno kompakten, je kompaktno-odprta topologija tudi eksponentna, zato eksponent $\mathbb{S}^X$ obstaja. Ta pogoj je zadosten, ni pa potreben [6], toda enostavnega protiprimera trenutno še ni. Ker je jedrna kompaktnost posplošitev lokalne kompaktnosti, sumimo, da je tako potreben kot tudi zadosten pogoj.

2.19 Izrek *Prostor X je jedrno kompakten natanko tedaj, kadar obstaja eksponent Y^X za poljuben prostor Y.*

Dokaz Eksponent Y^X bo obstajal natanko tedaj, kadar bo obstajal eksponent $\mathbb{S}^X$. Ta pa obstaja, če je Scottova topologija na $\mathcal{O}(X)$ močna, kar je po definiciji 2.5 takrat, ko je graf vsebovanosti odprt.

Vzemimo jedrno kompakten prostor X in poiščimo okolico poljubnega para $(V, x) \in \Gamma_\ni$. Zaradi jedrne kompaktnosti obstaja okolica U točke x, da je $U \ll V$ oziroma $V \in \Uparrow U$. Ker iz $U \ll W$ sledi $U \subseteq W$, je iskana okolica para (V, x) množica $\Uparrow U \times U \subseteq \Gamma_\ni$.

Za dokaz druge smeri vzemimo $x \in V$ in odprto pokritje $\{U_\mu\}_\mu$ množice V. Ker je graf $\Gamma_\ni$ odprt, obstajata odprti okolici $\mathcal{U}$ množice V in U točke x, da je $\mathcal{U} \times U \subseteq \Gamma_\ni$. Ker je $\{U_\mu\}_\mu$ odprto pokritje V, obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ množice $W \in \mathcal{U}$. Toda iz $\mathcal{U} \times U \subseteq \Gamma_\ni$ sledi, da je $U \subseteq W$, zato $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ pokriva tudi U. Prostor X je torej jedrno kompakten. □

Za konec si oglejmo še jedrno kompaktne Hausdorffove prostore in kompaktno-odprto topologijo, ki je v klasični topologiji najpogosteje uporabljana topologija na prostorih zveznih preslikav.

2.20 Trditev *Hausdorffov prostor X je lokalno kompakten natanko tedaj, kadar je jedrno kompakten.*

Dokaz Vsak lokalno kompakten prostor je tudi jedrno kompakten, zato pokažimo le drugo smer trditve. Najprej pokažimo, da v Hausdorffovem prostoru iz $U \ll V$ sledi $\overline{U} \subseteq V$. Izberimo si točko $z \notin V$. Ker je prostor X Hausdorffov, za vsak $x \in V$ obstajata disjunktni odprti okolici U_x točke x in W_x točke z. Ker je $\{U_x\}_x$ pokritje množice V, obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ množice U. Presek pripadajočih množic $W_z = W_1 \cap \dots \cap W_n$ tega pokritja ne seka, zato je $Z_z = X \setminus W_z$ zaprta množica, ki vsebuje množico U in ne vsebuje točke z. Torej za presek $Z = \bigcap_z Z_z$ velja $U \subseteq Z \subseteq V$ in zaprtje $\overline{U}$ leži pod V.

Sedaj pa vzemimo $U \ll V$ in pokažimo, da je množica $\overline{U}$ kompaktna. Naj bo $\{U_\mu\}_\mu$ njeno pokritje. Po lemi 2.17 obstaja odprta množica W, da je $U \ll W \ll V$. Ker je $\{U_\mu\}_\mu \cup (V \setminus \overline{U})$ pokritje množice V, obstaja končno podpokritje $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ množice W in po prejšnjem tudi množice $\overline{U} \subseteq W$. Množico $V \setminus \overline{U}$ lahko iz tega podpokritja izpustimo in s tem dobimo iskano podpokritje množice $\overline{U}$. □

Sedaj zlahka najdemo primer, ki utemelji skrbi o obstoju eksponentov v topoloških prostorih.

2.21 Primer Če racionalna števila $\mathbb{Q}$ opremimo z evklidsko topologijo, dobimo Hausdorffov prostor, ki ni lokalno kompakten. Torej $\mathbb{Q}$ ni jedrno kompakten in eksponent $\mathbb{S}^{\mathbb{Q}}$ ne obstaja.

2.22 Trditev *Če je Hausdorffov prostor X lokalno kompakten, je kompaktno-odprta topologija na prostoru $\mathcal{C}(X, Y)$ eksponentna za poljuben prostor Y.*

Dokaz Iz trditve 1.23 sklepamo, da je kompaktno-odprta topologija vedno šibkejša od naravne oziroma eksponentne, če je X jedrno kompakten. Pokažimo, da so vse podbazne množice prostora Y^X odprte tudi v kompaktno-odprti topologiji.

Prostor X je jedrno kompakten, zato po trditvi 2.15 na $\mathcal{C}(X, Y)$ obstaja eksponentna topologija, ki ima za podbazo množice oblike

$$S(\mathcal{U}, V) = \{f \in C(X, Y) \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{U}\} ,$$

kjer sta $V \subseteq Y$ odprta množica in $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}(X)$ Scottovo odprta družina. Zaradi enakosti $S(\bigcup_\mu \mathcal{U}_\mu, V) = \bigcup_\mu S(\mathcal{U}_\mu, V)$ je dovolj, da si ogledamo le primer, ko je $\mathcal{U}$ bazna družina. Za jedrno kompakten prostor X so to ravno družine $\Uparrow U$, kjer je $U \subseteq X$ odprta množica.

Vzemimo podbazno množico $S(\Uparrow U, V)$ in jo zapišimo kot

$$S(\Uparrow U, V) = \{f\colon X \to Y \mid f^{-1}(V) \in \Uparrow U\} = \{f\colon X \to Y \mid U \ll f^{-1}(V)\}\,.$$

Po trditvi 2.20 je $U \ll f^{-1}(V)$ natanko tedaj, ko je $\overline{U} \subseteq f^{-1}(V)$, zato je

$$S(\Uparrow U, V) = \{f\colon X \to Y \mid \overline{U} \subseteq f^{-1}(V)\} = \{f\colon X \to Y \mid f(\overline{U}) \subseteq V\}\,,$$

ta množica pa je v kompaktno-odprti topologiji odprta, saj iz $U \ll f^{-1}(V)$ sledi tudi to, da je $\overline{U}$ kompaktna. □

2.5 Šibki eksponenti

Po veliko korakih bomo prišli do še enega
približka eksponenta, ki bo imel vse iskane
lastnosti, a bo v njem preveč odvečnih preslikav.

Zatecimo se še k zadnji možnosti. Recimo, da prostor X lahko vložimo v jedrno kompakten prostor $\bar{X}$. Če lahko preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$ razširimo do $f'\colon Z \times \bar{X} \to Y$, jo lahko tudi transponiramo in dobimo $\widehat{f'}\colon Z \to Y^{\bar{X}}$. Tedaj velja tudi enakost $f = \mathsf{ev}_{\bar{X}\to Y} \circ (\widehat{f'} \times \mathsf{id}_X)$.

Prostor $Y^{\bar{X}}$ seveda ni enak eksponentu Y^X, saj so v njem preslikave, definirane izven prostora X. A vseeno iz vsake zvezne preslikave lahko dobimo tako, ki igra vlogo transponiranke. Konstrukcija, katere ideja se skriva v [2], je rahla posplošitev konstrukcije v [8], narejena za poljubne in ne le za T_0-prostore. Preden se te konstrukcije lotimo, se vprašajmo, kdaj lahko prostor X vložimo v jedrno kompaktnega in kdaj lahko poljubno preslikavo razširimo s podprostora na ves prostor.

2.23 Definicija Prostor Y je *injektiven*, kadar za poljubno vložitev $i\colon X \to X'$ in preslikavo $f\colon X \to Y$ obstaja razširitev $f'\colon X' \to Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & Y \\
& X' \arrow[ur, dashed, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

Pokažimo, da je prostor Sierpinskega injektiven. Naj bo X vložen v X'. Vsaka preslikava iz X v $\mathbb{S}$ je karakteristična preslikava $\chi_U\colon X \to \mathbb{S}$ odprte množice U. Ker je X vložen v X', je $U = U' \cap X$ za neko odprto $U' \subseteq X'$ in $\chi_{U'}\colon X' \to \mathbb{S}$ je iskana razširitev.

