12

Novo Espaço

Matemática A

12.º ano

Belmiro Costa
Ermelinda Rodrigues

Parte 1

Propostas de Resolução

Porto Editora

Índice

Manual – Parte 1

Poderá encontrar no e-Manual Premium:

- todas as propostas de resolução do projeto em **formato digital** em contexto (também em PDF no menu de recursos do projeto);
- as propostas de resolução assinaladas neste livro, com o ícone (→), em **formato de aplicação interativa**, permitindo a sua apresentação passo a passo.

ISBN 978-972-0-84686-0

Manual **Parte 1**

Pág. 9

1.1. Os números primos inferiores a 10 são 2, 3, 5 e 7. Então, $A=\{2,3,5,7\}$. $3(x-1)\leq 24 \Leftrightarrow 3x-3\leq 24 \Leftrightarrow x\leq 9$.

Donde se conclui que $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

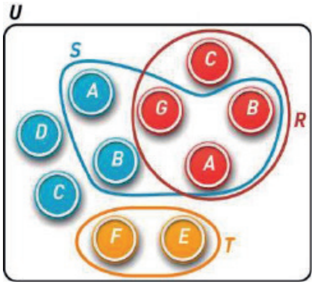
1.2. $A\subset B$ porque $\forall x, x\in A \Rightarrow x\in B$.

Os números ímpares inferiores a 10 são 1, 3, 5, 7 e 9. Então, $C=\{1,3,5,7,9\}$. Ora, $2\in A \ \wedge \ 2\notin C$. $A\not\subset C$ porque $\exists \ x\colon x\in A \ \wedge \ x\notin C$.

1.3. $2x-19<0 \Leftrightarrow x<\frac{19}{2} \Leftrightarrow x<9{,}5$. O conjunto *D* é constituído pelos números naturais inferiores a 9,5 que não são múltiplos de 2, ou seja, $D=\{1,3,5,7,9\}$. Assim sendo, conclui-se que $C=D$.

2.1. A ficha (azul, B) pertence ao conjunto *S*.

2.2.



2.3.

a) $R\cap S=\{(\text{vermelha,A}),(\text{vermelha,B}),(\text{vermelha,G})\}$

b) $R\cup S=\{(\text{vermelha,A}),(\text{vermelha,B}),(\text{vermelha,C}),$
$(\text{vermelha,G}),(\text{azul,A}),(\text{azul,B})\}$

c) $S\cap T=\{ \ \}$

Tarefa 1

1. $|x|<3\wedge x\in\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow (x<3\wedge x>-3)\wedge x\in\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow x=1\vee x=2$.

Então, $A=\{1,2\}$. $2x-9<0\wedge x\in\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow x<\frac{9}{2}\wedge x\in\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1\vee x=2\vee x=3\vee x=4$. Então, $B=\{1,2,3,4\}$.

2. $A\cap B=\{1,2\}$ e $A\cup B=\{1,2,3,4\}$.

3.1. $A\subset B$ porque $\forall x, x\in A\Rightarrow x\in B$.

3.2. $A\cap B\subset A$ porque $\forall x, x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ e $A\subset A\cap B$ porque $\forall x, x\in A\Rightarrow x\in A\cap B$. Como $A\cap B\subset A$ e $A\subset A\cap B$, conclui-se que $A\cap B=A$. $A\cup B\subset B$ porque $\forall x, x\in A\cup B\Rightarrow x\in B$ e $B\subset A\cup B$ porque $\forall x, x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$. Como $A\cup B\subset B$ e $B\subset A\cup B$, conclui-se que $A\cup B=B$.

4. O valor lógico da proposição é falso pois, por exemplo, $4\in B$ e $4\notin A$.

Pág. 10

3.1.

a) $|x|\leq 5 \Leftrightarrow x\leq 5\wedge x\geq -5$

Então, $A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$.

b) $x-2<1+\frac{x}{3} \Leftrightarrow 3x-6<3+x \Leftrightarrow 2x<9 \Leftrightarrow x<4{,}5$. Então, $B=\{1,2,3,4\}$.

c) $A\cap B=\{1,2,3,4\}$

d) $A\cup B=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

3.2.

a) O valor lógico da proposição é verdadeiro porque $A\cap B\subset A$.

b) O valor lógico da proposição é verdadeiro porque $A\cap B\subset B$.

c) O valor lógico da proposição é falso porque, por exemplo, $0\in A$ e $0\notin B$.

d) O valor lógico da proposição é verdadeiro porque $\forall x, x\in B\Rightarrow x\in A$.

4. Como $S\subset T$, então $S\cap T=S$. Assim sendo, $S=\{3,4,5\}$.

Pág. 11

5.1. $(C\cap A)\cap B=C\cap(A\cap B)=C\cap(B\cap A)=\{5,9\}$

5.2. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=(B\cap A)\cap C=\{5,9\}$

5.3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=\{1,2,4,5,7,9,10,12\}$

5.4. $B\cup(C\cup A)=(C\cup A)\cup B=C\cup(A\cup B)=$

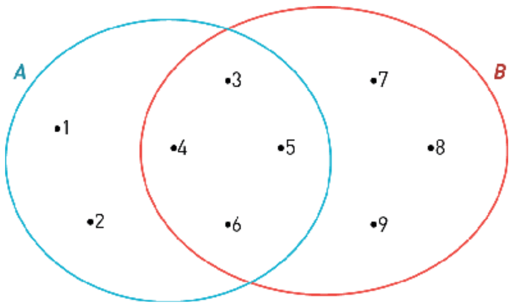
$=\{1,2,4,5,7,9,10,12\}$

6.1. O número 5 pertence a *T* pois pertence a $P\cap T$ mas não pertence a *S*.

6.2. $T\cap(S\cap P)=(S\cap P)\cap T=S\cap(P\cap T)=\{1,3,7\}$.

Tarefa 2

1.1.



1.2. $A\cap B=\{3,4,5,6\}$ e $B\cap A=\{3,4,5,6\}$.

Assim sendo, $A\cap B=B\cap A$.

1.3. $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $B\cup A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Assim sendo, $A\cup B=B\cup A$.

2.1. $(C\cap D)\cap E=\{3,5\}\cap\{2,5,6,7\}=\{5\}$ e

$C\cap(D\cap E)=\{1,3,5,7\}\cap\{2,5,6\}=\{5\}$

Assim sendo, $(C\cap D)\cap E=C\cap(D\cap E)$.

2.2. $(C\cup D)\cup E=\{1,2,3,5,6,7\}\cup\{2,5,6,7\}=\{1,2,3,5,6,7\}$ e

$C\cup(D\cup E)=\{1,3,5,7\}\cup\{2,3,5,6,7\}=\{1,2,3,5,6,7\}$.

Assim sendo, $(C\cup D)\cup E=C\cup(D\cup E)$.

Pág. 12

7.1. $|1-2x|\le 4\Leftrightarrow 1-2x\le 4\wedge 1-2x\ge -4\Leftrightarrow x\ge -\frac{3}{2}\wedge x\le\frac{5}{2}$.

Então, $A=\{-1,0,1,2\}$.

$-x^2+x+6=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2}\Leftrightarrow x=-2\vee x=3$

$-x^2+x+6\ge 0\Leftrightarrow x\in[-2,3]$

Então, $B=\{1,2,3\}$. Logo, $B\cap A=\{1,2\}$ e $A\cap(B\cap A)=\{1,2\}$.

7.2. $A\cup B=\{-1,0,1,2,3\}$. Logo, $B\cup(A\cup B)=\{-1,0,1,2,3\}$.

8.1. $(P\cap S)\cap(Q\cap S)=(P\cap S)\cap(S\cap Q)=P\cap(S\cap S)\cap Q=$

$=P\cap S\cap Q$

8.2.

a) $S\cap(P\cup Q)=(S\cap P)\cup(S\cap Q)=(P\cap S)\cup(Q\cap S)=$

$=\{-3,-2,-1,0,1,3,4,5\}$

b) $P\cap Q\cap S=(P\cap S)\cap(Q\cap S)=\{-1,0,3\}$

9.1. $2<|x-1|<4\Leftrightarrow|x-1|>2\wedge|x-1|<4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1>2\vee x-1<-2)\wedge(x-1<4\wedge x-1>-4)$

$\Leftrightarrow(x>3\vee x<-1)\wedge(x<5\wedge x>-3)\Leftrightarrow -3<x<-1\vee 3<x<5$

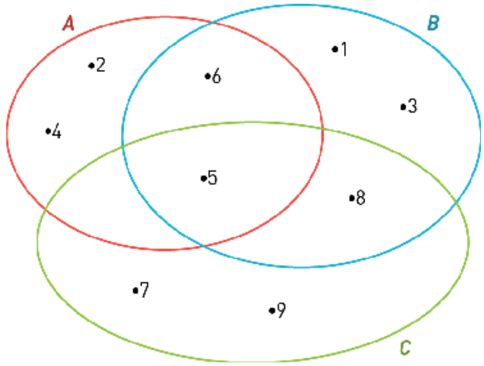
Então, $B\cup C=]-3,-1[\cup]3,5[$.

9.2. Sabe-se que $A=]-2,+\infty[$. Então:

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)=]-2,-1[\cup]3,5[$

Tarefa 3

1.1.



1.2.

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

b) $A\cap C=\{5\}$

c) $B\cap C=\{5,8\}$

1.3. $(A\cup B)\cap C=\{5,8\}$ e $(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{5,8\}$.

Donde se conclui que $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

1.4. $(A\cap B)\cup C=\{5,6,7,8,9\}$

e $(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{5,6,7,8,9\}$.

Donde se conclui que: $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

Pág. 13

10.1. $\overline{A}=\{x\in\mathbb{R}:-2<x\le 3\}$

10.2. $\overline{A}=\left\{x\in\mathbb{R}:x\le -\frac{1}{2}\vee x>5\right\}$

11.1.

a) $\overline{A}=\{x:x\ge 5\}$

b) $A\setminus B=\{x:x<2\}$

c) $B\setminus A=\{x:x\ge 5\}$

d) $\sim(1<x\le 3)\Leftrightarrow\sim(x>1\wedge x\le 3)\Leftrightarrow x\le 1\vee x>3$;

$\overline{C}=\{x:x\le 1\vee x>3\}$.

11.2.

a) $\overline{A\cap C}=\overline{A}\cup\overline{C}=[5,+\infty[\cup(]-\infty,1]\cup]3,+\infty[)=$

$=]-\infty,1]\cup]3,+\infty[$

b) $\overline{\overline{C}\cup\overline{B}}=\overline{\overline{C}}\cap\overline{\overline{B}}=C\cap B=]1,3]\cap[2,+\infty[=[2,3]$

Pág. 14

12.1. $\overline{B}=\{6,7,8\}$

12.2. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{6,8,12,14\}\cap\{6,7,8\}=\{6,8\}$

12.3. $B\setminus A=\{x\in B: x\notin A\}=\{12,14\}$

12.4. $\overline{A\cap\overline{B}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup B=\{6,8,12,14\}\cup\{1,4,12,14\}=$

$=\{1,4,6,8,12,14\}$

13.1. $\overline{P}\cup\overline{Q\cup\overline{P}}=\overline{P}\cup\left(\overline{Q}\cap P\right)=\left(\overline{P}\cup\overline{Q}\right)\cap\left(\overline{P}\cup P\right)=$

$=\left(\overline{P\cap Q}\right)\cap U=\overline{P\cap Q}$

13.2. $0\leq\frac{x}{2}+1\leq 3\Leftrightarrow\frac{x}{2}+1\geq 0\wedge\frac{x}{2}+1\leq 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2\geq 0\wedge x+2\leq 6\Leftrightarrow x\geq -2\wedge x\leq 4$

Então, $P\cap Q=[-2,4]$.

Assim sendo, $\overline{P}\cup\overline{Q\cup\overline{P}}=\overline{P\cap Q}=\ =]-\infty,-2[\cup]4,+\infty[$.

14.1. $\left(A\cup\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap B=\left(A\cup\overline{A}\cup B\right)\cap B=(U\cup B)\cap B=U\cap B=B$

14.2. $A\cap\overline{A\cup\overline{B}}=A\cap\overline{A}\cap B=\{\ \}\cap B=\{\ \}$

14.3. $A\cup\left(\overline{B\cup\overline{A}}\cup B\right)=A\cup\left(\left(\overline{B}\cap A\right)\cup B\right)=$

$=A\cup\left(\left(\overline{B}\cup B\right)\cap(A\cup B)\right)=A\cup\left(U\cap(A\cup B)\right)=A\cup(A\cup B)=$

$=(A\cup A)\cup B=A\cup B$

Pág. 15

15.1. O produto cartesiano $A\times B$ tem $5\times 5=25$ elementos.

15.2. Há 5 elementos:

(Vasco,azul),(Vasco,vermelho),

(Vasco,branco), (Vasco,roxo) e (Vasco,preto) .

16.1. $C\times A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),$

$(4,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4)\}$

16.2. $C\times B=\{(3,2),(3,3),(3,5),(4,2),(4,3),(4,5),(6,2),$

$(6,3),(6,5)\}$

16.3. $C\times(A\cup B)=(C\times A)\cup(C\times B)$

$=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),$

$(4,3),(4,4),(4,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

Pág. 16

17.1. Os conjuntos *P* e *S* são equipolentes porque existe uma bijeção de *S* sobre *P* (a função que a cada surfista faz corresponder a sua prancha de *surf*).

17.2. Como os conjuntos *P* e *S* são equipolentes e $\#S=28$, conclui-se que $\#P=\#S=28$.

18. Sabe-se que $\#B=\frac{9}{10}\#A$ e $\#(A\cup B)=57$.

Os conjuntos *A* e *B* são disjuntos, isto é, $A\cap B=\varnothing$.

Então, tem-se que $\#(A\cup B)=\#A+\#B$. Donde resulta que:

$57=\#A+\frac{9}{10}\#A\Leftrightarrow 57=\frac{19}{10}\#A\Leftrightarrow\frac{57\times 10}{19}=\#A\Leftrightarrow 30=\#A$.

Conclusão: $\#A=30$ e $\#B=57-30=27$.

Pág. 17

19.1. $\#(A\cup C)=82-25=57$

Como $\#(A\cup C)=\#A+\#C-\#(A\cap C)$, tem-se:

$57=36+30-\#(A\cap C)\Leftrightarrow\#(A\cap C)=9$.

19.2. $\#A\setminus C+\#C\setminus A=\#A-\#(A\cap C)+\#C-\#(C\cap A)=$

$=36-9+30-9=48$

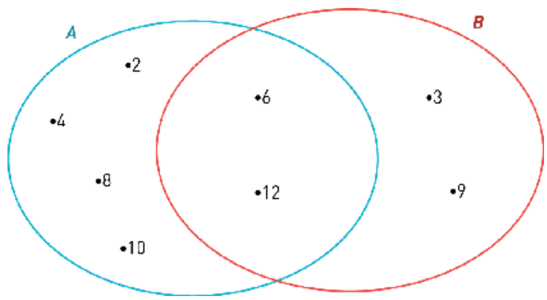
20.1. $\#(P\cup M)=\#P+\#M-\#(P\cap M)=20+13-8=25$

20.2. $\#M\setminus P=\#M-\#(M\cap P)=13-8=5$

Há 5 raparigas da turma que não participam no concurso.

Tarefa 4

1. $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ e $B=\{3,6,9,12\}$.



2.1. $A\setminus B=\{2,4,8,10\}$, $B\setminus A=\{3,9\}$ e $A\cap B=\{6,12\}$.

2.2.

a) $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\{2,4,8,10\}\cap\{6,12\}=\{\ \}$

Donde se conclui que os conjuntos $A\setminus B$ e $A\cap B$ são disjuntos.

$(A\setminus B)\cup(A\cap B)=\{2,4,8,10\}\cup\{6,12\}=\{2,4,6,8,10,12\}=A$

b) $\#A \setminus B = 4$ e $\#A - \#(A \cap B) = 6 - 2 = 4$, donde se conclui que $\#A \setminus B = \#A - \#(A \cap B)$.

2.3.

a) $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \{3,9\} \cap \{6,12\} = \{\ \}$

Donde se conclui que os conjuntos $B \setminus A$ e $A \cap B$ são disjuntos.

$(B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{3,9\} \cup \{6,12\} = \{3,6,9,12\} = B$

b) $\#B \setminus A = 2$ e $\#B - \#(A \cap B) = 4 - 2 = 2$, donde se conclui que $\#B \setminus A = \#B - \#(A \cap B)$.

2.4.

a) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \{2,4,8,10\} \cap \{3,9\} \cap \{6,12\} = \{\ \}$

Donde se conclui que os conjuntos $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \cap B$ são disjuntos.

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) = \{2,4,8,10\} \cup \{3,9\} \cup \{6,12\} =$

$= \{2,3,4,6,8,9,10,12\} = A \cup B$

b) $\#(A \cup B) = 8$ e $\#A + \#B - \#(A \cap B) = 6 + 4 - 2 = 8$, donde se conclui que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

Pág. 18

21.1. Os elementos do conjunto $A \times B$ em que a faz parte são cinco: $(a,2), (a,3), (a,5), (a,7)$ e $(a,9)$.

21.2. Os elementos do conjunto $A \times B$ em que c não faz parte são 15: $(a, 2), (a, 3), (a, 5), (a, 7), (a, 9), (b, 2), (b, 3), (b, 5), (b, 7), (b, 9), (d, 2), (d, 3), (d, 5), (d, 7)$ e $(d, 9)$.

22. $\#(C \times D) = 6 \Leftrightarrow \#C \times \#D = 6 \Leftrightarrow 2 \times \#D = 6 \Leftrightarrow \#D = 3$

Então, $\#(D \times D) = \#D \times \#D = 3 \times 3 = 9$.

23. Se $(3,5) \in (P \times P)$, então $3 \in P$ e $5 \in P$.

Donde se exclui a opção (B). Se $\#(P \times P) = 16$, então $\#P = 4$.

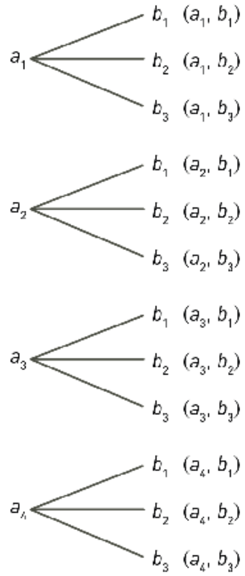
Assim sendo, a opção correta é a (C).

Tarefa 5

1.1. Estratégia do Bernardo:

$A \times B$	b_1	b_2	b_3
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)
a_4	(a_4, b_1)	(a_4, b_2)	(a_4, b_3)

Estratégia da Carolina:



1.2. O conjunto $A \times B$ tem 12 elementos.

1.3. $\#(A \times B) = 12$ e $\#A \times \#B = 4 \times 3 = 12$, donde se conclui que $\#(A \times B) = \#A \times \#B$.

1.4. Se acrescentar 1 elemento ao conjunto *A*, são acrescentados 3 elementos ao conjunto $A \times B$ porque $\#B = 3$.

1.5. Se acrescentar 5 elementos ao conjunto *A*, são acrescentados 15 elementos ao conjunto $A \times B$ porque $\#B = 3$ e $5 \times 3 = 15$.

2.1. O número de linhas a preencher na tabela é igual ao número de elementos do conjunto *A* e o número de colunas é igual ao número de elementos do conjunto *B*.

Então, há *m* linhas e *n* colunas a preencher na tabela.

2.2. Existem $m \times n$ pares ordenados.

Pág. 19

24. O Pedro tem 36 $(6 \times 3 \times 2)$ maneiras distintas de escolher o equipamento a levar para a aula de Educação Física.

Pág. 20

25. $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $C = \{1,2,3,4,5,6\}$.

25.1.

a) Um elemento que pertença ao conjunto $A \times B \times C$ é, por exemplo, $(0,1,5)$.

b) Um elemento que pertença ao conjunto $C \times A \times B$ é, por exemplo, $(6,-2,2)$.

25.2. $\#(A \times B \times C) = \#A \times \#B \times \#C = 7 \times 3 \times 6 = 126$.

26. Cada uma das arestas $[OA]$, $[OC]$ e $[OE]$ do cubo contém 4 pontos de coordenadas inteiras. Assim sendo, existem 64 $(4\times4\times4)$ pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao cubo.

Tarefa 6

1.1.

a) Existem 5 pontos de coordenadas inteiras que pertencem à aresta $[UV]$, a saber: $(5,-2,5)$, $(5,-1,5)$, $(5,0,5)$, $(5,1,5)$, e $(5,2,5)$.

b) Pontos do tipo (x,y,z) tal que:

$x\in\{0,1,2,3,4,5\}$, $y\in\{-2,-1,0,1,2\}$ e $z\in\{5\}$

O número de pontos de coordenadas inteiras é $6\times5\times1=30$.

c) O plano mediador de $[PQ]$ é o plano de equação $y=0$.

$P(x,0,z)$ em que $x\in\{0,1,2,3,4,5\}$, $y\in\{0\}$ e $z\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

O número de pontos é $6\times1\times6=36$.

1.2. $X=\{0,1,2,3,4,5\}$, $Y=\{-2,-1,0,1,2\}$ e $Z=\{0,1,2,3,4,5\}$.

a) $\#(X\times Y\times Z)=\#X\times\#Y\times\#Z=6\times5\times6=180$

b) O cubo é definido pela condição:

$0\le x\le5\ \wedge\ -\frac{5}{2}\le y\le\frac{5}{2}\ \wedge\ 0\le z\le5$

Como $\#(X\times Y\times Z)=180$, sabe-se que existem 180 pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao cubo.

2.1. Sendo a medida da aresta do cubo igual a 8, cada uma das arestas $[MR]$ e $[RS]$ do cubo contém 9 pontos de coordenadas inteiras. Assim sendo, existem 81 (9×9) pontos de coordenadas inteiras que pertencem à face $[MRST]$.

2.2. Cada uma das arestas $[MR]$, $[MP]$ e $[RS]$ do cubo contém 9 pontos de coordenadas inteiras. Assim sendo, existem 729 $(9\times9\times9)$ pontos de coordenadas inteiras que pertencem ao cubo.

3. Sendo a medida da aresta do cubo igual a 25, existem 7500 $(12\times25\times25)$ pontos do cubo em que as coordenadas são números naturais.

Pág. 21

27. A resposta corresponde ao número de arranjos com repetição de 12 elementos 3 a 3.

${}^{12}A'_3=12^3=1728$. É possível obter 1728 sequências diferentes.

28.1. Se não houver qualquer restrição, é possível selecionar ${}^{10}A'_5=10^5=100\,000$ códigos diferentes.

28.2. Se o código não tiver algarismos pares, ou seja, se só tiver algarismos ímpares, é possível selecionar ${}^{5}A'_5=5^5=3125$ códigos diferentes.

29. Neste sistema existem no máximo ${}^{23}A'_2\times{}^{10}A'_2\times{}^{23}A'_2=$

$=23^2\times10^2\times23^2=27\,984\,100$ matrículas diferentes.

Pág. 22

30.1. Número de sequências de sinais que o Pedro pode apanhar: ${}^{3}A'_8=3^8=6561$

30.2. Número de sequências de sinais que o Pedro pode apanhar sem qualquer sinal vermelho: ${}^{2}A'_8=2^8=256$.

31.1. Se não houver qualquer restrição, o número de alternativas é dado por: ${}^{10}A'_4=10^4=10\,000$

31.2. Se a sequência começa em 1 e representa um número par, então o número de alternativas é dado por:

${}^{10}A'_2\times5=10^2\times5=500$

31.3. Se a sequência começa num algarismo ímpar e representa um número múltiplo de 5, então o número de alternativas é dado por: $5\times{}^{10}A'_2\times2=5\times10^2\times2=1000$

Tarefa 7

1.1. Uma pessoa que responda às quatro questões do inquérito pode dar ${}^{11}A'_4=11^4=14\,641$ respostas diferentes.

1.2. Se as classificações às três últimas questões do inquérito forem superiores a 5, então é possível dar $11\times{}^{5}A'_3=11\times5^3=$

$=1375$ respostas diferentes.

2. O aluno pode dar ${}^{4}A'_9=4^9=262\,144$ respostas diferentes.

Pág. 23

32.1. Como $\#P(A)=2^6=64$, conclui-se que o conjunto A tem 64 subconjuntos.

32.2. Seja n o cardinal do conjunto B.

$\#P(B)=512\Leftrightarrow2^n=512\Leftrightarrow2^n=2^9\Leftrightarrow n=9$. Portanto, $\#B=9$.

33. Utilizando pelo menos uma das oito moedas, podem ser pagos $2^8-1=255$ valores exatos.

Tarefa 8

1.1. A sequência associada ao subconjunto $\{a, i\}$ é S N S N N.

1.2. A sequência associada ao subconjunto $\{a, e, i, o, u\}$ é S S S S S.

1.3. A sequência associada ao subconjunto $\{\ \}$ é N N N N N.

2.1. O subconjunto associado à sequência N N S S S é $\{$i, o, u$\}$.

2.2. O subconjunto associado à sequência S N N N N é $\{$a$\}$.

3. Com as letras S e N é possível formar $2^5 = 32$ sequências de cinco elementos.

4. Como $\#P(A) = 2^5 = 32$, conclui-se que o conjunto A tem 32 subconjuntos.

Pág. 25

34.1. $\frac{17}{7!}-\frac{1}{6!}=\frac{17}{7!}-\frac{1\times 7}{6!\times 7}=\frac{17}{7!}-\frac{7}{7!}=\frac{10}{7!}$

34.2. $\frac{24}{8!}+\frac{3}{5!}=\frac{24}{8\times 7!}+\frac{3\times 6\times 7}{5!\times 6\times 7}=\frac{3}{7!}+\frac{126}{7!}=\frac{129}{7!}$

34.3. $\frac{14}{8!-7!}=\frac{14}{8\times 7!-7!}=\frac{14}{7!(8-1)}=\frac{14}{7!\times 7}=\frac{2}{7!}$

35.1. $13!-2\times 11!=13\times 12\times 11!-2\times 11!=(13\times 12-2)\times 11!=$
$=154\times 11!$

35.2. $13!-11!+2\times 12!=13\times 12\times 11!-11!+2\times 12\times 11!=$
$=(13\times 12-1+2\times 12)\times 11!=179\times 11!$

35.3. $2\times 10!+11!=\frac{2\times 10!\times 11}{11}+11!=\frac{2\times 11!}{11}+11!=$
$=\left(\frac{2}{11}+1\right)\times 11!=\frac{13}{11}\times 11!$

36.1. $\frac{(n+1)!}{n!}=15 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n!}{n!}=15 \Leftrightarrow n+1=15 \Leftrightarrow n=14$

36.2. $\frac{(n+2)!}{n!}=12 \Leftrightarrow \frac{(n+2)\times(n+1)\times n!}{n!}=12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n+2)\times(n+1)=12 \Leftrightarrow n^2+n+2n+2=12 \Leftrightarrow n^2+3n-10=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n=2 \vee n=-5$. Como n é natural, conclui-se que $n=2$.

37.1. É possível ordenar os livros na prateleira de $9!=6\ 227\ 020\ 800$ maneiras diferentes.

37.2. Se os dois livros mais pequenos ocuparem os extremos, então há $2!\times 11!=79\,833\,600$ maneiras diferentes de ordenar os livros na prateleira.

Pág. 26

38. A Rita pode ordenar os 5 lápis no estojo de ${}^{14}A_5=240\,240$ maneiras diferentes.

Pág. 27

39. O Paulo pode definir ${}^{4}A_3=24$ códigos diferentes.

40.1.
a) Se forem utilizados 5 cubos é possível construir $5!=120$ "torres" diferentes.
b) Se forem utilizados 4 cubos é possível construir ${}^{5}A_4=120$ "torres" diferentes.
c) Se forem utilizados 3 cubos é possível construir ${}^{5}A_3=60$ "torres" diferentes.

40.2. Se os cubos verde e amarelo ficarem um em cada extremo da "torre", então é possível construir $2!\times 3!=12$ "torres" diferentes.

40.3. Se forem utilizados 3 cubos, sendo o azul um dos escolhidos, é possível construir $3\times {}^{4}A_2=36$ "torres" diferentes.

Pág. 28

41.1. Os resultados possíveis de obter são ${}^{7}A_5=2520$.

41.2. Se uma das cores a utilizar é o azul, os resultados possíveis de obter são $5\times {}^{6}A_4=1800$.

41.3. Se o verde e o vermelho forem utilizados para as extremidades, os resultados possíveis de obter são $2!\times {}^{5}A_3=120$.

42.1. Os números pares de três algarismos diferentes que é possível formar, usando elementos do conjunto A, são ${}^{6}A_2\times 3=90$.

42.2. Os números múltiplos de 5 de três algarismos diferentes que é possível formar, usando elementos do conjunto A, são ${}^{6}A_2\times 1=30$.

42.3. Os números maiores que 500 de três algarismos diferentes que é possível formar, usando elementos do conjunto A, são $3\times {}^{6}A_2=90$.

42.4. Os números menores que 180 de três algarismos diferentes que é possível formar, usando elementos do conjunto A, são $1\times {}^{6}A_2=30$.

42.5. Os números menores que 150 de três algarismos diferentes que é possível formar, usando elementos do conjunto A, são $1\times 3\times 5=15$.

43. O número total de apostas possíveis é ${}^{12}A_3=1320$.
Como cada aposta custa 2 euros, então, para garantir que se acerta, devem ser gastos, no mínimo, $1320\times 2€=2640€$.

Tarefa 9

1.1. Se ficarem sentadas as três raparigas, há $3!=6$ maneiras diferentes de as sentar no sofá.

1.2. Se em cada ponta ficar sentado um rapaz e no meio ficar uma rapariga, há $2!\times 3=6$ maneiras diferentes de os sentar no sofá.

1.3. Se em cada ponta ficar sentada uma rapariga e no meio ficar um rapaz, há ${}^{3}A_2\times 2=12$ maneiras diferentes de os sentar no sofá.

2.1. Número de sequências em que as cinco cartas são do mesmo naipe: $2\times {}^{6}A_5=1440$.

2.2. Número de sequências em que a primeira e a última carta são figuras: ${}^{6}A_2\times {}^{10}A_3=21600$.

2.3. Número de sequências com exatamente duas figuras (uma em cada ponta): ${}^{6}A_2\times {}^{6}A_3=3600$.

3.1. Número de sequências que é possível formar em que a bola preta não entra: ${}^{6}A_4=360$.

3.2. Número de sequências que é possível formar em que a bola azul é a última: ${}^{6}A_3\times 1=120$.

3.3. Número de sequências que é possível formar em que a bola verde é a primeira e a vermelha é a última: $1\times {}^{5}A_2\times 1=20$.

Pág. 29

44.1. Número de maneiras de formar, na turma, um grupo de 20 elementos: ${}^{25}C_{20}=53\,130$.

44.2. Número de maneiras de formar, na turma, um grupo de 4 rapazes: ${}^{10}C_4=210$.

44.3. Número de maneiras de formar, na turma, um grupo de 9 raparigas: ${}^{15}C_9=5005$.

44.4. Número de maneiras de formar, na turma, um grupo de 5 elementos, sendo 3 raparigas e 2 rapazes: ${}^{15}C_3\times {}^{10}C_2=20475$.

Tarefa 10

1.1. Como o subconjunto tem 3 elementos, as permutações dos elementos do subconjunto são 6 $(3!=6)$.

1.2. A Joana obtém apenas uma mistura pois vai utilizar os 3 elementos do subconjunto.

2. Os subconjuntos de S de 3 elementos são os seguintes: $\{K,A,L\}$, $\{K,A,M\}$, $\{K,L,M\}$ e $\{A,L,M\}$.

3. O número de arranjos de 4 elementos 3 a 3 é igual a 24 $\left({}^{4}A_3=\frac{4!}{(4-3)!}=24\right)$ e o número de subconjuntos de S com 3 elementos é igual a 4. Portanto, o número de arranjos de 4 elementos 3 a 3 não é igual ao número de subconjuntos de S com 3 elementos, porque nos arranjos a ordem interessa e nos subconjuntos não interessa a ordem por que se misturam as 3 variedades de sumo.

4. $\dfrac{{}^{4}A_3}{3!}=\dfrac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!}=\dfrac{\frac{24}{1}}{6}=4$.

No contexto apresentado, $\dfrac{{}^{4}A_3}{3!}$ representa o número de misturas que é possível formar utilizando 3 sumos a partir dos 4 iniciais.

Pág. 30

45. Utilizando quatro e só quatro dessas moedas, é possível obter ${}^{8}C_4=70$ diferentes valores.

46.1. $8\times {}^{n}C_3=n\times {}^{n}A_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8\times\frac{n!}{3!(n-3)!}=n\times\frac{n!}{(n-2)!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\times\frac{n-2}{(n-2)!}=n\times\frac{6}{(n-2)!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\times\frac{1}{6(n-3)!}=n\times\frac{1}{(n-2)!}\Leftrightarrow 8n-16=6n\Leftrightarrow n=8$$

46.2. $20\times {}^{n}C_2={}^{n+1}A_3\Leftrightarrow 20\times\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10\,n!=(n+1)!\Leftrightarrow 10\,n!=(n+1)\times n!$$

$$\Leftrightarrow 10=n+1\Leftrightarrow n=9$$

Pág. 31

47.1. É possível formar ${}^{10}C_7=120$ grupos de sete pessoas.

47.2. É possível distribuir sete das dez pessoas pelas cadeiras de ${}^{10}A_7=604\,800$ maneiras diferentes.

48.1. Com os cinco pontos assinalados é possível definir ${}^{5}C_2=10$ retas distintas.

48.2. Com os cinco pontos assinalados é possível definir ${}^{5}C_3=10$ triângulos diferentes.

49.1. Número de códigos que não têm o algarismo 5:
$^9A'_4 = 9^4 = 6561$.

49.2. Número de códigos que têm exatamente um algarismo 5:
$4 \times {^9A'_3} = 4 \times 9^3 = 2916$.

49.3. Número de códigos que têm exatamente dois algarismos 3:
$^4C_2 \times {^9A'_2} = 6 \times 9^2 = 486$.

Pág. 32

50.1. Número de maneiras que há para empilhar os nove livros:
$^9C_2 \times 7! = 181440$

50.2. Número de maneiras que há para empilhar os nove livros e os amarelos ficarem juntos: $8 \times 7! = 40320$

50.3. Número de maneiras que há para empilhar os nove livros e o cor de laranja e o cor-de-rosa ficarem juntos:
$2! \times 8 \times {^7C_2} \times 5! = 40320$

50.4. Número de maneiras que há para empilhar os nove livros e os amarelos ficarem nos extremos: $7! = 5040$

51. Seja *n* o número de participantes na reunião. O número de grupos de dois elementos que é possível formar é dado por $^nC_2$.

$$^nC_2 = 28 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 28 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2(n-2)!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{2} \Leftrightarrow n = 8 \vee n = -7$$

Como $n \geq 2$, conclui-se que $n = 8$. Assim sendo, se o grupo passar a ser constituído por 4 elementos haverá $^8C_4 = 70$ alternativas para formar esse grupo.

Tarefa 11

1.1. $^8C_3$: número de maneiras de dispor as três bolas vermelhas (na fila de 8).
$^5C_2$: número de maneiras de colocar as duas bolas azuis (nos 5 lugares ainda disponíveis) depois de colocadas as vermelhas.
$3!$: número de maneiras de dispor as três bolas de cores diferentes (preta, verde e amarela) nos 3 lugares restantes.
Assim sendo, e atendendo às cores das bolas, é possível obter $^8C_3 \times {^5C_2} \times 3!$ sequências diferentes.

1.2. $N = {^8C_3} \times {^5C_2} \times 3! = \frac{8!}{3! \times (8-3)!} \times \frac{5!}{2! \times (5-2)!} \times 3! =$

$= \frac{8!}{3! \times 5!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} \times 3! = \frac{8!}{3! \times 2!}$

2.1. Número de anagramas da palavra LISBOA: $6! = 720$

2.2. Número de anagramas da palavra AMADORA: $\frac{7!}{3!} = 840$

2.3. Número de anagramas da palavra ENTRONCAMENTO:
$\frac{13!}{2! \times 3! \times 2! \times 2!} = 129\ 729\ 600$.

3.1. Atendendo ao produto de cada frasco é possível obter $\frac{7!}{3!} = 840$ sequências diferentes.

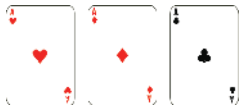
3.2. Número de sequências em que os três frascos com doce de morango ficam em lugares consecutivos: $5 \times 4! = 120$.

Pág. 33

Proposta 1

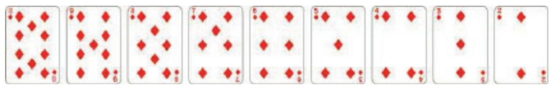
1.1.

a) As cartas que correspondem à região sombreada do diagrama de Venn são as seguintes:

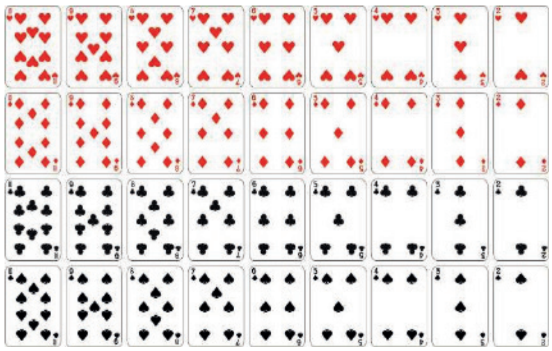


b) As cartas que correspondem à região sombreada do diagrama de Venn são as seguintes:

c) As cartas que correspondem à região sombreada do diagrama de Venn são as seguintes:



d) As cartas que correspondem à região sombreada do diagrama de Venn são as seguintes:



1.2.

a) "As figuras que não são de paus" são representadas por: $F \cap \overline{P}$.

b) "Figuras ou ases que não são de copas" são representadas por: $(F \cup A) \cap \overline{C}$.

c) "Espadas que não são figuras ou ouros que são figuras" são representadas por: $(E \cap \overline{F}) \cup (O \cap F)$.

Pág. 34

Proposta 2

2.1. $A\cup(\bar{A}\cap B)=(A\cup\bar{A})\cap(A\cup B)=U\cap(A\cup B)=A\cup B$

2.2. $A\cap(\bar{A}\cup B)=(A\cap\bar{A})\cup(A\cap B)=\varnothing\cup(A\cap B)=A\cap B$

2.3. $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{(A\cup B)\cup C}=\left(\overline{A\cup B}\right)\cap\bar{C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

2.4. $\overline{A\cap B\cap C}=\overline{(A\cap B)\cap C}=\left(\overline{A\cap B}\right)\cup\bar{C}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

2.5. $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)=(A\cup\bar{A})\cap B=U\cap B=B$

2.6. $(A\cap\bar{B})\cup\left(\overline{A\cup B}\right)=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})=(A\cup\bar{A})\cap\bar{B}=$
$=U\cap\bar{B}=\bar{B}$

2.7. $(A\cup B)\cap\left(\overline{C\cap\bar{A}}\right)=(A\cup B)\cap(\bar{C}\cup A)=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{C})=$
$=A\cup(B\cap\bar{C})=A\cup(B\setminus C)$

2.8. $(A\cap B)\setminus(A\cap C)=(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=(A\cap B)\cap(\bar{A}\cup\bar{C})=$
$=((A\cap B)\cap\bar{A})\cup((A\cap B)\cap\bar{C})=\varnothing\cup((A\cap B)\cap\bar{C})=(A\cap B)\cap\bar{C}=$
$=A\cap(B\cap\bar{C})=A\cap(B\setminus C)$

Proposta 3

3.1. O Tiago pode utilizar 5×2, ou seja, 10 equipamentos diferentes em que os calções não sejam azuis.

3.2. O Tiago pode utilizar 2×3, ou seja, 6 equipamentos diferentes com camisola vermelha ou verde.

3.3. O Tiago pode efetuar no máximo 5×3, ou seja, 15 treinos diferentes sem repetir o equipamento.

Proposta 4

4.1. Número de pontos do prisma em que todas as coordenadas são números inteiros:
$5\times7\times10=350$.

4.2. Número de pontos do prisma em que todas as coordenadas são números inteiros negativos:
$2\times3\times3=18$.

4.3. Número de pontos do prisma em que todas as coordenadas são números inteiros positivos:
$2\times3\times6=36$.

4.4. Número de pontos do prisma em que todas as coordenadas são números inteiros e a cota é negativa:
$5\times7\times3=105$.

