Teorija programskih jezikov: 3. izpit

11. april 2024

1. naloga (20 točk)

V λ-računu definirajmo izraz:

$$\mathsf{applyIf} = \lambda p.\lambda f.\lambda x.\mathtt{if}\ p\,x\ \mathtt{then}\ f\,x\ \mathtt{else}\ x$$

a) (10 točk) Zapišite vse korake evalvaciji izraza $\mathsf{applyIf}\,(\lambda x.1*2<x)\,(\lambda y.y+3*4)\,(5*6)$ v *leni* semantiki malih korakov. Izpeljav posameznih korakov ni treba pisati.. Izpeljav posameznih korakov ni treba pisati.

b) (10 točk) S pomočjo Hindley-Milnerjevega algoritma izračunajte najbolj splošen tip izraza $\mathsf{applyIf}$.

2. naloga (20 točk)

Vzemimo varianto jezika IMP, ki namesto pomnilniških lokacij uporablja sklad celih števil:

$$\begin{aligned}
\text{aritmetični izraz } e &::= \underline{n} \mid \mathtt{head} \mid e_1 + e_2 \mid \cdots \\
\text{logični izraz } b &::= \mathtt{true} \mid \mathtt{false} \mid \mathtt{isEmpty} \mid e_1 = e_2 \mid \cdots \\
\text{ukaz } c &::= \mathtt{push}\,e \mid \mathtt{drop} \mid \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ c_1\ \mathtt{else}\ c_2 \mid \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ c \mid c_1;c_2 \mid \mathtt{skip}
\end{aligned}$$

kjer:

- `isEmpty` vrne `true`, če je sklad prazen, in `false` sicer,
- `head` vrne glavo sklada, *če ta obstaja*,
- `push` e na vrh sklada doda vrednost izraza e,
- `drop` odstrani glavo sklada, *če ta obstaja*.

Podajte ustrezno spremenjena pravila za relacije operacijske semantike:

$$s, e \Downarrow n \qquad s, b \Downarrow r \qquad s, c \leadsto s', c'$$

kjer sklad s predstavimo s seznamom celih števil $n_1 :: n_2 :: \cdots :: []$.

3. naloga (20 točk)

Prostor Sierpinskega $\mathbb{S} = \{\bot, \top\}$ delno uredimo z:

$$a \sqsubseteq b \iff (a = \bot) \vee (b = \top)$$

Tedaj je $(\mathbb{S}, \sqsubseteq)$ domena, česar vam ni treba dokazovati. Definirajmo preslikavi $\mathsf{any}, \mathsf{all} : [\mathbb{N}_\bot \to \mathbb{S}] \to \mathbb{S}$ s predpisoma:

$$\mathsf{any}(f) = \begin{cases} \top & \exists n \in \mathbb{N}. f(n) = \top \\ \bot & \text{sicer} \end{cases} \qquad \mathsf{all}(f) = \begin{cases} \top & \forall n \in \mathbb{N}. f(n) = \top \\ \bot & \text{sicer} \end{cases}$$

Pokažite, da je preslikava any zvezna, preslikava all pa ni.

4. naloga (20 točk)

Drobnozrnati neučakani λ-račun razširimo s sprožanjem in lovljenjem izjem E iz vnaprej podane množice $\mathbb{E}$, kar določimo s sintakso:

$$\begin{aligned} \text{vrednost } V &::= x \mid () \mid \lambda x.M \\ \text{izračun } M, N &::= \mathtt{return}\, V \mid \mathtt{let}\, x = M \,\mathtt{in}\, N \mid V_1\, V_2 \mid \mathtt{throw}\, E \mid \mathtt{try}\, M \,\mathtt{with}\, \{E \mapsto N\} \end{aligned}$$

in operacijsko semantiko:

$$\frac{M \rightsquigarrow M'}{\mathtt{let}\, x = M \,\mathtt{in}\, N \rightsquigarrow \mathtt{let}\, x = M' \,\mathtt{in}\, N} \qquad \frac{}{\mathtt{let}\, x = \mathtt{return}\, V \,\mathtt{in}\, N \rightsquigarrow N[V/x]}$$