2.24 Trditev *Če so vsi prostori družine $\{Y_\mu\}_\mu$ injektivni, je tudi njihov produkt $Y = \prod_\mu Y_\mu$ injektiven prostor.*

Dokaz Imejmo preslikavo $f\colon X \to Y$ in vložitev $i\colon X \to X'$. Za vsako projekcijo $\mathsf{pr}_\mu\colon Y \to Y_\mu$ je $f_\mu = \mathsf{pr}_\mu \circ f$ zvezna preslikava, zato obstaja njena razširitev f'_μ na ves prostor X'. Vse te preslikave lahko po definiciji produktne topologije združimo v zvezno preslikavo $f'\colon X' \to Y$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "\mathsf{pr}_\mu"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1.f_\mu"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & Y_\mu \\
 & X' \arrow[uu, dashed, "3.f'"] \arrow[ur, dashed, "2.f'_\mu"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

Vzemimo prostor X. Prostor Sierpinskega je injektiven, zato je po trditvi 2.24 tudi prostor $\prod_{x \in X} \mathbb{S}$ injektiven. Vsaka točka tega produkta ustreza neki podmnožici prostora X. Imamo namreč naravno bijekcijo $\Phi\colon \prod_{x \in X} \mathbb{S} \to \mathcal{P}(X)$, podano z $\Phi\colon (s_x)_{x \in X} \mapsto \{x \mid s_x = \top\}$. Zaradi lažje predstave to produktno topologijo prenesimo na topologijo potenčne množice in pripadajoči prostor $\mathcal{P}(X)$ imenujmo *potenčni prostor* množice X.

Bazna množica produkta $\prod_{x \in X} \mathbb{S}$ je produkt odprtih množic v $\mathbb{S}$, ki pa so le na končno mnogo komponentah $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ različne od vsega prostora $\mathbb{S}$. Edina preostala odprta množica, ki produkt naredi neprazen, je množica $\{\top\}$. Če potegnemo vzporednico s podmnožicami v $\mathcal{P}(X)$, dobimo bazno družino vseh množic, ki za podmnožico vsebujejo F. Bazo potenčnega prostora zato tvorijo vse družine $\uparrow F$, kjer je $F \subseteq X$ končna množica.

2.25 Lema *Družina $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je odprta natanko tedaj, ko iz $A \in \mathcal{A}$ in $A \subseteq B$ sledi $B \in \mathcal{A}$ ter vsako (ne nujno odprto) pokritje množice $A \in \mathcal{A}$ vsebuje končno podpokritje neke druge množice $F \in \mathcal{A}$.*

Dokaz Vzemimo odprto množico $\mathcal{A}$, neko njeno članico A in njeno pokritje $\{A_\mu\}_\mu$. Ker je $\mathcal{A}$ odprta, obstaja taka končna množica F, da je $A \in \uparrow F \subseteq \mathcal{A}$. Tedaj pa očitno obstaja končno podpokritje množice $F \in \uparrow F \subseteq \mathcal{A}$. Ker je $A \in \uparrow F$, tudi za vsako tako množico B, da je $A \subseteq B$, velja $B \in \uparrow F \subseteq \mathcal{A}$.

Za dokaz druge strani vzemimo družino $\mathcal{A}$, ki zadošča pogojem trditve, in $A \in \mathcal{A}$. Ker je $\{\{a\}\}_{a \in A}$ pokritje množice A, obstaja končno podpokritje F neke druge množice $F \in \mathcal{A}$. Iz prve lastnosti družine $\mathcal{A}$ sklepamo, da je $\uparrow F \subseteq \mathcal{A}$. Vsaka članica $A \in \mathcal{A}$ ima zato v $\mathcal{A}$ neko bazno okolico in $\mathcal{A}$ je odprta. □

Tako podana topologija je podobna Scottovi topologiji na $\mathcal{O}(X)$. V resnici sta obe poseben primer Scottove topologije, s katero lahko opremimo vsako delno urejeno množico.

2.26 Lema *Prostor $\mathcal{P}(X)$ je injektiven in jedrno kompakten.*

Dokaz Po definiciji je prostor $\mathcal{P}(X)$ homeomorfen produktu $\prod_{x \in X} \mathbb{S}$, ta pa je po trditvi 2.24 injektiven. Pokažimo, da so vse bazne množice $\uparrow F$ kompaktne. Tedaj je prostor lokalno in zato tudi jedrno kompakten.

Naj bo $\{\mathcal{U}_\mu\}_\mu$ odprto pokritje družine $\uparrow F$. Ker je $F \in \uparrow F$, obstaja neka članica pokritja $\mathcal{U}$, v kateri leži F. Ker je $\mathcal{U}$ odprta, je $\uparrow F \subseteq \mathcal{U}$ in iskano končno podpokritje je kar $\{\mathcal{U}\}$. □

2.27 Trditev *Vsak topološki prostor X lahko vložimo v injektiven in jedrno kompakten prostor.*

Dokaz Če vzamemo T_0-prostor X, ga lahko vložimo v prostor $\mathcal{P}(\mathcal{O}(X))$, ki ima po lemi 2.26 želene lastnosti. Vsako točko $x \in X$ bi slikali v družino njenih odprtih okolic

$$\mathcal{N}_x = \{U \in \mathcal{O}(X) \mid x \in U\} .$$

Ker želimo delati s poljubnimi prostori, pa taka preslikava ni nujno injektivna. Injektivnost dosežemo tako, da prostor $\mathcal{P}(\mathcal{O}(X))$ pomnožimo s prostorom X', ki je kar prostor X, le da je opremljen s trivialno topologijo.

Prostor X' je očitno injektiven, zato je po trditvi 2.24 injektiven tudi prostor $\bar{X} = X' \times \mathcal{P}(\mathcal{O}(X))$. Zaradi trivialnosti prostora X' pa je $\bar{X}$ tudi jedrno kompakten. Pokažimo, da je injektivna preslikava $i\colon X \to \bar{X}$, podana s predpisom $i\colon x \mapsto (x, \mathcal{N}_x)$ vložitev.

Preslikava i je zvezna, če je slika vsake bazne množice v $\bar{X}$ odprta. Te bazne množice pa so oblike $X' \times \uparrow\mathcal{F}$ za neko končno družino $\mathcal{F} = \{U_1, \ldots, U_n\}$. Vedno velja $x \in X'$, zato je $i(x) \in X' \times \uparrow\mathcal{F}$ takrat, kadar je $\mathcal{N}_X \in \uparrow\mathcal{F}$. V tem primeru je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}_X$, torej so vse množice v $\mathcal{F}$ okolice točke x, zato je

$$i^{-1}(X \times \uparrow\mathcal{F}) = U_1 \cap \cdots \cap U_n$$

odprta množica, i pa zvezna preslikava.

Dokažimo, da je slika $i(U) = \{(x, \mathcal{N}_x) \mid x \in U\}$ odprta v $i(X)$ za vsako odprto množico $U \subseteq X$. To sledi iz enakosti $i(U) = i(X) \cap (X' \times \uparrow\uparrow U)$ in odprtosti množice $\uparrow\uparrow U$ v $\mathcal{P}(\mathcal{O}(X))$.

Vedno velja $i(U) \subseteq i(X)$, če pa je $(x, \mathcal{N}_x) \in i(U)$, velja tudi $x \in U$, od koder sledi $U \in \mathcal{N}_x$, zato je tudi $\uparrow U \subseteq \mathcal{N}_x$ in $\mathcal{N}_x \in \uparrow\uparrow U$. Torej je $i(U) \subseteq i(X) \cap (X' \times \uparrow\uparrow U)$. Če pa si izberemo par $(x, \mathcal{N}_x) \in i(X) \cap (X' \times \uparrow\uparrow U)$, po enakem premisleku sklepamo, da je $U \in \mathcal{N}_X$ in $x \in U$.

Ker je $U \in \mathcal{O}(X)$, je $\uparrow U \in \mathcal{P}(\mathcal{O}(X))$, zato je $\uparrow\uparrow U$ bazna odprta množica. Slika $i(U)$ je odprta v podprostoru $i(X)$, zato je i vložitev. □

Pogoji za konstrukcijo približka eksponenta, ki smo jo orisali v začetku razdelka, so sedaj izpolnjeni.

2.28 Definicija Prostor W skupaj z zvezno preslikavo $e\colon W \times X \to Y$ je *šibki eksponent* prostorov X in Y, kadar za vsako zvezno preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$

obstaja zvezna preslikava $\widehat{f'}\colon Z \to W$, da velja $f = e \circ (\widehat{f'} \times \mathsf{id}_X)$.

$$
\begin{tikzcd}
W \times X \arrow[r, "e"] & Y \\
Z \times X \arrow[u, dashed, "\widehat{f'} \times \mathsf{id}_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Vsak eksponent Y^X je tudi šibki eksponent, la da je v tem primeru preslikava $\widehat{f'}$ natančno določena. V našem primeru, ko transponiramo preslikave z razširjenega prostora, to ni res, saj njihovega vedenja izven podprostora ne omejujemo.