Pág. 35

Proposta 5

5.1. Optando pelo Menu completo podem fazer-se $3\times7\times3$, ou seja, 63 escolhas diferentes.

5.2.
a) Se o Sr. Silva pretender uma sopa, um prato de peixe e uma sobremesa para o almoço, pode fazer $3\times3\times3=27$ escolhas diferentes.
b) Se o Sr. Silva pretender apenas um prato de carne e uma sobremesa para o almoço, pode fazer $4\times3=12$ escolhas diferentes.

Proposta 6

6.1. Podem ser formados $5\times7=35$ números distintos.

6.2.
a) Dos números que se podem obter, sabe-se que $2\times7=14$ são maiores que 4000.
b) Dos números que se podem obter, sabe-se que $5\times1=5$ são múltiplos de 5.
c) Dos números que se podem obter, sabe-se que $5\times3=15$ são números pares.
d) Dos números que se podem obter, sabe-se que $4\times1=4$ têm dígitos iguais.

Pág. 36

Proposta 7

7.1. Número de possíveis sequências que é possível obter:
$10\times10\times10\times10\times10\times10=1\,000\,000$.

7.2. Número de sequências que são constituídas apenas por algarismos ímpares:
$5\times5\times5\times5\times5\times5=15\,625$.

7.3. Número de sequências cujo primeiro dígito é maior que 6 e que forma um número divisível por 5:
$3\times10\times10\times10\times10\times2=60000$.

Proposta 8

8.1. Número de rifas vendidas: $10^4-1=9999$

Quantia em dinheiro realizada na venda das rifas:
$9999\times1{,}50\text{ €}=14\,998{,}50\text{ €}$

8.2. Número de rifas em que a numeração começa e acaba em algarismos ímpares: $5\times10\times10\times5=2500$

Proposta 9

9.1. $9\times8\times7=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!}=\frac{9!}{6!}$

9.2. $12\times11\times10\times9\times8=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{7!}=\frac{12!}{7!}$

9.3. $29\times28\times27\times26=\frac{29\times28\times27\times26\times25!}{25!}=\frac{29!}{25!}$

9.4. $83\times82\times81\times80\times79=\frac{83\times82\times81\times80\times79\times78!}{78!}=\frac{83!}{78!}$

Proposta 10

10.1. $\frac{8!}{6!}=\frac{8\times7\times6!}{6!}=8\times7=56$

10.2. $\frac{3!\times12!}{13!-12!}=\frac{6\times12!}{13\times12!-12!}=\frac{6\times12!}{12!\,(13-1)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

10.3. $\frac{18!\times5!}{20!}=\frac{18!\times5\times4\times3\times2\times1}{20\times19\times18!}=\frac{120}{380}=\frac{6}{19}\ \frac{6}{19}$

10.4. $\frac{3\times7!+6!}{8!}=\frac{3\times7\times6!+6!}{8\times7\times6!}=\frac{6!(3\times7+1)}{8\times7\times6!}=\frac{22}{56}=\frac{11}{28}$

10.5. $\frac{5\times10!-2\times9!}{10!}=\frac{5\times10\times9!-2\times9!}{10\times9!}=\frac{9!(5\times10-2)}{10\times9!}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$

10.6. $\frac{9!+7!-2\times8!}{3!\times7!}=\frac{9\times8\times7!+7!-2\times8\times7!}{3\times2\times1\times7!}=$

$=\frac{7!(9\times8+1-2\times8)}{6\times7!}=\frac{57}{6}=\frac{19}{2}$

Pág. 37

Proposta 11

11.1. Número de formas diferentes de colocar as almofadas, lado a lado, no sofá: $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

11.2. Número de sequências diferentes em que a almofada vermelha ocupa a posição central: $4!=4\times3\times2\times1=24$.

11.3. Número de sequências diferentes em que as almofadas amarela e azul ficam nos extremos: $2!\times3!=2\times6=12$.

Proposta 12

12.1. Número de maneiras diferentes de o Ricardo fazer a distribuição dos livros pelos amigos:
${}^7A_5=\frac{7!}{(7-5)!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=7\times6\times5\times4\times3=2520$.

12.2. Número de maneiras diferentes de o Ricardo ficar com um livro policial e um livro de aventura: $2\times5\times5!=10\times120=1200$.

Proposta 13

13.1. Número de maneiras que podem assumir, se a Ana e a Beatriz ficarem nos extremos: $2!\times4!=2\times24=48$

13.2. Número de maneiras de os rapazes e as raparigas se distribuírem alternadamente: $2\times3!\times3!=2\times6\times6=72$

13.3. Número de maneiras de os rapazes ficarem juntos:
$3!\times4\times3!=6\times4\times6=144$

13.4. Número de maneiras de os rapazes ficarem juntos e as raparigas também: $3!\times3!\times2!=6\times6\times2=72$

Proposta 14
Número de maneiras de arrumar os dossiês de modo que o amarelo e o vermelho fiquem juntos: $2!\times5\times4!=2\times5\times24=240$

Pág. 38

Proposta 15

15.1. Número de anagramas da palavra FIGURAS:
$7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$

15.2. Número de sequências de cinco letras da palavra FIGURAS que é possível formar:

${}^7A_5=\frac{7!}{(7-5)!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=7\times6\times5\times4\times3=2520$

15.3. Número de sequências de três cartões que é possível formar contendo apenas vogais: ${}^3A_3=3!=3\times2\times1=6$

Proposta 16
A resposta correta é a **A**. $2\times4!\times4!$

2 : Número de maneiras de as raparigas permutarem de lugar entre si.
4! : Número de maneiras de os rapazes permutarem de lugar entre si.
4! : Número de maneiras de escolher o lado em que ficam os rapazes (ou as raparigas).

Proposta 17
17.1. Número de maneiras de selecionar os três netos que vão acompanhar a D. Matilde ao cinema:
${}^8C_3=\frac{8!}{3!\times(8-3)!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{6\times5!}=56$

17.2. Número de maneiras de a D. Matilde e os três netos se sentarem em quatro lugares consecutivos, ficando a avó num dos extremos: $2\times3!=2\times6=12$

Pág. 39

Proposta 18

Número de triângulos que é possível definir com os vértices do heptágono: ${}^7C_3 = \dfrac{7!}{3!\times(7-3)!} = \dfrac{7\times6\times5\times4!}{6\times4!} = 35$. A opção correta é a (C).

Proposta 19

19.1. Número de maneiras diferentes de preencher as 8 vagas se forem escolhidos funcionários do mesmo sexo:

$${}^{30}C_8 + {}^{22}C_8 = \frac{30!}{8!\times(30-8)!} + \frac{22!}{8!\times(22-8)!} = 6\ 172\ 695$$

19.2. Número de maneiras diferentes de preencher as 8 vagas se forem escolhidos o mesmo número de homens e de mulheres:

$${}^{30}C_4 \times {}^{22}C_4 = \frac{30!}{4!\times(30-4)!} + \frac{22!}{4!\times(22-4)!} = 200\ 467\ 575$$

19.3. Número de maneiras diferentes de preencher as 8 vagas se forem escolhidas pelo menos três mulheres:

$${}^{30}C_3 \times {}^{22}C_5 + {}^{30}C_4 \times {}^{22}C_4 + {}^{30}C_5 \times {}^{22}C_3 + {}^{30}C_6 \times {}^{22}C_2 + {}^{30}C_7 \times {}^{22}C_1 + {}^{30}C_8 =$$
$$= 714\ 645\ 405$$

19.4. Número de maneiras diferentes de preencher as 8 vagas se forem escolhidos no máximo dois homens:

$${}^{30}C_6 \times {}^{22}C_2 + {}^{30}C_7 \times {}^{22}C_1 + {}^{30}C_8 = 187\ 802\ 550$$

Proposta 20

Número de maneiras de ser selecionada a equipa de trabalho:
${}^{20}A_2 \times {}^{18}C_3 = 310\ 080$

Proposta 21

21.1. Número de retas distintas que se podem definir com os doze vértices do prisma: ${}^{12}C_2 = \dfrac{12!}{2!\times(12-2)!} = \dfrac{12\times11\times10!}{2\times10!} = 66$.

21.2. Número de retas distintas que se podem definir a partir de dois vértices do prisma que não contenham arestas:

$${}^{12}C_2 - 6\times3 = 66 - 18 = 48$$

Proposta 22

22.1. Número de maneiras diferentes de distribuir os três discos iguais: ${}^9C_3 = \dfrac{9!}{3!\times(9-3)!} = \dfrac{9\times8\times7\times6!}{6\times6!} = 84$.

22.2. Número de maneiras diferentes de distribuir os três discos de cores diferentes: ${}^9A_3 = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9\times8\times7\times6!}{6!} = 504$.

Pág. 40

Proposta 23

23.1. Número de variedades de gelados de dois sabores que se podem pedir: ${}^8C_2 = \dfrac{8!}{2!\times(8-2)!} = \dfrac{8\times7\times6!}{2\times6!} = 28$

23.2. Número total de variedades de gelados que podem ser pedidos: ${}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 = 8 + 28 + 56 = 92$

Proposta 24

24.1.

a) ${}^{40}C_5 \times {}^{12}C_2 = 43\ 428\ 528$

b) ${}^{50}C_5 \times {}^5C_2 = 21\ 187\ 600$

24.2. ${}^{50}C_5 \times {}^2C_2 = 2\ 118\ 760$

Proposta 25

Os segmentos de reta que têm como extremos dois dos pontos dados só intersetam o eixo das abcissas se as ordenadas tiverem sinais contrários. Temos então de escolher dois pontos, tendo um ordenada positiva e o outro ordenada negativa.
O número de maneiras de o fazer é 6 (3×2).
A opção correta é a (A).

Proposta 26

Resposta do André

${}^9C_2$: número de maneiras de escolher dois dos nove vértices do poliedro.

${}^4C_2$: número de maneiras de escolher dois dos quatro vértices que pertencem à interseção do cubo com a pirâmide.

${}^9C_2 - {}^4C_2$: número de maneiras de escolher dois vértices do poliedro de modo que os dois não pertençam simultaneamente à interseção do cubo com a pirâmide.

Resposta da Sónia

${}^5C_2$: número de maneiras de escolher dois dos cinco vértices do poliedro que não pertencem à interseção do cubo com a pirâmide.

${}^4C_1 \times {}^5C_1$: número de maneiras de escolher dois vértices do poliedro de modo que um deles pertença à interseção do cubo com a pirâmide e o outro não pertença.

${}^5C_2 + {}^4C_1 \times {}^5C_1$: número de maneiras de escolher dois vértices do poliedro de modo que os dois não pertençam simultaneamente à interseção do cubo com a pirâmide.

Pág. 41

Proposta 27

27.1. Número de sequências que têm exatamente um 2:
$^5C_1 \times 9^4 = 32805$.

27.2. Número de sequências que têm exatamente dois 5:
$^5C_2 \times 9^3 = 7290$.

27.3. Número de sequências que têm pelo menos quatro 8:
$^5C_4 \times 9 + 1 = 46$.

Proposta 28

28.1. Utilizando três e só três dessas moedas, é possível obter $^8C_3 = 56$ diferentes valores.

28.2. Há cinco moedas de valor superior a 5 cêntimos.
Utilizando pelo menos uma dessas cinco moedas, o número total de valores que é possível obter é:
$^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = \ = 31$.

Proposta 29

Designemos por n o número de funcionários do setor administrativo da empresa. Como há 66 formas diferentes de atribuir duas viagens a dois funcionários do setor administrativo da empresa, sabe-se que $^nC_2 = 66$.

$$^nC_2 = 66 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\times(n-2)!} = 66 \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2\times(n-2)!} = 66 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{2} = 66 \Leftrightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 12 \vee n = -11$$

Como $n \geq 2$, conclui-se que $n = 12$.
A empresa tem 12 funcionários no setor administrativo.

Proposta 30

30.1. Designemos por n o número de alunos da turma.
Como há 276 maneiras distintas de selecionar um grupo de dois alunos, tem-se que $^nC_2 = 276$.

$$^nC_2 = 276 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\times(n-2)!} = 276 \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2\times(n-2)!} = 276$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{2} = 276 \Leftrightarrow n^2 - n - 552 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{1+2208}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 24 \vee n = -23$$

Como $n \geq 2$, conclui-se que $n = 24$. A turma tem 24 alunos.
Número de maneiras diferentes de selecionar um grupo de seis alunos dessa turma: $^{24}C_6 = 134\,596$.

30.2.

a) Número de maneiras de os seis elementos se disporem, de modo que o João e o Tiago fiquem juntos: $2!\times 5\times 4! = 2\times 5\times 24 =$ $= 240$.
Número de maneiras de os seis elementos se disporem, de modo que o João e o Tiago não fiquem juntos: $5! - 240 = 480$.

b) Número de maneiras de ser feita a escolha de modo que um e só um dos dois amigos seja selecionado: $^2C_1 \times {}^4C_2 = 2\times 6 = 12$.

Proposta 31

31.1. $9! = 362\,880$

31.2. $\frac{7!}{3!} = 840$

31.3. $\frac{8!}{2!\times 3!} = 3360$

Pág. 42

Proposta 32

32.1.

a) $2!\times 6! = 2\times 720 = 1440$

b) $3!\times 6\times 5! = 6\times 6\times 120 = 4320$

c) $2\times 3!\times 5! = 2\times 3\times 120 = 1440$

d) $3!\times 2!\times 3!\times 3! = 6\times 2\times 6\times 6 = 432$

32.2. Suponhamos que juntamos x livros de Matemática aos que tínhamos inicialmente. O número de maneiras diferentes de agrupar os livros por disciplina passa a ser dado por $3!\times 2!\times 3!\times x!\times 4!$ (3! representa o número de maneiras de permutar os livros de Astronomia entre si, 2! representa o número de maneiras de permutar os livros de Vida Animal entre si, 3! representa o número de maneiras de permutar os livros de História entre si, x! representa o número de maneiras de permutar os livros de Matemática entre si e 4! representa o número de maneiras de permutar os quatro blocos, formados pelos livros agrupados por disciplina, entre si).
Recorrendo à calculadora, tem-se:

$$3!\times 2!\times 3!\times x!\times 4! = 41472 \Leftrightarrow x! = \frac{41472}{3!\times 2!\times 3!\times 4!} \Leftrightarrow x = 4 .$$

Donde se conclui que se devem juntar 4 livros de Matemática aos 8 livros iniciais.

Proposta 33

33.1. Número de maneiras diferentes de selecionar as questões para o teste: $^4C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_3 \times {}^6C_3 = 1440$.

33.2. Das 17 questões preparadas pelo professor, 7 não foram utilizadas (1 de Probabilidades, 2 de Trigonometria, 1 de Geometria e 3 de Funções).
Número de escolhas que incluem questões dos quatro temas:
$^1C_1 \times {}^2C_1 \times {}^1C_1 \times {}^3C_2 + {}^1C_1 \times {}^2C_2 \times {}^1C_1 \times {}^3C_1 = 6 + 3 = 9$.

Proposta 34

34.1. Número de maneiras distintas de eleger o delegado e o subdelegado: $^{24}A_2 = \dfrac{24!}{(24-2)!} = \dfrac{24 \times 23 \times 22!}{22!} = 552$

34.2.

a) Se a Joana não fizer parte da equipa, então o número de maneiras de escolher a equipa é $^{14}C_6 \times {}^{9}C_7 = 108\,108$.

b) Se a Joana fizer parte da equipa, então o número de maneiras de escolher a equipa é $^{14}C_5 \times {}^{9}C_7 = 72072$.

c) Se a Joana e o Rui não puderem fazer ambos parte da mesma equipa, então há três situações a considerar:

1.ª – Nem a Joana nem o Rui fazem parte da equipa. Neste caso, o número de equipas é dado por:
$^{14}C_6 \times {}^{8}C_7 = \ = 24024$.

2.ª – A Joana faz parte da equipa e o Rui não faz parte da equipa. Neste caso, o número de equipas é dado por:
$^{14}C_5 \times {}^{8}C_7 = 16016$.

3.ª – A Joana não faz parte da equipa e o Rui faz parte da equipa. Neste caso, o número de equipas é dado por:
$^{14}C_6 \times {}^{8}C_6 = 84\,084$.

O número total de equipas é:
24 024 + 16 016 + 84 084 = 124 124

Pág. 43

Proposta 35

Sabe-se que, com os n pontos marcados sobre a circunferência, é possível definir 136 retas e como dois pontos definem uma reta, tem-se $^{n}C_2 = 136$.

$$^{n}C_2 = 136 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\times(n-2)!} = 136 \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2\times(n-2)!} = 136$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{2} = 136 \Leftrightarrow n^2 - n - 272 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+1088}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = -16$$

Como $n \geq 2$, conclui-se que $n = 17$. Com os 17 pontos é possível definir $^{17}C_3 = 680$ triângulos distintos.

Proposta 36

36.1. $7 \times 9^3 = 5103$

36.2. $^{3}C_2 \times 8 \times 5 = 120$

36.3. O produto é par quando pelo menos um dos algarismos é par e é ímpar quando todos os algarismos são ímpares. Então, é possível formar $9^4 - 5^4 = 5936$ números de quatro algarismos cujo produto dos algarismos seja um número par.

Proposta 37

Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos.

$2^n = 1024 \Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$

Número de subconjuntos com 7 elementos: $^{10}C_7 = 120$

Proposta 38

<u>Raciocínio A</u>

$^{6}C_5 \times {}^{6}C_5$: número de maneiras diferentes de escolher os cinco lugares de cada fila que vão ser ocupados.

$^{4}C_2$: número de maneiras diferentes de escolher dois rapazes para uma das filas, de entre os quatro rapazes que fazem parte do grupo de amigos.

$^{5}A_2 \times {}^{5}A_2$: número de maneiras diferentes de distribuir os dois rapazes (de cada fila) pelos cinco lugares que vão ser ocupados em cada uma das filas.

$6!$: número de maneiras diferentes de as seis raparigas ocuparem os seis lugares que há disponíveis, depois de os rapazes estarem sentados.

<u>Raciocínio B</u>

$^{6}C_5 \times {}^{6}C_5$: número de maneiras diferentes de escolher os cinco lugares de cada fila que vão ser ocupados.

$^{4}C_2$: número de maneiras diferentes de escolher dois rapazes para uma das filas, de entre os quatro rapazes que fazem parte do grupo de amigos.

$^{6}C_3$: número de maneiras diferentes de escolher três raparigas para uma das filas, de entre as seis raparigas que fazem parte do grupo de amigos.

$5! \times 5!$: número de maneiras diferentes de os cinco amigos que vão ocupar a fila da frente e dos cinco amigos que vão ocupar a fila de trás ocuparem os lugares selecionados em cada uma das filas.

Proposta 39

Há três formas de formar o conjunto dos prémios: 3 livros e 4 CDs ou 4 livros e 3 CDs ou 5 livros e 2 CDs.

Número de maneiras distintas de formar o conjunto de prémios:
$^{8}C_3 \times {}^{6}C_4 + {}^{8}C_4 \times {}^{6}C_3 + {}^{8}C_5 \times {}^{6}C_2 = 3080$

Proposta 40

40.1. Os oito jovens podem distribuir-se pelos dois carros das seguintes formas: 5 no automóvel A e 3 no B ou 4 em cada um dos automóveis ou 3 no automóvel A e 5 no B. Assim sendo, há 182 $\left({}^{8}C_5 \times {}^{3}C_3 + {}^{8}C_4 \times {}^{4}C_4 + {}^{8}C_3 \times {}^{5}C_5\right)$ maneiras de o fazerem.

40.2. Designemos cada uma das raparigas por F.
Como se pretende que não fiquem dois rapazes juntos, é necessário escolher 3 lugares para os rapazes entre os 6 assinalados no esquema.

$$\underline{F}\ \underline{F}\ \underline{F}\ \underline{F}\ \underline{F}$$
$$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$$

(as raparigas podem permutar entre si)

Assim sendo, o número de maneiras de dispor os 8 amigos de modo que não fiquem dois rapazes juntos é $^{6}A_3 \times 5! = 14400$.

Pág. 44

Tarefa 12

1.

$a={}^0C_0=1$					
$b={}^1C_0=1$	$c={}^1C_1=1$				
$d={}^2C_0=1$	$e={}^2C_1=2$	$f={}^2C_2=1$			
$g={}^3C_0=1$	$h={}^3C_1=3$	$i={}^3C_2=3$	$j={}^3C_3=1$		
$k={}^4C_0=1$	$l={}^4C_1=4$	$m={}^4C_2=6$	$n={}^4C_3=4$	$o={}^4C_4=1$	
$p={}^5C_0=1$	$q={}^5C_1=5$	$r={}^5C_2=10$	$s={}^5C_3=10$	$t={}^5C_4=5$	$u={}^5C_5=1$

2.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Pág. 45

52.1. ${}^nC_{n-1}+{}^nC_n=29 \Leftrightarrow n+1=29 \Leftrightarrow n=28$

Logo, a linha tem 29 elementos.

52.2. O terceiro elemento dessa linha é: ${}^{28}C_2=378$.

53.1. ${}^{21}C_5={}^kC_{16} \Leftrightarrow k=5+16 \Leftrightarrow k=21$

53.2. ${}^{42}C_k={}^{42}C_{38} \Leftrightarrow k=38 \vee k=42-38 \Leftrightarrow k=38 \vee k=4$

54.1. ${}^nC_{n-1}=19 \Leftrightarrow n=19$

O terceiro elemento dessa linha é: ${}^{19}C_2=171$.

54.2. O quarto elemento da linha anterior é: ${}^{18}C_3=816$.

Pág. 46

55.1. A irmã da Catarina pode receber ${}^8C_3=56$ conjuntos diferentes de três livros.

55.2. A Catarina pode ficar com ${}^8C_5=56$ conjuntos diferentes de cinco livros.

56. $a+b=n \Leftrightarrow b=n-a$

${}^nC_1+{}^nC_b=5020 \Leftrightarrow {}^nC_1+{}^nC_b=5020 \Leftrightarrow n+{}^nC_{n-a}=5020$

$\Leftrightarrow n+{}^nC_a=5020 \Leftrightarrow n+5005=5020 \Leftrightarrow n=15$

A opção correta é a (B).

57.1. Número de percursos que o Francisco pode seguir para se deslocar da escola ao hospital: ${}^5C_2=10$.

57.2. Número de percursos que o Francisco pode seguir para se deslocar de sua casa aos correios, passando pela escola: ${}^3C_1\times{}^3C_1=9$.

Pág. 47

58. Atendendo à informação do enunciado, tem-se $a+b=c$. Sabe-se ainda que $a+b+c=252$, logo tem-se:
$c+c=252 \Leftrightarrow 2c=252 \Leftrightarrow c=126$.

59. A soma dos dois elementos centrais da linha considerada é igual ao maior elemento da linha seguinte. Então, o maior elemento da linha seguinte é: $6435+6435=12870$

60.1. Número de grupos existentes: ${}^{12}C_5$

60.2. Número de grupos de que o Rui faz parte: ${}^{11}C_4$

60.3. Número de grupos de que o Rui não faz parte: ${}^{11}C_5$

61.1. ${}^{17}C_5+{}^{17}C_6={}^{18}C_k \Leftrightarrow {}^{18}C_6={}^{18}C_k \Leftrightarrow k=6 \vee k=18-6$
$\Leftrightarrow k=6 \vee k=12$

61.2. ${}^{12}C_3+2\,{}^{12}C_4+{}^{12}C_5={}^{14}C_k \Leftrightarrow {}^{12}C_3+{}^{12}C_4+{}^{12}C_4+{}^{12}C_5={}^{14}C_k$
$\Leftrightarrow {}^{13}C_4+{}^{13}C_5={}^{14}C_k \Leftrightarrow {}^{14}C_5={}^{14}C_k \Leftrightarrow k=5 \vee k=14-5$
$\Leftrightarrow k=5 \vee k=9$

Pág. 48

62.1. ${}^nC_{n-1}=13 \Leftrightarrow n=13$

Assim sendo, essa linha tem 14 elementos.

62.2. Soma dos elementos dessa linha: $2^{13}=8192$.

63.1. $2^n=512 \Leftrightarrow 2^n=2^9 \Leftrightarrow n=9$

Assim sendo, essa linha tem 10 elementos.

63.2. O terceiro elemento dessa linha é: ${}^9C_2=36$.

64. ${}^7C_1+{}^7C_2+{}^7C_3+{}^7C_4+{}^7C_5+{}^7C_6+{}^7C_7=2^7-1=127$

65. Sabe-se que a soma dos $n+1$ elementos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual a 2^n , com $n\in\mathbb{N}_0$. Dos números representados, apenas 256 e 2048 podem ser escritos na forma de potência de base 2 $\left(256=2^8 \text{ e } 2048=2^{11}\right)$. Então, nas respetivas linhas tem-se $n=8$ e $n=11$. Donde se conclui que cada uma dessas linhas tem, respetivamente, 9 e 12 elementos.

Tarefa 13

1. Atendendo à simetria do Triângulo de Pascal, tem-se $a=495$.

$792+b=1716 \Leftrightarrow b=1716-792 \Leftrightarrow b=924$

$a+792=c \Leftrightarrow 495+792=c \Leftrightarrow 1287=c$

$b+792=d \Leftrightarrow 924+792=d \Leftrightarrow 1716=d$

Conclusão: $a=495,\ b=924,\ c=1287$ e $d=1716$.

2. $n+1=8 \Leftrightarrow n=7$

Os elementos da linha do Triângulo de Pascal que tem 8 elementos são: ${}^7C_0, {}^7C_1, {}^7C_2, {}^7C_3, {}^7C_4, {}^7C_5, {}^7C_6, {}^7C_7$, ou seja, 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Sabe-se que uma possível resposta à questão apresentada é ${}^9C_8 \times \dfrac{8!}{(2!)^4}$.

${}^9C_8$: representa o número de maneiras de escolher oito dos nove compartimentos da caixa onde vão ser colocadas as bolas.

$\dfrac{8!}{(2!)^4}$, ou seja, $\dfrac{8!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!}$ representa o número de maneiras de dispor as oito bolas nos oito lugares selecionados (como há quatro pares de bolas com o mesmo número, trata-se de uma permutação com repetição).

Pág. 49

66. $k+5=7 \Leftrightarrow k=2$

67.1. $(x+3)^4 = 1x^4+4x^3\times 3+6x^2\times 3^2+4x^1\times 3^3+1\times 3^4 =$

$= x^4+12x^3+54x^2+108x+81$

67.2. $(2x+y)^5 =$

$=1(2x)^5+5(2x)^4\times y+10(2x)^3\times y^2 +$

$+10(2x)^2\times y^3+5(2x)^1\times y^4+1y^5 =$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

67.3. $\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^6 = 1\left(\dfrac{x}{2}\right)^6+6\left(\dfrac{x}{2}\right)^5\times 1+15\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\times 1^2 +$

$+20\left(\dfrac{x}{2}\right)^3\times 1^3+15\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\times 1^4+6\left(\dfrac{x}{2}\right)^1\times 1^5+1\times 1^6 =$

$=\dfrac{x^6}{64}+\dfrac{3x^5}{16}+\dfrac{15x^4}{16}+\dfrac{5x^3}{2}+\dfrac{15x^2}{4}+3x+1$

Pág. 50

68.1. Soma dos coeficientes binomiais:

${}^5C_0+{}^5C_1+{}^5C_2+{}^5C_3+{}^5C_4+{}^5C_5=2^5=32$

68.2. $\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} {}^5C_k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{5-k}\times(-1)^k =$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{5} {}^5C_k\,\dfrac{x^{5-k}}{2^{5-k}}\times(-1)^k = \sum_{k=0}^{5} {}^5C_k\,\dfrac{(-1)^k}{2^{5-k}}\times x^{5-k}$

O expoente de x é 3 se $5-k=3 \Leftrightarrow k=2$.

O coeficiente do termo do 3.º grau é: ${}^5C_2\,\dfrac{(-1)^2}{2^3}=10\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{4}$

69.1. $A(x)=\left(x^2-2x\right)^6=\displaystyle\sum_{k=0}^{6} {}^6C_k\left(x^2\right)^{6-k}\times(-2x)^k =$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{6} {}^6C_k\,x^{12-2k}\times(-2)^k\times x^k = \sum_{k=0}^{6} {}^6C_k\times(-2)^k\times x^{12-k}$

Logo, $A(x)=x^{12}-12x^{11}+60x^{10}-160x^9+240x^8-192x^7+64x^6$.

69.2. $B(x)=\left(\dfrac{x}{2}+x^2\right)^4=\displaystyle\sum_{k=0}^{4} {}^4C_k\left(\dfrac{x}{2}\right)^{4-k}\times\left(x^2\right)^k =$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{4} {}^4C_k\,\dfrac{x^{4-k}}{2^{4-k}}\times x^{2k} = \sum_{k=0}^{4} \dfrac{{}^4C_k}{2^{4-k}}\times x^{4+k}$.

Logo, $B(x)=\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{x^5}{2}+\dfrac{3x^6}{2}+2x^7+x^8$.

70.1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k=1024 \Leftrightarrow 2^n=1024 \Leftrightarrow 2^n=2^{10} \Leftrightarrow n=10$

Então, ${}^{n+1}C_8={}^{11}C_8=165$.

70.2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+3} {}^{n+3}C_k-\sum_{k=0}^{n-1} {}^{n-1}C_k=\sum_{k=0}^{13} {}^{13}C_k-\sum_{k=0}^{9} {}^9C_k=2^{13}-2^9=7680$.

71. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k(-1)^k=\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k\times 1^{n-k}\times(-1)^k=(1+(-1))^n=0^n=0$.

Pág. 51

72. $\left(1-\sqrt{3}\right)^4+16\sqrt{3}=28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+4\times\left(-\sqrt{3}\right)+6\times\left(-\sqrt{3}\right)^2+4\times\left(-\sqrt{3}\right)^3+\left(-\sqrt{3}\right)^4+16\sqrt{3}=28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-4\sqrt{3}+18-12\sqrt{3}+9+16\sqrt{3}=28 \Leftrightarrow 28=28$

(Proposição verdadeira)

Conclusão: $1-\sqrt{3}$ é solução da equação $x^4+16\sqrt{3}=28$.

73.1. $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}=\displaystyle\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k\left(x^2\right)^{12-k}\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^k =$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k\,x^{24-2k}\times\left(x^{-1}\right)^k=\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k\,x^{24-2k}\times x^{-k}=\sum_{k=0}^{12} {}^{12}C_k\,x^{24-3k}$

O expoente de x é 2 se $24-3k=2 \Leftrightarrow k=\dfrac{22}{3}$.

Como $k\notin\mathbb{N}_0$, conclui-se que não existe nenhum termo do 2.º grau no desenvolvimento de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

73.2. O termo independente de x corresponde ao termo em que o expoente da potência de base x é 0. Esse expoente é zero se $24-3k=0 \Leftrightarrow k=8$. O termo independente de x é: ${}^{12}C_8\, x^{24-3\times 8}=495$.

74. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10-k}\times\left(x^2\right)^k=$

$=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10-k}\times x^{2k}=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\, x^{-5+\frac{k}{2}}\times x^{2k}=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\, x^{-5+\frac{5}{2}k}$

O termo independente de x corresponde ao termo em que o expoente da potência de base x é 0. Esse expoente é zero se $-5+\frac{5}{2}k=0 \Leftrightarrow -10+5k=0 \Leftrightarrow k=2$. O termo independente de x é: ${}^{10}C_2\, x^0=45$

75. $T_4={}^nC_3\left(\sqrt{x}\right)^{n-3}\times\left(\frac{1}{x}\right)^3={}^nC_3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-3}\times\left(x^{-1}\right)^3={}^nC_3\, x^{\frac{n-3}{2}}\times x^{-3}$

$={}^nC_3\, x^{\frac{n-9}{2}}$. Sabe-se que $T_4=120\sqrt{x}=120x^{\frac{1}{2}}$. Então, tem-se:

$$\begin{cases}\frac{n-9}{2}=\frac{1}{2}\\ {}^nC_3=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=10\\ {}^{10}C_3=120\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=10\\ 120=120\end{cases}$$

Donde se conclui que $n=10$.

76.1. $\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\, 3^{10-k}(-2)^k=(3+(-2))^{10}=1^{10}=1$

76.2. $\sum_{k=0}^{12}{}^{12}C_k\, 2^k=\sum_{k=0}^{12}{}^{12}C_k\times 1^{12-k}\times 2^k=(1+2)^{12}=3^{12}=531441$

Tarefa 14

1.1. $(2x-1)^5=1(2x)^5+5(2x)^4\times(-1)+10(2x)^3\times(-1)^2+$

$+10(2x)^2\times(-1)^3+5(2x)^1\times(-1)^4+1(-1)^5=$

$=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$

1.2. $\left(\frac{1}{x}-1\right)^6=1\left(\frac{1}{x}\right)^6+6\left(\frac{1}{x}\right)^5\times(-1)+15\left(\frac{1}{x}\right)^4\times(-1)^2+$

$+20\left(\frac{1}{x}\right)^3\times(-1)^3+15\left(\frac{1}{x}\right)^2\times(-1)^4+6\left(\frac{1}{x}\right)^1\times(-1)^5+1\times(-1)^6=$

$=x^{-6}-6x^{-5}+15x^{-4}-20x^{-3}+15x^{-2}-6x^{-1}+1$

1.3. $\left(\frac{x}{2}-x^2\right)^7=1\left(\frac{x}{2}\right)^7+7\left(\frac{x}{2}\right)^6\times\left(-x^2\right)+21\left(\frac{x}{2}\right)^5\times\left(-x^2\right)^2+$

$+35\left(\frac{x}{2}\right)^4\times\left(-x^2\right)^3+35\left(\frac{x}{2}\right)^3\times\left(-x^2\right)^4+21\left(\frac{x}{2}\right)^2\times\left(-x^2\right)^5+$

$+7\left(\frac{x}{2}\right)^1\times\left(-x^2\right)^6+1\times\left(-x^2\right)^7=$

$=\frac{x^7}{128}-\frac{7x^8}{64}+\frac{21x^9}{32}-\frac{35x^{10}}{16}+\frac{35x^{11}}{8}-\frac{21}{4}x^{12}+\frac{7x^{13}}{2}-x^{14}$

2.1. ${}^8C_k\left(\frac{1}{x}\right)^{8-k}\times\left(-x^3\right)^k={}^8C_k\left(x^{-1}\right)^{8-k}\times(-1)^k\times\left(x^3\right)^k=$

$={}^8C_k\, x^{-8+k}\times(-1)^k\times x^{3k}=(-1)^k\,{}^8C_k\, x^{4k-8}$

2.2. a) O termo em x^4 obtém-se quando $4k-8=4 \Leftrightarrow k=3$.

O termo em x^4 é: $(-1)^3\,{}^8C_3\, x^4=-56x^4$.

b) O termo em x^8 obtém-se quando $4k-8=8 \Leftrightarrow k=4$.

O termo em x^8 é: $(-1)^4\,{}^8C_4\, x^8=70x^8$.

c) O termo independente de x, ou seja, o termo em x^0, obtém-se quando $4k-8=0 \Leftrightarrow k=2$.

O termo independente de x é: $(-1)^2\,{}^8C_2\, x^0=28$.

3.1. $g(x)=f(x+1)=(x+1)^5-(x+1)^4=$

$=\left(1x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1\right)-\left(1x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)$

$=1x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1-1x^4-4x^3-6x^2-4x-1$

$=x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x$

3.2. $h(x)=f(x-2)=(x-2)^5-(x-2)^4=\left(1x^5+5x^4\times(-2)+\right.$

$+10x^3\times(-2)^2+10x^2\times(-2)^3+5x\times(-2)^4+1\times(-2)^5\left.\right)-$

$-\left(1x^4+4x^3\times(-2)+6x^2\times(-2)^2+4x\times(-2)^3+1\times(-2)^4\right)=$

$=\left(1x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32\right)-$

$-\left(1x^4-8x^3+24x^2-32x+16\right)=1x^5-10x^4+40x^3-80x^2+$

$+80x-32-1x^4+8x^3-24x^2+32x-16=$

$=x^5-11x^4+48x^3-104x^2+112x-48$

4. $\left(\frac{2}{x}-x\right)^8=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\left(\frac{2}{x}\right)^{8-k}\times(-x)^k=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\, 2^{8-k}x^{-8+k}\times(-1)^k x^k=$

$=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\, 2^{8-k}\times(-1)^k x^{-8+2k}$. O expoente de x é um número inteiro negativo quando $k\in\{0,1,2,3\}$. A opção correta é a (A).

5. $\left(x\sqrt{x}+1\right)^7=\sum_{k=0}^{7}{}^7C_k\left(x\sqrt{x}\right)^{7-k}\times 1^k=\sum_{k=0}^{7}{}^7C_k\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k}\times 1=$

$=\sum_{k=0}^{7}{}^7C_k\, x^{\frac{21-3k}{2}}$. O expoente de x é um número inteiro quando $k\in\{1,3,5,7\}$. A opção correta é a (C).

6. $\left(x+\sqrt{y}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}{}^9C_k\, x^{9-k}\times\left(\sqrt{y}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}{}^9C_k\, x^{9-k}y^{\frac{k}{2}}$

Os expoentes do x e do y são iguais quando

$9-k=\frac{k}{2}\Leftrightarrow 18-2k=k\Leftrightarrow k=6$.

O coeficiente do termo em que os expoentes do x e do y são iguais é ${}^9C_6=84$. A opção correta é a (B).

Pág. 52

Proposta 41

41.1. ${}^{9}C_5 + {}^{9}C_6 = {}^{10}C_6 = g$.

A opção correta é a (B).

41.2. Atendendo à simetria do Triângulo de Pascal sabe-se que $a = l$, $b = j$ e $c = i$. Então, $a + b + c = i + j + l$. A opção correta é a (C).

Proposta 42

Sabe-se que ${}^{n}C_3 = 680$ e ${}^{n}C_{n-2} = 136$. Como ${}^{n}C_2 = {}^{n}C_{n-2}$, conclui-se que ${}^{n}C_2 = 136$. Portanto, essa linha tem apenas 6 elementos inferiores a 500 (os três primeiros e os três últimos).

A opção correta é a (A).

Proposta 43

Sabe-se que ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + {}^{n}C_3 + {}^{n}C_4 + {}^{n}C_5 = 1024$ e

${}^{n}C_{n-3} + {}^{n}C_{n-2} + {}^{n}C_{n-1} + {}^{n}C_n = 232$. Como a soma dos quatro últimos elementos é igual à soma dos quatro primeiros elementos, conclui-se que: ${}^{n}C_4 + {}^{n}C_5 = 1024 - 232 \Leftrightarrow {}^{n+1}C_5 = 792$.

A opção correta é a (B).

Pág. 53

Proposta 44

Como o oitavo elemento de uma linha do Triângulo de Pascal é maior que todos os outros, então a linha tem 15 elementos. $n+1=15 \Leftrightarrow n=14$. Logo, a soma de todos os elementos dessa linha é 2^{14} , ou seja, 16 384. A opção correta é a (D).

Proposta 45

${}^{n}C_6 = {}^{n}C_7 \Leftrightarrow n=6+7 \Leftrightarrow n=13$. A linha seguinte tem 15 elementos pois $n+1=14$. A opção correta é a (D).

Proposta 46

46.1. ${}^{n}C_2 = 3\,{}^{n}C_{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 3\,{}^{n}C_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2!(n-2)!} = 3n \Leftrightarrow n^2 - n = 6n \Leftrightarrow n(n-7)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=0 \vee n=7$.

Como $n \geq 2$, conclui-se que $n=7$. Então, o terceiro elemento dessa linha é ${}^{7}C_2 = 21$.

