5. Požrešna metoda

greedy

5.1. Najcenejša vpeta drevesa

Imamo neusmerjen graf G z uteženimi povezavami; $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$
Iščemo tak podgraf G', da bo G' povezan, $V(G) = V(G')$ in da bo $W(G') = \sum_{e \in E(G')} w(e)$ minimalna.

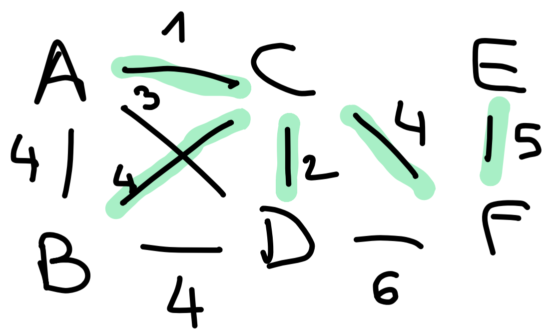
vpet podgraf

Hitro vidimo, da ta graf nima ciklov, saj sicer vedno lahko odstranimo povezave.

povezan graf + brez ciklov = drevo

Iščemo torej najcenejše vpeto drevo. (NVD / MST)

minimal spanning tree



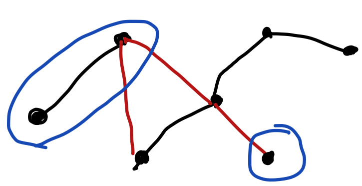
5.1.1. Kruskalov algoritem

Ideja: zaporedoma jemlji najcenejšo povezavo, ki ne naredi cikla.

Kruskal
*1928 NY, NY, ZDA
†2010 Maplewood, NJ, ZDA

5.1.2. Izrek o robu

Naj bo $S \subseteq V(G)$



Rob množice S je

$$\partial S = \{(u,v) \in E(G) \mid u \in S,\ v \notin S\}$$

Izrek Naj bo G povezan graf in $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$.
Naj bo $X \subseteq E(G)$ podmnožica povezav nekega NVD.
Naj bo $S \subseteq V(G)$ tak, da je $X \cap \partial S = \emptyset$

do sedaj zgrajeno drevo

kandidati za naslednjo povezavo NVD

Naj bo e najcenejša povezava v ∂S ← to implicira $\partial S \neq \emptyset$
Tedaj je $X \cup \{e\}$ tudi vsebovana v nekem NVD.

Dokaz

Naj bo T najcenejše vpeto drevo, ki razširja X.
Imamo dve možnosti:

- $e \in T$ ✓
- $e \notin T$

V tem primeru $T \cup \{e\}$ vsebuje cikel C.
Želimo pokazati, da C vsebuje še neko povezavo $e' \in \partial S$.
To je res, saj sicer C lahko razdelimo na del, ki je v celoti v S in del, ki je v celoti izven S.
Ker je e najcenejša povezava v ∂S, je $w(e') \geq w(e)$
in $W(T \setminus \{e'\} \cup \{e\}) = W(T) - w(e') + w(e) \leq W(T)$.
Ker je T NVD in je $W(T \setminus \{e'\} \cup \{e\}) \leq W(T)$, je tudi $T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ NVD.
Ali je $X \cup \{e\} \subseteq T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$?
Ker je $X \subseteq T$ in je $e' \in \partial S$ ter velja $\partial S \cap X = \emptyset$, je $X \subseteq T \setminus \{e'\}$, zato je $X \cup \{e\} \subseteq T \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ ■

3.1.3. Algoritem

vhod povezan graf G, $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$, ureditev E glede na w

izhod NVD $X \subseteq E(G)$

def kruskal (G, w):
  za vse $v \in V(G)$:
    naredi_singleton (v)
  $X = \{\}$
  za vse $(u,v) \in E$, urejene glede na w:
    če poišči_razred $(u) \neq$ poišči_razred (v):
      $X = X \cup \{(u,v)\}$
      združi_razreda (u,v)

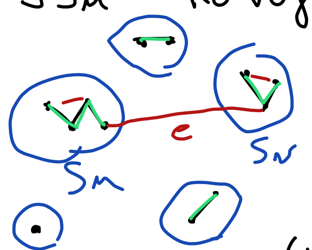
Potrebujemo strukturo, ki beleži disjunktne množice vozlišč.

(1) Na vsakem koraku zanke je $X \subseteq$ nekega NVD.

$n = 0$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$

- če na tem koraku nismo dodali nove povezave ✓
- če smo dodali (u,v), ki poveže prej nepovezani množici S_u in S_v. Tedaj je (u,v) najcenejša povezava na ∂S_u. Ker velja $\partial S_u \cap X = \emptyset$, lahko uporabimo izrek o robu.



(2) $|V| \cdot T_{singleton} + 2 \cdot |E| \cdot T_{poišči} + (|V|-1) \cdot T_{združi}$