2.29 Trditev *Za poljubna topološka prostora X in Y obstaja njun šibki eksponent.*

Dokaz Po trditvi 2.27 obstajata vložitvi prostorov X in Y v injektivna in jedrno kompaktna prostora $\bar{X}$ in $\bar{Y}$. Za zvezno preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$, je tudi $i_Y \circ f$ zvezna preslikava v injektiven prostor. Prostor $Z \times X$ je s preslikavo $\mathsf{id}_Z \times i_X$ vložen v $Z \times \bar{X}$, zato lahko preslikavo $i_Y \circ f$ razširimo do zvezne preslikave $f'\colon Z \times \bar{X} \to \bar{Y}$. Poleg tega je tudi prostor $\bar{X}$ jedrno kompakten, zato je tudi transponiranka $\widehat{f'}\colon Z \to \bar{Y}^{\bar{X}}$ zvezna.

$$
\begin{tikzcd}
\bar{Y}^{\bar{X}} \times \bar{X} \arrow[rr, "\mathsf{ev}_{\bar{X}\to\bar{Y}}"] & & \bar{Y} \\
Z \times \bar{X} \arrow[u, dashed, "2.\widehat{f'} \times \mathsf{id}_{\bar{X}}"] \arrow[urr, dashed, "1.f'"] & Y \arrow[ur, hook, "i_Y"'] & \\
Z \times X \arrow[u, hook, "\mathsf{id}_Z \times i_X"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ker naj bi šibki eksponent predstavljal prostor nad množico $\mathcal{C}(X, Y)$, iz prostora $\bar{Y}^{\bar{X}}$ izberemo le tiste funkcije, ki X slikajo v Y, natančneje podprostor

$$W = \{g \in \bar{Y}^{\bar{X}} \mid g(i_X(X)) \subseteq i_Y(Y)\} \,.$$

Očitno je za vsako zvezno preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$ preslikava $\widehat{f'}(z) \in W$. Zato preslikavi $\widehat{f'}$ zmanjšamo kodomeno, da dobimo $\widehat{f'}\colon Z \to W$.

Ko prostor W imamo, iščemo preslikavo $e\colon W \times X \to Y$, ki opravlja delo evalvacije. Oglejmo si, kako $\mathsf{ev}_{\bar{X}\to\bar{Y}}$ deluje na $W \times i_X(X)$. Ob taki zožitvi velja

$$\mathsf{ev}_{\bar{X}\to\bar{Y}}(g(z), i_X(x)) = g(z)(i_X(x)) \in i_Y(Y) \,.$$

Torej tudi evalvaciji lahko zmanjšamo domeno in kodomeno, da dobimo $\mathsf{ev}_W \colon W \times i_X(X) \to i_Y(Y)$.

Ker sta prostora $i_Y(Y)$ in Y homeomorfna, je $i_Y^{-1} \colon i_Y(Y) \to Y$ homeomorfizem, s pomočjo katerega sestavimo preslikavo $e = i_Y^{-1} \circ \mathsf{ev}_W \circ (\mathsf{id}_W \times i_X)$.

$$
\begin{tikzcd}
W \times i_X(X) \arrow[r, "\mathsf{ev}_W"] & i_Y(Y) \arrow[r, "i_Y^{-1}"] & Y \\
W \times X \arrow[u, hook, "\mathsf{id}_W \times i_X"] \arrow[urr, "e"'] & & \\
Z \times X \arrow[u, "\widehat{f'} \times \mathsf{id}_X"] \arrow[uurr, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Računajmo.

$$
\begin{aligned}
(e \circ (\widehat{f'} \times \mathsf{id}_X))(z, x) &= e(\widehat{f'}(z), x) = \\
&= (i_Y^{-1} \circ \mathsf{ev}_W \circ (\mathsf{id}_W \times i_X))(\widehat{f'}(z), x) = \\
&= i_Y^{-1}(\widehat{f'}(z)(i_X(x))) = \\
&= i_Y^{-1}(i_Y(f(z, x))) = \\
&= f(z, x)
\end{aligned}
$$

Od tod sledi, da je $f = e \circ (\widehat{f'} \times \mathsf{id}_X)$ in prostor W skupaj s preslikavo e tvori šibki eksponent prostorov X in Y. □

Opozorimo na dejstvo, da je skonstruirani šibki eksponent precej lep, saj je prostor nad množico preslikav in tudi preslikava e je le malenkostno popravljena evalvacija. V definiciji 2.28 ne enega ne drugega nismo zahtevali in prostor W bi lahko bil precej daleč od prostora preslikav.

Kljub vsej lepoti pa je v W „preveč“ „prevelikih“ funkcij. Zakaj ne bi tistih preslikav, ki inducirajo enake preslikave med X in Y, izenačili? Sama od sebe se ponuja kvocientna preslikava $q \colon W \to \mathcal{C}(X, Y)$, ki preslikavo f zoži na preslikavo $q(f) = i_Y^{-1} \circ f \circ i_X \colon X \to Y$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i_X"] & i_X(X) \arrow[r, "f"] & i_Y(Y) \arrow[r, "i_Y^{-1}"] & Y
\end{tikzcd}
$$

V trditvi 3.8 bomo videli, da je prostor W/q homeomorfen prostoru $X \to Y$. Nam tedaj preslikava $e \colon W \times X \to Y$ porodi preslikavo $e' \colon (X \to Y) \times X \to Y$, ki bi igrala vlogo evalvacije? Žal ne. To se zgodi le tedaj, ko je preslikava $q \times \mathsf{id}_X$ kvocientna, kar pa velja natanko tedaj, ko je X jedrno kompakten.

$$\begin{tikzcd}
W \times X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "q \times \mathsf{id}_X"'] & Y \\
(X \to Y) \times X \arrow[ur, dashed, "?\tilde{e}"'] &
\end{tikzcd}$$

S tako konstrukcijo ne pridobimo ničesar, zato moramo konstrukcijo kvocienta posplošiti do te mere, da se znebimo odvečnih preslikav, hkrati pa lahko iz njega izluščimo evalvacijo.

Poglavje 3

Posplošeni topološki prostori

3.1 Ekvilološki prostori

Ker je kvocientni prostor preveč tog, ga bomo na razdelili na več delov in mu potem zlahka zavladali.

Iskanje strukture, ki tesno povezuje topološke prostore in ekvivalenčne relacije, nas hitro pripelje do *ekviloških prostorov*. Te je uvedel Dana Scott [3, 8], ko je iskal kategorijo, ki bi nudila dobre temelje za interpretacijo računalniških programov.

Eno takih kategorij tvorijo že topološki prostori. Podatkovne tipe lahko interpretiramo s topološkimi prostori, podatke s točkami v njih, programe pa z zveznimi funkcijami. Slaba lastnost topoloških prostorov pa je ravno v odsotnosti nekaterih eksponentov, zaradi česar s programi ne moremo računati tako svobodno kot z ostalimi podatki.

Nove podatkovne strukture tvorimo s kombinacijo osnovnih, tako da izenačimo določene elemente. Racionalna števila lahko predstavimo s parom celih števil, če para (a, b) in (c, d) izenačimo, kadar velja $ad = bc$. Tu se skriva ideja konstrukcije ekviloških prostorov. Te dobimo tako, da si za osnovne tipe izberemo topološke prostore in jih nato opremimo z ekvivalenčno relacijo.

3.1 Definicija *Ekvilološki prostor E* je trojica $(|E|, ||E||, q_E)$, kjer so $|E|$ topološki prostor, $||E||$ množica in $q_E : |E| \to ||E||$ surjektivna preslikava.

Preslikava $f : ||E|| \to ||F||$ je *ekvivariantna*, kadar obstaja zvezna preslikava $f' : |E| \to |F|$, za katero velja $q_F \circ f' = f \circ q_E$.

$$\begin{tikzcd} |E| \arrow[r, dashed, "f'"] \arrow[d, "q_E"'] & |F| \arrow[d, "q_F"] \\ ||E|| \arrow[r, "f"'] & ||F|| \end{tikzcd}$$

V izvirni definiciji ekviloških prostorov ima prostor $|E|$ lastnost T_0. Taki ekviloški prostori so bolj primerni za računalništvo, a toliko manj za topologijo, zato to zahtevo izpustimo. Poleg tega je bil ekviloški prostor v izvirniku podan z ekvivalenčno relacijo in ne s surjektivno preslikavo. Ti dve definiciji sta ekvivalentni, ker pa je smisel sintetične topologije čimveč stvari opisati s preslikavami, se za slednjo definicijo nismo odločili.

3.2 Trditev *Ekviloški prostori skupaj z ekvivariantnimi preslikavami tvorijo kategorijo ekviloških prostorov* **Equ**.

Dokaz te enostavne trditve izpustimo. Množico vseh ekvivariantnih preslikav med ekviloškima prostoroma X in Y bomo označili z $\mathbf{Equ}(X, Y)$, tako kot je $\mathbf{C}(X, Y)$ standardna oznaka za množico morfizmov med objektoma X in Y v kategoriji $\mathbf{C}$.