46.2. A linha tem oito elementos.

46.3. A soma de todos os elementos dessa linha é 2^7 , ou seja, 128.

Proposta 47

47.1. Sabe-se que $a = {}^{n}C_2$, $b = {}^{n}C_3$ e $b = 2a$.

Donde se conclui que ${}^{n}C_3 = 2\,{}^{n}C_2 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 2\times\dfrac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{6(n-3)!} = \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6} = n\times(n-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\times(n-1)\times(n-2) - 6n\times(n-1) = 0 \Leftrightarrow n\times(n-1)\times(n-2-6) = 0$

$\Leftrightarrow n=0 \vee n=1 \vee n=8$. Como $n \geq 3$, conclui-se que $n=8$.

a) Então, $a = {}^{8}C_2 = 28$ e $b = {}^{8}C_3 = 56$.

b) Como a linha tem 9 elementos, o maior elemento dessa linha é o 5.º elemento, ou seja, ${}^{8}C_4 = 70$.

c) A soma de todos os elementos dessa linha é 2^8 , ou seja, 256.

47.2. Como $a+b=28+56=84$ e este é o segundo elemento de uma linha do Triângulo de Pascal, conclui-se que a linha é 84. Logo, tem 85 elementos.

Pág. 54

Proposta 48

48.1.

a) Relativamente à primeira linha representada no esquema, sabe-se que *a* e *b* correspondem ao 8.º e 9.º elementos e são iguais. Donde se conclui que a linha tem 16 elementos.

b) Tendo a linha 16 elementos, então $n=15$.

Logo, $a = b = {}^{15}C_8 = 6435$.

48.2.

a) $c = a + b = 2\times 6435 = 12870$

b) A soma de todos os elementos da segunda linha representada no esquema é: $2^{16} - 12870 = 52666$.

Proposta 49

49.1. Sabe-se que:

${}^{n}C_3 = 22\,100$ e ${}^{n}C_{n-3} + {}^{n}C_{n-2} + {}^{n}C_{n-1} + {}^{n}C_n = 23479$.

Como a soma dos quatro últimos elementos é igual à soma dos quatro primeiros elementos, conclui-se que:

${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 23479 - 22100 \Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 1379$

$\Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 1379 \Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 2756$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 2756 = 0 \Leftrightarrow n = 52 \vee n = -53$. Como $n \geq 3$, conclui-se que $n=52$. Então, a linha tem 53 elementos.

49.2. O antepenúltimo elemento da linha anterior é ${}^{51}C_{49} = 1275$.

49.3. O terceiro elemento da linha seguinte é ${}^{53}C_2 = 1378$.

Proposta 50

50.1. $S=256 \Leftrightarrow 2^n=2^8 \Leftrightarrow n=8$. No saco há 9 bolas numeradas com os números, 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8 e 1. Assim sendo, há 3 possibilidades de retirar uma bola do saco e ter número maior que 50.

50.2. Retirando simultaneamente duas bolas do saco, o número de possibilidades de não terem o mesmo número é ${}^9C_2-4=36-4=32$.

Pág. 55

Proposta 51

51.1. ${}^{15}C_{n+3}={}^{15}C_9 \Leftrightarrow (n+3=9 \vee n+3=15-9) \wedge n+3\le 15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n=6 \vee n=3$.

51.2. ${}^{18}C_5={}^{19}C_n-{}^{18}C_6 \Leftrightarrow {}^{18}C_5+{}^{18}C_6={}^{19}C_n \Leftrightarrow {}^{19}C_6={}^{19}C_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (n=6 \vee n=19-6) \wedge n\le 19 \Leftrightarrow n=6 \vee n=13$

51.3. ${}^{13}C_{2n}-{}^{12}C_4={}^{12}C_5 \Leftrightarrow {}^{13}C_{2n}={}^{12}C_4+{}^{12}C_5 \Leftrightarrow {}^{13}C_{2n}={}^{13}C_5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2n=5 \vee 2n=13-5) \wedge 2n\le 13 \Leftrightarrow n=\frac{5}{2} \vee n=4$. Como $n\in\mathbb{N}$, conclui-se que $n=4$.

51.4. ${}^{16}C_3+{}^{16}C_5={}^{18}C_n-2\,{}^{16}C_4 \Leftrightarrow {}^{16}C_3+{}^{16}C_4+{}^{16}C_4+{}^{16}C_5={}^{18}C_n$
$\Leftrightarrow {}^{17}C_4+{}^{17}C_5={}^{18}C_n \Leftrightarrow {}^{18}C_5={}^{18}C_n$
$\Leftrightarrow (n=5 \vee n=18-5) \wedge n\le 18 \Leftrightarrow n=5 \vee n=13$

Proposta 52

52.1. ${}^nC_3+2\,{}^{n+1}C_3=\frac{n!}{3!(n-3)!}+2\times\frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!}=$

$$=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{6(n-3)!}+2\times\frac{(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)!}{6(n-2)!}$$

$$=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6}+2\times\frac{(n+1)\times n\times(n-1)}{6}$$

$$=\frac{n\times(n-1)}{6}\times(n-2+2n+2)=\frac{n\times(n-1)}{6}\times 3n=\frac{n^2\times(n-1)}{2}$$

52.2. ${}^nC_3+2\,{}^{n+1}C_3=7\times{}^nC_2 \Leftrightarrow \frac{n^2\times(n-1)}{2}=$

$$=7\times\frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{n^2\times(n-1)}{2}-7\times\frac{n\times(n-1)}{2}=0$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}{\Leftrightarrow} n=7$$

Proposta 53

53.1. ${}^{20}C_3+{}^{20}C_{17}+2\times{}^{20}C_4={}^{20}C_3+{}^{20}C_3+2\times{}^{20}C_4=$
$=2\times{}^{20}C_3+2\times{}^{20}C_4=2\times\left({}^{20}C_3+{}^{20}C_4\right)=2\times{}^{21}C_4$

53.2. ${}^{2n}C_3+{}^{2n}C_{2n-3}+2\times{}^{2n}C_4=4760 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow {}^{2n}C_3+{}^{2n}C_3+2\times{}^{2n}C_4=4760 \Leftrightarrow 2\times{}^{2n}C_3+2\times{}^{2n}C_4=4760$
$\Leftrightarrow 2\times\left({}^{2n}C_3+{}^{2n}C_4\right)=4760 \Leftrightarrow {}^{2n+1}C_4=2380$

Proposta 54

54.1. $(2x+1)^4=1(2x)^4+4(2x)^3\times1^1+6(2x)^2\times1^2+$
$+4(2x)^1\times1^3+1\times1^4=16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$

54.2. $(x-2)^5=1x^5+5x^4\times(-2)^1+10x^3\times(-2)^2+10x^2\times(-2)^3+$
$+5x^1\times(-2)^4+1(-2)^5=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

54.3. $(x^2+x)^7=1(x^2)^7+7(x^2)^6\times x+20(x^2)^5\times x^2+$
$+35(x^2)^4\times x^3+35(x^2)^3\times x^4+20(x^2)^2\times x^5+7(x^2)^1\times x^6+1\times x^7=$
$=x^{14}+7x^{13}+21x^{12}+35x^{11}+35x^{10}+21x^9+7x^8+x^7$

54.4. $\left(\frac{x}{2}-x^3\right)^5=1\left(\frac{x}{2}\right)^5+5\left(\frac{x}{2}\right)^4\times(-x^3)+10\left(\frac{x}{2}\right)^3\times(-x^3)^2+$
$+10\left(\frac{x}{2}\right)^2\times(-x^3)^3+5\left(\frac{x}{2}\right)^1\times(-x^3)^4+1\times(-x^3)^5=$
$=\frac{x^5}{32}-\frac{5x^7}{16}+\frac{5x^9}{4}-\frac{5x^{11}}{2}+\frac{5x^{13}}{2}-x^{15}$

Proposta 55

55.1. $T_5={}^7C_4\left(\frac{2}{x^2}\right)^3\times1^4=35\times\frac{8}{x^6}\times1=280x^{-6}$

55.2. $T_5={}^8C_4\left(\sqrt{x}\right)^4\times x^4=70\times x^2\times x^4=70x^6$

55.3. $T_5={}^5C_4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^1\times\left(-\frac{1}{x}\right)^4=5\times\frac{\sqrt{x}}{2}\times\frac{1}{x^4}=\frac{5}{2}\times\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^4}=\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$

55.4. $T_5={}^9C_4\left(x\sqrt{x}\right)^5\times(-2x^2)^4=126\times\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^5\times16x^8=$
$=2016\,x^{\frac{15}{2}}\times x^8=2016\,x^{\frac{31}{2}}$

Pág. 56

Proposta 56

56.1. O desenvolvimento de $\left(1+\frac{2}{x}\right)^6$ tem 7 termos, sendo o termo médio o 4.º termo.

$T_4={}^6C_3\times1^3\times\left(\frac{2}{x}\right)^3=20\times1\times\frac{8}{x^3}=160x^{-3}$

56.2. O desenvolvimento de $\left(x^{-2}+\frac{1}{x}\right)^8$ tem 9 termos, sendo o termo médio o 5.º termo.

$T_5={}^8C_4\times\left(x^{-2}\right)^4\times\left(\frac{1}{x}\right)^4=70\times x^{-8}\times x^{-4}=70x^{-12}$

56.3. O desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+x^{-1}\right)^4$ tem 5 termos, sendo o termo médio o 3.º termo.

$T_3={}^4C_2\times\left(\sqrt{x}\right)^2\times\left(x^{-1}\right)^2=6\times x\times x^{-2}=6x^{-1}$

56.4. O desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\right)^4$ tem 5 termos, sendo o termo médio o 3.º termo.

$T_3={}^4C_2\times\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\times\left(-\sqrt{x}\right)^2=6\times x^{\frac{2}{3}}\times x=6x^{\frac{5}{3}}$

Proposta 57

57.1. Soma dos coeficientes binomiais: ${}^8C_0+{}^8C_1+{}^8C_2+{}^8C_3+$ $+{}^8C_4+{}^8C_5+{}^8C_6+{}^8C_7+{}^8C_8=2^8=256$.

57.2. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)^8=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-k}\times\left(x^2\right)^k=$

$=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{8-k}\times x^{2k}=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\,x^{-4+\frac{k}{2}}\times x^{2k}=\sum_{k=0}^{8}{}^8C_k\,x^{\frac{5}{2}k-4}$

O termo de maior grau no desenvolvimento da expressão dada obtém-se quando $k=8$ e é igual a ${}^8C_8\,x^{\frac{5}{2}\times 8-4}=x^{16}$.

57.3. O termo em $x^{\frac{1}{2}}$, se existir, corresponde ao termo em que $\frac{5}{2}k-4=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 5k-8=1\Leftrightarrow k=\frac{9}{5}$. Como $k\notin\mathbb{N}_0$, conclui-se que no desenvolvimento da expressão dada não existe nenhum termo em $x^{\frac{1}{2}}$.

Proposta 58

58.1. $h(x)=f(x+1)=\frac{(x+1)^5}{2}=\frac{1x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{2}+$ $+\frac{5x+1}{2}=\frac{1}{2}x^5+\frac{5}{2}x^4+5x^3+5x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$

58.2. $j(x)=g(x-1)=2(x-1)^5-(x-1)^3=2\left(1x^5+5x^4\times(-1)+\right.$

$\left.+10x^3\times(-1)^2+10x^2\times(-1)^3+5x\times(-1)^4+1\times(-1)^5\right)-$

$-\left(1x^3+3x^2\times(-1)+3x\times(-1)^2+1\times(-1)^3\right)=$

$=2\left(1x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1\right)-\left(1x^3-3x^2+3x-1\right)=$

$=2x^5-10x^4+20x^3-20x^2+10x-2-1x^3+3x^2-3x+1=$

$=2x^5-10x^4+19x^3-17x^2+7x-1$

Proposta 59

59.1. $\left(1-\sqrt{2}\right)^5+29\sqrt{2}=41\Leftrightarrow 1+5\times\left(-\sqrt{2}\right)+10\times\left(-\sqrt{2}\right)^2+$

$+10\times\left(-\sqrt{2}\right)^3+5\times\left(-\sqrt{2}\right)^4+\left(-\sqrt{2}\right)^5+29\sqrt{2}=41\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-5\sqrt{2}+20-20\sqrt{2}+20-4\sqrt{2}+29\sqrt{2}=41\Leftrightarrow 41=41$

(Proposição verdadeira)

Conclusão:

$1-\sqrt{2}$ é solução da equação $x^5+29\sqrt{2}=41$.

59.2. $\left(1+\sqrt{3}\right)^5=\left(1+\sqrt{3}\right)^2+42\left(1+\sqrt{3}\right)+30\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+5\times\sqrt{3}+10\times\left(\sqrt{3}\right)^2+10\times\left(\sqrt{3}\right)^3+5\times\left(\sqrt{3}\right)^4+1\left(\sqrt{3}\right)^5=$

$=1+2\sqrt{3}+3+42+42\sqrt{3}+30\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+5\sqrt{3}+30+30\sqrt{3}+45+9\sqrt{3}=76+44\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 76+44\sqrt{3}=76+44\sqrt{3}$

(Proposição verdadeira)

Conclusão:

$1+\sqrt{3}$ é solução da equação $x^5=x^2+42x+30$.

Pág. 57

Proposta 60

60.1. Atendendo à simetria do Triângulo de Pascal, tem-se:

$a+a=12870\Leftrightarrow 2a=12870\Leftrightarrow a=6435$

$b=a+5005=6435+5005=11440$

Conclusão: $a=6435$ e $b=11440$

60.2. ${}^nC_3+{}^nC_4+{}^{n+1}C_5+{}^{n+2}C_6+{}^{n+3}C_7={}^{25}C_7\Leftrightarrow{}^{n+1}C_4+{}^{n+1}C_5+$ $+{}^{n+2}C_6+{}^{n+3}C_7={}^{25}C_7\Leftrightarrow{}^{n+2}C_5+{}^{n+2}C_6+{}^{n+3}C_7={}^{25}C_7\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow{}^{n+3}C_6+{}^{n+3}C_7={}^{25}C_7\Leftrightarrow{}^{n+4}C_7={}^{25}C_7\Leftrightarrow n+4=25\Leftrightarrow n=21$

Proposta 61

61.1. $2^n+2^{n+1}=1536\Leftrightarrow 2^n+2^n\times 2=1536\Leftrightarrow 2^n\times 3=1536\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n=\frac{1536}{3}\Leftrightarrow 2^n=512\Leftrightarrow 2^n=2^9\Leftrightarrow n=9$

As linhas têm, respetivamente, 10 e 11 elementos.

61.2. O maior elemento dessas duas linhas é ${}^{10}C_5=252$.

Proposta 62

$\sum_{k=0}^{n+2}{}^{n+2}C_k=4096\Leftrightarrow 2^{n+2}=4096\Leftrightarrow 2^{n+2}=2^{12}\Leftrightarrow n+2=12\Leftrightarrow n=10$

Então:

$n\times\sum_{k=0}^{n}{}^nC_k=n\times 2^n=10\times 2^{10}=10\ 240$

Proposta 63

63.1. Qualquer termo do desenvolvimento de $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{20}$ é da forma:

$${}^{20}C_k\left(\frac{x}{y}\right)^{20-k}\times\left(\frac{y}{x}\right)^{k},\ k\in\{0,1,\ldots,20\}.$$

$${}^{20}C_k\left(\frac{x}{y}\right)^{20-k}\times\left(\frac{y}{x}\right)^{k}={}^{20}C_k\left(xy^{-1}\right)^{20-k}\times\left(yx^{-1}\right)^{k}=$$

$$={}^{20}C_k\,x^{20-k}\times y^{-20+k}\times y^{k}\times x^{-k}={}^{20}C_k\,x^{20-2k}\times y^{-20+2k}$$

Em qualquer termo, os expoentes de x e de y são simétricos $(20-2k\ \text{ e }\ -20+2k)$.

63.2. $T_6\times T_{16}={}^{20}C_5\,x^{10}\,y^{-10}\times{}^{20}C_{15}\,x^{-10}\,y^{10}={}^{20}C_5\times{}^{20}C_{15}=$

$=15\,504\times 15\,504=240\,374\,016$

Proposta 64

64.1. $(x+a)^5+(x-a)^5=1x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+$

$+5x^1a^4+1a^5+1x^5-5x^4a+10x^3a^2-10x^2a^3+5x^1a^4-1a^5=$

$=2x^5+20x^3a^2+10xa^4$

64.2. Sendo $x=1$, tem-se:

$(1+a)^5+(1-a)^5=2+20a^2+10a^4$.

$(1+a)^5+(1-a)^5=242\Leftrightarrow 2+20a^2+10a^4=242\Leftrightarrow 10a^4+$

$+20a^2-240=0\Leftrightarrow a^4+2a^2-24=0\underset{a^2=y}{\Leftrightarrow} a^4+2a^2-24=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+2y-24=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-2\pm\sqrt{100}}{2}\Leftrightarrow y=4\vee y=-6\Leftrightarrow$

$\underset{y=a^2}{\Leftrightarrow} a^2=4\vee \underbrace{a^2=-6}_{\text{equação impossível}}\Leftrightarrow a=2\vee a=-2$

Pág. 62

Questões de exame

1. $4\times 4!\times{}^{12}A_5=9\,123\,840$

2. ${}^{8}C_3\times 5=280$

3. $2!\times 4!=48$.

A opção correta é a (C).

4. $3!\times 7!=30240$.

A opção correta é a (B).

5. A opção correta é a (A).

6. $4\times 5^3\times 5=4\times 5^4$.

A opção correta é a (D).

Pág. 63

7. ${}^{6}C_1\times{}^{3}C_2=6\times{}^{3}C_2$.

A opção correta é a (B).

8. A opção correta é a (B).

9. Para que a comissão de 5 elementos seja mista tenha mais raparigas do que rapazes duas situações podem ocorrer: a comissão ser constituída por 3 raparigas e 2 rapazes ou por 4 raparigas e 1 rapaz. Assim sendo, o número de comissões que é possível formar é dado por:

$${}^{15}C_3\times{}^{7}C_2+{}^{15}C_4\times{}^{7}C_1={}^{15}C_3\times{}^{7}C_2+{}^{15}C_4\times 7.$$

A opção correta é a (B).

10. A opção correta é a (C).

11. ${}^{7}C_4\times{}^{3}C_2\times 1=105$. A opção correta é a (A).

Pág. 64

12.

Resposta I

${}^{500}C_{30}$: número de maneiras diferentes de escolher 30 dos 500 funcionários para formar o grupo que vai frequentar o programa de reeducação alimentar.

${}^{498}C_{28}$: número de maneiras diferentes de escolher o grupo, que vai frequentar o programa de reeducação alimentar, de modo que as duas irmãs façam parte desse grupo.

${}^{500}C_{30}-{}^{498}C_{28}$: número de grupos diferentes em que nenhuma das irmãs faz parte ou apenas uma delas faz parte, ou seja, o número de grupos diferentes em que pelo menos uma das irmãs faz parte.

Resposta II

$2\times{}^{498}C_{29}$: número de maneiras diferentes de escolher o grupo, que vai frequentar o programa de reeducação alimentar, de modo que apenas uma das duas irmãs faça parte do grupo.

${}^{498}C_{30}$: número de maneiras diferentes de escolher o grupo, que vai frequentar o programa de reeducação alimentar, de modo que nenhuma das duas irmãs faça parte do grupo.

$2\times{}^{498}C_{29}+{}^{498}C_{30}$: número de grupos diferentes em que apenas uma das irmãs faz parte ou nenhuma delas faz parte, ou seja, o número de grupos diferentes em que pelo menos uma das irmãs faz parte.

13. $9\times 10\times 10\times 1\times 1\times 1=900$.

A opção correta é a (B).

14. $1\times1\times3!+1\times2\times2\times2\times1=14$.

A opção correta é a (B).

15. ${}^{4}C_2\times9^2=486$.

A opção correta é a (A).

16. A resposta correta é a II. Pretende-se escolher, ao acaso, 3 funcionários, de entre um grupo de 15, de modo a ter pelo menos 2 funcionários que estejam a favor do novo horário, o que significa que a favor do novo horário poderão estar 2 ou 3 funcionários. O número de hipóteses de serem exatamente 2 funcionários a favor entre os 3 escolhidos é dado por $6\times{}^{9}C_2$ uma vez que se escolhe 1 dos 6 funcionários que não são a favor e se escolhem 2 funcionários entre os 9 que são a favor.
O número de hipóteses de serem os 3 funcionários a favor é dado por ${}^{9}C_3$ uma vez que se escolhem 3 entre os 9 funcionários a favor. Assim, o número de maneiras diferentes de escolher 3 funcionários de modo que pelo menos 2 deles estejam a favor do novo horário de trabalho corresponde a $6\times{}^{9}C_2+{}^{9}C_3$.
O acontecimento contrário ao solicitado corresponde a ter menos de 2 funcionários a favor do novo horário, ou seja, não ter nenhum funcionário a favor ou ter apenas 1, de entre os 3 escolhidos ao acaso no grupo de 15. O número total de maneiras diferentes de escolher os 3 funcionários entre os 15 é dado por ${}^{15}C_3$. O número total de maneiras diferentes de entre os 3 funcionários escolhidos nenhum ser a favor é dado por ${}^{6}C_3$ e o número total de maneiras diferentes de entre os 3 funcionários escolhidos apenas 1 ser a favor é dado por $9\times{}^{6}C_2$. Então, alterando a expressão da resposta I para ${}^{15}C_3-{}^{6}C_3-9\times{}^{6}C_2$ obtém-se também uma outra resposta correta para o problema.

Pág. 65

17. Número de alunos que tem computador portátil: $\frac{1}{5}\times150=30$. Número de alunos que não tem computador portátil: $150-30=120$. Número de comissões de seis alunos com exatamente quatro dos alunos que têm computador portátil: ${}^{30}C_4\times{}^{120}C_2=195671700$.

18. Se a linha tem 15 elementos, então $n+1=15\Leftrightarrow n=14$.
Sabe-se que ${}^{14}C_0=1$, ${}^{14}C_1=14$, ${}^{14}C_2=91$ e ${}^{14}C_3=364$.
Donde se conclui que a linha tem 6 elementos inferiores a 100 (os três primeiros e os três últimos). A opção correta é a (C).

19. A linha que contém os elementos da forma ${}^{2006}C_k$ tem 8 elementos menores do que ${}^{2006}C_4$, a saber: ${}^{2006}C_0$, ${}^{2006}C_1$, ${}^{2006}C_2$, ${}^{2006}C_3$, ${}^{2006}C_{2003}$, ${}^{2006}C_{2004}$, ${}^{2006}C_{2005}$ e ${}^{2006}C_{2006}$.
A opção correta é a (A).

20. $\left(x^2+2\right)^6=\sum_{k=0}^{6}{}^{6}C_k\left(x^2\right)^{6-k}\times2^k=\sum_{k=0}^{6}{}^{6}C_k\times2^k\times x^{12-2k}$
O termo de grau 6 obtém-se quando $12-2k=6\Leftrightarrow k=3$.
Logo, o termo de grau 6 do polinómio é:
${}^{6}C_3\times2^3\times x^6=20\times8\times x^6=160x^6$.
A opção correta é a (D).

21. $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\left(\frac{2}{x}\right)^{10-k}\times x^k=$

$=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\times2^{10-k}\times x^{-10+k}\times x^k=\sum_{k=0}^{10}{}^{10}C_k\times2^{10-k}\times x^{-10+2k}$

O termo que não depende da variável *x*, ou seja, o termo em x^0, obtém-se quando $-10+2k=0\Leftrightarrow k=5$. Logo, o termo que não depende da variável *x* é:

$${}^{10}C_5\times2^5\times x^0=8064$$

A opção correta é a (B).

Pág. 66

Avaliar – 1.ª Parte

1. $A\setminus B=\left\{x\in A: x\notin B\right\}=A\cap\overline{B}$.

A opção correta é a (B).

2.1. $A=\left\{1,2\right\}$, $B=\left\{-3,3\right\}$ e $C=\left\{-1,0,1\right\}$.
O elemento $(1,0,3)$ pertence ao conjunto $A\times C\times B$ porque
$A\times C\times B=\left\{(x,y,z): x\in A\wedge y\in C\wedge z\in B\right\}$.
A opção correta é a (D).

2.2. $\#(A\times B\times C)=(\#A)\times(\#B)\times(\#C)=2\times2\times3=12$.
A opção correta é a (A).

3. O número de funções de *A* em *B* que é possível definir de modo que a imagem de a seja é $3\times3\times3=27$ pois cada um dos objetos *a*, *b* e *c* pode ter uma das imagens 1, 2 e 3.
A opção correta é a (A).

4. $\left(\frac{1}{x^2}+x\right)^6=\sum_{k=0}^{6}{}^{6}C_k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k}\times x^k=\sum_{k=0}^{6}{}^{6}C_k\left(x^{-2}\right)^{6-k}\times x^k=$

$=\sum_{k=0}^{6}{}^{6}C_k\,x^{-12+2k}\times x^k=\sum_{k=0}^{6}{}^{6}C_k\,x^{-12+3k}$.

O expoente de *x* é um número positivo quando
$-12+3k>0\ \wedge\ 0\le k\le6\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}$.
$-12+3k>0\ \wedge\ 0\le k\le6\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k>4\ \wedge\ 0\le k\le6\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow k=5\ \vee\ k=6$.
No desenvolvimento da expressão dada há apenas dois termos em que expoente de *x* é um número positivo.
A opção correta é a (C).

5. O número de subconjuntos de um conjunto com *n* elementos é dado por 2^n.

$2^n = 128 \Leftrightarrow 2^n = 2^7 \Leftrightarrow n = 7$. Então, ${}^{n}C_5 = {}^{7}C_5 = 21$.

A opção correta é a (B).

6. Como os dossiês vermelhos têm de ficar juntos, há $2!$ maneiras de os permutar entre si. Os dossiês azuis também têm de ficar juntos, havendo $3!$ maneiras de os permutar entre si.

Pretende-se arrumar na prateleira o grupo dos dossiês vermelhos, o grupo dos dossiês azuis, o dossiê verde e o dossiê amarelo. O número de maneiras de o fazer é dado por $4!$. Assim sendo, o número de maneiras distintas de arrumar os dossiês na prateleira de modo que os da mesma cor fiquem juntos é dado por $4! \times 3! \times 2!$.

A opção correta é a (C).

Pág. 67

Avaliar – 2.ª Parte

1.1.

a) Por exemplo, o par ordenado $(0, 2)$ pertence ao conjunto $A \times B$ porque $0 \in A$ e $2 \in B$. Ora, $0 \in A$ pois $0^3 - 2 \times 0 < 1$ e $2 \in B$ porque $2^2 > |2|$.

b) Por exemplo, o par ordenado $(1, 0)$ não pertence ao conjunto $\overline{A} \times B$ porque $1 \notin \overline{A}$. $1 \notin \overline{A}$ pois $1^3 - 2 \times 1 < 1$, ou seja, $1 \in A$.

1.2. Uma condição em que o conjunto-solução seja $A \cap \overline{B}$ é, por exemplo, $x^3 - 2x < 1 \wedge x^2 \leq |x|$.

2.1. É possível colorir a tabela de ${}^{8}A_5 = 6720$ formas diferentes.

2.2. Número de maneiras diferentes de colorir a tabela de modo que as colunas A e E não sejam de cor preta: ${}^{7}A_2 \times {}^{6}A_3 = 5040$.

3. Como só podemos utilizar algarismos do conjunto A e os números têm de ser pares, só há 3 escolhas possíveis para o algarismo das unidades: 2, 4 ou 6. Os números, para além de ser pares, têm quatro algarismos e exatamente dois 5. Então temos ${}^{3}C_2$ maneiras de escolher a posição dos dois algarismos 5. Para o algarismo em falta, uma vez que não pode ser o 5, temos 5 possibilidades (1, 2, 3, 4 e 6) de escolhas.

Assim sendo, é possível escrever $3 \times {}^{3}C_2 \times 5 = 45$ números nas condições pedidas.

4.1. Número de maneiras diferentes de escolher 4 especiarias das 10 disponíveis: ${}^{10}C_4 = 210$.

4.2. Número de maneiras diferentes de escolher 3 especiarias das 10 disponíveis, não podendo selecionar a 4 e a 9 simultaneamente: ${}^{10}C_3 - {}^{2}C_2 \times 8 = 120 - 8 = 112$.

4.3. A soma dos números dos frascos dos extremos é igual a 10 se nos extremos ficarem os frascos 1 e 9 ou 2 e 8 ou 3 e 7 ou 4 e 6, podendo os frascos dos extremos permutar entre si.

Assim sendo, há $4 \times 2! \times 8! = 322\,560$ maneiras diferentes de dispor os 10 frascos de modo que a soma dos números dos frascos dos extremos seja igual a 10.

5. ${}^{4}C_2$: número de maneiras de, entre os 4 rapazes, escolher os 2 rapazes que ficam na fila da frente.

$3!$: número de maneiras de permutar as 3 raparigas entre si.

$3!$: número de maneiras de, na fila da frente, permutar o grupo das 3 raparigas e os 2 rapazes entre si.

$2!$: número de maneiras de permutar os 2 rapazes que ficam na fila de trás entre si.

Pág. 71

1. O espaço de resultados é: $\Omega=\{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

2.1. O espaço amostral é: $E=\{1, 2, 3, 4\}$.

2.2.

a) Seja *A* o acontecimento "sair bola com número não inferior a 3". Então, $A=\{3, 4\}$.

b) Seja *B* o acontecimento "sair bola com número primo". Então, $B=\{2, 3\}$.

c) Seja *C* o acontecimento "sair bola com número múltiplo de 5". Como nenhum dos elementos do conjunto *E* é um múltiplo de 5, tem-se $C=\{\ \}$.

d) Seja *D* o acontecimento "sair bola com número natural". Então, $D=\{1, 2, 3, 4\}$.

Pág. 72

3.1. $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

3.2. Número de elementos do espaço de acontecimentos: $\#P(E)=2^8=256$.

3.3. Como $9\notin E$, o conjunto $\{7, 9\}$ não pertence ao conjunto das partes de *E*. Assim sendo, a opção correta é a **(D)**.

Pág. 73

4.

×	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9

4.1. Os divisores de 5 são o 1 e o 5. Então, o acontecimento *D* é elementar.

4.2. O produto dos números obtidos pode ser igual a 0, 1, 2, 3, 4, 6 ou 9. Então, o acontecimento *C* é impossível.

4.3. Por exemplo, o acontecimento *B* é composto.

5.1.

a) O acontecimento *C* é elementar porque $\#C=1$, ou seja, só há uma ficha preta.

b) Por exemplo, os acontecimentos *A* e *D* são incompatíveis porque $A\cap D=\{\ \}$.

5.2. Os acontecimentos *A* e *B* não são incompatíveis pois $A\cap B\neq\{\ \}$ (a ficha 2 é verde).

Tarefa 1

1. $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2. $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B=\{7\}$, $C=\{1, 2, 4, 8\}$, $D=\{5, 6, 7, 8, 9\}$, $E=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $F=\{\ \}$.

3.1. O conjunto *F* é o conjunto vazio.

3.2. O conjunto *E* é igual ao espaço amostral.

3.3. O conjunto *B* tem cardinal igual a 1.

3.4. O conjunto *C* tem cardinal maior ou igual a 2 pois $\#C=4$.

3.5. Por exemplo, os conjuntos *B* e *C*.

Ora, $B\cap C=\{7\}\cap\{1, 2, 4, 8\}=\{\ \}$.

3.6. Os conjuntos *A* e *D* pois

$A\cap D=\{0, 1, 2, 3, 4\}\cap\{5, 6, 7, 8, 9\}=\{\ \}$ e

$A\cap D=\{0, 1, 2, 3, 4\}\cup\{5, 6, 7, 8, 9\}=$

$=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}=\Omega$.

Pág. 74

6.1. O espaço amostral é: $\Omega=\{\text{azul, verde, vermelho}\}$.

6.2. O valor lógico da proposição $P(A)=\frac{1}{3}$ é falso, porque os acontecimentos elementares não são equiprováveis. Neste caso, tem-se $P(A)=\frac{1}{6}$ pois a roleta está dividida em seis setores circulares geometricamente iguais e apenas o número 6 é azul.

Pág. 75

7.1. O acontecimento "Sair bola vermelha".

7.2. O acontecimento "Sair bola preta".

7.3. O acontecimento "Não sair bola preta".

7.4. O acontecimento "Não sair bola amarela".

8. Seja *A* o acontecimento "A bola verde ser uma das escolhidas".

Número de casos possíveis: ${}^5C_3=10$

Número de casos favoráveis: ${}^1C_1\times{}^4C_2=6$

Então, $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Pág. 76

9.1. Seja *A* o acontecimento "Sair uma carta de copas".
Número de casos possíveis: 52
Número de casos favoráveis: 13

Então, $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$.

9.2. Seja *B* o acontecimento "Sair uma carta que não seja de paus".
Número de casos possíveis: 52
Número de casos favoráveis: 39

Então, $P(B)=\frac{39}{52}=\frac{3}{4}$.

9.3. Seja *C* o acontecimento "Sair um rei".
Número de casos possíveis: 52
Número de casos favoráveis: 4

Então, $P(C)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

10. Seja *A* o acontecimento "Pelo menos uma das bolas retiradas ser azul". O acontecimento contrário de *A* é definido por "Nenhuma das bolas retiradas ser azul".

Assim, $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{{}^4C_3}{{}^7C_3}=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$.

Pág. 77

11. Seja *A* o acontecimento "As pontuações das faces voltadas para cima serem diferentes". Então, $P(A)=\frac{6\times5}{6\times6}=\frac{5}{6}$.

12.1. Seja *A* o acontecimento "Ficar pelo menos um disco na diagonal". O acontecimento contrário de *A* é definido por "Nenhum disco ficar na diagonal".

Assim, $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{{}^6C_3}{{}^9C_3}=1-\frac{20}{84}=\frac{64}{84}=\frac{16}{21}$.

12.2. Seja *B* o acontecimento "Ficarem pelo menos dois discos na última linha". Duas situações podem ocorrer: ficarem dois discos na última linha ou ficarem três discos na última linha.

Assim sendo, $P(B)=\frac{{}^3C_2\times{}^6C_1+{}^3C_3}{{}^9C_3}=\frac{18+1}{84}=\frac{19}{84}$.

Pág. 78

13.1. Não é possível que *A* e *B* sejam acontecimentos contrários, porque $P(A)+P(B)<1$.

13.2. Como $A\cap B\subset B$, então $P(A\cap B)\le P(B)$. Sendo $P(B)=0{,}3$, não é possível que $P(A\cap B)=0{,}4$.

13.3. Sendo *A* e *B* dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, sabe-se que $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$.

Como $P(A)=0{,}5$ e $P(B)=0{,}3$, não é possível que $P(A\cup B)=0{,}9$.

14.1. A afirmação é falsa. Para que a afirmação fosse verdadeira os acontecimentos *A* e *B* teriam de ser contrários.

14.2. A afirmação é verdadeira. Se *A* e *B* são acontecimentos contrários, então $A\cap B=\{\ \}$ e $A\cup B=\Omega$.

Logo, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ e $P(A\cup B)=1$.

Donde se conclui que $P(A)+P(B)=1$.

14.3. A afirmação é falsa. Se $P(A)+P(B)=1$, não podemos concluir que *A* e *B* sejam acontecimentos contrários.

15. Sendo *A* e *B* acontecimentos contrários, então $P(B)=1-P(A)$.

$$\begin{cases}P(A)\times P(B)=\frac{2}{9}\\ P(B)=1-P(A)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(A)\times(1-P(A))=\frac{2}{9}\\ P(B)=1-P(A)\end{cases}\Leftrightarrow$$

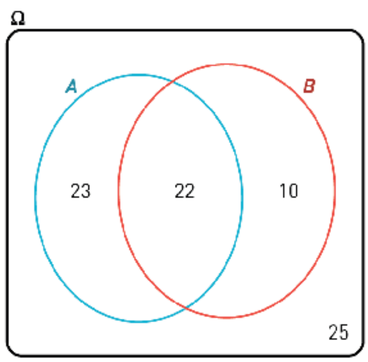
$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(A)-(P(A))^2=\frac{2}{9}\\ P(B)=1-P(A)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9(P(A))^2+9P(A)-2=0\\ P(B)=1-P(A)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(A)=\frac{1}{3}\vee P(A)=\frac{2}{3}\\ P(B)=1-P(A)\end{cases}$$

Como $P(A)<P(B)$, conclui-se que $P(A)=\frac{1}{3}$ e $P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Pág. 79

16. Consideremos os acontecimentos *A*: "Assinar o jornal A" e *B*: "Assinar o jornal B". Das 80 pessoas inquiridas, sabe-se que 45 assinam o jornal A, 32 assinam o jornal B e 25 não assinam qualquer um dos jornais.
Então, há 22 pessoas (32 + 25 – (80 – 25)) que assinam os dois jornais. Donde se conclui que há 23 pessoas (45 – 22) que assinam o jornal A e 10 pessoas (32 – 22) que assinam o jornal B.
Pode-se, agora, construir um diagrama de Venn que vai facilitar a resolução do exercício.



16.1. $P(A)=\frac{45}{80}=\frac{9}{16}$

16.2. $P(A\cap B)=\frac{22}{80}=\frac{11}{40}$

16.3. $P\left((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\right)=P(A\setminus B)+P(B\setminus A)=\frac{23}{80}+\frac{10}{80}=\frac{33}{80}$

17. $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0{,}4+0{,}3=0{,}7$

18.1. $A\cap B$: "Sair bola azul com número par".

$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

18.2. $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

Pág. 80

19. Se A e B são incompatíveis, então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Logo, $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B))=$

$=1-P(A)-P(B)=P(\overline{A})-P(B)$.

20. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\underset{(1)}{=}1-P(A)-P(B)\underset{(2)}{=}$

$=P(C)=0{,}2$

(1) porque A e B são incompatíveis (dado que são acontecimentos elementares).
(2) porque A, B e C são os acontecimentos elementares de uma experiência aleatória.

21.1. Sendo $P(\overline{A\cup B})=0{,}4$, então $P(A\cup B)=1-0{,}4=0{,}6$.

Logo:

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0{,}4+0{,}3-0{,}6=0{,}1=\frac{1}{10}$

21.2. Ora, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=0{,}4$. Como $P(\overline{A}\cap\overline{B})\neq 0$,

então os acontecimentos $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são compatíveis.

22.1. $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=P(\overline{B})-P(A)+P(A\cap B)=$

$=0{,}52-0{,}2+0{,}08=0{,}4$

22.2. $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0{,}48-0{,}08=0{,}4$

Pág. 81

23.1. Consideremos os acontecimentos C: "A carta é de copas" e F: "A carta é uma figura". $P(C|F)=\frac{2}{5}$

23.2. Consideremos os acontecimentos F: "A carta é uma figura" e O: "A carta é de ouros". $P(F|O)=\frac{2}{3}$

23.3. Consideremos os acontecimentos P: "A carta é de paus" e F: "A carta é uma figura". $P(P|\overline{F})=\frac{2}{7}$

24.1. Considera o acontecimento A: "Sair a face com o número 5". $P(A)=\frac{1}{6}$

24.2. Consideremos os acontecimentos A: "Sair a face com o número 5" e P: "Sair face com número primo". $P(A|P)=\frac{1}{3}$

24.3. Consideremos os acontecimentos A: "Sair a face com o número 5" e B: "Sair número par". $P(A|B)=\frac{0}{3}=0$

24.4. Consideremos os acontecimentos A: "Sair a face com o número 5" e C: "Sair número múltiplo de 5". $P(A|C)=\frac{1}{1}=1$

Pág. 82

25.1. $P(B\cap E)=\frac{1}{7}$

25.2. $P(A|D)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

25.3. $P(\overline{C}|E)=\frac{1}{3}$

25.4. $P(A|\overline{B})=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

25.5. $P(\overline{D}|\overline{B})=\frac{3}{5}$

26.1. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}9=0{,}3+0{,}6-P(A\cap B)\Leftrightarrow 0=P(A\cap B)$

Os acontecimentos A e B são incompatíveis porque $P(A\cap B)=0$.

