

## 95.12 Algoritmos y Programación II

### Práctica 9: introducción a grafos

#### Notas preliminares

- El objetivo de esta práctica es dar una breve introducción a estructuras de representación de grafos y algoritmos para manipularlas.
- Los ejercicios marcados con el símbolo ♣ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. No obstante, recomendamos fuertemente realizar todos los ejercicios.

#### Ejercicio 1 ♣

En una implementación de grafos usando listas de adyacencia, ¿cuál es el costo de calcular el grado de salida de cada vértice? ¿Cuál es el costo para el grado de entrada?

#### Ejercicio 2 ♣

La *transpuesta* de un grafo dirigido  $G = (V, E)$  es el grafo  $G^T = (V, E^T)$ , en donde  $E^T = \{(v, u) \in V \times V : (u, v) \in E\}$ . Es decir,  $G^T$  es  $G$  con todas sus aristas en sentido reverso.

Describir algoritmos eficientes para computar  $G^T$  a partir de  $G$ , tanto para la representación usando listas de adyacencia como también en el caso de matrices de adyacencia. Analizar los tiempos de corrida de los algoritmos.

#### Ejercicio 3

Definimos el *cuadrado* de un grafo  $G = (V, E)$ , como el grafo  $G^2 = (V, E^2)$ , tal que  $(u, w) \in E^2$  si y sólo si para algún  $v \in V$  se cumple que  $(u, v) \in E$  y  $(v, w) \in E$ . Esto es,  $G^2$  contendrá una arista entre  $u$  y  $w$  siempre que  $G$  contenga un camino con exactamente dos aristas entre  $u$  y  $w$ . Describir algoritmos eficientes para computar  $G^2$  a partir de  $G$ , usando las dos representaciones usuales de grafos, matrices y listas de adyacencia. Analizar los tiempos de corrida de los algoritmos.

#### Ejercicio 4

Usualmente, representar los grafos usando matrices de adyacencia impone complejidad  $\Omega(|V|^2)$ , pero hay excepciones. Mostrar que, dado un grafo dirigido  $G$ , es posible determinar, a partir de su matriz de adyacencia y en tiempo  $O(|V|)$ , si  $G$  contiene un sumidero universal, i.e., un vértice con grado de entrada  $|V| - 1$  y grado de salida nulo.

#### Ejercicio 5

La matriz de incidencia de un grafo dirigido  $G = (V, E)$  es una matriz de  $|V| \times |E|$ ,  $B = (b_{ij})$  tal que:

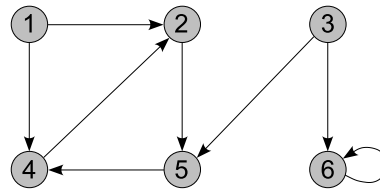
$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si la arista } j \text{ sale del vértice } i, \\ 1 & \text{si la arista } j \text{ llega al vértice } i, \\ 0 & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$$

Describir qué representan los elementos de la matriz producto  $BB^T$ , donde  $B^T$  es la transpuesta de  $B$ .

#### Ejercicio 6

Indicar los valores de  $d$  y  $\pi$  involucrados en el recorrido BFS<sup>1</sup> del grafo de la figura, en donde  $d[u]$  es la distancia entre  $u$  y el vértice origen; y  $\pi[u]$  es el vértice predecesor, o padre, de  $u$  en la secuencia resultante. Tomar al vértice 3 como punto de partida.

<sup>1</sup>Breadth first search.

**Ejercicio 7 ♣**

¿Cuál es la complejidad temporal del algoritmo BFS si representamos el grafo mediante una matriz de adyacencia?

**Ejercicio 8**

El *diámetro* de un árbol  $T = (V, E)$  está dado por:

$$\max_{u,v \in V} \delta(u, v)$$

En otras palabras, el diámetro es el máximo valor del conjunto de distancias entre todos los nodos del árbol. Dar un algoritmo eficiente para calcular el diámetro y analizar su tiempo de ejecución.