3.3 Trditev *Kategorija ekviloških prostorov ima končne produkte.*

Dokaz Vzemimo ekviloška prostora E in F in dokažimo, da je prostor $(|E| \times |F|, \|E\| \times \|F\|, q_E \times q_F)$ skupaj s projekcijama $\mathsf{pr}_{\|E\|}$ in $\mathsf{pr}_{\|F\|}$ njun kategorični produkt.

$$
\begin{tikzcd}
{|E|} \arrow[dd, "q_E"'] & & {|E|\times|F|} \arrow[ll, "\mathsf{pr}_{|E|}"'] \arrow[dr, "\mathsf{pr}_{|F|}"] \arrow[dd, "q_E\times q_F"] & \\
& {|P|} \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, dashed, "2.(f',g')"] \arrow[rr, "g'"'] \arrow[dd, "q_P"'] & & {|F|} \arrow[dd, "q_F"] \\
{\|E\|} & & {\|E\|\times\|F\|} \arrow[ll, "\mathsf{pr}_{\|E\|}"'] \arrow[dr, "\mathsf{pr}_{\|F\|}"] & \\
& {\|P\|} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, dashed, "1.(f,g)"] \arrow[rr, "g"'] & & {\|F\|}
\end{tikzcd}
$$

Zaradi surjektivnosti preslikav q_E in q_F je tudi $q_E \times q_F$ surjektivna. Vzemimo par ekvivariantnih preslikav $f\colon P \to E$ in $g\colon P \to F$. Zaradi teh dveh preslikav obstajata zvezni preslikavi $f'\colon |P| \to |E|$ in $g'\colon |P| \to |F|$, ki naredita levo in sprednjo ploskev komutativno.

Po definiciji produkta $\|E\| \times \|F\|$ obstaja enolično določena preslikava $(f, g)\colon \|P\| \to \|E\| \times \|F\|$, za katero spodnja ploskev komutira. S preslikavo

$(f', g')\colon |P| \to |E| \times |F|$ komutira tudi zgornja ploskev. Preverimo še, da je

$$\begin{aligned}(q_E \times q_F) \circ (f', g') &= (q_E \circ f', q_F \circ g') = \\ &= (f \circ q_P, g \circ q_P) = \\ &= (f, g) \circ q_P\,,\end{aligned}$$

zato je (f, g) ekvivariantna preslikava in res smo skonstruirali produkt. □

Spomnimo se, da smo hoteli eksponent topoloških prostorov dobiti s kvocientom šibkega eksponenta. To idejo lahko v kategoriji **Equ** pripeljemo do konca. Malce jo moramo spremeniti, saj moramo sestaviti eksponent poljubnih ekviloških prostorov in zato paziti tudi na ekvivariantnost preslikav.

Na tem mestu moramo poseči po orodjih teorije kategorij. Definicije in trditve bomo večinoma le navrgli, primere, razlage in dokaze pa bomo izpustili, ker za njih ni prostora. Poleg tega obstaja odlična literatura [1, 7], v kateri se nahajajo.

3.4 Definicija Objekt Y^X skupaj z morfizmom $\mathsf{ev}_{X\to Y}\colon Y^X \times X \to Y$ je *eksponent* objektov X in Y, kadar za vsak morfizem $f\colon Z \times X \to Y$ obstaja natanko en morfizem $\widehat{f}\colon Z \to Y^X$, da velja $f = \mathsf{ev}_{X\to Y} \circ (\widehat{f} \times \mathsf{id}_X)$.

$$\begin{tikzcd} Y^X \times X \arrow[r, "\mathsf{ev}_{X\to Y}"] & Y \\ Z \times X \arrow[u, dashed, "\widehat{f} \times \mathsf{id}_X"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Kategoriji, ki je zaprta za konstrukcijo končnih produktov in eksponentov, pravimo *kartezično zaprta kategorija*. Izkaže se, da so kartezično zaprte kategorije natanko tiste, v katerih lahko interpretiramo lambda račun, saj lahko s pomočjo transponirank in evalvacije interpretacijo podamo na podoben način kot v topoloških prostorih.

3.5 Izrek *Kategorija ekviloških prostorov ima eksponente.*

Dokaz Za eksponent vzemimo podprostor vseh preslikav iz šibkega eksponenta, ki inducirajo ekvivariantne preslikave, skupaj z očitno surjekcijo v množico ekvivariantnih preslikav.

Začnimo z ekviloškima prostoroma E in F. Naj bo W šibki eksponent prostorov $|E|$ in $|F|$. Kdaj preslikava iz W inducira ekvivariantno preslikavo? Za $|F^E|$ si izberimo podprostor vseh preslikav $f' \in W$, za katere obstaja ekvivariantna preslikava $f\colon \|E\| \to \|F\|$, ki naredi spodnji diagram komutativen.

$$\begin{tikzcd}
|E| \arrow[r, "(\mathsf{k}_{f'}, \mathsf{id}_{|E|})"] \arrow[d, "q_E"'] & W \times |E| \arrow[r, "e"] & |F| \arrow[d, "q_F"] \\
\|E\| \arrow[rr, dashed, "f"'] & & \|F\|
\end{tikzcd}$$

Zaradi ekvivariantnosti je ustrezna preslikava f ena sama, saj je s predpisom $f(q_E(x)) = q_F(e(f', x))$ določena na vseh ekvivalenčnih razredih. Za $\|F^E\|$ vzemimo množico vseh ekvivariantnih preslikav med E in F in pokažimo, da predpis $f' \mapsto f$ določa surjekcijo $q_{F^E}\colon |F^E| \to \|F^E\|$.

Če je $f\colon E \to F$ ekvivariantna preslikava, obstaja $f'\colon |E| \to |F|$, za katero velja $q_F \circ f' = f \circ q_E$. Zaradi lastnosti šibkega eksponenta obstaja $f'' \in W$, da je $e(f'', x) = f'(x)$. Zato velja $f \circ q_E = q_F \circ e \circ (\mathsf{k}_{f''}, \mathsf{id}_{|E|})$ in predpis res določa surjekcijo.

Za $\mathsf{ev}_{E \to F}$ lahko izberemo že znano evalvacijo iz množic, saj za poljuben par $(f', x) \in |F^E| \times |E|$ po zgornjem velja

$$\begin{aligned}
(q_F \circ e)(f', x) &= (f \circ q_E)(x) = \\
&= (q_{F^E}(f') \circ q_E)(x) = \\
&= (\mathsf{ev}_{\|E\| \to \|F\|} \circ (q_{F^E} \times q_E))(f', x)\ .
\end{aligned}$$

Zato obstaja zvezna preslikava $e\colon |F^E| \times |E| \to |F|$, za katero spodnji diagram komutira, in $\mathsf{ev}_{E \to F} = \mathsf{ev}_{\|E\| \to \|F\|}$ je ekvivariantna.

$$\begin{tikzcd}
|F^E| \times |E| \arrow[r, "e"] \arrow[d, "q_{F^E \times E}"'] & |F| \arrow[d, "q_F"] \\
\|F^E\| \times \|E\| \arrow[r, "\mathsf{ev}_{\|E\| \to \|F\|}"'] & \|F\|
\end{tikzcd}$$

Poglejmo diagram na sliki 3.1. Če je $f\colon D \times E \to F$ ekvivariantna preslikava, obstaja taka zvezna preslikava $f'\colon |D| \times |E| \to |F|$, da sprednja ploskev diagrama komutira. Po definiciji šibkega eksponenta W obstaja preslikava $\widehat{f'}\colon |D| \to W$, da komutira tudi zgornja ploskev.

Definirajmo $\widehat{f}\colon (q_D(z), q_E(x)) \mapsto q_F(e(\widehat{f'}(z), x))$. Ker za ekvivalentna para

$$
\begin{tikzcd}
 & {|F^E| \times |E|} \arrow[dd, "q_{F^E \times E}"] \arrow[dr, "e"] & \\
{|D| \times |E|} \arrow[ur, dashed, "2.\widehat{f'}"] \arrow[rr, dashed, "1.f'"] \arrow[dd, "q_{D \times E}"'] & & {|F|} \arrow[dd, "q_F"] \\
 & {\|F^E\| \times \|E\|} \arrow[dr, "\mathsf{ev}_{\|E\| \to \|F\|}"] & \\
{\|D\| \times \|E\|} \arrow[ur, dashed, "3.\widehat{f} \times \mathsf{id}_{\|E\|}"] \arrow[rr, "f"'] & & {\|F\|}
\end{tikzcd}
$$

Slika 3.1: Konstrukcija eksponenta v ekviloških prostorih.

$(q_D(z), q_E(x)) = (q_D(z'), q_E(x'))$ velja

$$
\begin{aligned}
q_F(e(\widehat{f'}(z), x)) &= q_F(f'(z, x)) = \\
&= f(q_D(z), q_E(x)) = \\
&= f(q_D(z'), q_E(x')) = \\
&= q_F(e(\widehat{f'}(z'), x')) \ ,
\end{aligned}
$$

je preslikava $\widehat{f}$ dobro definirana. S tem smo ubili dve muhi na en mah, saj sedaj zlahka preverimo, da preslikavi $\widehat{f'}$ kodomeno lahko zožamo na $|F^E|$, poleg tega pa smo našli še preslikavo $\widehat{f}$, za katero komutira desna ploskev in z njo ves diagram. Taka preslikava je tudi enolično določena, zato je ekvilološki prostor F^E skupaj z ekvivariantno preslikavo $\mathsf{ev}_{E \to F}$ eksponent. □

3.2 Topološki prostori so tudi ekvilološki

S pomočjo ekviloških prostorov bomo dokončali
sintetične dokaze, nato pa ugotovili, da se naša pot
šele začenja.