26.2.

a) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{0{,}6}=0$

b) $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{0{,}4}=\frac{1-P(A\cup B)}{0{,}4}=\frac{1-0{,}9}{0{,}4}=$

$=0{,}25$

Pág. 83

27. Consideremos os acontecimentos *M*: "Ser mulher" e *V*: "Ter votado". Sabe-se que $P(V)=0{,}8$, $P(M|V)=0{,}6$ e $P(\bar{M}|\bar{V})=0{,}7$. Logo, $P(\bar{M}|V)=0{,}4$ e $P(M|\bar{V})=0{,}3$.

27.1. $P(\bar{M}\cap\bar{V})=P(\bar{V})\times P(\bar{M}|\bar{V})=(1-P(V))\times P(\bar{M}|\bar{V})=$
$=(1-0{,}8)\times 0{,}7=0{,}14$

27.2. Sabe-se que, dos que votaram, 60% são mulheres, ou seja, $P(M|V)=0{,}6$.

27.3. $P(\bar{M}|V)=1-P(M|V)=1-0{,}6=0{,}4$

27.4. $P(V|\bar{M})=\dfrac{P(V\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}$

$P(V\cap\bar{M})=P(V)-P(V\cap M)=0{,}8-P(V)\times P(M|V)=$
$=0{,}8-0{,}8\times 0{,}6=0{,}8-0{,}48=0{,}32$

$P(\bar{M})=P(V\cap\bar{M})+P(\bar{V}\cap\bar{M})=0{,}32+0{,}14=0{,}46$

Então, $P(V|\bar{M})=\dfrac{P(V\cap\bar{M})}{P(\bar{M})}=\dfrac{0{,}32}{0{,}46}=\dfrac{16}{23}$.

27.5. $P(\bar{V}|M)=\dfrac{P(\bar{V}\cap M)}{P(M)}=\dfrac{P(M)-P(V\cap M)}{0{,}54}=$
$=\dfrac{0{,}54-0{,}8\times 0{,}6}{0{,}54}=\dfrac{0{,}06}{0{,}54}=\dfrac{1}{9}$

28.1. Consideremos os acontecimentos *A*: "A peça ser produzida pela máquina A", *B*: "A peça ser produzida pela máquina B" e *R*: "A peça ser rejeitada". Como $P(A)=0{,}35$, então $P(B)=1-P(A)=1-0{,}35=0{,}65$.

$P(R|A)=0{,}02\Leftrightarrow\dfrac{P(R\cap A)}{P(A)}=0{,}02\Leftrightarrow P(R\cap A)=0{,}02\times 0{,}35\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(R\cap A)=0{,}007$

Então, $P(\bar{R}\cap A)=P(A)-P(R\cap A)=0{,}35-0{,}007=0{,}343$.

$P(R|B)=0{,}03\Leftrightarrow\dfrac{P(R\cap B)}{P(B)}=0{,}03\Leftrightarrow P(R\cap B)=0{,}03\times 0{,}65\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(R\cap B)=0{,}0195$

Então, $P(\bar{R}\cap B)=P(B)-P(R\cap B)=0{,}65-0{,}0195=0{,}6305$.

Assim sendo, tem-se:

	A	*B*	
R	0,007	0,0195	0,0265
$\bar{R}$	0,343	0,6305	0,9735
	0,35	0,65	1

28.2.

a) $P(R)=0{,}0265$

b) $P(A|\bar{R})=\dfrac{P(A\cap\bar{R})}{P(\bar{R})}=\dfrac{0{,}343}{0{,}9735}\approx 0{,}3523$

Tarefa 2

1.1.

	Falam inglês	Não falam inglês	
Falam português	**62**	20	**82**
Não falam português	100	18	118
	162	**38**	200

1.2.

a) $P(A\cap B)=\dfrac{62}{200}=\dfrac{31}{100}$

b) $P(\bar{A}\cap B)=\dfrac{100}{200}=\dfrac{1}{2}$

c) $P(B|\bar{A})=\dfrac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\dfrac{\frac{100}{200}}{\frac{118}{200}}=\dfrac{100}{118}=\dfrac{50}{59}$

d) $P(\bar{B}|A)=\dfrac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{20}{200}}{\frac{82}{200}}=\dfrac{20}{82}=\dfrac{10}{41}$

e) $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{\frac{20}{200}}{\frac{38}{200}}=\dfrac{20}{38}=\dfrac{10}{19}$

f) $P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{\frac{18}{200}}{\frac{38}{200}}=\dfrac{18}{38}=\dfrac{9}{19}$

2.1. $P(C)=1-P(A)-P(B)=1-0{,}3-0{,}5=0{,}2$

$P(G\cap A)=0{,}8\times 0{,}3\Leftrightarrow P(G\cap A)=0{,}24$

$P(D\cap B)=0{,}25\times 0{,}5\Leftrightarrow P(D\cap B)=0{,}125$

$P(G\cap C)=0{,}4\times 0{,}2\Leftrightarrow P(G\cap C)=0{,}08$

Assim sendo, tem-se:

	A	***B***	***C***	
G – Gasolina	0,24	0,375	0,08	0,695
D – Gasóleo	0,06	0,125	0,12	0,305
	0,3	**0,5**	0,2	**1**

2.2.

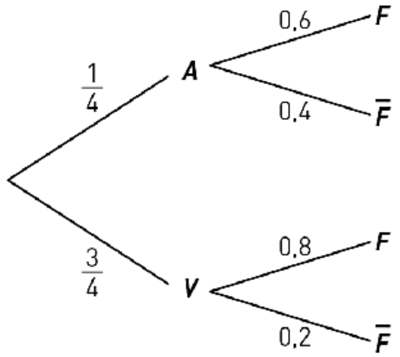
a) $P(\bar{A}\cap D)=P(B\cap D)+P(C\cap D)=0{,}125+0{,}12=0{,}245$

b) $P(C|D)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}12}{0{,}305}=\dfrac{24}{61}$

c) $P(G|\bar{B})=\dfrac{P(G\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0{,}24+0{,}08}{1-0{,}5}=\dfrac{0{,}32}{0{,}5}=0{,}64$

Pág. 84

29. Consideremos os acontecimentos A: “Escolher a caixa azul”, V: “Escolher a caixa vermelha” e F: “A moeda ser falsa”. A informação pode ser organizada no seguinte diagrama em árvore:



29.1.

a) $P(V \cap \overline{F}) = P(V) \times P(\overline{F} \mid V) = \frac{3}{4} \times 0{,}2 = 0{,}15$

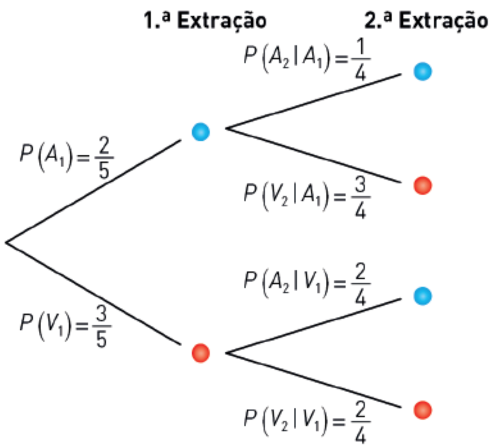
b) $P(A \cap \overline{F}) = P(A) \times P(\overline{F} \mid A) = \frac{1}{4} \times 0{,}4 = 0{,}1$

c) $P(F \mid A) = 0{,}6$

29.2. Como a caixa vermelha tem 15 moedas e 80% delas são falsas, sabe-se que na caixa vermelha há 12 moedas falsas $(15 \times 0{,}8)$ e 3 moedas verdadeiras. Seja B o acontecimento “O concorrente retirar uma e uma só moeda verdadeira”. Assim sendo, $P(B) = \frac{{}^{3}C_1 \times {}^{12}C_2}{{}^{15}C_3} = \frac{198}{455}$.

Tarefa 3

1.1.

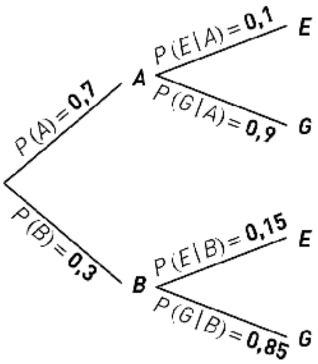


1.2.

a) $P(A_1 \cap V_2) = P(A_1) \times P(V_2 \mid A_1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2 \mid V_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

2.1.



2.2.

a) $P(A \cap G) = P(A) \times P(G \mid A) = 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$

b) $P(G \mid B) = 1 - P(E \mid B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

c) $P(B \mid G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B) \times P(G \mid B)}{P(A \cap G) + P(B \cap G)} =$

$= \frac{P(B) \times P(G \mid B)}{P(A) \times P(G \mid A) + P(B) \times P(G \mid B)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}85}{0{,}7 \times 0{,}9 + 0{,}3 \times 0{,}85} =$

$= \frac{0{,}255}{0{,}885} = \frac{17}{59}$

Pág. 85

30.1.

a) $B \mid A$: “O Ivo perde o comboio dado que acorda tarde”

b) $A \mid B$: “O Ivo acorda tarde dado que perde o comboio”

30.2. $P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B) = 0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$

31.1. $P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4 + 0{,}22 = 0{,}62$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

31.2. $P(B \mid \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}4}{0{,}62} = \frac{20}{31}$

Pág. 86

32.1. $P((\overline{A} \cap B) \mid A) = \frac{P((\overline{A} \cap B) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap (\overline{A} \cap B))}{P(A)} =$

$= \frac{P((A \cap \overline{A}) \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\varnothing \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$

32.2. $P\left(\left(A\cup\overline{B}\right)|B\right)=\frac{P\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap B\right)\right)}{P(B)}=$

$=\frac{P\left(\left(\overline{A}\cap A\right)\cup\left(\overline{B}\cap B\right)\right)}{P(B)}=\frac{P\left(\left(A\cap B\right)\cup\varnothing\right)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B)$

32.3. $P\left(\overline{A}|B\right)+P(A|B)=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=$

$=\frac{P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$

33. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)-P(A\cap B)=0{,}8\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)-P(A\cap B)=0{,}8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)-P(A\cap B)=0{,}8\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}1$

$P(A|B)=0{,}12\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0{,}12\Leftrightarrow\frac{0{,}1}{P(B)}=0{,}12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)=\frac{0{,}1}{0{,}12}\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{6}$

34. $P(A\cup B)-P(A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A)=$

$=P(B)-P(A\cap B)=P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(B)\times\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=P(B)\times P\left(\overline{A}|B\right)$

Pág. 88

35.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

35.1. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ e $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Logo, $P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{54}$.

$P(A\cap B)=\frac{1}{36}$, como $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$, conclui-se que os acontecimentos *A* e *B* não são independentes.

35.2. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ e $P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

Logo, $P(A)\times P(C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

$P(A\cap C)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$, como $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$, conclui-se que os acontecimentos *A* e *C* são independentes.

36. Como *A* e *B* são dois acontecimentos independentes, então:
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=P(A)\times\left(1-P\left(\overline{B}\right)\right)=0{,}2\times(1-0{,}7)=$
$=0{,}2\times 0{,}3=0{,}06$.

Pág. 89

37.1. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=0{,}6\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=0{,}6\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}4$

$P(A)\times P(B)=0{,}8\times 0{,}5=0{,}4$

Os acontecimentos *A* e *B* são independentes porque $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

37.2. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-0{,}8-0{,}5+0{,}4=0{,}1$

38. Sejam *L* e *R* os acontecimentos:
L: "o Luís ir à festa" e *R*: "a Rute ir à festa".
Os acontecimentos *L* e *R* são independentes, logo
$P(R\cap L)=P(R)\times P(L)=0{,}5\times 0{,}7=0{,}35$.

39.1. Num baralho de 40 cartas há 4 reis. Seja *A* o acontecimento "Saírem três reis". Como a extração é feita com reposição, tem-se que: $P(A)=\frac{4}{40}\times\frac{4}{40}\times\frac{4}{40}=\frac{1}{1000}=0{,}001$.

39.2. Num baralho de 40 cartas há 4 ases. Seja *B* o acontecimento "Saírem exatamente dois ases". Os ases podem sair na 1.ª e na 2.ª extração, sair na 1.ª e na 3.ª extração ou sair na 2.ª e na 3.ª extração (há 3 situações) e como a extração é feita com reposição, tem-se que:

$P(B)=3\times\left(\frac{36}{40}\times\frac{4}{40}\times\frac{4}{40}\right)=\frac{27}{1000}=0{,}027$

39.3. Num baralho de 40 cartas há 10 cartas de copas e 30 cartas que não são de copas. Seja *C* o acontecimento "Não sair qualquer carta de copas". Como a extração é feita com reposição, tem-se que: $P(C)=\frac{30}{40}\times\frac{30}{40}\times\frac{30}{40}=\frac{27}{64}$.

Pág. 90

40. Sejam *D* e *P* os acontecimentos:

D: "Ter a doença" e *P*: "O teste dar positivo".

Sabe-se que $P(P|D)=0{,}96$, $P\left(P|\overline{D}\right)=0{,}03$ e $P(D)=0{,}02$.

Donde se conclui que $P\left(\overline{P}|D\right)=0{,}04$, $P\left(\overline{P}|\overline{D}\right)=0{,}97$ e $P\left(\overline{D}\right)=0{,}98$.

40.1. $P(P)=P(D\cap P)+P(\bar{D}\cap P)=$

$=P(D)\times P(P|D)+P(\bar{D})\times P(P|\bar{D})$

$=0{,}02\times 0{,}96+0{,}98\times 0{,}03=$

$=0{,}0486$

40.2. $P(\bar{D}|P)=\dfrac{P(\bar{D}\cap P)}{P(P)}=\dfrac{0{,}02\times 0{,}96}{0{,}0486}\approx 0{,}6049$

41. Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A: "A Márcia ir ao cinema no próximo domingo"

B: "Chover no próximo domingo"

Sabe-se que $P(A)=0{,}4$; $P(A|B)=0{,}7$ e $P(B)=0{,}2$.

41.1. $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}7\times 0{,}2\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}14$

41.2. $P(\bar{B}\cap A)=P(A)-P(A\cap B)=0{,}4-0{,}14=0{,}26$

41.3. $P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0{,}26}{0{,}8}=0{,}325$

Pág. 91

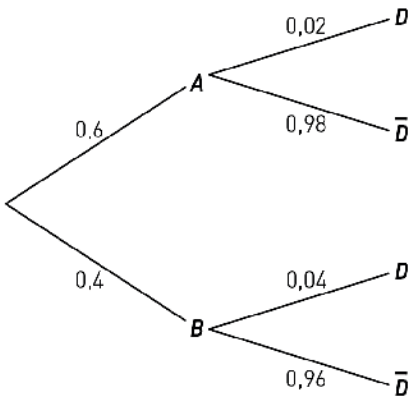
42.1. Seja *A* o acontecimento "Sair bola azul da caixa C_2".

$P(A)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{25}$

42.2. Seja *V* o acontecimento "Sair bola vermelha da caixa C_2".

$P(V)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{18}{25}$

43. Sejam *A*, *B* e *D*, respetivamente, os acontecimentos:
A: "A peça ser produzida pela máquina A"
B: "A peça ser produzida pela máquina B"
D: "A peça ter defeito"
A informação dada pode ser representada através de um diagrama em árvore.



43.1. $P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=$

$=P(A)\times P(D|A)+P(B)\times P(D|B)=$

$=0{,}6\times 0{,}02+0{,}4\times 0{,}04=0{,}028$

43.2. $P(B|\bar{D})=\dfrac{P(B\cap\bar{D})}{P(\bar{D})}=\dfrac{0{,}4\times 0{,}96}{1-0{,}028}=\dfrac{0{,}384}{0{,}972}=\dfrac{32}{81}$

43.3. $P(A|D)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(A)\times P(D|A)}{P(D)}=\dfrac{0{,}6\times 0{,}02}{0{,}028}=$

$=\dfrac{0{,}012}{0{,}028}=\dfrac{3}{7}$

Pág. 92

44.1. $1-P(A|B)\times P(B)=1-\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\times P(B)=1-P(A\cap B)=$

$=P(\overline{A\cap B})=P(\bar{A}\cup\bar{B})$

44.2. Sejam *A* e *B* os acontecimentos:

A: "O aluno ter Matemática"

B: "O aluno ser rapariga"

Sabe-se que $P(B)=0{,}6$ e $P(A|B)=0{,}25$. Aplicando o resultado demonstrado em **44.1.**, tem-se:

$P((\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A|B)\times P(B)=1-0{,}25\times 0{,}6=0{,}85\ (85\%)$

45.1. Se *A* e *B* são acontecimentos independentes, então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Logo, tem-se: $P(A)+P(B)\times P(\bar{A})=$

$=P(A)+P(B)\times(1-P(A))=P(A)+P(B)-P(B)\times P(A)=$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$

45.2. Se *A* e *B* são acontecimentos independentes então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Sendo $P(A)=\dfrac{2}{3}$ e $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$,

conclui-se que $P(B)=\dfrac{1}{6}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}$. Por **45.1.** tem-se:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\times P(\bar{A})=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{4}$.

Tarefa 4

1.1. O dado tem quatro faces verdes, numeradas com os números 1, 3, 4 e 6. Seja *V* o acontecimento "Sair face verde".

Como a probabilidade de sair a face com o número 1 é $\dfrac{1}{8}$ e as faces com a mesma cor têm igual probabilidade de ocorrer, tem-se: $P(V)=4\times P(1)=4\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$

1.2. Seja *A* o acontecimento "Sair face azul".

$P(A)=1-P(V)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

1.3. Seja B o acontecimento "Sair face com o número 4".

$$P(B|V)=\frac{P(B\cap V)}{P(V)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

1.4. Seja C o acontecimento "Sair face ímpar".

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{P(5)}{P(1)+P(3)+P(5)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

2.1. Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

$1-P(\overline{A})\times P(\overline{B})=$

$=1-(1-P(A))\times(1-P(B))=1-(1-P(B)-P(A)+P(A)\times P(B))=$

$=1-1+P(B)+P(A)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$

2.2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O sistema S_1 responder"

B: "O sistema S_2 responder"

Sabe-se que $P(A)=0{,}98$ e $P(B)=0{,}95$, logo $P(\overline{A})=0{,}02$ e $P(\overline{B})=0{,}05$. Utilizando o resultado provado na alínea anterior, tem-se que: $P(A\cup B)=1-P(\overline{A})\times P(\overline{B})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)=1-0{,}02\times 0{,}05\Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}99$.

3. Como C e D são acontecimentos independentes, então $P(C\cap D)=0{,}6\Leftrightarrow P(C)\times P(D)=0{,}6$.

Por outro lado,

$P(\overline{C}\cap\overline{D})=0{,}05\Leftrightarrow P(\overline{C\cup D})=0{,}05\Leftrightarrow P(C\cup D)=0{,}95\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(C)+P(D)-P(C\cap D)=0{,}95$.

Assim, tem-se:

$$\begin{cases}P(C)\times P(D)=0{,}6\\P(C)+P(D)-0{,}6=0{,}95\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P(C)\times P(D)=0{,}6\\P(C)+P(D)=1{,}55\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1{,}55P(C)-(P(C))^2=0{,}6\\P(D)=1{,}55-P(C)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-(P(C))^2+1{,}55P(C)-0{,}6=0\\P(D)=1{,}55-P(C)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(C)=0{,}8\ \vee\ P(C)=0{,}75\\P(D)=1{,}55-P(C)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P(C)=0{,}8\\P(D)=0{,}75\end{cases}\vee\begin{cases}P(C)=0{,}75\\P(D)=0{,}8\end{cases}$$

Conclusão:

$P(C)=0{,}8$ e $P(D)=0{,}75$ ou $P(C)=0{,}75$ e $P(D)=0{,}8$.

Pág. 93

Proposta 1

1.1.

a) $E=\{\text{azul, amarelo, vermelho, verde}\}$

b) $\#P(E)=2^4=16$

c) A experiência consiste em retirar do saco uma ficha ao acaso e observar a cor. Então, o conjunto que não pertence a $P(E)$ é $\{10, 25\}$. A opção correta é a **(D)**.

1.2.

a)

+	**10**	**25**	**25**	**50**	**50**	**100**
10		35	35	60	60	110
25	35		50	75	75	125
25	35	50		75	75	125
50	60	75	75		100	150
50	60	75	75	100		150
100	110	125	125	150	150	

$\Omega=\{35, 50, 60, 75, 100, 110, 125, 150\}$

b) $\#P(\Omega)=2^8=256$

Proposta 2

2.1. $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2.2. $\#P(\Omega)=2^{12}=4096$

2.3.

a) $B=\{2\}$. O acontecimento B é elementar porque $\#B=1$.

b) $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

O acontecimento C é certo porque $C=\Omega$.

c) $A=\{5, 10\}$. O acontecimento A é composto porque $\#A\geq 2$.

d) $D=\{\ \}$. O acontecimento D é impossível porque $D=\{\ \}$.

Pág. 94

Proposta 3

3.1. $A=\{3\}$. O acontecimento A é elementar porque $\#A=1$.

3.2. $B=\{2, 4\}$ e $C=\{1, 3\}$.

Os acontecimentos B e C são contrários porque $B\cap C=\{\ \}$ e $B\cup C=\Omega$.

3.3. $A\cap C=\{3\}\cap\{1, 3\}=\{3\}$.

Os acontecimentos A e C são compatíveis porque $A\cap C\neq\{\ \}$.

3.4. $A\cap B=\{3\}\cap\{2, 4\}=\{\ \}$ e $A\cup B=\{3\}\cap\{2, 4\}=\{2, 3, 4\}$

Os acontecimentos A e B são incompatíveis mas não contrários, porque $A\cap B=\{\ \}$ e $A\cup B\neq\Omega$.

Proposta 4

4.1.

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

O espaço amostral tem 16 elementos.

4.2. $A=\{11, 22, 33, 44\}$, $B=\{12, 14, 22, 24, 32, 34, 42, 44\}$, $C=\{11\}$ e $D=\{21, 31, 32, 41, 42, 43\}$. O único acontecimento elementar é o *C*.

4.3.

a) Por exemplo, os acontecimentos *A* e *B* são compatíveis porque $A\cap B\neq\{\ \}$.

Ora,

$A\cap B=\{11, 22, 33, 44\}\cap\{12, 14, 22, 24, 32, 34, 42, 44\}=$

$=\{22, 44\}$.

b) Por exemplo, os acontecimentos *A* e *D* são incompatíveis, porque:

$A\cap D=\{11, 22, 33, 44\}\cap\{21, 31, 32, 24, 41, 42, 43\}=\{\ \}$

4.4. A afirmação é falsa, pois $E\cup D\neq\Omega$. Falta considerar os números em que o algarismo das dezenas é igual ao algarismo das unidades.

Pág. 95

Proposta 5

Como *A* e *B* são incompatíveis $(A\cap B=\{\ \})$, então:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

Proposta 6

6.1. A tabela seguinte permite identificar os casos possíveis.

+	0,50	0,50	1	2
0,50		1	1,50	2,50
0,50	1		1,50	2,50
1	1,50	1,50		3
2	2,50	2,50	3	

Espaço amostral: $\Omega=\{1;\ 1,50;\ 2,50;\ 3\}$

6.2.

a) O acontecimento *D* é impossível.

b) Nenhum dos acontecimentos dados é certo.

c) O acontecimento *C* é possível mas não certo.

6.3. Os acontecimentos *B* e *E* são equiprováveis, porque têm a mesma probabilidade de ocorrer: $P(B)=P(E)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Proposta 7

7.1.

a) Os acontecimentos *B* e *C* são compatíveis porque $B\cap C\neq\{\ \}$.

Sabe-se que existem raparigas (4) que escolheram a opção de Física.

b) Por exemplo, os acontecimentos *A* e *B* são incompatíveis porque $A\cap B=\{\ \}$. Não existe nenhum aluno da turma que seja rapaz, com a opção de Física, e simultaneamente rapariga.

7.2.

a) Como $\#\Omega=12+3+4+10=29$ e $\#A=12$, então

$\#\overline{A}=\#\Omega-\#A=29-12=17$.

b) Como $\#\Omega=29$ e $\#B=4+10=14$, então

$\#\overline{B}=\#\Omega-\#B=29-14=15$.

7.3. Os acontecimentos *A* e *B* não são contrários, pois $A\cup B\neq\Omega$ (faltam os rapazes que escolheram a opção de Biologia).

Pág. 96

Proposta 8

8.1. $E=\{\text{vermelho, amarelo}\}$

8.2. Os acontecimentos elementares não são equiprováveis pois $P(\text{vermelho})=\frac{3}{5}$ e $P(\text{amarelo})=\frac{2}{5}$.

8.3.

a) $P(B)=\frac{3}{5}$

b) $P(\overline{A})=\frac{3}{5}$

c) $P(\overline{B})=\frac{2}{5}$

d) $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

e) $P(A\cup\overline{B})=\frac{3}{5}$

Proposta 9

9.1. Seja *A* o acontecimento "O casaco verde ficar num extremo".

$$P(A)=\frac{2\times 5!}{6!}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

9.2. Seja *B* o acontecimento "Os casacos azul e amarelo ficarem juntos".

$$P(B)=\frac{2!\times 5\times 4!}{6!}=\frac{1}{3}$$

Proposta 10

10.1.

a) Número de elementos do espaço amostral: $5 \times 4 = 20$.

b) Os casos favoráveis ao acontecimento *A*: "A bola amarela sai em 2.º lugar" são:
(verde, amarela); (vermelha, amarela); (preta, amarela); (azul, amarela).

c) $P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$

10.2.

a) Número de casos possíveis: $5 \times 5 = 25$

b) 1.º lugar 2.º lugar
5 $\times$ 1
Número de casos favoráveis ao acontecimento *C*: 5

c) $P(D)=\frac{5}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

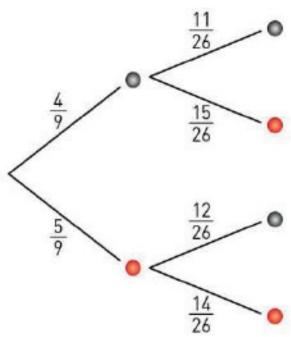
Pág. 97

Proposta 11

11.1. A probabilidade de retirar uma bola vermelha do saco é $\frac{5}{9}$; logo, como o saco só contém bolas vermelhas e pretas, a probabilidade de retirar uma bola preta é $\frac{4}{9}$. Seja x o número de bolas que há no saco; assim, tem-se: $\frac{4}{9}=\frac{12}{x} \Leftrightarrow x=27$. Portanto, no saco há 27 bolas.

11.2.

a) Recorrendo a um diagrama em árvore, tem-se:



Seja *A* o acontecimento "A primeira bola retirada ser preta e a segunda ser vermelha". $P(A)=\frac{4}{9}\times\frac{15}{26}=\frac{10}{39}$

b) Seja *B* o acontecimento "Retirar duas bolas da mesma cor".
$P(B)=\frac{4}{9}\times\frac{11}{26}+\frac{5}{9}\times\frac{14}{26}=\frac{19}{39}$

c) Seja *C* o acontecimento "Retirar duas bolas de cores distintas".
$P(C)=\frac{4}{9}\times\frac{15}{26}+\frac{5}{9}\times\frac{12}{26}=\frac{20}{39}$

Proposta 12

12. Para conhecer todos os casos possíveis pode recorrer-se a uma tabela de dupla entrada.

	1	2	3	4
1		12	13	14
2	21		23	24
3	31	32		34
4	41	42	43	

Os acontecimentos *A*, *B*, *C* e *D* podem ser definidos pelos seguintes conjuntos:

$A=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$;

$B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$;

$C=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$;

$D=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$.

12.1.

a) $A\cap C=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$

b) $B\cap D=\{(1,3),(3,1)\}$

c) $A\cup C=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

d) $\overline{A}\cap C=\{(4,1),(4,2),(4,3)\}$

12.2. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{5}{6}$; $P(C)=\frac{1}{2}$; $P(D)=\frac{1}{3}$.

Proposta 13

A probabilidade de selecionar dois vértices ao acaso e estes definirem uma reta que passa pelo centro é:

$P=\frac{4}{{}^{8}C_2}=\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$.

A opção correta é a **(A)**.

Pág. 98

Proposta 14

14.1. $P=\frac{1\times1+2\times1}{5\times3}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

14.2. A soma dos números das fichas é ímpar se uma das fichas retiradas for par e a outra for ímpar.

$P=\frac{2\times2+3\times1}{5\times3}=\frac{7}{15}$

Proposta 15

15.1. Na tabela seguinte pode-se identificar todos os casos possíveis.

+	0,20	0,20	0,50	0,50	1
0,20		0,40	0,70	0,70	1,20
0,20			0,70	0,70	1,20
0,50				1	1,50
0,50					1,50
1					

Por observação da tabela, conclui-se que a probabilidade de as duas moedas retiradas pela Rute totalizarem um valor igual ao que tem de pagar, ou seja, 1,20 €, é $P=\frac{2}{10}=0{,}2$.

15.2. A probabilidade de as duas moedas retiradas pela Rute totalizarem um valor inferior ao que tem de pagar é $P=\frac{6}{10}=$

$=0{,}6$.

Proposta 16

16.1.

a) Seja A o acontecimento "Saírem duas bolas roxas".

$P(A)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

b) Seja B o acontecimento "Saírem bolas de cores diferentes".

$P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

c) Seja C o acontecimento "Sair pelo menos uma bola roxa".
O acontecimento contrário de C é "Não sair nenhuma bola roxa".

$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

16.2. Seja D o acontecimento "Saírem bolas da mesma cor".
Como não há reposição da primeira bola, há duas situações favoráveis ao acontecimento D: saírem duas bolas roxas ou duas bolas vermelhas.

Assim sendo, $P(D)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$.

Pág. 99

Proposta 17

17.1. Seja A o acontecimento "Os rapazes ficarem juntos".

$P(A)=\frac{4!\times 7!}{10!}=\frac{1}{30}$

17.2. Seja B o acontecimento "Os rapazes ficarem juntos e as raparigas também".

$P(B)=\frac{4!\times 6!\times 2}{10!}=\frac{1}{105}$

17.3. Seja C o acontecimento "Pelo menos um dos extremos ser ocupado por uma rapariga". O acontecimento contrário de C é "Os extremos serem ocupados por dois rapazes".

$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{4\times 3\times 8!}{10!}=1-\frac{12}{90}=\frac{13}{15}$

Proposta 18

18.1. Seja A o acontecimento "Os algarismos que formam o número serem números primos". Há quatro números primos inferiores a 10: 2, 3, 5 e 7.

$P(A)=\frac{4\times 3\times 2}{9\times 9\times 8}=\frac{3}{81}=\frac{3}{27}$

18.2. Seja B o acontecimento "O número ser par". O número pode terminar em zero ou não terminar em zero (terminar em 2, 4, 6 ou 8).

$P(B)=\frac{9\times 8\times 1+8\times 8\times 4}{9\times 9\times 8}=\frac{41}{81}$

18.3. Seja C o acontecimento "O produto dos algarismos ser zero". O produto dos algarismos é zero se o algarismo das dezenas ou o algarismo das unidades for igual a zero.

$P(C)=\frac{9\times 1\times 8+9\times 8\times 1}{9\times 9\times 8}=\frac{2}{9}$

18.4. Seja D o acontecimento "O número ser maior do que 600". O número é maior do que 600 se o algarismo das centenas for 6, 7, 8 ou 9.

$P(D)=\frac{4\times 9\times 8}{9\times 9\times 8}=\frac{4}{9}$

Proposta 19

O triângulo pode ter 2 vértices pertencentes a r e 1 vértice pertencente a s ou ter 1 vértice pertencente a r e 2 vértices pertencentes a s. O número de maneiras de o fazer é dado por:
${}^{3}C_{2}\times{}^{5}C_{1}+{}^{3}C_{1}\times{}^{5}C_{2}=45$.
A opção correta é a **(D)**.

Proposta 20

20.1. Seja A o acontecimento "Os dois vértices serem extremos de uma aresta". O cubo tem 8 vértices e 12 arestas.

Então, $P(A)=\frac{12}{{}^{8}C_{2}}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$.

20.2. Seja B o acontecimento "Os dois vértices não pertencerem à mesma aresta".

Então, $P(B)=1-\frac{4}{4\times 4}=\frac{3}{4}$.

Pág. 100

Proposta 21

Escolhidos, ao acaso, dois vértices do prisma, sabe-se que eles pertencem sempre a faces opostas. Então, a probabilidade pedida é igual a 1. A opção correta é a **(A)**.

Proposta 22

O produto dos números das bolas extraídas é igual a zero se pelo menos uma das bolas tiver o número 0, isto é, se retirarmos uma bola com o número 0 e duas com números diferentes de 0 (o número de possibilidades é dado por $2\times {}^{8}C_2$) ou se retirarmos as duas bolas com o número 0 e outra com um número diferente de 0 (há 8 possibilidades). O número de casos favoráveis é $2\times {}^{8}C_2+8$ e o número de casos possíveis é ${}^{10}C_3$ (número de maneiras de retirar 3 bolas de um conjunto de 10).
A opção correta é a **(B)**.

Proposta 23

23.1. $S=4096 \Leftrightarrow 2^n=4096 \Leftrightarrow 2^n=2^{12} \Leftrightarrow n=12$
Essa linha tem 13 elementos, sendo os seis primeiros e os seis últimos iguais. Seja A o acontecimento "Os dois elementos escolhidos serem iguais".
Então, $P(A)=\frac{6}{{}^{13}C_2}=\frac{6}{78}=13$.

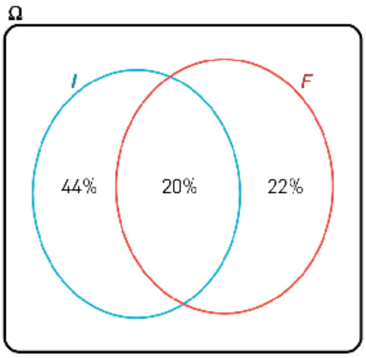
23.2. Seja B o acontecimento "A soma dos números ser maior que 2". O acontecimento contrário de B é "A soma dos números ser igual a 2".

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{{}^{13}C_2}=1-\frac{1}{78}=\frac{77}{78}$.

Proposta 24

24.1.

a) Consideremos os acontecimentos I: "Falar Inglês" e F: "Falar Francês".
Recorrendo a um diagrama de Venn tem-se:



Assim, $P(I\cap F)=20\%$.

b) $P(I\cap\overline{F})=44\%$

c) $P(I\cup F)=44\%+20\%+22\%=86\%$

24.2.

a) Número de jovens que falavam as duas línguas:
$150\times 0{,}2 = 30$

b) Número de jovens que falavam apenas Francês:
$150\times 0{,}22 = 33$

Pág. 101

Proposta 25

Como A, B e C são os acontecimentos elementares, então são incompatíveis. Logo, $P(\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{B\cup C})=1-P(B\cup C)=$
$=1-P(B)-P(C)=P(A)=0{,}2$.

Proposta 26

26.1. $P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A\cap B)=P(\overline{A\cup B})-P(A\cap B)=$
$=1-P(A\cup B)-P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)-P(A\cap B)$
$=P(\overline{A})-P(B)$

26.2. Sejam A e B os acontecimentos A: "Sair um ás" e B: "Sair uma carta de copas". Sabe-se que $P(A)=0{,}15$, $P(B)=0{,}25$ e $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}65$.

Aplicando a igualdade demonstrada em **26.1.**, tem-se:
$P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A\cap B)=P(\overline{A})-P(B)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0{,}65-P(A\cap B)=0{,}85-0{,}25\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}05$

Proposta 27

27.1. $P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)=$
$=P(\overline{A})+P(B)-\left[P(B)-P(A\cap B)\right]=P(\overline{A})+P(A\cap B)$.

27.2. Sejam A e B os acontecimentos A: "Ser rapariga" e B: "Ser filho único". Sabe-se que $P(A\cap B)=0{,}12$ e $P(\overline{A}\cup B)=0{,}68$.
Aplicando a igualdade demonstrada em **27.1.**, tem-se:
$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(A\cap B)\Leftrightarrow 0{,}68=P(\overline{A})+0{,}12\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(\overline{A})=0{,}56$.

Proposta 28

$P(\overline{A\cup B})=0{,}2\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0{,}2\Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}8\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}8\Leftrightarrow 0{,}7+0{,}4-P(A\cap B)=0{,}8\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}3$
A opção correta é a **(A)**.

Pág. 102

Proposta 29

29.1. $P(A\cup B)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-P(A\cap B)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{9}{10}-\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{20}$
Como $P(A\cap B)\neq 0$, conclui-se que os acontecimentos A e B são compatíveis.

29.2. $P(A\cup C)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-P(A\cap C)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow P(A\cap C)=\frac{5}{60}-\frac{5}{6}\Leftrightarrow P(A\cap C)=0$

Como $P(A\cap C)=0$, conclui-se que os acontecimentos *A* e *C* não são compatíveis, isto é, são incompatíveis.

Proposta 30

30.1.

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}3+0{,}35-0{,}15=0{,}5$

b) $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0{,}35-0{,}15=0{,}2$

30.2. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}5=0{,}5$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})\neq 0$, conclui-se que os acontecimentos $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são compatíveis.

Proposta 31

31.1. Seja *A* o acontecimento "O candidato ser homem e ter passado à fase seguinte".

$P(A)=\frac{60}{160}=\frac{3}{8}$

31.2. Seja *B* o acontecimento "O candidato ser mulher, sabendo que passou à fase seguinte".

$P(B)=\frac{48}{108}=\frac{4}{9}$

Pág. 103

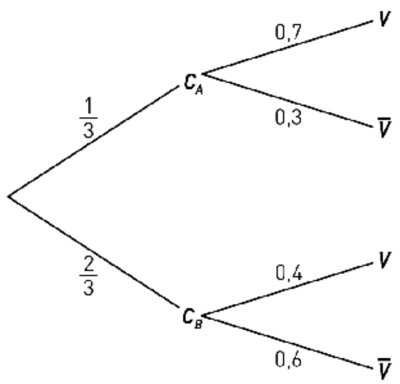
Proposta 32

$\overline{B}\,|\,A$: "É do sexo masculino sabendo que tem curso superior".
Sabe-se que há 14 colaboradores que têm curso superior e, desses, 5 são do sexo masculino. Assim, $P(\overline{B}\,|\,A)=\frac{5}{14}$.

A opção correta é a **(B)**.

Proposta 33

33.1. Consideremos os acontecimentos *A*: "Retirar uma bola da caixa A", *B*: "Retirar uma bola da caixa B" e *V*: "Retirar uma bola vermelha". A informação pode ser organizada no seguinte diagrama em árvore:



$P(V\,|\,C_B)=0{,}4$

33.2. $P(C_A\cap V)=P(C_A)\times P(V\,|\,C_A)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{30}$

Proposta 34

34.1. Consideremos os acontecimentos *C*: "Residir no concelho", *M*: "Ser mulher" e *H*: "Ser homem". Sabe-se que $P(C)=0{,}65$,

$P(M\,|\,\overline{C})=0{,}2$ e $P(H\,|\,C)=0{,}55$.

$P(H\cap C)=P(C)\times P(H\,|\,C)=0{,}65\times 0{,}55=0{,}3575$

34.2. $P(M)=P(M\cap C)+P(M\cap\overline{C})=$

$=P(C)\times P(M\,|\,C)+P(\overline{C})\times P(M\,|\,\overline{C})=$

$=0{,}65\times(1-0{,}55)+0{,}35\times 0{,}2=0{,}3625$

34.3. $P(C\,|\,M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{0{,}65\times(1-0{,}55)}{0{,}3625}=\frac{117}{145}$

Pág. 104

Proposta 35

35.1. $P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cup B))=$

$=1-0{,}5-0{,}3+0{,}6=0{,}8$.

A opção correta é a **(D)**.

35.2. $P((A\cup B)\,|\,A)=\frac{P((A\cup B)\cap A)}{P(A)}=\frac{P((A\cap A)\cup(B\cap A))}{P(A)}=$

$=\frac{P(A\cup(B\cap A))}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$.

A opção correta é a **(A)**.