$$\frac{}{\mathtt{let}\, x = \mathtt{throw}\, E \,\mathtt{in}\, N \rightsquigarrow \mathtt{throw}\, E} \qquad \frac{}{(\lambda x.M)\, V \rightsquigarrow M[V/x]}$$

$$\frac{M \rightsquigarrow M'}{\mathtt{try}\, M \,\mathtt{with}\, \{E \mapsto N\} \rightsquigarrow \mathtt{try}\, M' \,\mathtt{with}\, \{E \mapsto N\}} \qquad \frac{}{\mathtt{try}\, (\mathtt{return}\, V) \,\mathtt{with}\, \{E \mapsto N\} \rightsquigarrow \mathtt{return}\, V}$$

$$\frac{}{\mathtt{try}\, (\mathtt{throw}\, E) \,\mathtt{with}\, \{E \mapsto N\} \rightsquigarrow N} \qquad \frac{E \neq E'}{\mathtt{try}\, (\mathtt{throw}\, E) \,\mathtt{with}\, \{E' \mapsto N\} \rightsquigarrow \mathtt{throw}\, E}$$

Namesto z običajnim sistemom tipov jezik opremimo s *sistemom učinkov*, v katerem poleg tipov vrednosti sledimo tudi izjemam, ki jih lahko sprožajo programi. Tako sintakso tipov podamo z

$$\text{tip } A, B ::= \mathtt{unit} \mid A \xrightarrow{\mathscr{E}} B,$$

kjer tip $A \xrightarrow{\mathscr{E}} B$ predstavlja funkcije iz A v B, ki med izvajanjem lahko (morebiti) sprožijo eno izmed izjem iz podmnožice $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{E}$. Podobno pri pravilih za določanje tipov izračunom z relacijo $\Gamma \vdash_c M : A!\mathscr{E}$ priredimo tudi množico izjem $\mathscr{E}$, ki jih lahko sprožajo:

$$\frac{(x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash_v x : A} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash_v () : \mathtt{unit}} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash_c M : B!\mathscr{E}}{\Gamma \vdash_v \lambda x.M : A \xrightarrow{\mathscr{E}} B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_v V_1 : A \xrightarrow{\mathscr{E}} B \qquad \Gamma \vdash_v V_2 : A}{\Gamma \vdash_c V_1\, V_2 : B!\mathscr{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash_v V : A}{\Gamma \vdash_c \mathtt{return}\, V : A!\mathscr{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash_c M : A!\mathscr{E} \qquad \Gamma, x : A \vdash_c N : B!\mathscr{E}}{\Gamma \vdash_c \mathtt{let}\, x = M \,\mathtt{in}\, N : B!\mathscr{E}}$$

$$\frac{E \in \mathscr{E}}{\Gamma \vdash_c \mathtt{throw}\, E : A!\mathscr{E}} \qquad \frac{\Gamma \vdash_c M : A!\mathscr{E} \cup \{E\} \qquad \Gamma \vdash_c N : A!\mathscr{E}}{\Gamma \vdash_c \mathtt{try}\, M \,\mathtt{with}\, \{E \mapsto N\} : A!\mathscr{E}}$$

Za razširjeni jezik velja natančnejša trditev o napredku, ki vam ga *ni treba* dokazovati: če velja $\vdash_c M : A!\mathscr{E}$, tedaj:

- obstaja V, da velja $M = \mathtt{return}\, V$,
- obstaja $E \in \mathscr{E}$, da velja $M = \mathtt{throw}\, E$,
- obstaja M', da velja $M \rightsquigarrow M'$.

Dokažite še ohranitev: če velja $\vdash_c M : A!\mathscr{E}$ in $M \rightsquigarrow M'$, tedaj velja $\vdash_c M' : A!\mathscr{E}$. Pri tem lahko predpostavite ustrezno lemo o substituciji.