Iz zadnjih dveh trditev sledi, da je kategorija ekviloških prostorov kartezično zaprta. Ali lahko to koristno lastnost uporabimo tudi pri topoloških prostorih? Še enkrat se ozrimo na trditve, ki smo jih dokazovali. V njih eksponenti niso bili nikoli omenjeni — potreba po njih se je pojavila šele v dokazih.

Na tem mestu lahko potegnemo vzporednico z iskanjem manjkajočih eksponentov realnih števil. Tudi eksponent realnih števil $(-1)^{1/2}$ ni realen, zato realna števila razširimo na kompleksna. Ta razširitev je posebno lepa, saj ohranja lastnosti realnih števil. Če s pomočjo kompleksnih števil dokažemo trditev, ki govori le o realnih številih, ta trditev velja, tudi če kompleksnih števil sploh ne omenjamo. S takim načinom precej laže izpeljemo adicijske izreke za trigonometrične funkcije, seštejemo vrsto $\sum_k 1/k^2$, polinom z realnimi koeficienti razcepimo na kvadratne in linearne člene, . . .

Realna števila smo v kompleksna vložili s preslikavo $\iota\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, podano s predpisom $\iota\colon x \mapsto x + 0 \cdot i$. Pri ekviloških prostorih to vlogo igra funktor $\mathfrak{I}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Equ}$. Sledimo dokazu, nakazanemu v [2].

3.6 Trditev *Obstaja zvest in poln funktor* $\mathfrak{I}\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Equ}$.

Dokaz Vsak topološki prostor X lahko predstavimo z ekviloškim prostorom $\mathfrak{I}X = (X, X, \mathsf{id}_X)$. Če za zvezno preslikavo $f\colon X \to Y$ postavimo $\mathfrak{I}f = f\colon X \to Y$, enostavno preverimo, da je $\mathfrak{I}$ zvest funktor, saj je preslikava $f\colon X \to Y$ ekvivariantna. Pokažimo, da velja tudi obrat.

Če je $f\colon \mathfrak{I}X \to \mathfrak{I}Y$ poljubna ekvivariantna preslikava, obstaja zvezna preslikava $f'\colon X \to Y$, da je $f = f \circ \mathsf{id}_X = \mathsf{id}_Y \circ f' = f'$. Zato je tudi f zvezna in funktor $\mathfrak{I}$ je poln. □

Bolj zanimivo povezavo dobimo v drugo smer. Vsak ekviloški prostor E je nekakšen kvocient topološkega prostora $|E|$, skupaj z informacijo o tem, kako smo ga dobili. Če to informacijo pozabimo, vsakemu ekviloškemu prostoru priredimo topološkega.

3.7 Trditev *Obstaja funktor* $\mathfrak{R}\colon \mathbf{Equ} \to \mathbf{Top}$*, za katerega obstaja izomorfizem* $\mathbf{Equ}(E, \mathfrak{I}X) \cong \mathcal{C}(\mathfrak{R}E, X)$.

Dokaz Funktor $\mathfrak{R}$ naj prostor E slika v kvocientni prostor $\mathfrak{R}E = |E|/q_E$. Preslikava $q_E\colon |E| \to \|E\|$ je tedaj kvocientna. Če je $f\colon E \to F$ ekvivariantna preslikava, obstaja zvezna preslikava $f'\colon |E| \to |F|$, da je $q_F \circ f' = f \circ q_E$. Ker je preslikava $q_F \circ f'$ zvezna in ima prave identifikacije, nam kvocientna preslikava q_E inducira natanko določeno zvezno preslikavo $\mathfrak{R}f$, tako da je $q_F \circ f' = \mathfrak{R}f \circ q_E$.

$$\begin{tikzcd}
|E| \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q_E"'] & X \\
\|E\| \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Če je $f \in \mathbf{Equ}(E, \mathfrak{I}X)$, obstaja zvezna $f' \colon |E| \to X$, tako da velja $f' = f \circ q_E$. Ker je q_E kvocientna, je tudi $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{R}E, X)$.

Po drugi strani je za $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{R}E, X)$ tudi $f' = f \circ q_E$ zvezna in f je ekvivariantna po definiciji. □

Namesto izomorfizma $\mathbf{Equ}(E, \mathfrak{I}X) \cong \mathcal{C}(\mathfrak{R}E, X)$ bi lahko zapisali celo enakost $\mathbf{Equ}(E, \mathfrak{I}X) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}E, X)$, saj v obeh množicah opazujemo iste preslikave, le da jih enkrat vidimo kot zvezne, drugič pa kot ekvivariantne. Za naše potrebe je dovolj, da izomorfizem zadošča pogojem v definiciji 3.14, toda za njihov opis moramo spoznati še malo več teorije kategorij, zato z njimi raje počakajmo.

Rečemo lahko, da je „realni del" $\mathfrak{R}E$ ekvilološkega prostora E njegov najboljši topološki približek. Spomnimo se še na to, da je bila tudi naravna topologija najboljši približek eksponenta. Če izberemo topološka prostora X in Y, ju lahko s funktorjem $\mathfrak{I}$ preslikamo v ekvilološka prostora $\mathfrak{I}X$ in $\mathfrak{I}Y$. Med ekvilološkimi prostori eksponent $\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}$ obstaja. Kaj je njegov najboljši približek?

3.8 Trditev $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}) = X \to Y$.

Dokaz Množica $\|\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}\|$ je po konstrukciji natanko množica ekvivariantnih preslikav med $\mathfrak{I}X$ in $\mathfrak{I}Y$. Toda $\mathbf{Equ}(\mathfrak{I}X, \mathfrak{I}Y) = \mathcal{C}(X, Y)$, zato je $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ prostor na množici $\mathcal{C}(X, Y)$. Pokažimo, da je topologija na $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ šibka.

Če je $f \colon Z \times X \to Y$ zvezna, je $\mathfrak{I}f \colon \mathfrak{I}Z \times \mathfrak{I}X \to \mathfrak{I}Y$ ekvivariantna. Pri tem smo upoštevali, da funktor $\mathfrak{I}$ ohranja produkte, kar bomo v večji splošnosti pokazali v trditvi 3.21. Preslikavo $\mathfrak{I}f$ lahko transponiramo, da dobimo $\widehat{\mathfrak{I}f} \colon \mathfrak{I}Z \to \mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}$. Na tej preslikavi uporabimo še funktor $\mathfrak{R}$, da dobimo zvezno preslikavo $\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f} \colon Z \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$, ki je kar $\widehat{f}$.

Sedaj pa imejmo odprto množico $U \subseteq X \to Y$. Po konstrukciji naravne topologije je $\widehat{f}^{-1}(U) \subseteq Z$ odprta za poljubno $f \colon Z \times X \to Y$. Če si za Z izberemo $|\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}|$, za zvezno preslikavo pa e, ki jo dobimo iz konstrukcije eksponenta, je tudi $\widehat{e}^{-1}(U) \subseteq |\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}|$ odprta.

$$\begin{tikzcd}
|\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}| \times X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "q_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}} \times \mathrm{id}_X"'] & Y \\
\mathcal{C}(X, Y) \times X \arrow[ur, "\mathrm{ev}_{X \to Y}"'] &
\end{tikzcd}$$

Za povrh velja še

$$\widehat{e}(f)(x) = e(f, x) = \mathrm{ev}_{X \to Y}(q_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}}(f), x) = q_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}}(f)(x) \ ,$$

preslikava $q_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}}$ pa je kvocientna, zato je odprta tudi množica

$$U = \widehat{e}(\widehat{e}^{-1}(U)) = q_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}}(\widehat{e}^{-1}(U)) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}) \ .$$

□

Zvezni univerzalni kvantifikator $\forall_A : (X \to \mathbb{S}) \to \mathbb{S}$ lahko sedaj vzdignemo v ekvivariantno preslikavo $\forall_A : \mathfrak{I}\mathbb{S}^{\mathfrak{I}X} \to \mathfrak{I}\mathbb{S}$, saj je $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}\mathbb{S}^{\mathfrak{I}X}) = X \to \mathbb{S}$. Ti dve preslikavi se po točkah obnašata enako, zato je tudi vzdignjena preslikava univerzalni kvantifikator za $\mathfrak{I}A \subseteq \mathfrak{I}X$. Podobno preverimo, da tudi karakteristične funkcije, enakosti, neenakosti in eksistenčni kvantifikatorji pri dvigih v ekvilоške in spustih nazaj v topološke prostore ohranijo svoj logični pomen.

Sedaj lahko v vsej splošnosti upravičimo sintetične dokaze. Iz topoloških lastnosti najprej sklepamo na zveznost določenih preslikav, te pa dvignemo v ekvivariantne. Po trditvi 3.21 sledi, da funktor $\mathfrak{I}$ ohranja produkte in že obstoječe eksponente, zato lahko lambda račun v celoti izvedemo v ekviloških prostorih, nato pa dobljeno ekvivariantno preslikavo s funktorjem $\mathfrak{R}$ spustimo v zvezno preslikavo med topološkimi prostori. Ta preslikava bo po poprejšnji ugotovitvi imela iskano lastnost, najsi bo to enakost, neenakost, ...