Proposta 36

Designemos por *n* o número de bolas verdes existentes no saco.

$P(B\,|\,\overline{A})=\frac{4}{7}\Leftrightarrow\frac{n-1}{14}=\frac{4}{7}\Leftrightarrow n-1=8\Leftrightarrow n=9$

Então, o saco tinha 9 bolas verdes e 6 bolas pretas.
A opção correta é a **(C)**.

Proposta 37

37.1. Consideremos os acontecimentos *A*, *B* e *D*, definidos, respetivamente, por:
A: "A peça ser produzida pela máquina A"
B: "A peça ser produzida pela máquina B"
D: "A peça ter defeito"
Recorrendo a uma tabela de dupla entrada tem-se:

	A	B	Total
D	7	12	19
$\overline{D}$	273	388	661
Total	280	400	680

Assim, $P(B)=\frac{400}{680}\approx 0{,}5882\quad(58{,}82\%)$.

37.2. $P(\overline{D}\cap A)=\dfrac{273}{680}\approx 0{,}4015 \quad (40{,}15\%)$

37.3. $P(\overline{D}\,|\,A)=\dfrac{273}{280}\approx 0{,}9750 \quad (97{,}50\%)$

37.4. $P(\overline{D})=\dfrac{661}{680}\approx 0{,}9721 \quad (97{,}21\%)$

37.5. $P(A\,|\,D)=\dfrac{7}{19}\approx 0{,}3684 \quad (36{,}84\%)$

Pág. 105

Proposta 38

38.1. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0{,}73 \Leftrightarrow P(\overline{A\cap B})=0{,}73 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=0{,}73 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}27$

$P(A)\times P(B)=0{,}45\times 0{,}6=0{,}27$

Os acontecimentos *A* e *B* são independentes, porque $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

38.2. $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=$

$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-(0{,}45+0{,}6-0{,}27)=0{,}22=$

$=\dfrac{22}{100}=\dfrac{11}{50}$

Proposta 39

39.1. Se a soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é igual a 64, então tem-se: $2^n=64 \Leftrightarrow 2^n=2^6 \Leftrightarrow n=6$.
Essa linha do triângulo de Pascal tem 7 elementos, que são:
${}^6C_0;\ {}^6C_1;\ {}^6C_2;\ {}^6C_3;\ {}^6C_4;\ {}^6C_5;\ {}^6C_6$, ou seja,
$1\ ;\ 6\ ;\ 15\ ;\ 35\ ;\ 15\ ;\ 6\ ;\ 1$.

Assim, a probabilidade de retirar duas bolas do saco e terem o mesmo número é: $P=\dfrac{3}{{}^7C_2}=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$.

39.2.

a) Se sair a bola correspondente ao elemento central da linha, então de certeza que a outra bola tem um número diferente. Logo, $P(C\,|\,A)=1$.

b) Se os números das bolas retiradas são iguais, então há três casos possíveis (saírem as duas bolas com o número 1 ou as duas bolas com o número 6 ou as duas bolas com o número 15). Desses três casos, apenas um é favorável ao acontecimento *B* (saírem as duas bolas com o número 1). Assim sendo, $P(B\,|\,\overline{C})=\dfrac{1}{3}$.

Proposta 40

40.1. $P((\overline{A\cap B})\,|\,A)=\dfrac{P((\overline{A\cap B})\cap A)}{P(A)}=\dfrac{P((\overline{A}\cup\overline{B})\cap A)}{P(A)}=$

$=\dfrac{P((\overline{A}\cap A)\cup(\overline{B}\cap A))}{P(A)}=\dfrac{P(\varnothing\cup(\overline{B}\cap A))}{P(A)}=\dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=P(\overline{B}\,|\,A)$

40.2. $P((A\cup\overline{B})\,|\,B)=\dfrac{P((A\cup\overline{B})\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P((A\cap B)\cup(A\cap B))}{P(B)}=$

$=\dfrac{P((\overline{A}\cap A)\cup(\overline{B}\cap B))}{P(B)}=\dfrac{P((A\cap B)\cup\varnothing)}{P(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A\,|\,B)$

40.3. $P((\overline{A\cup B})\,|\,B)=\dfrac{P((\overline{A\cup B})\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P((\overline{A}\cap\overline{B})\cap B)}{P(B)}=$

$=\dfrac{P(\overline{A}\cap(\overline{B}\cap B))}{P(B)}=\dfrac{P(\overline{A}\cap\varnothing)}{P(B)}=\dfrac{P(\varnothing)}{P(B)}=\dfrac{0}{P(B)}=0$

Proposta 41

41.1. $P(\overline{B\cup A})-P(\overline{B})=1-P(B\cup A)-(1-P(B))=$

$=1-(P(B)+P(A)-P(B\cap A))-1+P(B)=$

$=-P(B)-P(A)+P(B\cap A)+P(B)=P(B\cap A)-P(A)=$

$=P(A)\times\left(\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}-1\right)=P(A)\times(P(B\,|\,A)-1)$

41.2. Recorrendo à igualdade provada em **41.1**, tem-se:

$P(A)\times(P(B\,|\,A)-1)=P(\overline{B\cup A})-P(\overline{B})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}7\times(P(B\,|\,A)-1)=0{,}15-0{,}55\Leftrightarrow 0{,}7\times P(B\,|\,A)-0{,}7=-0{,}4$

$\Leftrightarrow P(B\,|\,A)=\dfrac{0{,}3}{0{,}7}\Leftrightarrow P(B\,|\,A)=\dfrac{3}{7}$

Como $P(B\,|\,A)\neq P(B)$, conclui-se que os acontecimentos *A* e *B* não são independentes.

Pág. 106

Proposta 42

42.1. Seja *A* o acontecimento "Saírem três números consecutivos". Há 10 casos favoráveis à saída de três números consecutivos por ordem crescente:

1, 2, 3	2, 3, 4	3, 4, 5	4, 5, 6	5, 6, 7
6, 7, 8	7, 8, 9	8, 9, 10	9, 10, 11	10, 11, 12

De modo análogo se conclui que existem 10 casos favoráveis à saída de três números consecutivos por ordem decrescente.

Então, $P(A)=\dfrac{10+10}{12^3}=\dfrac{20}{1728}=\dfrac{5}{432}$.

42.2. Seja *B* o acontecimento "O produto dos números observados ser 12".

Sabe-se que:

- $1\times1\times12=12$ (há 3 casos, pois a ordem de saída dos números interessa),
- $1\times2\times6=12$ (há 3! = 6 casos),
- $1\times3\times4=12$ (também há 3! = 6 casos) e
- $2\times2\times3=12$ (há outros 3 casos).

Então, $P(B)=\dfrac{3+6+6+3}{12^3}=\dfrac{18}{1728}=\dfrac{1}{96}$.

Proposta 43

43.1. O desenvolvimento da expressão $(x-1)^{10}$ tem 11 termos.

$(x-1)^{10}=1x^{10}+10x^9\times(-1)+45x^8\times(-1)^2+120x^7\times(-1)^3+$

$+210x^6\times(-1)^4+252x^5\times(-1)^5+210x^4\times(-1)^6+120x^3\times(-1)^7+$

$+45x^2\times(-1)^8+10x\times(-1)^9+1(-1)^{10}=x^{10}-10x^9+45x^8-$

$-120x^7+210x^6-252x^5+210x^4-120x^3+45x^2-10x+1$

Das 11 parcelas deste desenvolvimento, há 6 que têm grau inferior a 6. Seja *A* o acontecimento "As duas parcelas escolhidas terem ambas grau inferior a 6".

Então, $P(A)=\frac{{}^6C_2}{{}^{11}C_2}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$.

43.2. Seja *B* o acontecimento "O produto das duas parcelas escolhidas é negativo". Das 11 parcelas do desenvolvimento de $(x-1)^{10}$, $x>0$, há 6 positivas e 5 negativas. O produto de duas parcelas é negativo quando elas têm sinais contrários.

Então, $P(B)=\frac{{}^6C_1\times{}^5C_1}{{}^{11}C_2}=\frac{30}{55}=\frac{6}{11}$.

Proposta 44

Sabe-se que o dado está viciado e que a probabilidade de obter cada um dos números é diretamente proporcional ao próprio número. Designando por *x* a probabilidade de sair o número 1, tem-se $P(1)=x$, $P(2)=2x$, $P(3)=3x$, $P(4)=4x$, $P(5)=5x$ e $P(6)=6x$.

Ora, $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$.

Então, tem-se: $x+2x+3x+4x+5x+6x=1\Leftrightarrow 21x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{21}$.

Seja *A* o acontecimento "Obter um número par".

Então, $P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$.

Proposta 45

$P(B\cup\bar{A})-P(\bar{B}\mid A)\times P(\bar{A})=$

$=P(B)+P(\bar{A})-P(B\cap\bar{A})-\frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}\times P(\bar{A})$

$=P(B)+P(\bar{A})-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)-\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}\times P(\bar{A})$

$=P(B)+P(\bar{A})-P(B)+P(A\cap B)-\left(1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\right)\times P(\bar{A})$

$=P(\bar{A})+P(A\cap B)-P(\bar{A})+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\times P(\bar{A})=$

$=P(A\cap B)+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}-P(A\cap B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B\mid A)$

Proposta 46

46.1. O produto das coordenadas de um ponto do plano é positivo se o ponto se situar no 1.º ou no 3.º quadrante e é negativo se o ponto se situar no 2.º ou no 4.º quadrante. Seja *A* o acontecimento "O produto das coordenadas de pelo menos um dos três pontos escolhidos ser positivo".

Como nenhuma das coordenadas dos oito pontos assinalados é nula, tem-se: $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{{}^3C_3}{{}^8C_3}=1-\frac{1}{56}=\frac{55}{56}$.

46.2. Designemos por *n* o número de pontos acrescentados no 1.º quadrante.

$P(B\mid A)=0{,}8\Leftrightarrow\frac{n+2}{n+5}=0{,}8\Leftrightarrow n+2=0{,}8n+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}2n=2\Leftrightarrow n=10$

Então, para que $P(B\mid A)=0{,}8$, devem ser acrescentados 10 pontos no 1.º quadrante.

Pág. 110

Questões de exame

1. Seja *A* o acontecimento "Pelo menos uma das pessoas registar o número 4". O acontecimento contrário de *A* é "Nenhuma das pessoas registar o número 4".

$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=1-\frac{15}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

A opção correta é a **(A)**.

2. Seja *B* o acontecimento "O código ter exatamente três zeros".

$P(B)=\frac{{}^4C_3\times 9}{10^4}=\frac{36}{10000}=0{,}0036$

A opção correta é a **(C)**.

3. Seja *C* o acontecimento "O João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro". O acontecimento contrário de *C* é "O João e a Margarida ficarem sentados um ao lado do outro".

$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{2!\times 6!}{7!}=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

A opção correta é a **(D)**.

4. Seja *D* o acontecimento "A rifa premiada ter um único algarismo cinco". $P(D)=\frac{{}^3C_1\times 9^2}{10^3}=\frac{243}{1000}\approx 0{,}24$

5. $1+n+n+1=20\Leftrightarrow n=9$

Essa linha tem 10 elementos, a saber: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9 e 1. Seja *E* o acontecimento "O elemento escolhido, dessa linha, ser par". Então, $P(E)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

A opção correta é a **(C)**.

Pág. 111

6. Como o penúltimo elemento é 111, sabe-se que essa linha tem 112 elementos (pois $n=111$). Ora, os quatro primeiros elementos dessa linha são:

${}^{111}C_0=1$, ${}^{111}C_1=111$, ${}^{111}C_2=6105$ e ${}^{111}C_3=221\,815$.

Então, só existem 6 elementos dessa linha que são inferiores a 10^5 (os 3 primeiros e os 3 últimos). Assim sendo, a probabilidade de um elemento dessa linha, escolhido ao acaso, ser superior a 10^5 é: $P=\frac{106}{112}=\frac{53}{56}$.

A opção correta é a (B).

7.1. $2!\times {}^{17}C_4 = 114\ 240$

7.2. Seja A o acontecimento "Os três vértices escolhidos pertencerem todos a uma mesma face".

$$P(A)=\frac{2\times {}^5C_3+5\times {}^4C_3}{{}^{10}C_3}=\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$$

7.3. Seja B o acontecimento "O segmento de reta definido pelos dois vértices escolhidos ser diagonal de uma face".

$$P(B)=\frac{2\times 5}{5\times 5}=\frac{2}{5}$$

8. Seja C o acontecimento "Serem escolhidos, exatamente, os três amigos".

$$P(C)=\frac{{}^3C_3}{{}^{10}C_3}=\frac{1}{{}^{10}C_3}.$$

A opção correta é a **(C)**.

9. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=$

$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cup B))=1-(0,4+0,3-0,5)=0,8$

A opção correta é a **(C)**.

Pág. 112

10. $P(B|A)\geq 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}\Leftrightarrow P(B|A)\times P(A)\geq P(A)-1+P(B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)\geq P(A)-1+P(B)\Leftrightarrow 1\geq P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1\geq P(A\cup B)$

Como a proposição $1\geq P(A\cup B)$ é verdadeira, conclui-se que a proposição $P(B|A)\geq 1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}$ também é verdadeira.

11. $P(B|\overline{A})=0,8\Leftrightarrow \dfrac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=0,8\Leftrightarrow \dfrac{P(B)-P(B\cap A)}{0,6}=0,8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)-0,2=0,48\Leftrightarrow P(B)=0,68$

A opção correta é a **(C)**.

12. $P(A\cup\overline{B})-1+P(B)=P(\overline{\overline{A}\cap B})-1+P(B)=$

$=1-P(\overline{A}\cap B)-1+P(B)=P(B)-P(\overline{A}\cap B)=P(A\cap B)=$

$=P(A)\times P(B|A)$

13.1. $P(A)\times[P(B|A)-1]+P(\overline{A}\cup\overline{B})=$

$=P(A)\times P(B|A)-P(A)+P(\overline{A\cap B})=$

$=P(B\cap A)-P(A)+1-P(A\cap B)=$

$=P(A\cap B)-P(A)+1-P(A\cap B)=$

$=1-P(A)=P(\overline{A})$

13.2. Consideremos os acontecimentos A: "O atleta é português" e B: "O atleta é do sexo feminino".

Sabe-se que $P(B|A)=0,5$ e $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,9$, e pretende-se determinar $P(A)$. De acordo com a igualdade demonstrada em **15.1.**, tem-se:

$P(A)\times[P(B|A)-1]+P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)\times(0,5-1)+0,9=1-P(A)\Leftrightarrow -0,5P(A)+P(A)=1-0,9$

$\Leftrightarrow 0,5P(A)=0,1\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{0,1}{0,5}\Leftrightarrow P(A)=\dfrac{1}{5}$

Como $\dfrac{1}{5}\times 200=40$, conclui-se que participam no encontro 40 atletas portugueses.

14. $P(\overline{A}\cup(A\cap\overline{B}))=P((\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))=P(\Omega\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))=$

$=P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

A opção correta é a **(D)**.

Pág. 113

15. Há 4 bolas com número par (2, 4, 6 e 8) e dessas apenas 2 são pretas (2 e 4). Logo, $P(A|B)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. A opção correta é a **(B)**.

16.1. Como o saco contém n bolas numeradas de 1 a n e n é um número par maior do que 3, sabe-se que metade das bolas tem número par e a outra metade tem número ímpar, ou seja, no saco há $\dfrac{n}{2}$ bolas com número par e $\dfrac{n}{2}$ bolas com número ímpar.

Assim sendo, retirando três bolas do saco, em simultâneo e ao acaso, a probabilidade de duas serem pares e uma ter número ímpar é dada pela seguinte expressão: $\dfrac{{}^{\frac{n}{2}}C_2\times {}^{\frac{n}{2}}C_1}{{}^nC_3}=\dfrac{{}^{\frac{n}{2}}C_2\times \frac{n}{2}}{{}^nC_3}$.

16.2. No contexto da situação descrita, $P(A\cap B)$ é a probabilidade de as duas bolas extraídas terem ambas número par. No caso de a extração ser feita com reposição, tem-se:

$P(B|A)=\dfrac{4}{8}$ e $a=P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=\dfrac{4}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

No caso de a extração ser feita sem reposição, tem-se:

$P(B|A)=\dfrac{3}{7}$ e $b=P(A\cap B)=P(B|A)\times P(A)=\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{14}$.

Pág. 114

Avaliar – 1.ª Parte

1. Seja A o acontecimento "Os três amigos terem escolhido a mesma atividade". Então, $P(A)=\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$.

A opção correta é a **(C)**.

2. Se a pirâmide tem 20 arestas, então a base é um polígono com 10 lados. Portanto, a pirâmide tem 11 vértices $(10+1)$. Seja B o acontecimento "Os vértices escolhidos serem os extremos de uma aresta lateral da pirâmide". Então, $P(B)=\frac{10}{^{11}C_2}=\frac{10}{55}=\frac{2}{11}$.

A opção correta é a **(A)**.

3. Seja C o acontecimento "Os dois ases ficarem lado a lado".

Então, $P(C)=\frac{2!\times 4!}{5!}$.

A opção correta é a **(B)**.

4. Sejam os acontecimentos A: "Retirar uma bola do saco A" e V: "Retirar uma bola vermelha".

$$P(V)=P(A\cap V)=P(A)\times P(V\mid A)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}=0{,}4\quad(40\%)$$

A opção correta é a **(D)**.

Pág. 115

Avaliar – 2.ª Parte

1.1. Seja A o acontecimento "As quatro fichas ficarem na mesma linha". Então, $P(A)=\frac{3\times 4!}{^{12}A_4}=\frac{72}{11880}=\frac{1}{165}$.

1.2. Seja B o acontecimento "Ficarem duas colunas sem fichas".

Então, $P(A)=\frac{^4C_2\times {}^6A_4}{^{12}A_4}=\frac{2160}{11880}=\frac{2}{11}$.

2.1. $P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A\cap B})=1-P(A)+1-P(B)-(1-P(A\cap B))$

$=2-P(A)-P(B)-1+P(A\cap B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=1-P(A\cup B)=P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$

2.2. Sejam A e B os acontecimentos:
A: "A mãe responder"
B: "O pai responder"
Sabe-se que $P(A)=0{,}7$; $P(B)=0{,}35$ e $P(A\cap B)=0{,}15$.

Donde se conclui que $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}7=0{,}3$;

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}35=0{,}65$ e

$P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0{,}15=0{,}85$.

Usando a igualdade provada em **2.1.**, tem-se:

$P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})\Leftrightarrow 0{,}3+0{,}65-0{,}85=$

$=P(\overline{A}\cap\overline{B})\Leftrightarrow 0{,}1=P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Então, a probabilidade de ambos, pai e mãe, não responderem, é igual a 0,1.

3.1. Este sistema permite $10^4=10\,000$ códigos diferentes.

3.2.

a) Seja A o acontecimento "O código ter os algarismos todos diferentes e representar um número maior do que 999".
Como o código tem de representar um número maior do que 999, o algarismo das unidades de milhar não pode ser 0.
Sabe-se ainda que o código tem de ter os algarismos todos diferentes.

Então, $P(A)=\frac{9\times 9\times 8\times 7}{10\,000}=\frac{4536}{10\,000}=0{,}4536$.

b) Seja B o acontecimento "O código ter exatamente dois 3".

Então, $P(B)=\frac{^4C_2\times 9^2}{10\,000}=\frac{486}{10\,000}=0{,}0486$.

4.1.

a) Sejam A e F os acontecimentos:

A: "Pertencer à turma A"

F: "Ser rapariga"

Há 36 participantes no Clube de Teatro $(5+8+7+4+6+6)$.

$P(F\cap\overline{A})=\frac{4+6}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

b) Seja C o acontecimento "Pertencer à turma C".

$P(\overline{F}\mid\overline{C})=\frac{5+7}{36-12}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

c) Seja B o acontecimento "Pertencer à turma B".

$P(B\mid\overline{F})=\frac{7}{5+7+6}=\frac{7}{18}$

4.2. Designemos por n o número de rapazes da turma A que não pertencem ao Clube de Teatro.

Número de alunos da turma A:

$5+8+4+n$, ou seja, $17+n$.

$\frac{n}{17+n}=0{,}32\Leftrightarrow\frac{n}{17+n}=\frac{32}{100}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100n=544+32n\Leftrightarrow 68n=544\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\frac{544}{68}\Leftrightarrow n=8$

Então, a turma A tem 25 alunos $(17+8)$.

Pág. 119

1.1. $u_n \notin \left]2{,}8\,;3{,}2\right[\Leftrightarrow u_n \notin \left]3-0{,}2\,;3+0{,}2\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |u_n - 3| \geq 0{,}2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{3n-5}{n+1} - 3\right| \geq 0{,}2 \Leftrightarrow \dfrac{8}{n+1} \geq \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n+1 \leq 40 \Leftrightarrow n \leq 39$

Há 39 termos da sucessão (u_n) que não pertencem ao intervalo $\left]2{,}8\,;3{,}2\right[$.

1.2. $u_n \in V_{0{,}01}(3) \Leftrightarrow u_n \in \left]3-0{,}01\,;3+0{,}01\right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |u_n - 3| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\dfrac{3n-5}{n+1} - 3\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{8}{n+1} < 0{,}01 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > 799$.

A menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) pertencem à vizinhança $V_{0{,}01}(3)$ é a ordem 800.

2.1. Pretende-se provar, pela definição, que $\lim\,(2+3n) = +\infty$, ou seja, que:

Para todo o $L>0$, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow 2+3n > L$.

$2+3n > L \Leftrightarrow n > \dfrac{L-2}{3}$

Basta considerar $p \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad p > \dfrac{L-2}{3}$.

2.2. Pretende-se mostrar que $\lim\, v_n = -\dfrac{3}{4}$, ou seja, que:

Para todo o $\delta > 0$ existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$n \geq p \Rightarrow \left|v_n - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right| < \delta$.

$\left|v_n + \dfrac{3}{4}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\dfrac{3n}{1-4n} + \dfrac{3}{4}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{4-16n}\right| < \delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{-4+16n} < \delta \Leftrightarrow n > \dfrac{3+4\delta}{16\delta}$

Basta considerar p o menor número natural que é maior que $\dfrac{3+4\delta}{16\delta}$.

Tarefa 1

1.1. $|u_n - 2| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < 0{,}01 \Leftrightarrow n > 100$

O menor valor de p que verifica a condição $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < 0{,}01$ é o 101.

1.2. $u_n \notin \left]2-0{,}025\,;2+0{,}025\right[\Leftrightarrow |u_n - 2| \geq 0{,}025 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| \geq 0{,}025 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} \geq 0{,}025 \Leftrightarrow n \leq 40$

Há 40 termos da sucessão (u_n) que não pertencem ao intervalo $\left]2-0{,}025\,;2+0{,}025\right[$.

1.3. Pretende-se mostrar que para qualquer $\delta > 0$ existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow |u_n - 2| < \delta$.

$|u_n - 2| < \delta \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| < \delta \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\delta}$

Basta considerar p o menor número natural que é maior que $\dfrac{1}{\delta}$.

2.1. Pretende-se provar que para todo o $L>0$, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow v_n > L$.

$v_n > L \Leftrightarrow 3n+5 > L \Leftrightarrow n > \dfrac{L-5}{3}$

Basta considerar $p \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad p > \dfrac{L-5}{3}$.

2.2. Pretende-se provar que para todo o $L>0$, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow w_n < -L$.

$w_n < -L \Leftrightarrow 1-5n < -L \Leftrightarrow n > \dfrac{L+1}{5}$

Basta considerar $p \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad p > \dfrac{L+1}{5}$.

Pág. 120

3. Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões convergentes e a partir de certa ordem $v_n \leq u_n$, então sabe-se que $\lim v_n \leq \lim u_n$.

Como $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$, conclui-se que $\lim v_n \leq \dfrac{1}{2}$. Assim sendo, dos valores apresentados o único que pode ser igual a $\lim v_n$ é $\dfrac{1}{3}$.

A opção correta é a (C).

Pág. 121

4.1. Pretende-se provar, pela definição, que $\lim\, u_n = +\infty$, ou seja, que para todo o $L>0$, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n > L$.

$u_n > L \Leftrightarrow \sqrt{n} > L \Leftrightarrow n > L^2$

Basta considerar $p \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad p > L^2$.

4.2. Como $\lim u_n = +\infty$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, conclui-se que $\lim v_n = +\infty$.

5.1. $\lim u_n = \lim\left(n^2\right) = (+\infty)^2 = +\infty$

5.2. $\forall n > 30$, $u_n - v_n < 0 \Leftrightarrow \forall n > 30$, $u_n < v_n$

Como $\lim u_n = +\infty$ e $\forall n > 30$, $u_n < v_n$, conclui-se que $\lim v_n = +\infty$.

Tarefa 2

1.1. Pretende-se provar que para todo o $L>0$, existe um $p\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq p\Rightarrow u_n>L$.

$u_n>L\Leftrightarrow 3n-1>L\Leftrightarrow n>\frac{L+1}{3}$

Basta considerar $p\in\mathbb{N}\quad\wedge\quad p>\frac{L+1}{3}$.

1.2. Pretende-se determinar uma ordem $p_1\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq p_1\Rightarrow u_n>1551$.

$u_n>1551\Leftrightarrow 3n-1>1551\Leftrightarrow n>\frac{1552}{3}$

Como $\frac{1552}{3}=517,(3)$ tem-se que a partir da ordem 518 (inclusive) todos os termos da sucessão (u_n) são superiores a 1551. Então, pode-se considerar, por exemplo, $p_1=518$.

1.3.

a) Como a partir da ordem 518 (inclusive) tem-se $u_n>1551$ e a partir da ordem 480 (inclusive) tem-se $v_n\geq u_n$, conclui-se que a partir da ordem 518 (inclusive) tem-se $v_n>1551$.

b) Como a partir da ordem 518 (inclusive) tem-se $u_n>1551$ e a partir da ordem 603 (inclusive) tem-se $w_n\geq u_n$, conclui-se que a partir da ordem 603 (inclusive) tem-se $w_n>1551$.

1.4. Como $\lim u_n=+\infty$ sabe-se que para todo o $L>0$, existe uma ordem $p_1\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq p_1\Rightarrow u_n>L$.
Sabe-se também que existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq p\Rightarrow t_n\geq u_n$. Fazendo $p_2=\text{máximo}\{p_1,p\}$ tem-se: para todo o $L>0$, $n\geq p_2\Rightarrow t_n>L$. Logo, $\lim t_n=+\infty$.

2.1. $\lim u_n=\lim(5-3n)=5-(+\infty)=-\infty$

Donde se conclui que (u_n) é um infinitamente grande negativo.

2.2. Pretende-se determinar uma ordem $p_1\in\mathbb{N}$ tal que $n\geq p_1\Rightarrow u_n<-3215$.

$u_n<-3215\Leftrightarrow 5-3n<-3215\Leftrightarrow n>\frac{3220}{3}$

Como $\frac{3220}{3}=1073,(3)$ tem-se que a partir da ordem 1074 (inclusive) todos os termos da sucessão (u_n) são inferiores a -3215. Então, pode-se considerar, por exemplo, $p_1=1074$.

2.3. Como $\lim u_n=-\infty$ sabe-se que para todo o $L>0$, existe uma ordem $p_1\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq p_1\Rightarrow u_n<-L$.
Sabe-se também que existe uma ordem $p\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq p\Rightarrow v_n\leq u_n$. Fazendo $p_2=\text{máximo}\{p_1,p\}$ tem-se: para todo o $L>0$, $n\geq p_2\Rightarrow v_n<-L$. Logo, $\lim v_n=-\infty$.

Pág. 122

6. Sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N},\quad n>15\Rightarrow 3<u_n<5$. Então, tem-se $\forall n\in\mathbb{N},\quad n>15\Rightarrow\frac{3}{n}<\frac{u_n}{n}<\frac{5}{n}$. Ora, $\lim\frac{3}{n}=\frac{3}{+\infty}=0$ e $\lim\frac{5}{n}=\frac{5}{+\infty}=0$. Então, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim\frac{u_n}{n}=0$.

7. Sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N},\quad -1\leq\sin(n)\leq 1$. Então, tem-se $\forall n\in\mathbb{N},\quad\frac{-1}{n}\leq\frac{\sin(n)}{n}\leq\frac{1}{n}$. Ora, $\lim\frac{-1}{n}=\frac{-1}{+\infty}=0$ e $\lim\frac{1}{n}=\frac{1}{+\infty}=0$. Então, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim\frac{\sin(n)}{n}=0$, ou seja, $\lim v_n=0$.

8. Sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq 20\Rightarrow u_n+v_n<2$.

Então $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq 20\Rightarrow u_n<2-v_n$.

Ora, $\lim(2-v_n)=2-\lim v_n=\ =2-(+\infty)=-\infty$.

Como $\lim(2-v_n)=-\infty$ e $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq 20\Rightarrow u_n<2-v_n$, conclui-se que $\lim u_n=-\infty$.

9.1. Como $0<\frac{3}{4}<1$, então $\lim\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]=0$, ou seja, $\lim v_n=0$.

9.2. Sabe-se que $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<\frac{3n}{4n+1}<\frac{3n}{4n}$, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<\frac{3n}{4n+1}<\frac{3}{4}$. Então, tem-se $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0^n<\left(\frac{3n}{4n+1}\right)^n<\left(\frac{3}{4}\right)^n$, ou seja, $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<u_n<v_n$. Como $\lim v_n=0$ e $\forall n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<v_n$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim u_n=0$.

Tarefa 3

1.1. $\lim u_n=\lim f(n)=\lim\left(3-\frac{2}{n}\right)=3-0=3$

1.2. Pretende-se provar que $\exists p_1\in\mathbb{N}:\ n\geq p_1\Rightarrow u_n\leq w_n$.

$$u_n\leq w_n\Leftrightarrow 3-\frac{2}{n}\leq\frac{3n^2}{n^2+4}\Leftrightarrow 3-\frac{2}{n}\leq 3-\frac{12}{n^2+4}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{n}\leq-\frac{12}{n^2+4}\Leftrightarrow\frac{2}{n}\geq\frac{12}{n^2+4}\Leftrightarrow 2n^2+8\geq 12n\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n^2-6n+4\geq 0\Leftrightarrow(n-3)^2\geq 5\Leftrightarrow n\geq 6$$

Então, pode-se considerar, por exemplo, $p_1=6$.

2.1. $\lim v_n = \lim g(n) = \lim\left(3+\frac{5}{n}\right) = 3+0=3$

2.2. Pretende-se provar que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad w_n \le v_n$.

$w_n \le v_n \Leftrightarrow \frac{3n^2}{n^2+4} \le 3+\frac{5}{n} \Leftrightarrow 3-\frac{12}{n^2+4} \le 3+\frac{5}{n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{12}{n^2+4} \le \frac{5}{n} \Leftrightarrow \frac{12}{n^2+4} \ge -\frac{5}{n} \Leftrightarrow 12n \ge -5n^2-20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5n^2+12n+20 \ge 0 \Leftrightarrow (n+1,2)^2 \ge -2,56$

Como $(n+1,2)^2 \ge -2,56$ é uma condição universal em $\mathbb{N}$, conclui-se que $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad w_n \le v_n$.

3.1. Como $\exists\, p_1 \in \mathbb{N}:\ \ n \ge p_1 \Rightarrow u_n \le w_n$, e $\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n \le v_n$, então existe uma ordem (p_1) a partir da qual se tem $u_n \le w_n \le v_n$.

3.2. Atendendo aos resultados anteriores, sabe-se que existe uma ordem a partir da qual se tem $u_n \le w_n \le v_n$ e $\lim u_n = \lim v_n = 3$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim w_n = 3$.

Pág. 123

10.1. A aderência do conjunto *A* representado na reta numérica é o conjunto $\overline{A} = [8, 10] \cup \{7, 12\}$.

10.2. A aderência do conjunto *A* representado na reta numérica é o conjunto $\overline{A} = [-1, 4] \cup \{5\}$.

11.1. Para toda a sucessão (x_n) tal que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad x_n \in D_f$ e $\lim x_n = -3$, tem-se: $\lim f(x_n) = \lim \frac{(x_n)^2-2x_n}{x_n} =$

$= \frac{(\lim x_n)^2 - 2\lim x_n}{\lim x_n} = \frac{(-3)^2-2\times(-3)}{-3} = -5$.

Donde se conclui que $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -5$.

11.2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x}{x} = \frac{1^2-2\times 1}{1} = -1$

Pág. 124

12.1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = 4$;

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x^2+4x) = -4+8=4$.

Donde se conclui que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

12.2. 2 é ponto aderente do domínio de *f* e $2 \in D_f$. Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$ e $f(2) \ne 4$, então não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

13.1. Por observação do gráfico da função *g* tem-se $\lim\limits_{x\to -2^+} g(x) = 1$.

13.2. Por observação do gráfico da função *g* tem-se $\lim\limits_{x\to -2^-} g(x) = -1$.

13.3. Por observação do gráfico da função *g* conclui-se que não existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = 0$ e $g(3) \ne 0$.

13.4. Por observação do gráfico da função *g* tem-se $\lim\limits_{x\to 6} g(x) = 1$.

Pág. 125

14.1. 2 é ponto aderente do domínio de *f* e $2 \notin D_f$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

14.2. Como $\forall x \in \left]1,+\infty\right[\setminus \{2\},\quad g(x) \ge f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$, então conclui-se que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = +\infty$.

15.1.

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to -1} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} (2x-1) = 2\times(-1)-1 = -3$

Cálculo auxiliar:

$2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \ \vee\ x=-1$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2+x-1}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}} = \frac{+\infty(2+0-0)}{1+0} = +\infty$

15.2. Como $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\quad g(x) > f(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, então conclui-se que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

Pág. 126

16. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{-x^2}{2}+4x-3\right) = -2+8-3=3$;

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$.

Como $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f(x) \le h(x) \le g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3$, então, pelo teorema das funções enquadradas, conclui-se que $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 3$.

17.1.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{+\infty}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2+4}\right)=-\frac{1}{+\infty}=0$

17.2. Como $\forall\, x\in\mathbb{R},\quad h(x)\le f(x)\le g(x)$ e

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, então, pelo teorema das funções enquadradas, conclui-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

18.1. $\forall\, x\in\left]1,+\infty\right[$, tem-se:

$\sin x\le 1\Leftrightarrow x+\sin x\le x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{x+\sin x}\ge\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{x^2}{x+\sin x}\ge\frac{x^2}{x+1}\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$

18.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x}}=$

$=\frac{+\infty}{1+0}=+\infty$

Como $\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\quad f(x)\ge g(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, então conclui-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Pág. 127

19.1.

a) 1 é ponto aderente do domínio de *f* e $1\notin D_f$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$

b) 2 é ponto aderente do domínio de *f* e $2\in D_f$.

Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1$ e $f(2)\ne1$, então não existe $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

19.2. A função é descontínua em 2 porque não existe $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

19.3. *h* é contínua em $\mathbb{R}$ se $h(1)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, ou seja, $h(1)=2$.

Tarefa 4

1.1. 0 é ponto aderente do domínio de *f* e $0\in D_f$.

Existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)=5$.

1.2. -3 é ponto aderente do domínio de *f* e $-3\in D_f$.

Existe $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)=f(-3)=2$.

Logo, a função *f* é contínua em -3 .

1.3. 1 é ponto aderente do domínio de *f* e $1\in D_f$.

Não existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=2$ e $f(1)\ne2$.

1.4. A função *f* não é contínua em 1 porque não existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

2.1. 0 é ponto aderente do domínio de *f* e $0\in D_f$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{0-4}{0+2}=-2$;

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{0-4}{0+2}=-2$;

$f(0)=\frac{0-4}{0+2}=-2$.

Existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)=-2$.

Logo, a função *f* é contínua em 0.

2.2. -2 é ponto aderente do domínio de *f* e $-2\in D_f$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{x^2-4}{x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^-}(x-2)=-4$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x^2-4}{x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2^+}(x-2)=-4$

$f(-2)=0$

Não existe $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-4$ e $f(-2)\ne-4$. Logo a função *f* não é contínua em -2 .

3.1. A função *g* é contínua em $\mathbb{R}^+$ se $\forall\, a\in\mathbb{R}^+$, *g* for contínua em a . Seja $a\in\mathbb{R}^+$.

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{2x}{x^2+x}=\frac{2a}{a^2+a}=\frac{2a}{a(a+1)}=\frac{2}{a+1}$

$g(a)=\frac{2a}{a^2+a}=\frac{2a}{a(a+1)}=\frac{2}{a+1}$

Existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$. Logo, qualquer que seja $a\in\mathbb{R}^+$, a função *g* é contínua em a . Assim sendo, conclui-se que a função *g* é contínua em $\mathbb{R}^+$.

3.2.

a) Seja $a\in\mathbb{R}^-$. $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x}=\frac{2-\sqrt{2-a}}{a}$;

$g(a)=\frac{2-\sqrt{2-a}}{a}$. Existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$.

Logo, qualquer que seja $a\in\mathbb{R}^-$, a função *g* é contínua em a .
Assim sendo, conclui-se que a função *g* é contínua em $\left]-\infty,0\right[$.

b) 0 é ponto aderente do domínio de *g* e $0\in D_g$.

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x}=\frac{2-\sqrt{2}}{0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x}{x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{x+1}=2$

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. Então, g não é contínua em 0. Como $0 \in]-1,2[$, conclui-se que g não é contínua no intervalo $]-1,2[$.

Pág. 128

20. Como *f* é contínua em $[1, 3]$ e $f(1) < 0 < f(3)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]1, 3[:\ f(c) = 0$. Daqui resulta que a função *f* tem pelo menos um zero. Logo, a afirmação I é verdadeira.
Não podemos garantir que o contradomínio de *f* é $[-2, 5]$. Logo, a afirmação II é falsa.
Como *f* é contínua em $[1, 3]$ e $-2 \le k \le 5$, ou seja, $f(1) \le k \le f(3)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]1, 3[:\ f(c) = k$. Daqui resulta que a equação $f(x) = k$, com $k \in [-2, 5]$, é possível no intervalo $]1, 3[$. Logo também é possível no intervalo $[1, 3]$ pois $]1, 3[\subset [1, 3]$. Logo, a afirmação III é verdadeira.
Conclusão: As afirmações I e III são verdadeiras.

21. *f* é contínua em $[1, 2]$ porque é uma função polinomial.
$f(1) < 3 < f(2)$ pois $f(1) = 1^3 - 1 = 0$ e $f(2) = 2^3 - 2 = 6$.
Como *f* é contínua em $[1, 2]$ e $f(1) < 3 < f(2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]1, 2[:\ f(c) = 3$.
Daqui resulta que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, 2[$.

Pág. 129

22. Como $\frac{3}{2} = 1{,}5$, tem-se $1 < \frac{3}{2} < 4$. Embora $1 < \frac{3}{2} < 4$, a equação $f(x) = \frac{3}{2}$ não é possível em $]a, b[$ porque a função *f* não é contínua no intervalo $[a, b]$ (visto que não é contínua em *a*).

23. *g* é contínua em $[0, 1]$ porque é uma função polinomial.
$g(0) = 1$ e $g(1) = -1$, logo $g(0) \times g(1) < 0$.

Como *g* é contínua em $[0, 1]$ e $g(0) \times g(1) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]0, 1[:\ g(c) = 0$.
Daqui resulta que a função *g* admite pelo menos um zero em $]0, 1[$.

24. A área do triângulo [*OAB*] é dada em função de *x* pela função $g(x) = \frac{x\, f(x)}{2}$. *g* é contínua em $[3, 4]$ porque é o produto entre funções contínuas (funções polinomiais).

$$g(3) = \frac{3 f(3)}{2} = \frac{3 \times \frac{25}{4}}{2} = \frac{75}{8} = 9{,}375 \text{ e}$$

$$g(4) = \frac{4 f(4)}{2} = = \frac{4 \times \frac{36}{4}}{2} = 18 \text{, logo } g(3) < 15 < g(4).$$

Como *g* é contínua em $[3, 4]$ e $g(3) < 15 < g(4)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]3, 4[:\ g(c) = 15$.
Daqui resulta que existe um ponto *A* de abcissa pertencente ao intervalo $]3, 4[$ tal que a área do triângulo [*OAB*] é 15.

