95.12 Algoritmos y Programación II

Práctica 4: complejidad algorítmica y recurrencias

Notas preliminares

- Esta práctica se propone sentar los fundamentos matemáticos básicos para el análisis de algoritmos.
- Los ejercicios marcados con el símbolo ♣ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. No obstante, recomendamos fuertemente realizar todos los ejercicios.

---

1. Notación asintótica

Ejercicio 1

Supongamos tener dos algoritmos para el mismo problema: el algoritmo A insume tiempo n, mientras que el algoritmo B toma tiempo $3\log n + 5$. ¿Cuándo se debería elegir A y cuándo B?

Ejercicio 2

Demostrar las siguientes propiedades:

(a) $f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$.

(b) $f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ y $f(n) \in \Omega(g(n))$.

(c) $f(n) \in O(h(n))$ y $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow (f+g)(n) \in O(h(n))$.

(d) $f(n) \in O(h(n))$ y $g(n) \in O(l(n)) \Rightarrow (f \cdot g)(n) \in O(h(n)l(n))$.

(e) (reflexividad) $f(n) \in O(f(n))$.

(f) (transitividad) $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$.

Ejercicio 3 ♣

Verificar que:

(a) $1000000 \in O(1)$

(b) $10n^2 \in O(n^3)$

(c) $2^n \in O(n^n)$

(d) $n! \in O(n^n)$

(e) $\sum_{k=0}^{n} k \in O(n^2)$

(f) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \in O(n^3)$

(g) $\sum_{k=0}^{n} k^3 \in O(n^4)$

(h) Si $p(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k$ ($a_k \in \mathbb{R}$), entonces $p(n) \in O(n^m)$

Ejercicio 4 ♣

Analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, argumentando apropiadamente las respuestas dadas:

(a) $2^{n+1} \in O(2^n)$

(b) $2^{2n} \in O(2^n)$

(c) $O(n^2) \cap \Omega(n) = \Theta(n^2) \cup \Theta(n \log n) \cup \Theta(n)$

(d) $\Omega(n^{\frac{3}{2}}) \cap O(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}}) \cap \Theta(n)$

(e) $O(1) \subseteq O(1/n)$

(f) Si $f(n) \in O(g(n))$, entonces $\log f(n) \in O(\log g(n))$

(g) Si $f(n) \in \Theta(g(n))$, entonces $2^f(n) \in \Theta(2^g(n))$

(h) Si $f(n) \in \Theta(n)$, entonces existen dos constantes a, b tales que $f(n) = an + b$.

(i) Si $g(n) \in \Omega(n)$, entonces $n^{g(n)} \in \Omega(g(n)^n)$.

(j) Si $g(n) \in \Theta(n)$, entonces $n^{g(n)} \in \Theta(g(n)^n)$.

Ejercicio 5

Probar que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k \in O(1)$$

siendo $0 \leq a < 1$ y $n \geq 0$.

Ejercicio 6

Dadas dos clases de complejidad $O(f)$ y $O(g)$, decimos que $O(f) \leq O(g)$ si y sólo si para toda función $h \in O(f)$ sucede que $h \in O(g)$.

(a) ¿Qué significa, intuitivamente, $O(f) \leq O(g)$? ¿Qué se puede concluir cuando, simultáneamente, tenemos $O(f) \leq O(g)$ y $O(g) \leq O(f)$?

(b) ¿Cómo ordena $\leq$ las siguientes clases de complejidad?

• $O(1)$	• $O(x+1)$	• $O(x^2)$
• $O(\sqrt{x})$	• $O(1/x)$	• $O(x^x)$
• $O(\sqrt{2})$	• $O(\log x)$	• $O(\log^2 x)$
• $O(\log x^2)$	• $O(\log \log x)$	• $O(x!)$
• $O(\log x!)$	• $O(2^x)$	• $O(x \log x)$

Ejercicio 7

Para cada par de funciones $f(n)$ y $g(n)$, indicar si $f(n) = O(g(n))$ y si $g(n) = O(f(n))$.