Za primer dokažimo, da je slika kompakta kompakt. Če je $A \subseteq X$ kompaktna podmnožica in $f : X \to Y$ zvezna, je $\forall_A \in \mathcal{C}(X \to \mathbb{S}, \mathbb{S})$, zato je po trditvi 3.7 in trditvi 3.8

$$\forall_A \in \mathcal{C}(X \to \mathbb{S}, \mathbb{S}) = \mathcal{C}(\mathfrak{R}(\mathfrak{I}\mathbb{S}^{\mathfrak{I}X}), \mathbb{S}) = \mathbf{Equ}(\mathfrak{I}\mathbb{S}^{\mathfrak{I}X}, \mathfrak{I}\mathbb{S}) .$$

Ker se na ekviloških prostorih lahko poslužimo lambda računa, tokrat zmoremo skonstruirati ekvivariantni kvantifikator $\forall_{f(A)}$ s predpisom

$$\forall_{f(A)}(p) = \forall_A(\lambda x : \mathfrak{I}X. p(\mathfrak{I}f(x))) \in \mathbf{Equ}(\mathfrak{I}\mathbb{S}^{\mathfrak{I}Y}, \mathfrak{I}\mathbb{S}) .$$

Njegov spust, ki je univerzalni kvantifikator podprostora $f(A)$, je zvezen, zato je $f(A) \subseteq Y$ kompakten.

Opazimo, da lahko trditve 1.23, 1.24 in 1.25, ki so opisovale lastnosti eksponenta Y^X, posplošimo do opisa prostora $X \to Y$, trditvi 1.26 in 1.27 pa veljata za poljuben prostor $\mathcal{O}(X)$, opremljen s Scottovo topologijo.

3.3 Posplošeni topološki prostori

Razmislili bomo o poti, ki smo jo ubrali prek
ekviloških prostorov, in videli, da bi šli lahko tudi
po njej podobni.

Z zadnjo ugotovitvijo bi lahko svoje delo zaključili, saj smo pokazali pravilnost sintetičnih dokazov. Imeli smo kategorijo topoloških prostorov **Top**, ki so ji manjkali eksponenti, zato smo jo razširili na kategorijo **Equ**. Vendar kategorija **Equ** ni najmanjši skupni imenovalec vseh lastnosti, ki smo jih potrebovali. Raziščimo te lastnosti ter kategorijo, ki jih ima, imenujmo in označimo s $\widehat{\mathbf{Top}}$. Kategorija $\widehat{\mathbf{Top}}$ ni natanko določena: primera sta kategoriji ekviloških [2] in kvazitopoloških [4] prostorov.

Pot do definicije 3.20, ki bo opisala posplošene topološke prostore, začnimo s kartezično zaprto kategorijo, v katero s funktorjem $\mathfrak{I} : \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbf{Top}}$ vložimo kategorijo topoloških prostorov.

3.9 Definicija Funktor F je *vložitev*, če je zvest, poln in injektiven na objektih.

Zahtevi po zvestobi in injektivnosti sta očitni, polnost pa zahtevamo zaradi želje po konzervativnosti. Vse naše karakterizacije se zanašajo na obstoj določenih morfizmov in če funktor ne bi bil poln, bi se lahko zgodilo, da bi v kategoriji $\widehat{\mathbf{Top}}$ med objektoma $\mathfrak{I}X$ in $\mathfrak{I}Y$ obstajal iskani morfizem, med prostoroma X in Y pa ne.

Pri računih smo pogosto uporabljali lastnost, ki je za matematika, navajenega teorije množic, skorajda neopazna. Enakost preslikav f in g smo pokazali kar z enakostjo $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in X$. V splošnejših kategorijah, kjer morfizmi niso nujno preslikave, uporabimo podobno idejo. Vsak $x \in X$ lahko enakovredno predstavimo s konstantno preslikavo $\mathsf{k}_x \colon 1 \to X$ in nato preverjamo enakost $f \circ \mathsf{k}_x = g \circ \mathsf{k}_x$.

Za splošnejšo definicijo potrebujemo le končni objekt 1. Kategoriji s končnim objektom 1 pravimo *točkasta*, kadar za morfizma $f, g \colon X \to Y$ velja $f \circ \xi = g \circ \xi$ za vse morfizme $\xi \colon 1 \to X$ le tedaj, kadar je $f = g$.

Za kategorijo $\widehat{\mathbf{Top}}$ zahtevajmo malo šibkejšo lastnost. Morfizma bodita enaka, če ju ne moremo ločiti z morfizmi iz topoloških prostorov. Torej za $f, g \colon X \to Y$ velja $f = g$ natanko tedaj, ko velja $f \circ h = g \circ h$ za vse morfizme $h \colon \mathfrak{I}Z \to X$. Pravimo, da podkategorija $\mathbf{Top}$ (oziroma $\mathfrak{I}\mathbf{Top}$) *generira* kategorijo $\widehat{\mathbf{Top}}$. Ker je končni objekt 1 po lemi 3.16 enak $\mathfrak{I}1$, iz tega, da je kategorija $\widehat{\mathbf{Top}}$ točkasta, sledi tudi to, da jo podkategorija $\mathbf{Top}$ generira.

Kot pri ekviloških prostorih si želimo funktor $\mathfrak{R} \colon \widehat{\mathbf{Top}} \to \mathbf{Top}$, za katerega obstaja naravni izomorfizem $\mathcal{C}(\mathfrak{R}X, Y) \cong \widehat{\mathbf{Top}}(X, \mathfrak{I}Y)$. V kategorijah tak poseben odnos imenujemo *adjunkcija*.

3.10 Definicija *Naravna transformacija* $\vartheta \colon F \Rightarrow G$ med funktorjema $F, G \colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ je družina morfizmov

$$\{\vartheta_X \colon FX \to GX\}_X \,,$$

indeksirana z objekti X kategorije $\mathbf{C}$, za katero za vsak morfizem $f \colon X \to Y$ v kategoriji $\mathbf{C}$ velja $\vartheta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \vartheta_X$.

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\vartheta_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\
FY \arrow[r, "\vartheta_Y"] & GF
\end{tikzcd}$$

Morfizem ϑ_X imenujemo *komponenta* transformacije ϑ pri X. Naravne transformacije med seboj komponiramo kar s kompozicijo komponent.

3.11 Trditev *Funktorji iz* $\mathbf{C}$ *v* $\mathbf{D}$ *skupaj z naravnimi transformacijami tvorijo* funktorsko kategorijo $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

3.12 Definicija *Naravni izomorfizem* je naravna transformacija, ki je v funktorski kategoriji izomorfizem.

3.13 Lema *Naravna transformacija $\vartheta\colon F \Rightarrow G$ je naravni izomorfizem tedaj, ko so vse komponente $\vartheta_X\colon FX \to GX$ izomorfizmi.*

3.14 Definicija *Adjunkcija* je par funktorjev $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $U\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ skupaj z naravnima izomorfizmoma $\phi_{X,Y}\colon \mathbf{C}(FX, Y) \leftrightarrow \mathbf{D}(X, UY) : \psi_{X,Y}$. Izomorfizma ϕ in ψ sta naravna izomorfizma v obeh komponentah.

Vsaka adjunkcija porodi naravno transformacijo $\eta^U\colon \mathsf{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow U \circ F$, ki ji pravimo *enota* adjunkcije, njene komponente pa so $\eta^U_X = \phi_{X,Y}(\mathsf{id}_{FX})$. Analogno definiramo *koenoto* $\varepsilon^F\colon F \circ U \Rightarrow \mathsf{id}_{\mathbf{D}}$, ki ima komponente $\varepsilon^F_Y = \psi_{X,Y}(\mathsf{id}_{UY})$. Tedaj velja $\phi_{X,Y}(f) = \eta^U_X \circ Uf$ in $\psi_{X,Y}(g) = Fg \circ \varepsilon^F_Y$.

Adjunkcijo med funktorjema F in U označimo z $F \dashv U$.

3.15 Primer V kartezično zaprti kategoriji $\mathbf{C}$ imamo za vsak objekt X funktor $- \times X\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, ki objekt Z slika v $Z \times X$, morfizem $f\colon W \to Z$ pa v morfizem $f \times X = f \times \mathsf{id}_X\colon W \times X \to Z \times X$.

Njegov desni adjunkt bo funktor $-^X\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, ki objekt Y slika v Y^X, morfizem $f\colon Y \to Z$ pa v morfizem $f^X\colon Y^X \to Z^X$, ki ga dobimo, če evalvacijo $\mathsf{ev}_{X\to Y}\colon Y^X \times X \to Y$ komponiramo z f in dobljeni morfizem transponiramo v $f^X = (f \circ \mathsf{ev}_{X\to Y})^\wedge$.