Pág. 130

25. Como *g* é contínua em $[a, b]$, se $g(a) \times g(b) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, é possível garantir que a função *g* tem pelo menos um zero pertencente a $]a, b[$.

$g(a) \times g(b) < 0 \Leftrightarrow (1-k)\, k < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-k < 0 \ \wedge\ k > 0) \ \vee\ (1-k > 0 \ \wedge\ k < 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k > 1 \ \wedge\ k > 0) \ \vee\ (k < 1 \ \wedge\ k < 0) \Leftrightarrow k > 1 \ \vee\ k < 0$

Então, $k \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

26.1. *f* é contínua em $[3, 7]$. $f(7) < \frac{1}{3} < f(3)$ pois $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Como *f* é contínua em $[3, 7]$ e $f(7) < \frac{1}{3} < f(3)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]3, 7[:\ f(c) = \frac{1}{3}$.

Daqui resulta que a equação $f(x) = \frac{1}{3}$ é possível em $]3, 7[$.

26.2. Como *f* é contínua em $[3, 7]$, pelo teorema de Weierstrass sabe-se que *f* admite máximo nesse intervalo. Então, sabe-se que existe $k \in [3, 7]$ tal que $\forall\, x \in [3, 7]:\ f(x) \le f(k)$.

Pág. 132

27.1. Repara que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 4} - \frac{5x + 45}{x + 7} = 0$.

Seja *h* a função definida por $h(x) = \sqrt{9x^2 + 4} - \frac{5x + 45}{x + 7}$.

A função *h* é contínua em $[1, 2]$ pois é a diferença de funções contínuas em $[1, 2]$.

$h(1) = \sqrt{13} - \frac{25}{4}$ e $h(2) = \sqrt{40} - \frac{55}{9}$. Como $h(1) < 0$ e $h(2) > 0$, então $h(1)\, h(2) < 0$. Como *h* é contínua em $[1, 2]$ e $h(1)\, h(2) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in]1, 2[:\ h(c) = 0$, ou seja, $\exists\, c \in]1, 2[:\ f(c) = g(c)$. Daqui resulta que os gráficos de *f* e *g* se intersetam num ponto de abcissa pertencente a $]1, 2[$.

27.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \ 9x^2+4 \geq 0\} = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais: Não existem assíntotas verticais ao gráfico de *f* porque a função é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntota não vertical $(y = mx + b)$

· Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9+\frac{4}{x^2}} = \sqrt{9+0} = 3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+4} - 3x\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+4}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+4}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+4-9x^2}{\sqrt{9x^2+4}+3x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{9x^2+4}+3x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = 3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{9+\frac{4}{x^2}}\right) = -\sqrt{9+0} = -3$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+4} + 3x\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+4}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+4}-3x\right)}{\sqrt{9x^2+4}-3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2+4-9x^2}{\sqrt{9x^2+4}-3x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\sqrt{9x^2+4}-3x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = -3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

28.1. $f(x) = 3x + \sqrt{x^2-9}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: \ x^2 - 9 \geq 0\}$

$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3 \geq 0 \wedge x+3 \geq 0) \vee (x-3 \leq 0 \wedge x+3 \leq 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \geq 3 \wedge x \geq -3) \vee (x \leq 3 \wedge x \leq -3) \Leftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq -3$

$D_f =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

Assíntotas verticais

Não existem assíntotas verticais ao gráfico de *f* porque a função é contínua no seu domínio.

Assíntotas não verticais $(y = mx + b)$

· Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\sqrt{x^2-9}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(3+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right) = 3+1 = 4$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(3x + \sqrt{x^2-9} - 4x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-9} - x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)}{\sqrt{x^2-9}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = 4x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+\sqrt{x^2-9}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(3 + \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(3 + \frac{-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right) = 3-1 = 2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(3x + \sqrt{x^2-9} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-9} + x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)}{\sqrt{x^2-9}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x} = \frac{-9}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

28.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \ x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Assíntotas verticais
Não existem assíntotas verticais ao gráfico de *f* porque a função é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas não verticais $(y = mx + b)$

· Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 2x}{x} \overset{\frac{\infty-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} - 2 \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - 2 \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2 \right) = 1 - 2 = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - 2x + x \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 2x}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} - 2 \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - 2 \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2 \right) = -1 - 2 = -3$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - 2x + 3x \right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = -3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

Tarefa 5

1.1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} = x + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 1 = (x+5)^2 \wedge 2x^2 + 1 \geq 0 \wedge x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 1 = x^2 + 10x + 25 \wedge x \geq -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 24 = 0 \wedge x \geq -5 \Leftrightarrow x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+96}}{2} \wedge x \geq -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 12 \vee x = -2) \wedge x \geq -5 \Leftrightarrow x = 12 \vee x = -2$

Então, $A(-2, 3)$ e $B(12, 17)$.

1.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \ 2x^2 + 1 \geq 0\} = \mathbb{R}$.

Assíntotas verticais: Não existem assíntotas verticais ao gráfico de *f* porque a função é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntota não vertical $(y = mx + b)$

· Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{2}x \right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = \sqrt{2}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} \right) = -\sqrt{2+0} = -\sqrt{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x \right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1-2x^2}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2}x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, a reta $y = -\sqrt{2}\,x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

1.3. Repara que:

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) - \sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+5} = 0$$

Seja *h* a função definida por $h(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x+5}$. A função *h* é contínua em $[1, 2]$ pois é a diferença de funções contínuas em $[1, 2]$.

$h(1) = \sqrt{3} - \sqrt{6}$ e $h(2) = 3 - \sqrt{7}$

Como $h(1) < 0$ e $h(2) > 0$, então $h(1)\,h(2) < 0$.

Como *h* é contínua em $[1, 2]$ e $h(1)\,h(2) < 0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in]1, 2[: \ h(c) = 0$, ou seja, $\exists c \in]1, 2[: \ f(c) = \sqrt{g(c)}$.

Daqui resulta que a equação $f(x) = \sqrt{g(x)}$ é possível no intervalo $]1, 2[$.

2.1.

a) $f(1)=1$ e $f(3)=6+\sqrt{5}>8$, logo $f(1)<3<f(3)$.

No entanto, não se pode garantir que $\exists c\in\left]1,3\right[:\ f(c)=3$.

Só existe essa garantia se a função *f* for contínua no intervalo $[1,3]$ e para $k=1$ a função f não é contínua no intervalo $[1,3]$ (pois é descontínua em 2).

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(2x+\sqrt{x^2-4}\right)=-4+0=-4$ e

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x=-2$. Donde se conclui que a reta $x=-2$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x+\sqrt{x^2-4}\right)=4+0=4$ e

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x=2$.

Donde se conclui que a reta $x=2$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Conclusão: O gráfico de *f* não admite assíntotas verticais.

2.2. Os únicos pontos onde a função pode ser descontínua são -2 e 2. Vamos determinar *k* de modo que a função *f* seja contínua em -2 e em 2.

Continuidade em -2: -2 é ponto aderente do domínio de *f* e $-2\in D_f$.

A função *f* é contínua em -2 se existir $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

Ora, existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ se $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(2x+\sqrt{x^2-4}\right)=-4+0=-4$,

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(kx)=-2k$ e $f(-2)=-4$, então tem-se:

$-2k=-4\Leftrightarrow k=2$.

Continuidade em 2: 2 é ponto aderente do domínio de *f* e $2\in D_f$.

A função *f* é contínua em 2 se existir $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Ora, existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ se $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(kx)=2k$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x+\sqrt{x^2-4}\right)=4+0=4$ e $f(2)=4$,

então tem-se: $2k=4\Leftrightarrow k=2$

Conclusão: A função *f* é contínua se $k=2$.

2.3.

a) Assíntotas oblíquas $(y=mx+b)$

· Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-4}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)=2+1=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-4}-3x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\sqrt{x^2-4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=\frac{-4}{+\infty}=0$$

Portanto, a reta $y=3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+\sqrt{x^2-4}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)=2-1=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-4}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}{\sqrt{x^2-4}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}-x}=\frac{-4}{+\infty}=0$$

Portanto, a reta $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

b₁) Pretende-se mostrar que $\exists c\in\left]2,3\right[:\ f(c)=5$.

f é contínua em $[2,3]$ porque para $k=2$ sabe-se que f é uma função contínua. $f(2)<5<f(3)$ pois $f(2)=4-0=4$ e $f(3)=6+\sqrt{5}>8$.

Como *f* é contínua em $[2,3]$ e $f(2)<5<f(3)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c\in\left]2,3\right[:\ f(c)=5$.

Daqui resulta que existe um ponto do gráfico de *f* tal que a abcissa pertence ao intervalo $\left]2,3\right[$ e a ordenada é 5.

b₂) Pretende-se mostrar que $\exists c\in\left]1,3\right[:\ f(c)=c^2$.

Ora, $f(x)=x^2\Leftrightarrow f(x)-x^2=0$.

Seja *h* a função definida por $h(x)=f(x)-x^2$. A função *h* é contínua em $[1,3]$ pois é a diferença de funções contínuas em $[1,3]$. $h(1)=f(1)-1^2=2-1=1$ e

$h(3)=f(3)-3^2=6+\sqrt{5}-9=\sqrt{5}-3$.

Como $h(1)>0$ e $h(3)<0$, então $h(1)\,h(3)<0$.

Como *h* é contínua em $[1,3]$ e $h(1)\,h(3)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que

$\exists c\in\left]1,3\right[:\ h(c)=0$, ou seja, $\exists c\in\left]1,3\right[:\ f(c)=c^2$.

Daqui resulta que existe um ponto do gráfico de *f* tal que a abcissa pertence ao intervalo $\left]1,3\right[$ e a ordenada é igual ao quadrado da abcissa.

Pág. 133

Proposta 1

1.1.

a) $u_n \in V_{0,002}(1) \Leftrightarrow |u_n - 1| < 0,002 \Leftrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0,002 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{5000} \Leftrightarrow n > 499$. O menor número natural p tal que $n \geq p \Rightarrow u_n \in V_{0,002}(1)$ é o 500.

b) $v_n > 359 \Leftrightarrow \sqrt{2n+1} > 359 \Leftrightarrow 2n+1 > 359^2 \Leftrightarrow n > 64\,440$

O menor número natural p tal que $n \geq p \Rightarrow v_n > 359$ é o 64 441.

1.2.

a) $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

b) $\lim v_n = \lim \sqrt{2n+1} = \sqrt{2\times(+\infty)+1} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

Proposta 2

$\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{n-6}{2n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \left(\frac{n}{2n} - \frac{6}{2n}\right) = \lim \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) = \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

Sendo (u_n) e (v_n) sucessões convergentes, sabe-se que $\lim (v_n - u_n) = \lim v_n - \lim u_n$. Assim sendo, tem-se $\lim v_n - \lim u_n = \frac{1}{2}$, ou seja, $\lim v_n = \frac{1}{2} + \lim u_n$.

Então, a opção correta é a (C).

Proposta 3

3.1. Como $\forall n \in \mathbb{N},\ -1+2^n \leq \cos(n)+2^n$ e $\lim(-1+2^n) =$ $= -1+(+\infty) = +\infty$, conclui-se que $\lim\left[\cos(n)+2^n\right] = +\infty$, ou seja, $\lim u_n = +\infty$.

3.2. Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(n) - n \leq 1-n$ e $\lim(1-n) = 1-(+\infty) = \ = -\infty$, conclui-se que $\lim\left[\sin(n) - n\right] = -\infty$, ou seja, $\lim v_n = -\infty$.

Proposta 4

4.1. $\lim \frac{1}{3-v_n} = \frac{1}{3-\lim v_n} = \frac{1}{3-(-\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

4.2. $\lim u_n = \lim(1-v_n) = 1 - \lim v_n = 1-(-\infty) = +\infty$

4.3. $\lim\left(-\frac{1}{u_n}\right) = \lim\left(-\frac{1}{1-v_n}\right) = -\frac{1}{1-\lim v_n} = -\frac{1}{1-(-\infty)} =$

$= -\frac{1}{+\infty} = 0$

Pág. 134

Proposta 5

5.1.

a) $u_n \in V_{0,01}\left(\frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow \left|u_n - \frac{7}{3}\right| < 0,01 \Leftrightarrow \left|\frac{7n+1}{3n} - \frac{7}{3}\right| < 0,01 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow 3n > 100 \Leftrightarrow n > \frac{100}{3}$

Como $\frac{100}{3} = 33,(3)$, sabe-se que a partir da ordem 34 (inclusive) se tem $n \geq p \Rightarrow u_n \in V_{0,01}\left(\frac{7}{3}\right)$.

b) $u_n = \frac{7n+1}{3n} = \frac{7n}{3n} + \frac{1}{3n} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3n}$

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{3n} > 0$, conclui-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{7}{3}$.

c) Se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{7}{3}$, então $\forall n \in \mathbb{N},\ (u_n)^n > \left(\frac{7}{3}\right)^n$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > \left(\frac{7}{3}\right)^n$.

Sendo $\frac{7}{3} > 1$, então $\lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n\right] = +\infty$.

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n > \left(\frac{7}{3}\right)^n$ e $\lim\left[\left(\frac{7}{3}\right)^n\right] = +\infty$, conclui-se que $\lim v_n = +\infty$.

5.2.

a) Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n} > 0$, conclui-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{4}{3} + \frac{1}{n} > \frac{4}{3}$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{4}{3}+\frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Sendo $\frac{4}{3} > 1$, então $\lim\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n\right] = +\infty$.

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{4}{3}+\frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{4}{3}\right)^n$ e $\lim\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n\right] = +\infty$, conclui-se que $\lim\left[\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{n}\right)^n\right] = +\infty$.

b) Sabe-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5^n+n}{3^n} > \frac{5^n}{3^n}$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5^n+n}{3^n} > \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Sendo $\frac{5}{3} > 1$, então $\lim\left[\left(\frac{5}{3}\right)^n\right] = +\infty$.

Como $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5^n+n}{3^n} > \left(\frac{5}{3}\right)^n$ e $\lim\left[\left(\frac{5}{3}\right)^n\right] = +\infty$, conclui-se que $\lim \frac{5^n+n}{3^n} = +\infty$.

c) Ora, $\frac{5n+7}{n+1}=\frac{5n+5+2}{n+1}=\frac{5n+5}{n+1}+\frac{2}{n+1}=5+\frac{2}{n+1}$.

Como $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \frac{2}{n+1}>0$, conclui-se que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \frac{5n+7}{n+1}>5$.

Logo, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \left(\frac{5n+7}{n+1}\right)^n>5^n$.

Sendo $5>1$, então $\lim\left(5^n\right)=+\infty$.

Como $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \left(\frac{5n+7}{n+1}\right)^n>5^n$ e $\lim\left(5^n\right)=+\infty$, conclui-se que

$\lim\left[\left(\frac{5n+7}{n+1}\right)^n\right]=+\infty$.

Proposta 6

6.1. Se $n\geq 12$, então $u_n=\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n$.

Ora, $\frac{3n+2}{2n}=\frac{3n}{2n}+\frac{2}{2n}=\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

Como $\forall n\geq 12,\ \frac{1}{n}>0$, conclui-se que $\forall n\geq 12,\ \frac{3n+2}{2n}>\frac{3}{2}$.

Logo, $\forall n\geq 12,\ \left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n>\left(\frac{3}{2}\right)^n$, ou seja, $\forall n\geq 12,\ u_n>\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

6.2. Sendo $\frac{3}{2}>1$, então $\lim\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]=+\infty$.

Como $\forall n\geq 12,\ \ u_n>\left(\frac{3}{2}\right)^n$ e $\lim\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]=+\infty$, conclui-se que

$\lim u_n=+\infty$.

Proposta 7

7.1. Como $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n>2^n$, então, em particular, tem-se

$n\geq 100\ \Rightarrow\ v_n>2^n$. Donde resulta que:

$n\geq 100\ \Rightarrow\ -v_n<-2^n$

$n\geq 100\ \Rightarrow\ 3-v_n<3-2^n$

$n\geq 100\ \Rightarrow\ u_n<3-2^n$

7.2. Sendo $2>1$, então $\lim\left(2^n\right)=+\infty$.

Logo, $\lim\left(3-2^n\right)=\ =3-(+\infty)=-\infty$.

Como $n\geq 100\Rightarrow u_n<3-2^n$ e $\lim\left(3-2^n\right)=-\infty$, conclui-se que

$\lim\ u_n=-\infty$.

Proposta 8

8.1. $\lim\ v_n=\lim\frac{(n-1)(n-2)}{n}=\lim\frac{n^2-3n+2}{n}=$

$=\lim\left(n-3+\frac{2}{n}\right)=+\infty-3+0=+\infty$

8.2. Se $n\geq 3$, então $u_n=\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n$. Ora, sendo $n\geq 3$, tem-se

$u_n=\frac{n!}{n^2}=\frac{n\times(n-1)(n-2)\times(n-3)!}{n^2}=\frac{(n-1)(n-2)\times(n-3)!}{n}=$

$=v_n\times(n-3)!$.

Como para $n\geq 3$, $(n-3)!\geq 1$, conclui-se que:

se $n\geq 3$ tem-se $u_n\geq v_n$.

8.3. Como $\forall n\geq 3,\ \ u_n\geq v_n$ e $\lim v_n=+\infty$, conclui-se que

$\lim\ u_n=+\infty$.

Pág. 135

Proposta 9

9.1. Sabe-se que:

$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ -1\leq\sin(n)\leq 1$.

Então, tem-se:

$\forall n\in\mathbb{N},\ \ 4\leq 5+\sin(n)\leq 6\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \ 4n\leq n\left(5+\sin(n)\right)\leq 6n\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \ \frac{1}{4n}\geq\frac{1}{n\left(5+\sin(n)\right)}\geq\frac{1}{6n}\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \ u_n\leq w_n\leq v_n$.

9.2. Ora, $\lim u_n=\lim\frac{1}{6n}=\frac{1}{+\infty}=0$ e $\lim v_n=\lim\frac{1}{4n}=\frac{1}{+\infty}=0$.

Donde se conclui que $\lim u_n=\lim v_n$.

9.3. Como $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_n\leq w_n\leq v_n$ e $\lim u_n=\lim v_n=0$, então,

pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que

$\lim w_n=0$.

Proposta 10

10.1. Sabe-se que:

$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ -1\leq\cos(2n)\leq 1$. Ora, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ n^2+1>0$.

Então, tem-se $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ \frac{-1}{n^2+1}\leq\frac{\cos(2n)}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}$.

$\lim\frac{-1}{n^2+1}=\frac{-1}{+\infty}=0$ e $\lim\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{+\infty}=0$.

Como $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ \frac{-1}{n^2+1}\leq\frac{\cos(2n)}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}$ e

$\lim\frac{-1}{n^2+1}=\lim\frac{1}{n^2+1}=0$, então, pelo teorema das sucessões

enquadradas, conclui-se que:

$\lim\frac{\cos(2n)}{n^2+1}=0$, ou seja, $\lim u_n=0$.

10.2. $\lim \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}} = \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}} =$

$= \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}} = \frac{2+0}{\sqrt[3]{1+0}} = 2$;

$\lim \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^3+5}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{5}{n^3}\right)}} =$

$= \lim \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}}} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}}} = \frac{2+0}{\sqrt[3]{1+0}} = 2$

Como $\forall n \geq 3, \quad \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^3+2n}} \leq u_n \leq \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^3+5}}$ e

$\lim \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^3+2n}} = \lim \frac{2n+3}{\sqrt[3]{n^3+5}} = 2$,

então, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim u_n = 2$. Assim sendo, a opção correta é a (C).

Proposta 11

11.1. Recorrendo ao algoritmo da divisão de polinómios, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-3x+5 & 2x-2 \\ \cline{2-2} -2x^2+2x & x-\frac{1}{2} \\ \cline{1-1} -x+5 & \\ x-1 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Então, $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2x-2} \Leftrightarrow f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x-1}$.

Donde se conclui que $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = 2$.

11.2. Se $x > 1$, então $x - 1 > 0$. Logo, $\forall x > 1, \ \frac{2}{x-1} > 0$.

Donde se conclui que $\forall x > 1, \ x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x-1} > x - \frac{1}{2}$, ou seja,

$\forall x > 1, \ f(x) > x - \frac{1}{2}$. Como $\forall x > 1, \ f(x) > x - \frac{1}{2}$ e

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$, então, por comparação, conclui-se que

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

11.3. Se $x < 1$, então $x - 1 < 0$. Logo, $\forall x < 1, \ \frac{2}{x-1} < 0$.

Donde se conclui que $\forall x < 1, \ x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x-1} < x - \frac{1}{2}$, ou seja,

$\forall x < 1, \ f(x) < x - \frac{1}{2}$. Como $\forall x < 1, \ f(x) < x - \frac{1}{2}$ e

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -\infty$, então, por comparação, conclui-se que

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Proposta 12

12.1. Sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$.

Daqui resulta que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2 \leq 3 + \cos x \leq 4$.

Ora, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 > 0$.

Então, tem-se:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{3+\cos x}{x^2+1} \leq \frac{4}{x^2+1}$, ou seja,

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{2}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{4}{x^2+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2+1} = \frac{4}{+\infty} = 0$.

Assim sendo, pode-se considerar, por exemplo,

$g(x) = \frac{2}{x^2+1}$ e $h(x) = \frac{4}{x^2+1}$.

12.2. Como $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Então, pelo teorema das funções enquadradas, conclui-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Pág. 136

Proposta 13

Repara que $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \times g(x)\right) = 0$ se e só se $\lim\limits_{x\to a} \left|f(x) \times g(x)\right| = 0$.

Sendo *f* uma função limitada sabe-se que

$\exists L \in \mathbb{R}^+ : \quad 0 \leq \left|f(x)\right| \leq L$.

Daqui resulta que

$\exists L \in \mathbb{R}^+ : \quad 0 \times \left|g(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \times \left|g(x)\right| \leq L \times \left|g(x)\right|$, ou seja,

$\exists L \in \mathbb{R}^+ : \quad 0 \leq \left|f(x) \times g(x)\right| \leq L \times \left|g(x)\right|$.

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \left|g(x)\right| = 0$.

Assim sendo, $\lim\limits_{x\to a} \left(L \times \left|g(x)\right|\right) = L \times \lim\limits_{x\to a} \left|g(x)\right| = L \times 0 = 0$.

Como $\exists L \in \mathbb{R}^+ : \quad 0 \leq \left|f(x) \times g(x)\right| \leq L \times \left|g(x)\right|$ e

$\lim\limits_{x\to a} 0 = \lim\limits_{x\to a} \left(L \times \left|g(x)\right|\right) = 0$, então, pelo teorema das funções enquadradas, conclui-se que $\lim\limits_{x\to a} \left|f(x) \times g(x)\right| = 0$.

Então tem-se $\lim\limits_{x\to a} \left(f(x) \times g(x)\right) = 0$.

Proposta 14

14.1. Como $\forall x \in \left]3, 7\right], \quad f(x) \geq g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = +\infty$, então, por comparação, conclui-se que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$.

14.2. $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{3^+-3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$f(x)\geq g(x)\ \wedge\ 3<x\leq 7 \Leftrightarrow \frac{9}{x^2-3x}\geq\frac{1}{x-3}\ \wedge\ 3<x\leq 7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9}{x(x-3)}\geq\frac{x}{x(x-3)}\ \wedge\ 3<x\leq 7\Leftrightarrow 9\geq x\ \wedge\ 3<x\leq 7\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3<x\leq 7$

Como as condições $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=+\infty$ e $\forall\, x\in\left]3,7\right],\ f(x)\geq g(x)$ são satisfeitas, conclui-se que as funções *f* e *g* podem ser definidas por $f(x)=\frac{9}{x^2-3x}$ e $g(x)=\frac{1}{x-3}$.

Proposta 15

A função *f*, sendo polinomial, é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, *f* é contínua em qualquer intervalo fechado contido no seu domínio.

$f(-2)=(-2)^5-2\times(-2)^3+1=-15$;

$f(-1)=(-1)^5-2\times(-1)^3+1=2$; $f(0)=0^5-2\times 0^3+1=1$;

$f(1)=1^5-2\times 1^3+1=0$; $f(2)=2^5-2\times 2^3+1=17$.

Como *f* é contínua em $[1,2]$ e $f(1)<5<f(2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c\in\left]1,2\right[:\ f(c)=5$.

Daqui resulta que a equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]1,2\right[$. A opção correta é a (D).

Proposta 16

16.1. Repara que $f(x)=\frac{3}{x}\Leftrightarrow f(x)-\frac{3}{x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-\frac{3}{x}=0$.

Seja *g* a função definida, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por $g(x)=\sqrt{x^2+1}-\frac{3}{x}$.

A função *g* é contínua em $[1,2]$ pois é a diferença de funções contínuas em $[1,2]$.

$g(1)=\sqrt{2}-3$ e $g(2)=\sqrt{5}-\frac{3}{2}$.

Como $g(1)<0$ e $g(2)>0$, então $g(1)\,g(2)<0$.

Como *g* é contínua em $[1,2]$ e $g(1)\,g(2)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que

$\exists\, c\in\left]1,2\right[:\ g(c)=0$, ou seja, $\exists\, c\in\left]1,2\right[:\ f(c)=\frac{3}{c}$.

Daqui resulta que a equação $f(x)=\frac{3}{x}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]1,2\right[$.

16.2. Repara que:

$f(x)=x^3+2\Leftrightarrow f(x)-x^3-2=0\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x^3-2=0$.

Seja *h* a função definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x)=\sqrt{x^2+1}-x^3-2$.

A função *h* é contínua em $[-1,0]$ pois é a diferença de funções contínuas em $[-1,0]$. $h(-1)=\sqrt{2}-1$ e $h(0)=1-2=-1$.

Como $h(-1)>0$ e $h(0)<0$, então $h(-1)\,h(0)<0$.

Como *h* é contínua em $[-1,0]$ e $h(-1)\,h(0)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$\exists\, c\in\left]-1,0\right[:\ h(c)=0$, ou seja, $\exists\, c\in\left]-1,0\right[:\ f(c)=c^3+2$.

Daqui resulta que a equação $f(x)=x^3+2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]-1,0\right[$.

Pág. 137

Proposta 17

17.1. Sendo $k=3$, então $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x}{x-1} & \text{se } x\neq 1\\ 6 & \text{se } x=1\end{cases}$.

Como $1\in[0,2]$, vamos verificar se a função *f* é contínua em 1.

1 é ponto aderente do domínio de *f* e $1\in D_f$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3-x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x)=2$

$f(1)=6$

Não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ porque $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ e $f(1)\neq 2$.

A função *f* não é contínua em 1 porque não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Logo, *f* não é contínua no intervalo $[0,2]$. Donde se conclui que não é possível aplicar o teorema de Bolzano à função *f* no intervalo $[0,2]$ pois *f* não é contínua nesse intervalo.

17.2. Só é possível aplicar o teorema de Bolzano à função *f* no intervalo $[0,2]$ se *f* for contínua nesse intervalo. Para tal é necessário que *f* seja contínua em 1.

1 é ponto aderente do domínio de *f* e $1\in D_f$.

A função *f* é contínua em 1 se existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Ora, existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ se $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ e $f(1)=k^2-k$, então tem-se:

$k^2-k=2\Leftrightarrow k^2-k-2=0\Leftrightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow k=2\ \vee\ k=-1$.

Donde se conclui que é possível aplicar o teorema de Bolzano à função *f* no intervalo $[0,2]$ quando $k\in\{-1,2\}$.

17.3. Sendo $k=2$, então *f* é contínua.

Repara que $f(x)=3+\sqrt{x}\Leftrightarrow f(x)-3-\sqrt{x}=0$.

Seja *g* a função definida, em $\mathbb{R}_0^+$, por $g(x)=f(x)-3-\sqrt{x}$.

A função *g* é contínua em $[1,2]$ pois é a diferença de funções contínuas em $[1,2]$.

$g(1)=f(1)-3-\sqrt{1}=2-3-1=-2$ e

$g(2)=f(2)-3-\sqrt{2}=6-3-\sqrt{2}=3-\sqrt{2}$.

Como $g(1)<0$ e $g(2)>0$, então $g(1)g(2)<0$.

Como *g* é contínua em $[1,2]$ e $g(1)g(2)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$\exists c\in]1,2[:\ g(c)=0$, ou seja, $\exists c\in]1,2[:\ f(c)=3+\sqrt{c}$.

Daqui resulta que a equação $f(x)=3+\sqrt{x}$ tem pelo menos uma solução pertencente ao intervalo $]1,2[$.

Proposta 18

18.1.

a) $f(-2)\times f(1)=\frac{1-(-2)}{-2}\times\frac{1+2}{1+1}=-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

Donde se conclui que $f(-2)\times f(1)<0$.

b) $f(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1-x}{x}=0\ \wedge\ x<0\right)\vee\left(\frac{x+2}{x+1}=0\ \wedge\ x\geq 0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1-x=0\ \wedge\ x\neq 0\ \wedge\ x<0)\ \vee\ (x+2=0\ \wedge\ x+1\neq 0\wedge\ x\geq 0)$

$\Leftrightarrow(x=1\ \wedge\ x<0)\ \vee\ (x=-2\ \wedge\ x\neq -1\wedge\ x\geq 0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing\ \vee\ x\in\varnothing\Leftrightarrow x\in\varnothing$

A função *f* não tem zeros, ou seja, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 0$.

18.2. Como $0\in[-2,1]$, vamos verificar se a função *f* é contínua em 0. 0 é ponto aderente do domínio de *f* e $0\in D_f$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-x}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x+1}=\frac{2}{1}=2$.

Não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ pois $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

A função *f* não é contínua em 0 porque não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Logo, *f* não é contínua no intervalo $[-2,1]$.

Donde se conclui que não é possível aplicar o teorema de Bolzano à função *f* no intervalo $[-2,1]$ pois *f* não é contínua nesse intervalo.

Proposta 19

19.1. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-3x}}$; $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ \ x^2-3x>0\}$.

$x^2-3x>0\Leftrightarrow x(x-3)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x>0\wedge x-3>0)\vee(x<0\wedge x-3<0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x>0\wedge x>3)\vee(x<0\wedge x<3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>3\vee x<0$

Então, $D_f=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$.

19.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{2}{\sqrt{1-0}}=2$

Portanto, a reta $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2-3x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{2}{-\sqrt{1-0}}=-2$

Portanto, a reta $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $-\infty$.

19.3. A função *f* é contínua no seu domínio por ser o quociente entre funções contínuas.

$2\notin D_f$; $f(-1)=\frac{-2}{\sqrt{1+3}}=-1$; $f(4)=\frac{8}{\sqrt{4}}=4$;

$f(5)=\frac{10}{\sqrt{10}}\approx 3{,}16$; $f(6)=\frac{12}{\sqrt{18}}\approx 2{,}83$.

Como *f* é contínua em $[5,6]$ e $f(5)<3<f(6)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c\in]5,6[:\ f(c)=3$.

Daqui resulta que a equação $f(x)=3$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]5,6[$.

A opção correta é a (B).

Proposta 20

20.1. Se *f* é contínua em $[a,b]$, então, pelo teorema de Weierstrass, sabe-se que *f* admite máximo e mínimo nesse intervalo.

20.2. Sendo *m* e *M*, respetivamente, o mínimo e o máximo de *f*, então tem-se: $\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq m$ e $\forall x\in[a,b],\ f(x)\leq M$.

Logo, $\forall x\in[a,b],\ m\leq f(x)\leq M$. Então, $D'_f=[m,M]$.

Pág. 138

Proposta 21

21.1. *P* é um ponto do gráfico de *f*, então $P(x,f(x)),\ x>2$.

Quando a ordenada de *P* é 6, tem-se:

$f(x)=6\ \ \wedge\ x>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{x}{x-2}=6\ \ \wedge\ x>2\Leftrightarrow x=6x-12\ \ \wedge\ x>2\Leftrightarrow x=2{,}4$

$A_{[OAP]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{AP}}{2}=\frac{2{,}4\times 6}{2}=7{,}2$

21.2.

a) *g* é a função de domínio $]2,+\infty[$ tal que

$g(x)=\frac{x\,f(x)}{2}=\ =\frac{x\cdot\frac{x}{x-2}}{2}=\frac{x^2}{2x-4}$.

Então, $g(8)=\frac{8^2}{2\times 8-4}=\frac{64}{12}=\frac{16}{3}$.

b) g é contínua em $[7,8]$ porque é o quociente entre funções contínuas (funções polinomiais).

$g(7)=\frac{7^2}{2\times7-4}=\frac{49}{10}=4,9$ e $g(8)=\frac{16}{3}=5,(3)$, logo $g(7)<5<g(8)$.

Como g é contínua em $[7,8]$ e $g(7)<5<g(8)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c\in]7,8[:\ g(c)=5$.

Daqui resulta que existe um ponto P de abcissa pertencente ao intervalo $]7,8[$ tal que a área do triângulo $[OAP]$ é 5.

Proposta 22

22.1. $u_1=\frac{1!}{2!}=\frac{1}{2}$, $u_2=\frac{1!+2!}{3!}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $u_3=\frac{1!+2!+3!}{4!}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

e $u_4=\frac{1!+2!+3!+4!}{5!}=\frac{33}{120}=\frac{11}{40}$.

22.2.

a) Sabe-se que $\forall\, n\ge2,\quad 1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!\le n!$.

Então tem-se $\forall\, n\ge2,\quad 1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!+n!\le n!+n!$,

ou seja, $\forall\, n\ge2,\quad 1!+2!+3!+\ldots+n!\le 2n!$.

Como $\forall\, n\in\mathbb{N},\quad (n+1)!>0$, então resulta que

$\forall\, n\ge2,\quad \frac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(n+1)!}\le\frac{2n!}{(n+1)!}$, ou seja,

$\forall\, n\ge2,\quad u_n\le\frac{2}{n+1}$.

Por outro lado, sabe-se que $\forall\, n\ge2,\quad 0<u_n$.

Donde se conclui que $\forall\, n\ge2,\quad 0<u_n\le\frac{2}{n+1}$.

Logo, também é verdade que $\forall\, n\ge2,\quad 0\le u_n\le\frac{2}{n+1}$.

b) Ora, $\lim 0=0$ e $\lim\frac{2}{n+1}=\frac{2}{+\infty}=0$.

Como $\forall\, n\ge2,\quad 0\le u_n\le\frac{2}{n+1}$ e $\lim 0=\lim\frac{2}{n+1}=0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, conclui-se que $\lim u_n=0$.

Proposta 23

Sendo f e g duas funções contínuas em $[a,b]$, então a função composta $g\circ f$ também é contínua em $[a,b]$.

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=b-a$

$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(a)=a-b$

Como $b>a$, então $(g\circ f)(a)>0$ e $(g\circ f)(b)<0$. Logo, $(g\circ f)(a)\times(g\circ f)(b)<0$. Como $g\circ f$ também é contínua em $[a,b]$ e $(g\circ f)(a)\times(g\circ f)(b)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c\in]a,b[:\ (g\circ f)(c)=0$.

Daqui resulta que a função composta $g\circ f$ tem pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$.

Pág. 139

29.1. $\text{t.m.v.}_{[-2,3]}=\frac{g(3)-g(-2)}{3-(-2)}=\frac{5-(-15)}{5}=4$

29.2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-x^2+5x-1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-x^2+5x-4}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x-1)(x-4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(-x+4)=3$

Tarefa 6

1.1.

a) $f(7)-f(2)=30-43=-13$

b) $f(15)-f(10)=48,5-20,5=28$

1.2.

a) $\text{t.m.v.}_{[0,2]}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{43-40}{2}=1,5\ \text{m/min}$

b) $\text{t.m.v.}_{[5,10]}=\frac{f(10)-f(5)}{10-5}=\frac{20,5-39}{5}=-3,7\ \text{m/min}$

c) $\text{t.m.v.}_{[10,15]}=\frac{f(15)-f(10)}{15-10}=\frac{28}{5}=5,6\ \text{m/min}$

2.1.

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-x-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+5)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to2}(3x+5)=11$

b) $\lim\limits_{h\to0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3(-1+h)^2-(-1+h)-4}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{3-6h+3h^2+1-h-4}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3h^2-7h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(3h-7)=-7$

2.2. $g'(1)=\lim\limits_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3(1+h)^2-(1+h)-2}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\frac{3+6h+3h^2-1-h-2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{3h^2+5h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(3h+5)=5$

Pág. 140

30.1. $f(-2)=\frac{3}{-2-1}=-1$

Se $x<1$, então $f'(x)=\left(\frac{3}{x-1}\right)'=\frac{0\times(x-1)-1\times3}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$.

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2 é igual a $f'(-2)$, ou seja, $-\frac{1}{3}$. A reta tangente é do tipo $y=-\frac{1}{3}x+b$. Como o ponto de coordenadas $(-2,-1)$ pertence à reta tangente, então tem-se: $-1=-\frac{1}{3}\times(-2)+b\Leftrightarrow b=-\frac{5}{3}$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2 é $y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$.

30.2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{3}{x-1}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^3-x-1-0}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2+2x+1)=5$

Não existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ porque:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

<u>Cálculo auxiliar:</u> Como 1 é zero do polinómio $2x^3-x-1$, aplicando a regra de Ruffini tem-se:

	2	0	−1	−1
1		2	2	1
	2	2	1	0

Então, sabe-se que $2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)$.

31. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(3+h)-g(3)}{h}=-5\Leftrightarrow g'(3)=-5$.

O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 3 é igual a $g'(3)$, ou seja, –5. A reta tangente é do tipo $y=-5x+b$. Como o ponto $P(3,4)$ pertence à reta tangente, então tem-se: $4=-5\times3+b\Leftrightarrow b=19$.
A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto $P(3,4)$ é $y=-5x+19$.

Tarefa 7

1.1.

a) A reta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2 e é definida pela equação $x+y=6$.

$x+y=6\Leftrightarrow y=-x+6$

$f'(2)=m_r=-1$

b) $f'(x)=-2x+3$.

$m_s=f'(0)=3$.

1.2. O declive da reta *t*, reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 3, é igual a $f'(3)$, ou seja, -3. A reta *t* é do tipo $y=-3x+b$. Como o ponto de coordenadas $(3,2)$ pertence à reta *t*, então tem-se: $2=-9+b\Leftrightarrow b=11$. Uma equação da reta *t* na forma reduzida é $y=-3x+11$.

1.3. $y-5x+2=0\Leftrightarrow y=5x-2$

Seja $P(a,f(a))$ o ponto do gráfico de *f* em que a reta tangente nesse ponto é paralela à reta de equação $y-5x+2=0$.

Então, tem-se $f'(a)=5$.

$f'(a)=5\Leftrightarrow -2a+3=5\Leftrightarrow a=-1$;

$f(-1)=-(-1)^2+3(-1)+2=-2$.

Então, $P(-1,-2)$.

2.1. $f'(x)=2x\times(3x+1)+3\times x^2=9x^2+2x$

2.2. $f'(x)=\dfrac{2\times(x+1)-1\times(2x)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

2.3. $f'(x)=2(2x-1)^1\times2=4(2x-1)=8x-4$

3.1. O ponto *A* pertence ao gráfico de *f* e tem abcissa –4, então $A(-4,f(-4))$. Como $f(-4)=\dfrac{2\times(-4)}{-4+2}=\dfrac{-8}{-2}=4$, tem-se $A(-4,4)$. O ponto *B* pertence ao gráfico de *f* e tem ordenada –2, então $B(x,-2)$ tal que $f(x)=-2$.

$f(x)=-2\Leftrightarrow\dfrac{2x}{x+2}=-2\Leftrightarrow\dfrac{2x}{x+2}+2=0\Leftrightarrow\dfrac{4x+4}{x+2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x+4=0\ \wedge\ x+2\neq0\Leftrightarrow x=-1$

Então, $B(-1,-2)$.

3.2. $f'(x)=\dfrac{2\times(x+2)-1\times(2x)}{(x+2)^2}=\dfrac{4}{(x+2)^2}$;

$m_r=f'(-4)=\dfrac{4}{(-4+2)^2}=1$;

$r:\quad y=x+b$

Como o ponto $A(-4,4)$ pertence à reta *r*, tem-se:
$4=-4+b\Leftrightarrow b=8$. Então, a reta *r* é definida pela equação $y=x+8$. Sendo *P* o ponto de interseção da reta *r* como o eixo *Ox*, tem-se $P(-8,0)$.