(a) $f = 10n, g = n^2 - 10n$

(b) $f = n^3, g = n^2 \log n$

(c) $f = n \log n, g = n + \log n$

(d) $f = \log n, g = \sqrt[k]{n}$

(e) $f = \ln n, g = \log n$

(f) $f = \log(n+1), g = \log n$

(g) $f = \log\log n, g = \log n$

(h) $f = 2^n, g = 10^n$

(i) $f = n^m, g = m^n$

(j) $f = \cos(n \cdot \pi/2), g = \sin(n \cdot \pi/2)$

(k) $f = n^2, g = (n \cos n)^2$

Ejercicio 8 ♣

Indicar -respondiendo sí/no- para cada par de expresiones (A, B) de la tabla, si A es O, Ω, o Θ de B. Suponer que $k \geq 1$, $\epsilon > 0$, y $c > 1$ son constantes.

A	B	O	Ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ			
n^k	c^n			
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$			
2^n	$2^{n/2}$			
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$			
$\lg n$	$\lg n^n$			

Ejercicio 9

Dar una expansión asintótica de

$$f(n) = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

en términos de $\mathrm{O}(n^{-3})$, siendo $a > 0$.

Ejercicio 10 ♣

Explicar el error en el siguiente resultado:

$$\mathrm{O}(f(n)) - \mathrm{O}(f(n)) = 0$$

Además, ¿cómo debería ser realmente el miembro derecho de la igualdad anterior?

2. Recurrencias

Ejercicio 11

Resolver las siguientes recurrencias:

(a) $R(n) = R(n-1) + 1;\ R(0) = 1$

(b) $R(n) = R(n-a) + 1;\ R(i) = 1, i \leq a$

(c) $R(n) = 2\,R(n-1) + 1;\ R(0) = 1$

(d) $R(n) = 2\,R(n-1) + n$; $R(0) = 1$

(e) $R(n) = 2\,R(\frac{n}{2}) + 1$; $R(1) = 1$

Ejercicio 12 ♣

Sin utilizar el Teorema Maestro, demostrar que la solución de

$$T(n) = T(n/2) + 1$$

es una $\mathrm{O}(\log n)$.

Ejercicio 13 ♣

Verificar que la solución de

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

es $T(n) = \mathrm{O}(\log n \log\log n)$.

Pista: usar cambios de variable.

Ejercicio 14 ♣

Usando un árbol de recursión como ayuda, encontrar la solución de

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

Verificar la solución encontrada usando el método de sustitución.

Ejercicio 15

Supongamos estar ante una situación en la que tenemos que elegir uno de entre tres posibles algoritmos para resolver un problema de tamaño n:

(a) El primer algoritmo resuelve nuestro problema dividiéndolo en cinco subproblemas, cada uno de la mitad de tamaño, para luego resolverlos en forma recursiva y combinarlos en tiempo lineal.

(b) La segunda posibilidad consiste en encontrar la solución al problema de tamano n resolviendo recursivamente dos problemas de tamaño $n-1$, y luego combinando las soluciones parciales en tiempo constante.

(c) El tercer algoritmo permite resolver el problema dividiéndolo en nueve subproblemas de tamaño $n/3$, para luego resolverlos recursivamente, y combinándolos en tiempo cuadrático a fin de obtener la respuesta buscada.

Para cada uno de los ítems anteriores, derivar una expresión asintótica que permita caracterizar la complejidad temporal de cada algoritmo. ¿Cuál de éstos es conveniente elegir?

Ejercicio 16 ♣

Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, argumentando detalladamente las respuestas dadas:

(a) La solución de la recurrencia $T(n) = 2T(n/2) + \log n$ es una $\Theta(n\,\log n)$.

(b) Existen valores de α ($0 < \alpha < 1$) para los cuales la solución de la recurrencia

$$T(n) = 2T(\alpha n) + n$$

es $\Theta(n)$.

(c) Sea $T(n) = 2T(\alpha\, n) + n$, siendo $0 < \alpha < 1$. Existen exactamente dos soluciones asintóticas posibles para T, dependiendo de la elección de α.

(d) El Teorema Maestro permite encontrar la solución asintótica de cualquier recurrencia que represente la complejidad temporal de un algoritmo que use la técnica de dividir y conquistar.

Ejercicio 17

Considerar la siguiente recurrencia T, en donde $k \in \mathbb{N}$ es una constante y $0 < a_1, \ldots, a_k < 1$:

$$T(n) = n + \sum_{i=1}^{k} T(a_i\, n)$$

Probar que, si $a = \sum a_i < 1$, entonces $T(n) \in \Theta(n)$.