Iz izomorfizma $\mathbf{C}(Z{\times}X, Y) \cong \mathbf{C}(Z, Y^X)$ sledi $-{\times}X \dashv -^X$. Koenota adjunkcije je kar evalvacija $\mathsf{ev}_{X\to Y}\colon Y^X \times X \to Y$.

3.16 Lema *Če velja $F \dashv U$, tedaj U ohranja produkte. V posebnem primeru je $U(X \times Y) \cong UX \times UY$ in $U1 = 1$.*

3.17 Lema *Če je v adjunkciji $F \dashv U$ funktor U poln in zvest, je za vsak objekt X komponenta koenote $\varepsilon_X\colon FUX \to X$ obrnljiva z inverzom $\varepsilon_X^{-1}\colon X \to FUX$. Poleg tega velja $U\varepsilon_X^{-1} = (U\varepsilon_X)^{-1} = \eta_{UX}\colon UX \to UFUX$ za vsak X.*

Poiščimo splošno povezavo med prostoroma $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ in $X \to Y$. V splošnem primeru ne velja nujno, da je množica, na kateri stoji $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ enaka $\mathcal{C}(X, Y)$. Kljub vsemu lahko za vsako preslikavo $f\colon Z \times X \to Y$ poiščemo primerno transponiranko $\tau(f)\colon Z \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$. S funktorjem $\mathfrak{I}$ najprej skonstruiramo morfizem $\mathfrak{I}f\colon \mathfrak{I}Z{\times}\mathfrak{I}X \to \mathfrak{I}Y$. Ker je kategorija $\widehat{\mathbf{Top}}$ kartezično zaprta, s transpozicijo dobimo $\widehat{\mathfrak{I}f}\colon \mathfrak{I}Z \to \mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}$, ki ga s funktorjem $\mathfrak{R}$ preslikamo v $\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}\colon \mathfrak{R}\mathfrak{I}Z \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$. Ker želimo preslikavo, definirano na Z, uporabimo še izomorfizem $\varepsilon_Z^{-1}\colon Z \to \mathfrak{R}\mathfrak{I}Z$, da dobimo $\tau(f) = \mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f} \circ \varepsilon_Z^{-1}\colon Z \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$.

Pri prostoru $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ se ne moremo nadejati izomorfizma med $\mathcal{C}(Z{\times}X, Y)$ in $\mathcal{C}(Z, \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}))$, a podobna povezava vseeno obstaja.

3.18 Trditev *Transformacija* $\tau\colon \mathcal{C}(-\times X,-)\to\mathcal{C}(-,\mathfrak{R}(\mathfrak{I}-^{\mathfrak{I}X}))$*, podana s prepisom* $\tau\colon f\mapsto \mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}\circ\varepsilon_Z^{-1}$*, je naravna v obeh komponentah.*

Dokaz Najprej vzemimo $g\colon W\to Z$. Funktor $-\times X$ morfizem g slika v $g\times X=g\times \mathsf{id}_X\colon W\times X\to Z\times X$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}W \arrow[r, shift left, "\eta_{\mathfrak{I}W}"'] \arrow[d, "\mathfrak{I}g"'] & \mathfrak{I}\mathfrak{R}\mathfrak{I}W \arrow[l, shift left, "\mathfrak{I}\varepsilon_W"'] \arrow[d, "\mathfrak{I}\mathfrak{R}\mathfrak{I}g"'] \arrow[dr, "\mathfrak{I}\mathfrak{R}(\mathfrak{I}(f\circ(g\times\mathsf{id}_X))^\wedge)"] & \\
\mathfrak{I}Z \arrow[r, shift left, "\eta_{\mathfrak{I}Z}"'] & \mathfrak{I}\mathfrak{R}\mathfrak{I}Z \arrow[l, shift left, "\mathfrak{I}\varepsilon_Z"'] \arrow[r, "\mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}"'] & \mathfrak{I}\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})
\end{tikzcd}$$

Potem velja

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(\tau(f)\circ g) &= \mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}\circ\mathfrak{I}\varepsilon_Z^{-1}\circ\mathfrak{I}g = \\
&= \mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}\circ\eta_{\mathfrak{I}Z}\circ\mathfrak{I}g = \\
&= \mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}\circ\mathfrak{I}\mathfrak{R}\mathfrak{I}g\circ\eta_{\mathfrak{I}W} = \\
&= \mathfrak{I}\mathfrak{R}(\widehat{\mathfrak{I}f}\circ\mathfrak{I}g)\circ\eta_{\mathfrak{I}W} = \\
&= \mathfrak{I}\mathfrak{R}(\mathfrak{I}f\circ(\mathfrak{I}g\times\mathsf{id}_{\mathfrak{I}X}))^\wedge\circ\mathfrak{I}\varepsilon_W^{-1} = \\
&= \mathfrak{I}\mathfrak{R}(\mathfrak{I}(f\circ(g\times\mathsf{id}_X))^\wedge)\circ\mathfrak{I}\varepsilon_W^{-1} = \\
&= \mathfrak{I}(\tau(f\circ(g\times\mathsf{id}_X)))\ .
\end{aligned}$$

Ker je $\mathfrak{I}$ zvest, velja tudi $\tau(f)\circ g=\tau(f\circ(g\times\mathsf{id}_X))$, zato je τ naravna v prvi komponenti.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(Z\times X,Y) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "g\circ -"'] & \mathcal{C}(Z,\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})) \arrow[d, "\mathfrak{R}(\mathfrak{I}g^{\mathfrak{I}X})\circ -"] \\
\mathcal{C}(Z\times X,W) \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{C}(Z,\mathfrak{R}(\mathfrak{I}W^{\mathfrak{I}X}))
\end{tikzcd}$$

Vzemimo še $g\colon Y\to W$. Tokrat funktor $\mathfrak{I}-^{\mathfrak{I}X}$ morfizem g preslika v $\mathfrak{I}g^{\mathfrak{I}X}\colon \mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}\to\mathfrak{I}W^{\mathfrak{I}X}$, $\mathfrak{I}g^{\mathfrak{I}X}\circ\widehat{\mathfrak{I}f}=(\mathfrak{I}(g\circ f))^\wedge$, zato velja

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(\mathfrak{I}g^{\mathfrak{I}X})\circ\tau(f) &= \mathfrak{R}(\mathfrak{I}g^{\mathfrak{I}X})\circ\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}f}\circ\varepsilon_Z^{-1} = \\
&= \mathfrak{R}(\mathfrak{I}g^{\mathfrak{I}X}\circ\widehat{\mathfrak{I}f})\circ\varepsilon_Z^{-1} = \\
&= \mathfrak{R}(\mathfrak{I}(g\circ f))^\wedge\circ\varepsilon_Z^{-1} = \\
&= \tau(g\circ f)
\end{aligned}$$

in τ je naravna tudi v drugi komponenti. □

Spomnimo se, da je naravna topologija presek vseh močnih topologij, in da je transpozicija evalvacije identiteta, ter skonstruirajmo preslikavo

$$\tau(\mathsf{ev}_{X\to Y})\colon (X \to Y) \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})\,.$$

3.19 Lema *Bodita Z in W prostora nad isto množico. Z $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ označimo pozabljivi funktor. Če za $f\colon Z\times X \to Y$, $g\colon W\times X \to Y$ velja $U(f) = U(g)$, velja tudi $U(\tau(f)) = U(\tau(g))$.*

Dokaz Obravnavajmo primer, ko je topologija na Z diskretna. Tedaj obstaja zvezna preslikava $i\colon Z \to W$, ki se po točkah obnaša kot identiteta. Iz enakosti $f = g\circ(i\times \mathsf{id}_X)$ in naravnosti transformacije τ v prvi komponenti sledi

$$\tau(f) = \tau(g\circ(i\times\mathsf{id}_X)) = \tau(g)\circ i\,,$$

zato je $U(\tau(f)) = U(\tau(g))\circ U(i) = U(\tau(g))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(W\times X, Y) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "-\circ(i\times\mathsf{id}_X)"'] & \mathcal{C}(W, \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})) \arrow[d, "-\circ i"] \\
\mathcal{C}(Z\times X, Y) \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{C}(Z, \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}))
\end{tikzcd}$$

Sedaj lahko diskretno topologijo na Z držimo pribito in spreminjamo prostor W. Od tod po tranzitivnosti sledi dokaz leme. □

Evalvacije $\mathsf{ev}_{X\to Y}\colon \mathcal{M}(X,Y)\times X \to Y$ se po točkah obnašajo enako za vse močne topologije $\mathcal{M}(X,Y)$ na $\mathcal{C}(X,Y)$. Torej se enako obnašajo tudi preslikave $\tau(\mathsf{ev}_{X\to Y})\colon \mathcal{M}(X,Y) \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$. Ker so vse zvezne, naravna topologija pa je natanko presek vseh topologij $\mathcal{M}(X,Y)$, je zvezna tudi preslikava

$$\psi = \tau(\mathsf{ev}_{X\to Y})\colon (X\to Y) \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})\,.$$

Pri vložitvi topoloških prostorov v ekviloške je $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ topologija na $\mathcal{C}(X,Y)$, preslikava ψ pa se po točkah obnaša kot identiteta. Od tod sledi, da je topologija prostora $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ šibka, saj je šibkejša od naravne topologije. Ker sta tako $X\to Y$ kot $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ „najboljša“ približka eksponenta Y^X, pričakujemo, da je ψ homeomorfizem. Po mnogih urah iskanja obupamo in namesto dokaza naredimo privzetek.