$m_s=f'(-1)=\dfrac{4}{(-1+2)^2}=4$; $s:\quad y=4x+b$.

Como o ponto $B(-1,-2)$ pertence à reta *s*, tem-se:

$-2=4\times(-1)+b\Leftrightarrow b=2$.

Então, a reta *s* é definida pela equação $y=4x+2$. Sendo *Q* o ponto de interseção da reta *s* como o eixo *Oy*, tem-se $Q(0,2)$.

Sabe-se que o ponto *R* é a interseção das retas *r* e *s*.

$\begin{cases}y=x+8\\y=4x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+8\\x+8=4x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=10\\x=2\end{cases}$

Então, $R(2,10)$.

Pág. 141

32. $f'(x)=12x^3+8$ e

$g'(x)=-2(2x+1)^{-3}\times2=-4(2x+1)^{-3}=\dfrac{-4}{(2x+1)^3}$.

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa –1, é igual a $f'(-1)$, ou seja, -4. O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa –1, é igual a $g'(-1)$, ou seja, 4.

33.1. $f'(x)=-\dfrac{2(x+3)-1(2x)}{(x+3)^2}=-\dfrac{6}{(x+3)^2}$

33.2. $f'(x)=3\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2\times\left(\dfrac{x+2}{x}\right)'=$

$=3\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2\times\dfrac{1\times x-1\times(x+2)}{x^2}=3\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2\times\dfrac{-2}{x^2}=$

$=-\dfrac{6}{x^2}\times\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2$

33.3. $f'(x)=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$

34. $f'(x)=\dfrac{5\times(x-1)-1\times(5x)}{(x-1)^2}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$ e

$g'(x)=2-\dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}$.

$(f\circ g)'(3)=g'(3)\times f'(g(3))=$

$=\left(2-\dfrac{3}{2\times 2}\right)\times f'(4)=\dfrac{5}{4}\times\dfrac{-5}{9}=-\dfrac{25}{36}$

Tarefa 8

1.1.

a) $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

1.2. $D_f=\mathbb{R}_0^+$; $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-0}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

A função *f* não é diferenciável em 0 porque $f'(0)$ não é finito.

1.3. A função derivada de *f* é caracterizada da seguinte forma:

$$f':\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.1. $(g\circ h)(x)=g(h(x))=\sqrt{h(x)}$.

Sabe-se que $f(x)=(g\circ h)(x)$ e $f(x)=\sqrt{3x+1}$.

Donde se conclui que $h(x)=3x+1$.

2.2.

a) $h'(x)=3$ e $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(1)=(g\circ h)'(1)=h'(1)\times g'(h(1))=3\times g'(4)=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{3}{4}$

b) $f'(5)=(g\circ h)'(5)=h'(5)\times g'(h(5))=3\times g'(16)=$

$=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{16}}=\dfrac{3}{8}$

c) $f'(0)=(g\circ h)'(0)=h'(0)\times g'(h(0))=3\times g'(1)=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{3}{2}$

2.3. Sendo $a>-\dfrac{1}{3}$, tem-se:

$f'(a)=(g\circ h)'(a)=$

$=h'(a)\times g'(h(a))=3\times g'(3a+1)$

$=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{3a+1}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3a+1}}$

3.1.

a) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+h}-\sqrt[3]{1}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{1+h}\right)^2+\sqrt[3]{1+h}\times\sqrt[3]{1}+\left(\sqrt[3]{1}\right)^2}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1+h-1}{h\left(\left(\sqrt[3]{1+h}\right)^2+\sqrt[3]{1+h}+1\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{1+h}\right)^2+\sqrt[3]{1+h}+1}=$

$=\dfrac{1}{1+1+1}=\dfrac{1}{3}$

b) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2+h}-\sqrt[3]{2}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{2+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{2+h}\right)^2+\sqrt[3]{2+h}\times\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2+h-2}{h\left(\left(\sqrt[3]{2+h}\right)^2+\sqrt[3]{4+2h}+\sqrt[3]{4}\right)}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{2+h}\right)^2+\sqrt[3]{4+2h}+\sqrt[3]{4}}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

3.2. Sendo $a \neq 0$, tem-se:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\left(\sqrt[3]{a+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{a}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a+h}\right)^2+\sqrt[3]{a+h}\times\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h\left(\left(\sqrt[3]{a+h}\right)^2+\sqrt[3]{a^2+ah}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{a+h}\right)^2+\sqrt[3]{a^2+ah}+\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

4.1. $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}=\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{4}\times x^{-\frac{3}{4}}$

4.2. $g'(x)=\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=\left(\sqrt[5]{x^3}\right)'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{\left(x^3\right)^4}}=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{x^{12}}}=\dfrac{3x^2}{5x^{\frac{12}{5}}}=\dfrac{3}{5}\times x^{-\frac{2}{5}}$

Pág. 142

35.1. $f'(x)=\dfrac{2x\times(x-1)-1\times x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$$f''(x)=\left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right]'=\frac{(2x-2)\times(x-1)^2-2(x-1)\times\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(2x-2)\times(x-1)-2\times\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

35.2. $f'(x)=1+(-2)x^{-3}=1-2x^{-3}$

$f''(x)=0-2\times(-3)x^{-4}=6x^{-4}$

35.3. $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f''(x)=\frac{0\times 3\sqrt[3]{x^2}-3\times\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2\right)^2}}}{\left(3\sqrt[3]{x^2}\right)^2}=\frac{-\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^4}}}{9\sqrt[3]{x^4}}=-\frac{2x}{9\sqrt[3]{x^8}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

Pág. 143

36. $R(t)=0\Leftrightarrow -0{,}24t+1{,}2=0\Leftrightarrow t=5$

t	0	5	$+\infty$
R	+	0	–
T	↗	$T(5)$	↘

A temperatura máxima foi atingida 5 horas após a administração da medicação.

37.1. $g'(x)=4x^3-16x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-16x=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x=0\ \vee\ x^2-4=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=2\ \vee\ x=-2$

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$4x$	–	–	–	0	+	+	+
x^2-4	+	0	–	–	–	0	+
g'	–	0	+	0	–	0	+
g	↘	-16	↗	0	↘	-16	↗

g é estritamente decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $[0,2]$.

g é estritamente crescente em $[-2,0]$ e em $[2,+\infty[$.

-16 é mínimo relativo e 0 é máximo relativo.

37.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-8x^2\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^4\left(1-\dfrac{8}{x^2}\right)\right]=$

$=+\infty\times(1-0)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-8x^2\right)\overset{\infty-\infty}{=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^4\left(1-\dfrac{8}{x^2}\right)\right]=+\infty\times(1-0)=+\infty$.

Assim sendo, conclui-se que -16 é mínimo absoluto da função e que não existe máximo absoluto da função.

38.1. $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\times(x+1)-1\times\left(x^2-2x\right)}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2+2x-2x-2-x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

$$f':\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow x^2+2x-2=0\ \wedge\ (x+1)^2\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{2}\ \wedge\ x\neq -1\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3}\ \vee\ x=-1-\sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{3}$		-1		$-1+\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2+2x-2	+	0	–	–	–	0	+
$(x+1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
f'	+	0	–	n.d.	–	0	+
f	↗	$f\left(-1-\sqrt{3}\right)$	↘	n.d.	↘	$f\left(-1+\sqrt{3}\right)$	↗

$$f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\sqrt{3}\right)}{-1-\sqrt{3}+1}=\frac{1+2\sqrt{3}+3+2+2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{6+4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{\left(6+4\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}}{-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}+12}{-3}=-2\sqrt{3}-4$$

$$f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1+\sqrt{3}\right)}{-1+\sqrt{3}+1}=\frac{1-2\sqrt{3}+3+2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(6-4\sqrt{3}\right)\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}-12}{3}=2\sqrt{3}-4$$

f é estritamente decrescente em $\left[-1-\sqrt{3},-1\right[$ e em $\left]-1,-1+\sqrt{3}\right]$.

f é estritamente crescente em $\left]-\infty,-1-\sqrt{3}\right]$ e em $\left[-1+\sqrt{3},+\infty\right[$.

$2\sqrt{3}-4$ é mínimo relativo e $-2\sqrt{3}-4$ é máximo relativo.

38.2.

$$g'(x)=\frac{2\times\sqrt{x-2}-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\times 2x}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{x-2}-\frac{x}{\sqrt{x-2}}}{x-2}=$$

$$=\frac{\frac{2(x-2)-x}{\sqrt{x-2}}}{x-2}=\frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$g':\left]2,+\infty\right[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}=0\Leftrightarrow x-4=0\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow x=4$$

x	0	4	$+\infty$
$x-4$	+	0	–
$(x-2)\sqrt{x-2}$	+	+	+
g'	–	0	+
g	↘	$4\sqrt{2}$	↗

$$g(4)=\frac{2\times 4}{\sqrt{4-2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$$

g é estritamente decrescente em $\left]2,4\right]$.

g é estritamente crescente em $\left[4,+\infty\right[$.

$4\sqrt{2}$ é mínimo relativo (e absoluto).

38.3. $h(x)=x|x|\Leftrightarrow h(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x\geq 0\\ -x^2 & \text{se } x<0\end{cases}$

Se $x<0$, então $h'(x)=\left(-x^2\right)'=-2x$.

Se $x>0$, então $h'(x)=\left(x^2\right)'=2x$.

Seja $x=0$, então:

$$h'\left(0^-\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

$$h'\left(0^+\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x)=0$$

Como $h'\left(0^-\right)=h'\left(0^+\right)=0$ então a função h é derivável em $x=0$ e $h'(0)=0$.

Assim, a função derivada de h é definida por:

$$h':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}2x & \text{se } x\geq 0\\ -2x & \text{se } x<0\end{cases}$$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
h'	+	0	+
h	↗	0	↗

h é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e não tem extremos relativos.

Tarefa 9

1.1. $f'(x)=x^2+x-2$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=-2$$

1.2.

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	$f(-2)$	↘	$f(1)$	↗

1.3. $f(-2)=\frac{-8}{3}+\frac{4}{2}+4+1=\frac{13}{3}$ e $f(1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+1=-\frac{1}{6}$.

f é estritamente decrescente em $\left[-2,1\right]$.

f é estritamente crescente em $\left]-\infty,-2\right]$ e em $\left[1,+\infty\right[$.

$-\frac{1}{6}$ é mínimo relativo e $\frac{13}{3}$ é máximo relativo.

2. $f'(x)=3x^2-2x-1$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=-\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	$f\left(-\frac{1}{3}\right)$	↘	$f(1)$	↗

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{27}\ \text{ e}$$

$f(1)=1^3-1^2-1=-1$. Então, $A\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{27}\right)$ e $B(1,-1)$.

3.1. $g'(x)=4x^3-6x^2$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-6x^2=0\Leftrightarrow x^2(4x-6)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=0\ \vee\ 4x-6=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\frac{3}{2}$$

3.2.

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x^2	+	0	+	+	+
$4x-6$	–	–	–	0	+
g'	–	0	–	0	+
g	↘	$g(0)$	↘	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	↗

Por observação da tabela, conclui-se que $g(0)$ não é extremo de g pois em 0 não há mudança do sinal da função derivada.

3.3. $\forall x \in \left]0, \frac{3}{2}\right[,\ g'(x) < 0$ e $\forall x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[,\ g'(x) > 0$.

g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{3}{2}\right[$ e estritamente crescente em $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

Logo, $g\left(\frac{3}{2}\right)$ é mínimo relativo de g.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^4 - 2x^3\right) = +\infty$.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, $g(0) = 0$ e

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{16}$,

conclui-se que $g\left(\frac{3}{2}\right)$ é mínimo absoluto de g.

Pág. 144

39.1. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee\ x = -1$

39.2. $f''(x) = 12x - 6$; $f''(-1) = -18$ e $f''(2) = 18$.

39.3. Como $f'(-1) = 0$ e $f''(-1) < 0$, a função *f* admite um máximo para $x = -1$. Como $f'(2) = 0$ e $f''(2) > 0$, a função *f* admite um mínimo para $x = 2$.

40. Sabe-se que o gráfico da função f' interseta o eixo das abcissas nos pontos $(-1, 0)$ e $(6, 0)$, ou seja, $f'(-1) = 0$ e $f'(6) = 0$.

Por observação gráfica da função f'' sabe-se ainda que $f''(-1) > 0$ e $f''(6) < 0$. Donde se conclui que a função *f* admite um mínimo para $x = -1$ e um máximo para $x = 6$.

Pág. 145

41. Sabe-se que –5, 1 e 3 são os zeros da função g' e que $g''(x) = 3x^2 + 2x - 17$. $g''(-5) = 3 \times (-5)^2 + 2 \times (-5) - 17 = 48$;

$g''(1) = 3 \times 1^2 + 2 \times 1 - 17 = -12$; $g''(3) = 3 \times 3^2 + 2 \times 3 - 17 = 16$.

Como $g'(-5) = 0$ e $g''(-5) > 0$, a função *g* admite um mínimo para $x = -5$.

Como $g'(1) = 0$ e $g''(1) < 0$, a função *g* admite um máximo para $x = 1$.

Como $g'(3) = 0$ e $g''(3) > 0$, a função *g* admite um mínimo para $x = 3$.

Assim sendo, a função *g* tem um máximo e dois mínimos locais.

42. Sabe-se que –3, 0 e 2 são os zeros da função f' e que $f''(x) = -3x^2 - 2x + 6$.

$f''(-3) = -3 \times (-3)^2 - 2 \times (-3) + 6 = -15$; $f''(0) = 6$;
$f''(2) = -3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 6 = -10$.

Como $f'(-3) = 0$ e $f''(-3) < 0$, a função *g* admite um mínimo para $x = -3$.

Como $f'(0) = 0$ e $f''(0) > 0$, a função *g* admite um máximo para $x = 0$.

Como $f'(2) = 0$ e $f''(2) < 0$, a função *g* admite um mínimo para $x = 2$.

Pág. 146

43. A função *f* é contínua no seu domínio, ou seja, em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, por ser uma função racional. Então, também é contínua nos intervalos $[1, 3]$ e $[3, 5]$. Como *f* é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, *f* é diferenciável nos intervalos $]1, 3[$ e $]3, 5[$. Pelo teorema de Lagrange sabe-se que existem

$c_1 \in]1, 3[$ e $c_2 \in]3, 5[$ tais que $f'(c_1) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$ e

$f'(c_2) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3}$.

Ora, $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{15}$ e $\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{5}{7} - \frac{3}{5}}{2} = \frac{2}{35}$.

Donde se conclui que existem $c_1 \in]1, 3[$ e $c_2 \in]3, 5[$ tais que $f'(c_1) > f'(c_2)$.

Pág. 147

44.1. $f'(a) < 0$ e $f''(a) > 0$, logo $f'(a) \times f''(a) < 0$.

44.2. $f''(b) > 0$ e $f'(c) > 0$, logo $f''(b) \times f'(c) > 0$.

44.3. $f'(b) > 0$ e $f''(c) < 0$, logo $f'(b) \times f''(c) < 0$.

44.4. $f''(c) < 0$ e $f''(d) < 0$, logo $f''(c) + f''(d) < 0$.

Pág. 148

45.1. Sendo $f(x) = x^4 + x - 1$, então $f'(x) = 4x^3 + 1$ e $f''(x) = 12x^2$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	+
f	∪	$f(0)$	∪

45.2. O gráfico de *f* não admite nenhum ponto de inflexão porque não há mudança do sentido da concavidade.

46.1. Sendo $f(x)=x^4+2x^2-3x+1$, então $f'(x)=4x^3+4x-3$ e $f''(x)=12x^2+4$. Como $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f''(x)>0$, conclui-se que a concavidade do gráfico de *f* é voltada para cima em todo o seu domínio.

46.2. $D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ x-1\geq 0\}=[1,+\infty[$;

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$;

$$g''(x)=\frac{0\times 2\sqrt{x-1}-2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\times 1}{\left(2\sqrt{x-1}\right)^2}=\frac{-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}{4(x-1)}=\frac{-1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

Como $\forall\, x\in]1,+\infty[,\ g''(x)<0$, conclui-se que a concavidade do gráfico de *g* é voltada para baixo em $]1,+\infty[$.

Pág. 149

47.1. $D_f=\mathbb{R}$

Sendo $f(x)=x^4-5x^3+6x^2+1$, então $f'(x)=4x^3-15x^2+12x$ e $f''(x)=12x^2-30x+12$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-30x+12=0\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\Leftrightarrow x=2\ \vee\ x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
f''	+	0	–	0	+
f		$\frac{31}{16}$		1	

No intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$ a concavidade é voltada para baixo. Nos intervalos $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ e $[2,+\infty[$ a concavidade é voltada para cima. Pontos de inflexão: $\left(\frac{1}{2},\frac{31}{16}\right)$ e $(2,1)$.

47.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ 4x+5\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{4}\right\}$

$$f'(x)=\frac{2x\times(4x+5)-4\times(x^2-1)}{(4x+5)^2}=\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}$$

$$f''(x)=\left[\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}\right]'=$$

$$=\frac{(8x+10)\times(4x+5)^2-2(4x+5)\times 4\times(4x^2+10x+4)}{(4x+5)^4}=$$

$$=\frac{(8x+10)\times(4x+5)-8\times(4x^2+10x+4)}{(4x+5)^3}=$$

$$=\frac{32x^2+40x+40x+50-32x^2-80x-32}{(4x+5)^3}=\frac{18}{(4x+5)^3}$$

A função f'' não tem zeros.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
f''	–	n.d.	+
f		n.d.	

No intervalo $\left]-\infty,-\frac{5}{4}\right[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $\left]-\frac{5}{4},+\infty\right[$ a concavidade é voltada para cima.

Não existem pontos de inflexão.

47.3. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+4\neq 0\}=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2x\times(x^2+4)-2x\times(1+x^2)}{(x^2+4)^2}=\frac{2x^3+8x-2x-2x^3}{(x^2+4)^2}=$$

$$=\frac{6x}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x)=\left[\frac{6x}{(x^2+4)^2}\right]'=\frac{6\times(x^2+4)^2-2(x^2+4)\times 2x\times 6x}{(x^2+4)^4}=$$

$$=\frac{6x^2+24-24x^2}{(x^2+4)^3}=\frac{-18x^2+24}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-18x^2+24}{(x^2+4)^3}=0\Leftrightarrow -18x^2+24=0\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \vee\ x=-\frac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ \vee\ x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{2}$		$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
$-18x^2+24$	–	0	+	0	–
$(x^2+4)^3$	+	+	+	+	+
f''	–	0	+	0	–
f		$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$		$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$	

Nos intervalos $\left]-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ e $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ a concavidade é voltada para cima.

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4}=\frac{1+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+4}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{16}{3}}=\frac{7}{16}$$

Pontos de inflexão: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{7}{16}\right)$ e $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{7}{16}\right)$.

47.4. $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x+2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)\times(x+2)-1\times\left(x^2+2x+1\right)}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+2x+4-x^2-2x-1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x)=\left[\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\right]'=$$

$$=\frac{(2x+4)\times(x+2)^2-2(x+2)\times\left(x^2+4x+3\right)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(2x+4)\times(x+2)-2\times\left(x^2+4x+3\right)}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-6}{(x+2)^3}=\frac{2}{(x+2)^3}$$

A função f'' não tem zeros.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	n.d.	$+$
f	$\cap$	n.d.	$\cup$

No intervalo $]-\infty,-2[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $]-2,+\infty[$ a concavidade é voltada para cima.

Não existem pontos de inflexão.

48.1.

x	$-\infty$	3		7	$+\infty$
g''	$+$	0	$+$	0	$-$
g	$\cup$	6	$\cup$	4	$\cap$

No intervalo $[7,+\infty[$ a concavidade é voltada para baixo. Nos intervalos $]-\infty,3]$ e $[3,7]$ a concavidade é voltada para cima.

48.2. O gráfico de g tem um único ponto de inflexão, o ponto de coordenadas $(7,4)$.

Pág. 150

49.1. $D_f=\mathbb{R}$

Sendo $f(x)=x-x^3$, então $f'(x)=1-3x^2$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \vee\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \vee\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↗	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	↘

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ é mínimo relativo e $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ é máximo relativo da função f.

49.2. $f(-x)=-x-(-x)^3=-x-\left(-x^3\right)=-x+x^3=-\left(x-x^3\right)=$

$=-f(x)$

$\forall\, x\in\mathbb{R}:\ f(-x)=-f(x)$, logo f é uma função ímpar.

49.3. $f''(x)=-6x$

$f''(x)=0\Leftrightarrow -6x=0\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	0	$\cap$

No intervalo $[0,+\infty[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $]-\infty,0]$ a concavidade é voltada para cima.

Ponto de inflexão: $(0,0)$.

50.1. $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-4x+5>0\right\}=\mathbb{R}$.

Assíntotas verticais

Como $D_g=\mathbb{R}$ e g é contínua em $\mathbb{R}$, não existem assíntotas verticais ao gráfico de g.

Assíntotas horizontais

- Em $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-10}{\sqrt{x^2-4x+5}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-10}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5-\frac{10}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{10}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{5-0}{\sqrt{1-0+0}}=5$$

$y=5$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

- Em $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-10}{\sqrt{x^2-4x+5}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-10}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{10}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{10}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{5-0}{-\sqrt{1-0+0}}=-5$$

$y=-5$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

50.2. $g'(x)=\dfrac{5\times\sqrt{x^2-4x+5}-\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}\times(5x-10)}{\left(\sqrt{x^2-4x+5}\right)^2}=$

$=\dfrac{\dfrac{5\times(x^2-4x+5)-(x-2)\times(5x-10)}{\sqrt{x^2-4x+5}}}{x^2-4x+5}=\dfrac{5}{(x^2-4x+5)^{\frac{3}{2}}}$

Como $\forall\, x\in\mathbb{R},\ g'(x)>0$, conclui-se que a função g não tem extremos pois é estritamente crescente.

50.3. $g''(x)=\left[\dfrac{5}{(x^2-4x+5)^{\frac{3}{2}}}\right]'=\left[5(x^2-4x+5)^{-\frac{3}{2}}\right]'=$

$=-\dfrac{15}{2}(x^2-4x+5)^{-\frac{5}{2}}\times(2x-4)=\dfrac{-15(x-2)}{(x^2-4x+5)^{\frac{5}{2}}}$

$g''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-15(x-2)}{(x^2-4x+5)^{\frac{5}{2}}}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -15(x-2)=0\ \wedge\ (x^2-4x+5)^{\frac{5}{2}}\neq0\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
g''	+	0	–
g	$\cup$	0	$\cap$

No intervalo $[2,+\infty[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $]-\infty,2]$ a concavidade é voltada para cima.

Tarefa 10

1.1.

a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$;

$f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{x-1}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=0\ \wedge\ x-1\neq0\Leftrightarrow x=0\ \wedge\ x\neq1\Leftrightarrow x=0$

b) Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

A reta $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.
Não existe mais nenhuma assíntota vertical ao gráfico de *f* porque a função *f* é contínua em todo o seu domínio.

Assíntotas não verticais

· Em $+\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=$

$=\dfrac{1}{1-0}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-1x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{1-0}=1$.

Portanto, a reta $y=x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=$

$=\dfrac{1}{1-0}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-1x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2+x}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{1-0}=1$.

Portanto, a reta $y=x+1$ também é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

1.2. $f'(x)=\dfrac{2x\times(x-1)-1\times x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\ \wedge\ (x-1)^2\neq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-2)=0\ \wedge\ x\neq1\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=2$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x^2-2x	+	0	–	–	–	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
f'	+	0	–	n.d.	–	0	+
f	↗	0	↘	n.d.	↘	4	↗

f é estritamente decrescente em $[0,1[$ e em $]1,2]$.

f é estritamente crescente em $]-\infty,0]$ e em $[2,+\infty[$.

4 é mínimo relativo e 0 é máximo relativo.

1.3. $f''(x)=\dfrac{(2x-2)\times(x-1)^2-2(x-1)\times(x^2-2x)}{(x-1)^4}=$

$=\dfrac{(2x-2)\times(x-1)-2\times(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\dfrac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=$

$=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

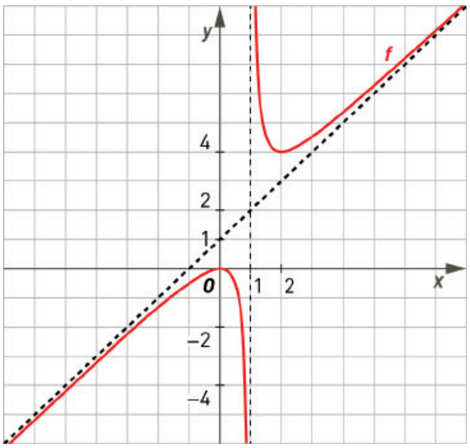
x	$-\infty$	1	$+\infty$
2	+	+	+
$(x-1)^3$	–	0	+
f''	–	n.d.	+
f	$\cap$	n.d.	$\cup$

No intervalo $]-\infty,1[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $]1,+\infty[$ a concavidade é voltada para cima.

Não existem pontos de inflexão.

1.4.



2.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+3\geq 0\right\}=\mathbb{R}$

$$f'(x)=1\times\sqrt{x^2+3}+x\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\sqrt{x^2+3}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}=$$

$$=\frac{x^2+3+x^2}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

Portanto, $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)>0$.

2.2. A função *f* é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o produto entre funções contínuas. Então, em particular, é contínua em $[1,2]$.

$f(1)=1\sqrt{1+3}=2$ e $f(2)=2\sqrt{4+3}=2\sqrt{7}\approx 5{,}3$.

Como *f* é contínua em $[1,2]$ e $f(1)<3<f(2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c\in\,]1,2[\,:\ f(c)=3$, isto é, a equação $f(x)=3$ tem pelo menos uma solução pertencente ao intervalo $]1,2[$.

A função *f* é estritamente crescente no seu domínio porque $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)>0$. Portanto, a solução da equação $f(x)=3$ é única.

3.1. Sendo $f(x)=x^4-ax^3+2x^2-bx+c$, então

$f'(x)=4x^3-3ax^2+4x-b$ e $f''(x)=12x^2-6ax+4$.

$$\begin{cases}f(1)=0\\ f'(1)=0\\ f''(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-a+2-b+c=0\\ 4-3a+4-b=0\\ 12-6a+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{8}{3}-b+c=-3\\ -8-b=-8\\ a=\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{8}{3}-0+c=-3\\ b=0\\ a=\frac{8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-\frac{1}{3}\\ b=0\\ a=\frac{8}{3}\end{cases}$$

3.2. Sendo $a=\frac{8}{3}$, $b=0$ e $c=-\frac{1}{3}$, então

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{3}$ e $f''(x)=12x^2-16x+4$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-16x+4=0\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}\Leftrightarrow x=1\vee x=\frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	$-\frac{16}{81}$	∩	0	∪

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^4-\frac{8}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}=\frac{1}{81}-\frac{8}{81}+\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=-\frac{16}{81}$ e

$f(1)=1-\frac{8}{3}\times 1+2\times 1-\frac{1}{3}=0$.

As coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico de *f* são $\left(\frac{1}{3},-\frac{16}{81}\right)$ e $(1,0)$.

Pág. 151

51.1. $V(x)=x\times x\times(15-x)=x^2\times(15-x)=-x^3+15x^2$

51.2. $D=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge 15-x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge x<15\right\}=$

$=\,]0,15[$;

$V'(x)=\left(-x^3+15x^2\right)'=-3x^2+30x$;

$V'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+30x=0\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow 3x(-x+10)=0\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0\ \vee\ x=10)\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow x=10$

x	0	10	15
V'	+	0	−
V	↗	$V(10)$	↘

O volume da caixa é máximo quando $x=10$.

52. $V(x)=(64-2x)\times(40-2x)\times x=$

$=\left(2560-128x-80x+4x^2\right)\times x=4x^3-208x^2+2560x$

$D=\left\{x\in\mathbb{R}:64-2x>0\wedge 40-2x>0\wedge x>0\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:x<32\wedge x<20\wedge x>0\right\}=\,]0,20[$

$V'(x)=\left(4x^3-208x^2+2560x\right)'=12x^2-416x+2560$

$V'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-416x+2560=0\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-104x+640=0\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x=8\ \vee\ x=\frac{80}{3}\right)\ \wedge\ x\in D\Leftrightarrow x=8$

x	0	8	20
V'	+	0	−
V	↗	$V(8)$	↘

O volume da caixa é máximo quando $x=8$ cm .

Tarefa 11

1.1.

a) Seja *l* a medida do lado do canteiro quadrado, em metros.
O perímetro do canteiro circular é dado, em função de *r*, por $2\pi r$. O perímetro do canteiro quadrado é dado, em função de *l*, por $4l$. Sabe-se que a soma dos perímetros dos canteiros é 60, então tem-se: $2\pi r+4l=60 \Leftrightarrow 4l=60-2\pi r \Leftrightarrow l=15-0,5\pi r$.

b) Sendo *S* a função que a cada valor de *r* faz corresponder a soma das áreas dos dois canteiros, tem-se
$S(r)=\pi r^2+(15-0,5\pi r)^2$.

1.2. $S'(r)=2\pi r+2(15-0,5\pi r)\times(-0,5\pi)=$

$=2\pi r+(30-\pi r)\times(-0,5\pi)=2\pi r-15\pi+0,5\pi^2 r=$

$=(2\pi+0,5\pi^2)r-15\pi$;

$S'(r)=0 \Leftrightarrow (2\pi+0,5\pi^2)r-15\pi=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=\dfrac{15\pi}{2\pi+0,5\pi^2} \Leftrightarrow r=\dfrac{15}{2+0,5\pi}$

$D=\{r\in\mathbb{R}: r>0 \wedge 15-0,5\pi r>0\}=\left\{r\in\mathbb{R}: r>0 \wedge r<\dfrac{30}{\pi}\right\}=$

$=\left]0,\dfrac{30}{\pi}\right[$

x	0		$\dfrac{15}{2+0,5\pi}$		$\dfrac{30}{\pi}$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$S\left(\dfrac{15}{2+0,5\pi}\right)$	$\nearrow$	

A soma das áreas é mínima quando $r=\dfrac{15}{2+0,5\pi}$.

A medida do lado do canteiro com a forma de quadrado é:

$l=15-0,5\pi\times\dfrac{15}{2+0,5\pi}=15-\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{15}{2+0,5\pi}=15-\dfrac{15\pi}{4+\pi}=$

$=\dfrac{60+15\pi-15\pi}{4+\pi}=\dfrac{60}{4+\pi}$. Nesse caso, a medida do raio do canteiro circular é metade da medida do lado do canteiro com a forma de quadrado pois sabe-se que:

$r=\dfrac{15}{2+0,5\pi}=\dfrac{30}{4+\pi}$ e $l=\dfrac{60}{4+\pi}$.

2. O ponto *P* pertence ao gráfico de *f*, logo $P\,(x, f(x))$, $x>0$.

Seja *d* a função que a cada valor de *x*, abcissa de *P*, faz corresponder a distância do ponto *P* à origem.

$$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(f(x)-0)^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{4}{\sqrt{x}}\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{16}{x}}$$

$$d'(x)=\left(\sqrt{x^2+\frac{16}{x}}\right)'=\frac{2x-\frac{16}{x^2}}{2\sqrt{x^2+\frac{16}{x}}}=\frac{2x^3-16}{2x^2\sqrt{x^2+\frac{16}{x}}}=\frac{x^3-8}{x^2\sqrt{x^2+\frac{16}{x}}}$$

$$d'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3-8}{x^2\sqrt{x^2+\frac{16}{x}}}=0 \Leftrightarrow x^3-8=0 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x=2$$

x	0	2	$+\infty$
d'	$-$	0	$+$
d	$\searrow$	$d(2)$	$\nearrow$

A distância do ponto *P* à origem é mínima quando $x=2$.

Como $f(2)=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$, conclui-se que $P\left(2, 2\sqrt{2}\right)$.

Pág. 152

53. $v(2)=32\times2+12=76$ km/h $=76\times\dfrac{1000}{3600}$ m/s $\approx 21,111$ m/s.

54.1. $h'(t)=\left(-t^2+7t+1\right)'=-2t+7$

$h'(2)=-2\times2+7=3$ m/s $=3\times10^{-3}\times3600$ km/h $=10,8$ km/h

A velocidade do corpo no instante $t=2$ é de $10,8$ km/h.

54.2.

a) $h''(t)=-2$, ou seja, a aceleração é constante.

$h''(2)=-2$

A aceleração no instante $t=2$ é de -2 m/s^2.

b) $h''(5)=-2$

A aceleração no instante $t=5$ é de -2 m/s^2.

Pág. 153

55.1.

a) $v_m=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{-1+3+4-(4)}{1}=2$ m/s

A velocidade média no intervalo $[0, 1]$ é de 2 m/s.

b) $v_m=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{-9+9+4-(-1+3+4)}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ m/s

A velocidade média no intervalo $[1, 3]$ é de -1 m/s.

55.2.

a) $f'(t)=\left(-t^2+3t+4\right)'=-2t+3$

$f'(1)=-2\times1+3=1$

A velocidade no instante $t=2$ é de 1 m/s.

b) $f'(2)=-2\times2+3=-1$

A velocidade no instante $t=2$ é de -1 m/s.

55.3.

a) $m_t=f'(1,5)=-2\times1,5+3=0$

No contexto do problema significa que a bola atinge a altura máxima no instante $t=1,5$ s.

b) $m_t=f'(2,5)=-2\times2,5+3=-2$

No contexto do problema significa que no instante $t=2,5$ s a bola está a descer à velocidade de 2 m/s.

Pág. 154

56.1. $v_m=\dfrac{x(3)-x(1)}{3-1}=\dfrac{69-13}{2}=28$ m/s

A velocidade média do ponto entre os instantes $t=1$ s e $t=3$ s é de 28 m/s.

56.2. $x'(t)=\left(5t^2+8t\right)'=10t+8$

$x'(4)=10\times4+8=48$

A velocidade no instante $t=4\ s$ é de $48\ \text{m/s}$.

56.3. $x''(t)=\left(10t+8\right)'=10$

$x''(5)=10$

A aceleração do ponto no instante $t=5\ s$ é de $10\ \text{m/s}^2$.

57. $V'(t)=\left(-\frac{16}{3}t^3+8t^2+60t\right)'=-16t^2+16t+60$

$V'(t)=0 \Leftrightarrow -16t^2+16t+60=0 \Leftrightarrow -4t^2+4t+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{-8} \Leftrightarrow t=\frac{-4\pm16}{-8} \Leftrightarrow t=-1,5 \ \vee\ t=2,5$

Como $t>0$, conclui-se que $t=2,5$.

Atendendo ao contexto do problema, sabe-se que $V(t)>0$.

Ora, $V(t)>0 \Leftrightarrow -\frac{16}{3}t^3+8t^2+60t>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8t\left(-\frac{2}{3}t^2+t+7,5\right)>0 \underset{t>0}{\Leftrightarrow} -\frac{2}{3}t^2+t+7,5>0$

$\Leftrightarrow -2t^2+3t+22,5>0 \Leftrightarrow t\in\left]0,\frac{3+\sqrt{189}}{4}\right[$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$-2t^2+3t+22,5=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{9+180}}{-4} \Leftrightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{189}}{-4} \underset{t>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow t=\frac{3+\sqrt{189}}{4}$

x	0	2,5	$\frac{3+\sqrt{189}}{4}$
V'	+	0	–
V	↗	$V(2,5)$	↘

$V(2,5)=-\frac{16}{3}\times2,5^3+8\times2,5^2+60\times2,5\approx116,7$

A velocidade máxima atingida foi de, aproximadamente, 116,7 km/h.

Assim sendo, conclui-se que o motorista da empresa excedeu a velocidade permitida (90 km/h).

Pág. 155

Proposta 24

24.1. $f(7)-f(4)=f(4+3)-f(4)=3^2+2\times3=15$

24.2. $\text{t.m.v.}_{[4,7]}=\frac{f(7)-f(4)}{7-4}=\frac{15}{3}=5$

24.3. $f'(4)=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(h+2)=$

$=0+2=2$

24.4. O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 4 é igual a $f'(4)$, ou seja, 2.

A reta tangente é do tipo $y=2x+b$.

Como o ponto $A(4,1)$ pertence à reta tangente, então tem-se:

$1=2\times4+b \Leftrightarrow b=-7$.

Uma equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *A* é $y=2x-7$.

Proposta 25

25.1. $\text{t.m.v.}_{[x_0,x_1]}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{ax_1+b-ax_0-b}{x_1-x_0}=$

$=\frac{ax_1-ax_0}{x_1-x_0}=\frac{a(x_1-x_0)}{x_1-x_0}=a$

25.2. $f'(x)=(ax+b)'=a$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* num ponto de abcissa x_0 é igual a $f'(x_0)$, ou seja, *a*. A reta tangente é do tipo $y=ax+k$. Como o ponto de coordenadas (x_0, ax_0+b) pertence à reta tangente, então tem-se: $ax_0+b=a\times x_0+k \Leftrightarrow$ $k=b$.

A reta tangente ao gráfico de *f* em qualquer ponto de abcissa x_0 é definida por $y=ax+b$, ou seja, coincide com o gráfico de *f*.

Proposta 26

26.1. $C(0)=\frac{3\times0^2+4\times0+15}{0^2+0+1}=\frac{15}{1}=15$

Quando o sumo foi colocado no frigorífico, a temperatura ambiente era de 15 °C.

26.2. $\text{t.m.v.}_{[0,2]}=\frac{C(2)-C(0)}{2-0}=\frac{5-15}{2}=-5$

Nas duas primeiras horas, a temperatura do sumo baixou, em média, 5 °C por hora.

26.3. $C'(t)=\left(3+\frac{t+12}{t^2+t+1}\right)'=\frac{1\cdot(t^2+t+1)-(2t+1)\cdot(t+12)}{(t^2+t+1)^2}=$

$=\frac{-t^2-24t-11}{(t^2+t+1)^2}$; $\quad C'(1)=\frac{-1-24-11}{(1+1+1)^2}=\frac{-36}{9}=-4$

A taxa de variação no instante $t=1$ é igual a -4 °C por hora.

26.4. $\lim\limits_{t\to+\infty}C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(3+\frac{t+12}{t^2+t+1}\right)=3+\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t+12}{t^2+t+1}\right)=$

$=3+\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t^2}\right)=3+\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)=3+0=3$

Se a Ana deixar o sumo muito tempo no frigorífico, este ficará a uma temperatura de 3 °C.

Proposta 27

27.1. $g'(x)=3x^2-5$

O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa –3 é igual a $g'(-3)$, ou seja, 22.

A reta tangente é do tipo $y=22x+b$.

Como o ponto $A(-3,-5)$ pertence à reta tangente, então tem-se: $-5=22\times(-3)+b \Leftrightarrow b=61$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa –3 é $y=22x+61$.

27.2. $g'(x)=\dfrac{2x\times(x+3)-1\times x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$

O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa –2 é igual a $g'(-2)$, ou seja, –8.

A reta tangente é do tipo $y=-8x+b$.

Como o ponto $A(-2,4)$ pertence à reta tangente, então tem-se: $4=-8\times(-2)+b \Leftrightarrow b=-12$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa –2 é $y=-8x-12$.

27.3. $g'(x)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$

O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 2 é igual a $g'(2)$, ou seja, 2.

A reta tangente é do tipo $y=2x+b$.

Como o ponto $A(2,3)$ pertence à reta tangente, então tem-se:

$3=2\times2+b \Leftrightarrow b=-1$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 2 é $y=2x-1$.

Pág. 156

Proposta 28

28.1. Sabe-se que $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-1$.

Então, tem-se: $f'\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}}-1=\dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{2}}-1=1-1=0$.

28.2. $f''(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-1\right)'=\left(\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-1\right)'=$

$=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$

Então, $f''\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{4\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^3}}=-\dfrac{1}{4\times\dfrac{1}{8}}=-2$.