3.20 Definicija Kategorija *posplošenih topoloških prostorov* $\widehat{\mathbf{Top}}$ je vsaka kartezično zaprta kategorija, za katero:

- obstaja vložitev $\mathfrak{I}\colon \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbf{Top}}$ in $\mathfrak{I}\mathbf{Top}$ generira $\widehat{\mathbf{Top}}$,
- obstaja funktor $\mathfrak{R}\colon \widehat{\mathbf{Top}} \to \mathbf{Top}$, tako da velja $\mathfrak{R} \dashv \mathfrak{I}$,

- je za poljubna prostora X in Y preslikava

$$\psi = \mathfrak{R}(\mathfrak{I}\mathsf{ev}_{X\to Y})^\wedge \circ \varepsilon^{-1}_{X\to Y} \colon (X \to Y) \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$$

  homeomorfizem.

V stari definiciji [4] posplošenih topoloških prostorov je bila kategorija $\widehat{\mathbf{Top}}$ točkasta, trditev 3.21 je bila privzeta kot aksiom, homeomorfizem med $X \to Y$ in $\mathfrak{R}(\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ pa je bil poljuben. Ravno zaradi naravnosti lahko rečemo, da je zahteva po natančno določenemu homeomorfizmu ψ smiselna, nova definicija pa splošnejša in primernejša.

3.21 Trditev *Za poljubna topološka prostora X in Y sta objekta $\mathfrak{I}(X \times Y)$ in $\mathfrak{I}X \times \mathfrak{I}Y$ v kategoriji $\widehat{\mathbf{Top}}$ izomorfna. Kadar obstaja eksponent Y^X, sta izomorfna tudi objekta $\mathfrak{I}(Y^X)$ in $\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}$.*

Dokaz Ker je $\mathfrak{I}$ desni adjunkt, po lemi 3.16 ohranja produkte, zato je $\mathfrak{I}(X \times Y) \cong \mathfrak{I}X \times \mathfrak{I}Y$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I}(Y^X) \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{I}(Y^X)}"] \arrow[d, "\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}"'] \arrow[dr, "\mathfrak{I}\psi"] & \mathfrak{I}\mathfrak{R}\mathfrak{I}(Y^X) \arrow[d, "\mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}"] \\
\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X} \arrow[r, "\eta_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}}"'] & \mathfrak{I}\mathfrak{R}\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}
\end{tikzcd}$$

Zaradi naravnosti transformacije η velja $\mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \eta_{\mathfrak{I}(Y^X)} = \eta_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}} \circ \widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}$, torej zunanji kvadrat diagrama komutira. Ker pa je

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \eta_{\mathfrak{I}(Y^X)} &= \mathfrak{I}\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \mathfrak{I}\varepsilon^{-1}_{Y^X} = \\
&= \mathfrak{I}(\mathfrak{R}\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \varepsilon^{-1}_{Y^X}) = \\
&= \mathfrak{I}\psi\,,
\end{aligned}$$

prav tako komutira zgornji trikotnik. Od tod sledi, da komutira tudi spodnji trikotnik in $\eta_{\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}} \circ \widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} = \mathfrak{I}\psi$. Preslikava ψ je homeomorfizem, zato je $\mathfrak{I}\psi$ izomorfizem v $\widehat{\mathbf{Top}}$ in $\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}$ je sekcija. Pokažimo, da je $\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}$ tudi epimorfizem.

Vzemimo $f, g \colon \mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X} \to Z$, za kateri velja $f \circ \widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} = g \circ \widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}$. Torej velja tudi

$$f \circ \widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \mathfrak{I}\widehat{h} = g \circ \widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \mathfrak{I}\widehat{h}$$

za vse zvezne preslikave $h \colon W \times X \to Y$. Ker velja

$$\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}} \circ \mathfrak{I}\widehat{h} = (\mathfrak{I}\mathsf{ev} \circ (\mathfrak{I}\widehat{h} \times \mathsf{id}_{\mathfrak{I}X}))^\wedge = (\mathfrak{I}(\mathsf{ev} \circ (\widehat{h} \times \mathsf{id}_X)))^\wedge = \widehat{\mathfrak{I}h}\,,$$

velja tudi $f \circ \widehat{\mathfrak{I}h} = g \circ \widehat{\mathfrak{I}h}$. Prek verige naravnih izomorfizmov

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{Top}}(\mathfrak{I}W, \mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}) &\cong \widehat{\mathbf{Top}}(\mathfrak{I}W \times \mathfrak{I}X, \mathfrak{I}Y) \cong \\ &\cong \widehat{\mathbf{Top}}(\mathfrak{I}(W \times X), \mathfrak{I}Y) \cong \\ &\cong \mathcal{C}(W \times X, Y) \cong \mathcal{C}(W, Y^X) \cong \\ &\cong \widehat{\mathbf{Top}}(\mathfrak{I}W, \mathfrak{I}(Y^X))\end{aligned}$$

vidimo, da je množica $\widehat{\mathbf{Top}}(\mathfrak{I}W, \mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X})$ sestavljena natanko iz preslikav oblike $\widehat{\mathfrak{I}h}$. Ker je kategorija $\widehat{\mathbf{Top}}$ generirana s topološkimi prostori, sta morfizma f in g enaka, zato je $\widehat{\mathfrak{I}\mathsf{ev}}$ epimorfizem.

Vsaka epimorfna sekcija je izomorfizem [7], zato sta $\mathfrak{I}Y^{\mathfrak{I}X}$ in $\mathfrak{I}(Y^X)$ izomorfna in funktor $\mathfrak{I}$ ohranja obstoječe eksponente. □

Lastnosti, ki smo jih našteli v definiciji 3.20 so zgolj potrebne, niso pa zadostne. Pri ekviloških prostorih smo zlahka preverili, da predikati ohranjajo logični pomen, ne glede na to, ali jih gledamo v topoloških ali ekviloških prostorih. V splošnejši kategoriji, kjer morfizmi niso nujno preslikave, postopamo podobno, le da enakosti $f \circ \xi = g \circ \xi$ ne preverjamo le po točkah, torej na morfizmih $\xi \colon 1 \to X$, temveč na vseh morfizmih $\xi \colon M \to X$.

Tako je na primer morfizem $\forall_X \colon \mathfrak{I}\mathbb{S}^X \to \mathfrak{I}\mathbb{S}$ univerzalni kvantifikator objekta X, če za vsak morfizem $p \colon M \to \mathfrak{I}\mathbb{S}^X$ velja $\forall_X \circ p = \mathfrak{I}\mathsf{k}_\top \circ !_M$ natanko tedaj, ko za vsak morfizem $\xi \colon N \to X$ velja $\mathsf{ev} \circ (p \times \xi) = \mathfrak{I}\mathsf{k}_\top \circ !_{M \times N}$. Pri tem je morfizem $!_M$ enolični morfizem $!_M \colon M \to 1$.

Kot pri ekviloških prostorih moramo pokazati, da lahko tako z zveznimi preslikavami kot z njihovimi dvigi, ki jih dobimo prek adjunkcij, interpretiramo logične veznike in operacije. S tem se prepričamo, da bodo morfizmi, skonstruirani s pomočjo lambda računa v $\widehat{\mathbf{Top}}$ potem, ko jih bomo spustili nazaj v topološke prostore, predstavljali iskane zvezne predikate in s tem iskane topološke lastnosti. Za splošnejšo obravnavo takega postopka v tem delu ni prostora.

Literatura

[1] S. Awodey, *Categories for Everybody*, neobjavljeno in dosegljivo na naslovu `http://www.andrew.cmu.edu/user/awodey/`, junij 2004.

[2] A. Bauer, *Equilogical Spaces are Imaginary*, neobjavljeno in dosegljivo na naslovu `http://www.andrej.com/talks/`, november 2003.

[3] A. Bauer, L. Birkedal, D.S. Scott, *Equilogical Spaces*, Theoretical Computer Science **315** (2004), št. 1, 35–59.

[4] M.H. Escardó, *Synthetic topology of data types and classical spaces*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **87** (2004), 21–156.

[5] M.H. Escardó, R. Heckmann, *Topologies on spaces of continuous functions*, Topology Proceedings **26** (2002), št. 2, 545–564.

[6] J.R. Isbell, *Function Spaces and Adjoints*, Symposia Mathematica **36** (1975), 317–339.

[7] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, št. 5, Springer-Verlag, 1971.

[8] D.S. Scott, *A New Category?*, neobjavljeno in dosegljivo na naslovu `http://www.cs.cmu.edu/Groups/LTC/`, december 1996.

Stvarno kazalo