Como $f''\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{4\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^3}}=-\dfrac{1}{4\times\dfrac{1}{8}}=-2$, conclui-se que a função tem um máximo no ponto de abcissa $-\dfrac{3}{4}$, ou seja, $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)$ é um máximo.

O valor desse máximo é $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)= =\sqrt{1-\dfrac{3}{4}}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$.

Proposta 29

A representação gráfica que corresponde à representação gráfica da função f' é a que consta da opção (B).

A representação gráfica indicada na opção (A) não é uma função. Os declives das retas tangentes ao gráfico de *f* nos pontos de abcissa negativa são positivos, donde se conclui que $\forall x\in\mathbb{R}^-,\ f'(x)>0$. Então, a representação gráfica não pode ser a indicada na opção (C).

A reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa zero é horizontal, logo conclui-se que $f'(0)=0$. Assim sendo, a representação gráfica indicada na opção (D) não corresponde à representação gráfica da função derivada de *f* porque nesse caso $f'(0)>0$.

Proposta 30

O ponto $P(1,-2)$ é um ponto de inflexão do gráfico de uma função *f*, então sabe-se que $f(1)=-2$.

Assim sendo, a única expressão que pode corresponder a $f(x)$ é x^3-3x^2.

De facto, se $f(x)=x^3-3x^2$ então $f'(x)=3x^2-6x$ e $f''(x)=6x-6$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	–	0	+
f		$f(1)=-2$	

O gráfico de *f* tem um ponto de inflexão para $x=1$.

A opção correta é a (D).

Pág. 157

Proposta 31

Seja *a* a abcissa do ponto onde a função *f* não é derivável. Como o domínio da função derivada é $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, sendo $a>0$, então rejeitam-se as opções (C) e (D) pois no caso da função representada em (C) não existe derivada no ponto de abcissa zero e no caso da situação (D) não existe derivada num ponto de abcissa negativa. No caso da função representada em (D), a função é estritamente crescente nos pontos de abcissa inferior a *a*. Então, a função derivada é positiva nesses pontos, o que não corresponde à situação dada. A representação gráfica que corresponde à representação gráfica de *f* é a que consta da opção (A).

Proposta 32

32.1. $f'(x) = 2kx + 2$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2 é igual a $f'(2)$, ou seja, $4k+2$.

A reta tangente é do tipo $y = (4k+2)x + b$. Como o ponto de coordenadas $(2, f(2))$, ou seja, $(2, 4k+3)$, pertence à reta tangente, então tem-se:

$4k+3 = (4k+2)\times 2 + b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4k+3 = 8k+4+b \Leftrightarrow b = -4k-1$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2 é $y = (4k+2)x - 4k - 1$.

A reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2 passa no ponto de coordenadas $(3, 2)$ se:

$2 = (4k+2)\times 3 - 4k - 1 \Leftrightarrow 2 = 12k + 6 - 4k - 1 \Leftrightarrow k = -\dfrac{3}{8}$

32.2. Sendo $k = \dfrac{1}{4}$, então $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x - 1$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de *f* que é paralela a *Ox*. Então, $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$;

$f(-4) = \dfrac{1}{4}\times 16 - 8 - 1 = -5$. Donde se conclui que $P(-4, -5)$.

Ora, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \dfrac{1}{2}$.

Como $f''(-4) > 0$, conclui-se que a função *f* tem um mínimo no ponto de abcissa -4.

Proposta 33

33.1. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

$g(3) = \dfrac{1}{3}\times 27 - 9 - 9 = -9$ e $g(-1) = \dfrac{1}{3}\times(-1) - 1 + 3 = \dfrac{5}{3}$.

As coordenadas dos pontos do gráfico de *g* onde as tangentes ao gráfico são paralelas ao eixo das abcissas são

$(3, -9)$ e $\left(-1, \dfrac{5}{3}\right)$.

33.2. $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g''	–	0	+
g	$\frown$	$g(1)$	$\smile$

$g(1) = \dfrac{1}{3}\times 1 - 1 - 3 = -\dfrac{11}{3}$

As coordenadas do ponto de inflexão do gráfico de *g* são $\left(1, -\dfrac{11}{3}\right)$.

Proposta 34

34.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x\times(x^2+1) - 2x\times x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\times(x^2+1)^2 - 2\times(x^2+1)\times 2x\times 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2\times(x^2+1) - 2\times 2x\times 2x}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 2 = 0 \ \wedge\ \underbrace{(x^2+1)^3 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \ \vee\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \vee\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Então, $A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ e $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

34.2.

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$-6x^2+2$	–	0	+	0	–
$(x^2+1)^3$	+	+	+	+	+
f''	–	0	+	0	–
f	$\frown$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\smile$	$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frown$

Nos intervalos $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ a concavidade é voltada para cima.

34.3. $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) = 2x \ \wedge\ (x^2+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^3 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x - 1 = 0 \ \vee\ \underbrace{x^2 + x + 2 = 0}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x = 1$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

1 é zero do polinómio $x^3 + x - 2$. Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Então, sabe-se que $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$.

Os gráficos das funções *f* e *f ´* intersetam-se nos pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Pág. 158

Proposta 35

35.1. Se $h(x)=x^3+x^2-x+2$ então $h'(x)=3x^2+2x-1$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
h'	+	0	–	0	+
h	↗	$f(-1)$	↘	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	↗

A função h tem um máximo local em -1 e um mínimo local em $\dfrac{1}{3}$. Daqui resulta que $x_A=-1$ e $x_B=\dfrac{1}{3}$.

35.2. $h''(x)=0 \Leftrightarrow 6x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
h''	–	0	+
h	$\frown$	$h\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\smile$

$$h\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+2=-\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+2=\frac{65}{27}$$

Então, o ponto de inflexão do gráfico da função h é $C\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{65}{27}\right)$.

Proposta 36

Seja f uma função polinomial do 3.º grau, então
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a\neq 0$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ e $f''(x)=6ax+2b$.

Como f é uma função contínua (por ser uma função polinomial) e o seu gráfico tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa zero, então tem-se: $f''(0)=0$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6a\times 0+2b=0 \Leftrightarrow 2b=0 \Leftrightarrow b=0$

Então, a expressão representativa da função polinomial f não tem termo do 2.º grau pois $f(x)=ax^3+cx+d,\ a\neq 0$.

Proposta 37

Sendo $A(2,3)$ ponto de inflexão do gráfico de f então tem-se

$f(2)=3$ e $f''(2)=0$. $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2+2ax+6$ e $f''(x)=3x+2a$.

$$\begin{cases} f(2)=3 \\ f''(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\times 8+4a+12+b=3 \\ 6+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-12+12+b=3 \\ a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=-3 \end{cases}$$

Proposta 38

38.1. $f'(x)=\left(\dfrac{3x}{2+x}\right)'=\dfrac{3\times(2+x)-1\times 3x}{(2+x)^2}=\dfrac{6}{(2+x)^2}$

38.2.

a) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=\dfrac{3h(x)}{2+h(x)}$

Se $g(x)=(f\circ h)(x)$, então conclui-se que a função h é caracterizada da seguinte forma:

$$h:\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

b) $g'(x)=\left[(f\circ h)(x)\right]'=h'(x)\times f'(h(x))=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{6}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}=$

$=\dfrac{3}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$

38.3. $f''(x)=\left(\dfrac{6}{(2+x)^2}\right)'=\left(6(2+x)^{-2}\right)'=-12(2+x)^{-3}\times 1=$

$=\dfrac{-12}{(2+x)^3}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
-12	–	–	–
$(2+x)^3$	–	0	+
f''	+	n.d.	–
f	$\smile$	n.d.	$\frown$

No intervalo $]-2,+\infty[$, a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $]-\infty,-2[$, a concavidade é voltada para cima.

Pág. 159

Proposta 39

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ a\neq 0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ e $f''(x)=6ax+2b$.

A função f'' é ímpar se e só se $\forall x\in D,\ f''(-x)=-f''(x)$.

$f''(-x)=-f''(x) \Leftrightarrow 6a(-x)+2b=-(6ax+2b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6ax+2b=-6ax-2b \Leftrightarrow 4b=0 \Leftrightarrow b=0$

Proposta 40

40.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: 9-x^2>0\right\}$

$9-x^2>0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3-x>0 \ \wedge\ 3+x>0) \ \vee\ (3-x<0 \ \wedge\ 3+x<0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x<3 \ \wedge\ x>-3) \ \vee\ (x>3 \ \wedge\ x<-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3<x<3 \ \vee\ x\in\varnothing \ \Leftrightarrow\ -3<x<3$

Então, $D_f=]-3,3[$.

40.2. $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}\right)'=\dfrac{1\times\sqrt{9-x^2}-\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\times(x+1)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2}=$

$=\dfrac{9-x^2+x\times(x+1)}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}=\dfrac{9+x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\forall x\in\left]-3,3\right[,\quad 9+x>0\ \wedge\ (9-x^2)^{\frac{3}{2}}>0$

Então, $f'(x)>0$. Donde se conclui que a função *f* é estritamente crescente em todo o seu domínio.

40.3. $f''(x)=\left(\dfrac{9+x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'=$

$=\dfrac{1\times(9-x^2)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}\times(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\times(-2x)\times(9+x)}{(9-x^2)^3}=$

$=\dfrac{9-x^2+3x\times(9+x)}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{2x^2+27x+9}{(9-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

Portanto, $f''(0)=\dfrac{9}{9^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{1}{27}$.

Proposta 41

41.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$

$\forall x\in D_f,\ -x\in D_f$ e $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$.

Logo, *f* é uma função par.

41.2. Recorrendo ao teorema de Bolzano, pretende-se mostrar que existe um ponto do gráfico de *f* de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\sqrt{2},\sqrt{3}\right[$ em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta de equação $y=\dfrac{x}{2}$, ou seja, que

$\exists c\in\left]\sqrt{2},\sqrt{3}\right[: f'(c)=\dfrac{1}{2}$.

$f'(x)=\dfrac{2x\times(x^2+1)-2x\times(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

A função f' é contínua em $\mathbb{R}$ por ser o quociente entre funções contínuas. Em particular, f' é contínua no intervalo $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$. $f'(\sqrt{3})<\dfrac{1}{2}<f'(\sqrt{2})$ pois $f'(\sqrt{2})=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\approx 0{,}63$ e $f'(\sqrt{3})=\dfrac{4\sqrt{3}}{16}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\approx 0{,}43$. Como f' é contínua em $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ e $f'(\sqrt{3})<\dfrac{1}{2}<f'(\sqrt{2})$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c\in\left]\sqrt{2},\sqrt{3}\right[: f'(c)=\dfrac{1}{2}$.

41.3. $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow 4x=0\ \wedge\ (x^2+1)^2\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x$	$-$	0	$+$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Como o ponto *C* pertence ao gráfico de *f* e a sua ordenada é o mínimo absoluto da função, tem-se que $C(0,-1)$.

$f''(x)=\dfrac{4\times(x^2+1)^2-2\times(x^2+1)\times 2x\times 4x}{(x^2+1)^4}=$

$=\dfrac{4\times(x^2+1)-2\times 2x\times 4x}{(x^2+1)^3}=\dfrac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}=0\Leftrightarrow -12x^2+4=0\ \wedge\ \underbrace{(x^2+1)^3\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\ \vee\ x=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \vee\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$-12x^2+2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\smile$	$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frown$

$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{3}-1}{\dfrac{1}{3}+1}=-\dfrac{1}{2}$

Como *f* é uma função par, $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Os pontos de inflexão do gráfico de *f* são:

$A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Assim sendo, $A_{[ABC]}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\left|-1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Proposta 42

42.1.

a) $D_f=D_{g\circ h}=\{x\in D_h:\ h(x)\in D_g\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-2x-1\in[2,+\infty[\}=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-2x-1\geq 2\}$

$x^2-2x-1\geq 2\Leftrightarrow x^2-2x-3\geq 0\Leftrightarrow(x-3)(x+1)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\leq -1\ \vee\ x\geq 3$

Então, $D_f=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[3,+\infty\right[$.

b) $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa $\dfrac{9}{4}$ é igual a $g'\left(\dfrac{9}{4}\right)$, ou seja, 1. A reta tangente é do tipo $y=x+b$.

$g\left(\dfrac{9}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{9}{4}-2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

Como o ponto de coordenadas $\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ pertence à reta tangente, então tem-se: $\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{4}+b \Leftrightarrow b=-\dfrac{7}{4}$

Uma equação da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa $\dfrac{9}{4}$ é $y=x-\dfrac{7}{4}$.

42.2. $f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\sqrt{h(x)-2}=\sqrt{x^2-2x-3}$

$D_f=]-\infty,-1]\cup[3,+\infty[$;

$f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x-1$	–	–		+	+
$\sqrt{x^2-2x-3}$	+	0		0	+
f'	–	n.d.		n.d.	+
f	↘	0		0	↗

f é estritamente decrescente em $]-\infty,-1]$.

f é estritamente crescente em $[3,+\infty[$.

Pág. 160

Proposta 43

43.1. 2 é ponto aderente do domínio de *g* e $2\in D_g$.

$\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3}{2}=\dfrac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{2}$

$g(2)=\dfrac{1}{2}$.

Existe $\lim\limits_{x\to2} g(x)$ porque $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=g(2)$.

Logo, a função *g* é contínua em $x=2$.

43.2. $g'(2^-)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\frac{x^2-3}{2}-\frac{1}{2}}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+2}{2}=2$

$g'(2^+)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}-\frac{1}{2}}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2\sqrt{x-1}-2-x+2}{2(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2\sqrt{x-1}-x}{2(x-2)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\left(2\sqrt{x-1}-x\right)\left(2\sqrt{x-1}+x\right)}{2(x-2)^2\left(2\sqrt{x-1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{4x-4-x^2}{2(x-2)^2\left(2\sqrt{x-1}+x\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{x-1}+x\right)}=-\dfrac{1}{8}$

Não existe $g'(2)$ porque $g'(2^-)\neq g'(2^+)$.

43.3. $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{x^2-3}{2}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{2}=1$

43.4. Sendo $x<2$, então $g'(x)=\dfrac{2x}{2}=x$.

Então, tem-se:

$g'(a)=0 \quad\wedge\quad a<2 \Leftrightarrow a=0 \quad\wedge\quad a<2 \Leftrightarrow a=0$.

43.5. $g''(x)=(x)'=1$

Então, $g''(a)=1$.

Dado que $g''(a)>0$, conclui-se que a função *g* tem um mínimo em *a*.

43.6. O declive da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 5 é igual a $g'(5)$, ou seja, $-\dfrac{1}{36}$.

A reta tangente é do tipo $y=-\dfrac{1}{36}x+b$.

$g(5)=\dfrac{\sqrt{5-1}-1}{5-2}=\dfrac{1}{3}$

Como o ponto de coordenadas $\left(5,\dfrac{1}{3}\right)$ pertence à reta tangente, então tem-se: $\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{36}\times5+b \Leftrightarrow b=\dfrac{17}{36}$.

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 5 é $y=-\dfrac{1}{36}x+\dfrac{17}{36}$.

Proposta 44

44.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}:\ x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 1$

Então, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

44.2.

<u>Assíntotas verticais</u>

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

Portanto, a reta $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{(x-1)} = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{(x-1)} = 4$

Portanto, a reta $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

<u>Assíntotas não verticais</u> $(y = mx + b)$

· Em $+\infty$:

$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2}{x^3-3x^2+2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1-0}{1-0+0} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} - 1x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1-0}{1-0+0} = 1$

Portanto, a reta $y = x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

· Em $-\infty$:

$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-2x^2}{x^3-3x^2+2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1-0}{1-0+0} = 1$;

$b = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-3x+2} - 1x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \dfrac{1-0}{1-0+0} = 1$

Portanto, a reta $y = x+1$ também é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

44.3. $f'(x) = \dfrac{(3x^2-4x)\times(x^2-3x+2) - (2x-3)\times(x^3-2x^2)}{(x^2-3x+2)^2} =$

$= \dfrac{3x^4-9x^3+6x^2-4x^3+12x^2-8x-2x^4+4x^3+3x^3-6x^2}{(x^2-3x+2)^2} =$

$= \dfrac{x^4-6x^3+12x^2-8x}{(x^2-3x+2)^2} = \dfrac{x(x-2)^3}{(x-1)^2(x-2)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x = 0 \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x = 2) \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$x(x-2)$	+	0	–	–	–	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
f'	+	0	–	n.d.	–	n.d.	+
f	↗	0	↘	n.d.	↘	n.d.	↗

f é estritamente decrescente em $[0, 1[$ e em $]1, 2[$.

f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e $]2, +\infty[$.

0 é máximo relativo.

44.4. $f''(x) = \dfrac{(2x-2)\times(x-1)^2 - 2(x-1)\times(x^2-2x)}{(x-1)^4} =$

$= \dfrac{(2x-2)\times(x-1) - 2\times(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \dfrac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} =$

$= \dfrac{2}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
2	+	+	+	+	+
$(x-1)^3$	–	0	+	+	+
f''	–	n.d.	+	n.d.	+
f	$\cap$	n.d.	$\cup$	n.d.	$\cup$

No intervalo $]-\infty, 1[$ a concavidade é voltada para baixo. Nos intervalos $]1, 2[$ e $]2, +\infty[$ a concavidade é voltada para cima.

Proposta 45

45.1. $f'(x)=4x^3-6x+2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-6x+2=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x+1=0$

Como a abcissa de C é 1, sabe-se que 1 é zero da função f'.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Então, sabe-se que $2x^3-3x+1=(x-1)(2x^2+2x-1)$.

$2x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \lor x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \lor x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \lor x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

Donde se conclui que $x_A=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e $x_B=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

45.2. $f''(x)=12x^2-6$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \lor x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f''	+	0	–	0	+
f	$\cup$	$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cap$	$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cup$

Por observação da tabela, tem-se:

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

Donde se conclui que $a=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Pág. 161

Proposta 46

46.1. $d'(t)=3t^2-10t+3$

$d'(1)=3-10+3=-4$

A velocidade da partícula no instante $t=1$ é -4 m/s.

46.2. $d''(t)=6t-10$; $d''(2)=12-10=2$.

A aceleração da partícula no instante $t=2$ é 2 m/s^2.

Proposta 47

47.1.

a) O comprimento do arco AB é dado por $10x$ e corresponde ao perímetro da base do cone. Então, tem-se: $2\pi r=10x \Leftrightarrow r=\dfrac{5x}{\pi}$.

b) $h^2+r^2=10^2 \Leftrightarrow h^2=100-r^2 \Leftrightarrow h^2=100-\left(\dfrac{5x}{\pi}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2=100-\dfrac{25x^2}{\pi^2} \Leftrightarrow h^2=\dfrac{25}{\pi^2}\left(4\pi^2-x^2\right) \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h=\sqrt{\dfrac{25}{\pi^2}\left(4\pi^2-x^2\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h=\dfrac{5}{\pi}\times\sqrt{4\pi^2-x^2}$

47.2. Quando $x=\dfrac{3\pi}{4}$, então $r=\dfrac{5\times\dfrac{3\pi}{4}}{\pi}=\dfrac{15}{4}$ e

$h=\dfrac{5}{\pi}\times\sqrt{4\pi^2-\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)^2}=\dfrac{5}{\pi}\times\sqrt{4\pi^2-\dfrac{9\pi^2}{16}}=\dfrac{5}{\pi}\times\sqrt{\dfrac{55\pi^2}{16}}=$

$=\dfrac{5}{\pi}\times\dfrac{\sqrt{55}\,\pi}{4}=\dfrac{5\sqrt{55}}{4}$

$V_{cone}=\dfrac{1}{3}\times\pi\times\dfrac{225}{16}\times\dfrac{5\sqrt{55}}{4}=\dfrac{375\sqrt{55}\,\pi}{64}$

Logo, $V\approx 136,5$.

47.3. $V(x)=\dfrac{1}{3}\times\pi\times\left(\dfrac{5x}{\pi}\right)^2\times\dfrac{5}{\pi}\times\sqrt{4\pi^2-x^2}=\dfrac{125x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}{3\pi^2}$

Como $V(x)=\dfrac{125x^2}{3\pi^2}\times\sqrt{4\pi^2-x^2}$, tem-se:

$V'(x)=\dfrac{250x}{3\pi^2}\times\sqrt{4\pi^2-x^2}+\dfrac{125x^2}{3\pi^2}\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2-x^2}}=$

$=\dfrac{250x\sqrt{4\pi^2-x^2}}{3\pi^2}-\dfrac{125x^3}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}=\dfrac{250x\left(4\pi^2-x^2\right)-125x^3}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}=$

$=\dfrac{125x\left(2\left(4\pi^2-x^2\right)-x^2\right)}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}=\dfrac{125x\left(8\pi^2-2x^2-x^2\right)}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}=$

$=\dfrac{125x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}$

$V'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{125x\left(8\pi^2-3x^2\right)}{3\pi^2\sqrt{4\pi^2-x^2}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\pi^2-3x^2=0 \land 0<x<2\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\dfrac{8\pi^2}{3} \land 0<x<2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{8}\,\pi}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{24}\,\pi}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}\,\pi}{3}$

x	0	$\dfrac{2\sqrt{6}\,\pi}{3}$	2π
V'	+	0	–
V	↗	$V\left(\dfrac{2\sqrt{6}\,\pi}{3}\right)$	↘

O volume do cone é máximo quando $x=\dfrac{2\sqrt{6}\,\pi}{3}$ rad, ou seja, $x\approx 294°$.

Pág. 162

Proposta 48

Seja A a projeção ortogonal de C sobre PT e $\overline{AT}=x$.

Então, $\overline{CT}=\sqrt{x^2+9}$ e $\overline{PT}=8-x$.

Designemos por f a função que a cada valor de x faz corresponder o custo da instalação da conduta, em dezenas de milhares de euros.

$$f(x)=4(8-x)+7\sqrt{x^2+9}=32-4x+7\sqrt{x^2+9} \text{ e } 0<x<8 .$$

$$f'(x)=-4+7\times\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=-4+\frac{7x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -4+\frac{7x}{\sqrt{x^2+9}}=0\Leftrightarrow\frac{-4\sqrt{x^2+9}+7x}{\sqrt{x^2+9}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{x^2+9}+7x=0\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+9}=7x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+9)=49x^2 \ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{33}\ \wedge\ x\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{12}{\sqrt{33}}\Leftrightarrow x=\frac{12\sqrt{33}}{33}\Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{33}}{11}$$

x	0	$\frac{4\sqrt{33}}{11}$	8
f'	–	0	+
f	↘	$f\left(\frac{4\sqrt{33}}{11}\right)$	↗

O custo da instalação da conduta é mínimo quando $x=\frac{4\sqrt{33}}{11}$.

$$f\left(\frac{4\sqrt{33}}{11}\right)\approx 49{,}2337$$

O custo mínimo é, aproximadamente, igual a 492 337 €.

$$\overline{PT}=8-\frac{4\sqrt{33}}{11}\approx 5{,}911$$

Para minimizar o custo da instalação da conduta, o ponto T deve ficar a, aproximadamente, $5{,}911$ km do ponto P, ou seja, 5911 m.

Proposta 49

49.1. $f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+6x=0\Leftrightarrow x(-x+6)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee\ x=6$

Donde se conclui que a abcissa do ponto A é 6.

49.2.

a) $P(x, f(x))$, $0<x<6$

$$A(x)=\frac{6+6-2x}{2}\times f(x)=(6-x)\times(-x^2+6x)=x^3-12x^2+36x$$

b) $A'(x)=3x^2-24x+36$

$A'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-24x+36=0\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\Leftrightarrow x=6 \ \vee\ x=2$

Como $0<x<6$, conclui-se que $x=2$.

x	0	2	6
A'	+	0	–
A	↗	32	↘

A área do trapézio é máxima quando $P(2,8)$.

Pág. 163

Proposta 50

50.1.

a) $f(x)=\frac{2x-1}{|x|+2}=\begin{cases}\frac{2x-1}{-x+2} & \text{se } x<0\\ \frac{2x-1}{x+2} & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2x-1}{-x+2}+\frac{1}{2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{4x-2-x+2}{-2x+4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x}{x(-2x+4)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3}{-2x+4}=\frac{3}{4}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2x-1}{x+2}+\frac{1}{2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4x-2+x+2}{2x+4}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5x}{x(2x+4)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5}{2x+4}=\frac{5}{4}$$

Não existe $f'(0)$ porque $f'(0^-)\neq f'(0^+)$.

b) Se $x<0$, então $f'(x)=\left(\frac{2x-1}{-x+2}\right)'=$

$$=\frac{2(-x+2)-(-1)(2x-1)}{(-x+2)^2}=\frac{3}{(-x+2)^2} .$$

Se $x>0$, então

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)'=\frac{2(x+2)-1(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2} .$$

Portanto, $f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{(-x+2)^2} & \text{se } x<0\\ \frac{5}{(x+2)^2} & \text{se } x>0\end{cases}$.

Se $x<0$, então $f''(x)=\left(\frac{3}{(-x+2)^2}\right)'=$

$$=\left(3(-x+2)^{-2}\right)'-6(-x+2)^{-3}\times(-1)=\frac{6}{(-x+2)^3} .$$

Se $x>0$, então $f''(x)=\left(\dfrac{5}{(x+2)^2}\right)'=$

$=\left(5(x+2)^{-2}\right)'-10(x+2)^{-3}=\dfrac{-10}{(x+2)^3}$

Portanto, $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{(-x+2)^3} & \text{se } x<0\\[2mm] \dfrac{-10}{(x+2)^3} & \text{se } x>0\end{cases}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	n.d.	$-$
f	$\cup$	$\frac{1}{2}$	$\cap$

Donde se conclui que o ponto do gráfico de *f* de abcissa 0 é ponto de inflexão.

50.2. $f(a)=0\Leftrightarrow\dfrac{2a-1}{|a|+2}=0\Leftrightarrow 2a-1=0\ \wedge\ |a|+2\neq 0\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$

$f''(a)=f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-10}{\left(\dfrac{1}{2}+2\right)^3}=\dfrac{-10}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^3}=\dfrac{-10}{\dfrac{125}{8}}=-\dfrac{16}{25}$

Proposta 51

$f(x)=(x-k)^2+1$

e

$g(x)=x^2-2x+k=x^2-2x+1-1+k=(x-1)^2+k-1$.

Os vértices das parábolas correspondentes aos gráficos das funções *f* e *g* são $V_1(k,1)$ e $V_2(1,k-1)$, respetivamente.

Seja *h* a função que a cada valor de *k* faz corresponder a distância entre os vértices das parábolas.

$h(k)=\overline{V_1V_2}=\sqrt{(k-1)^2+(1-k+1)^2}=\sqrt{k^2-2k+1+4-4k+k^2}=$

$=\sqrt{2k^2-6k+5}$

$h'(k)=\dfrac{4k-6}{2\sqrt{2k^2-6k+5}}=\dfrac{2k-3}{\sqrt{2k^2-6k+5}}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$

A distância entre os vértices das parábolas é mínima quando $k=\dfrac{3}{2}$.

Proposta 52

52.1. $\overline{OP}=x$, $\overline{OQ}=-\dfrac{3}{2}x+6$ e $\overline{OV}=2x$, com $x\in\,]0,4[$.

Então,

$g(x)=\dfrac{1}{3}\times\left[x\left(-\dfrac{3}{2}x+6\right)\right]\times 2x=\dfrac{2x}{3}\times\left(-\dfrac{3}{2}x^2+6x\right)=$

$=-x^3+4x^2\quad\wedge\quad x\in\,]0,4[$.

52.2. $g'(x)=-3x^2+8x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+8x=0\Leftrightarrow x(-3x+8)=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\dfrac{8}{3}$

Como $0<x<4$, conclui-se que $x=\dfrac{8}{3}$.

x	0	$\frac{8}{3}$	4
V'	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	$V\left(\frac{8}{3}\right)$	$\searrow$

O volume da pirâmide é máximo quando $x=\dfrac{8}{3}$.

A pirâmide que admite volume máximo tem vértices:

$P\left(\dfrac{8}{3},0,0\right)$, $Q\left(\dfrac{8}{3},2,0\right)$, $R(0,2,0)$, $O(0,0,0)$ e $V\left(0,0,\dfrac{16}{3}\right)$.

Pág. 168

Questões de exame

1. *f* é contínua no intervalo $[1,2]$, logo a função *g* também é contínua no intervalo $[1,2]$.

$g(1)=2f(1)-f(1)=f(1)=3f(2)$

$g(2)=2f(2)-f(1)=2f(2)-3f(2)=-f(2)$

Como $\forall\, x\in[1,2],\ f(x)<0$, então $f(2)<0$. Logo, $g(1)<0$ e $g(2)>0$.

Como *g* é contínua em $[1,2]$ e $g(1)\times g(2)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c\in\,]1,2[:\ g(c)=0$, isto é, a função *g* tem pelo menos um zero no intervalo $]1,2[$.

2. Como *f* é contínua no intervalo $[-2,2]$, logo a função *g*, em qualquer uma das opções, também é contínua em $[-2,2]$ pois resulta de operações entre funções contínuas nesse intervalo.

Na opção (A), tem-se $g(-2)=-2+f(-2)=-2+1=-1$ e $g(2)=2+f(2)=2+3=5$.

Como *g* é contínua em $[-2,2]$ e $g(-2)\times g(2)<0$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c\in\,]-2,2[:\ g(c)=0$, isto é, a função *g* tem pelo menos um zero no intervalo $]-2,2[$.

A opção correta é a (A).

3. Como g é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua no intervalo $[1,3]$.

$g(1)=0$ porque se sabe que 1 é zero de g. Como $g(3)>3$, então $g(3)>0$. Assim sendo, $g(3)>\frac{g(3)}{2}$ e $\frac{g(3)}{2}>0$.

Como g é contínua em $[1,3]$ e $g(1)<\frac{g(3)}{2}<g(3)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que

$\exists\, c\in\,]1,3[\,:\, g(c)=\frac{g(3)}{2}$, ou seja, a equação $g(x)=\frac{g(3)}{2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,3[$.

4. Como f é contínua em $[1,3]$ e $f(3)<5<f(1)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c\in\,]1,3[\,:\, f(c)=5$, isto é, a equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,3[$.

Como $]1,3[\,\subset[1,3]$, conclui-se que a equação $f(x)=5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$.

A opção correta é a (C).

5. A função g é contínua em $\mathbb{R}$ porque é uma função polinomial. Então é contínua nos intervalos $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ e $[2,3]$.

Vamos determinar a imagem dos extremos de cada um dos intervalos e verificar em qual das situações é que 8 está compreendido entre as imagens dos extremos do intervalo.

$g(-1)=-1+1+1=1$; $g(0)=0-0+1=1$; $g(1)=1-1+1=1$;

$g(2)=32-2+1=31$; $g(3)=243-3+1=241$.

Como g é contínua em $[1,2]$ e $g(1)<8<g(2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c\in\,]1,2[\,:\, g(c)=8$, isto é, a equação $g(x)=8$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,2[$. A opção correta é a (C).

Pág. 169

6. $A'(x)=\frac{6x^2\times x-1\times(2x^3+8)}{x^2}=\frac{4x^3-8}{x^2}$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x^3-8}{x^2}=0 \Leftrightarrow 4x^3-8=0 \;\wedge\; x^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2} \;\wedge\; x\neq 0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$

x	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$4x^3-8$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
A'		$-$	0	$+$
A		$\searrow$	$A(\sqrt[3]{2})$	$\nearrow$

A área total da embalagem é mínima para $x=\sqrt[3]{2}$.

7. A opção correta é a (A) pois é a única situação em que existem exatamente dois zeros da função f'' associados a uma mudança de sinal (dado que o gráfico de f tem exatamente dois pontos de inflexão).

8. A segunda derivada da função g tem dois zeros: 0 e a, sendo a positivo.

x	$-\infty$	0		a	$+\infty$
g''	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cup$	$g(0)$	$\cap$	$g(a)$	$\cup$

Assim sendo, só na opção (A) é que pode estar representada parte do gráfico da função g.

A opção correta é a (A).

9. $f''(x)=\left[(4+x)^2\right]'=2(4+x)\times 1=8+2x$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 8+2x=0 \Leftrightarrow x=-4$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$f(-4)$	$\cup$

As coordenadas do ponto de inflexão do gráfico da função f são $(-4, f(-4))$. A opção correta é a (D).

Pág. 170

10. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \Leftrightarrow f'(a)=0$

Como $f'(a)=0$ e $f''(a)<0$, conclui-se que $f(a)$ é um máximo relativo da função f. A opção correta é a (B).

11. Sendo $f(x)=ax^2-1$, então $f'(x)=2ax$ e $f''(x)=2a$.

Por observação do gráfico da função f'' sabe-se que $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f''(x)<0$. Então, tem-se: $f''(x)<0 \Leftrightarrow 2a<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a<0$. A única opção em que o valor de a é negativo é a (D).

A opção correta é a (D).

12. Por observação gráfica constata-se que a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio e que a concavidade do gráfico de f está sempre voltada para baixo. Então, sabe-se que $\forall\, x\in\,]1,3[,\ f'(x)>0$ e $\forall\, x\in\,]1,3[,$ $f''(x)<0$.

A opção correta é a (C).

13. Relativamente à função f constata-se que no intervalo $]-\infty,2[$ a concavidade está voltada para cima, no intervalo $]2,+\infty[$ a concavidade está voltada para baixo e o ponto de abcissa 2 é ponto de inflexão. Portanto, a função f'' é positiva para $x<2$, é negativa para $x>2$ e anula-se para $x=2$. Das quatro expressões apresentadas, apenas a expressão $2-x$ define uma função com essas características.

A opção correta é a (C).

Pág. 171

14.

x	$-\infty$	-6		-1		1	$+\infty$
x^2-1	+	+	+	0	–	0	+
x^2+5	+	+	+	+	+	+	+
$(x+6)^2$	+	0	+	+	+	+	+
f''	+	0	+	0	–	0	+
f	$\cup$	$f(-6)$	$\cup$	$f(-1)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$

Pontos de inflexão do gráfico de *f*: $(-1, f(-1))$ e $(1, f(1))$.

A opção correta é a (B).

15. $f''(x)=3x^2-3$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1 \;\vee\; x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	–	0	+
f''	+	0	–	0	+
f	$\cup$	$f(-1)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-1,1[$. A opção correta é a (A).

16. $f'(x)=\left[(x-5)^3\right]'=3(x-5)^2\times 1=3(x-5)^2$

A função *f* não tem extremos relativos porque $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)\geq 0$.

$f''(x)=\left[3(x-5)^2\right]'=6(x-5)\times 1=6x-30$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-30=0 \Leftrightarrow x=5$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f''	–	0	+
f	$\cap$	$f(5)$	$\cup$

Donde se conclui que o gráfico de *f* tem um ponto de inflexão para $x=5$. A opção correta é a (C).

17.

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
f''	+	0	+	0	–	0	+
f	$\cup$	$f(a)$	$\cup$	$f(b)$	$\cap$	$f(c)$	$\cup$

Donde se conclui que o gráfico de *f* tem dois pontos de inflexão: um para $x=b$ e outro para $x=c$. A opção correta é a (B).

Pág. 172

Avaliar – 1.ª Parte

1. Sabe-se que $\lim f(u_n)=1$. Atendendo à representação gráfica de *f*, conclui-se que $\lim u_n=-\infty$ ou $\lim u_n=+\infty$. A opção correta é a (B) pois $\lim\left(\sqrt{n}-n\right)=\lim\left[n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)\right]=+\infty(0-1)=-\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$

Como $\forall x\in D,\ \ g(x)\leq f(x)\leq 1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1=1$, conclui-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

A opção correta é a (D).

3. Como $\forall x\in\,]-2,0[,\ \ f'(x)>0$, conclui-se que *f* é estritamente crescente no intervalo $]-2,0[$.

Então, $f\left(-\frac{3}{2}\right)<f(-1)$. Donde resulta que $f\left(-\frac{3}{2}\right)-f(-1)<0$.

A opção correta é a (C).

4. Sabe-se que $f(x)=x^3+ax^2-x+2,\ a\in\mathbb{R}$.

Então, $f'(x)=3x^2+2ax-1$ e $f''(x)=6x+2a$.

Assim sendo, tem-se:

$f''(1)+f'(1)=0\Leftrightarrow 3+2a-1+6+2a=0\Leftrightarrow a=-2$.

Portanto $f''(x)=6x-4$ e, consequentemente,

$f''(2)=12-4=8$.

A opção correta é a (A).

Pág. 173

Avaliar – 2.ª Parte

1.1. $D_f=\mathbb{R}$

Assíntotas verticais

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-4}{x-1}=\frac{-4}{-1}=4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+4x}=0$

Portanto, a reta $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Como a função *f* é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, não existem assíntotas verticais ao gráfico de *f*.

Assíntotas não verticais $(y=mx+b)$

· Em $-\infty$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1-0}=1;$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4}{x-1}-1x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-4}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1-0}=1\,.$$

Portanto, a reta $y=x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

· Em $+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x}}=\sqrt{1+0}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-1x\right)\overset{\infty-\infty}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-1x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+1x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+1x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{\sqrt{1+0}+1}=2$$

Portanto, a reta $y=x+2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $+\infty$.

1.2. A função *f* é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser a composta de funções contínuas. Em particular, *f* é contínua no intervalo $[1,2]$.

$f(1)<\pi<f(2)$ pois $f(1)=\sqrt{5}\approx 2{,}2$ e $f(2)=\sqrt{12}\approx 3{,}5$.

Como *f* é contínua em $[1,2]$ e $f(1)<\pi<f(2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c\in\,]1,2[\,:\ f(c)=\pi$, isto é, a equação $f(x)=\pi$ tem uma solução pertencente ao intervalo $]1,2[$.

Se $x>0$, então:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+4x}\right)'=\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\,.$$

$\forall x\in\,]1,2[\,,\ f'(x)>0$.

Logo, *f* é estritamente crescente em $]1,2[$. Donde se conclui que a equação $f(x)=\pi$ tem uma única solução pertencente ao intervalo $]1,2[$.

2.1. Sendo $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$, então:

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2+2}\right)'=\frac{2\left(x^2+2\right)-2x(2x)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-2x^2+4}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}=f''(1)=\frac{2}{9}$$

2.2. $f''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{-2x^2+4}{\left(x^2+2\right)^2}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2x^2+4=0\ \wedge\ \left(x^2+2\right)^2\neq0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ \vee\ x=-\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$-2x^2+4$	–	0	+	0	–
$\left(x^2+2\right)^2$	+	+	+	+	+
f''	–	0	+	0	–
f	$\frown$	$f\left(-\sqrt{2}\right)$	$\smile$	$f\left(\sqrt{2}\right)$	$\frown$

Como os pontos *A* e *B* são pontos de inflexão do gráfico de *f*, conclui-se que $x_A=-\sqrt{2}$ e $x_B=\sqrt{2}$.

3.1. Como o gráfico de *g* é uma circunferência de centro *O* e raio 2, em que os seus pontos têm ordenadas não negativas, tem-se:

$x^2+y^2=4\ \wedge\ y\geq0\Leftrightarrow y^2=4-x^2\ \wedge\ y\geq0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(y=\sqrt{4-x^2}\ \vee\ y=-\sqrt{4-x^2}\right)\ \wedge\ y\geq0\Leftrightarrow y=\sqrt{4-x^2}$

Então, $g(x)=\sqrt{4-x^2}$.

3.2.

a) $P\left(x,g(x)\right)$, com $x>0$.

$$a(x)=\frac{4+2x}{2}\times g(x)=(2+x)\sqrt{4-x^2}$$

b) $a'(x)=1\times\sqrt{4-x^2}+(2+x)\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{2x+x^2}{\sqrt{4-x^2}}=$

$$=\frac{4-x^2-2x-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$a'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x^2-2x+4}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2-2x+4=0\ \wedge\ \sqrt{4-x^2}\neq0\Leftrightarrow x=-2\ \vee\ x=1$$

Como $x>0$, conclui-se que $x=1$.

x	0	1	2
a'	+	0	–
a	$\nearrow$	$a(1)$	$\searrow$

A área do trapézio é máxima quando $P\left(1,\sqrt{3}\right)$.