12 Novo Espaço

Matemática A
12.º ano

Belmiro Costa
Ermelinda Rodrigues

Parte 2

Propostas de Resolução

Porto Editora

Índice

Manual – Parte 2

Poderá encontrar no e-Manual Premium:

- todas as propostas de resolução do projeto em **formato digital** em contexto (também em PDF no menu de recursos do projeto);
- as propostas de resolução assinaladas neste livro, com o ícone (→), em **formato de aplicação interativa**, permitindo a sua apresentação passo a passo.

ISBN 978-972-0-84834-5

Manual **Parte 2**

Pág. 7

1.1. $C_1 = 3500\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^1 = 3552,5$

O capital disponível ao fim de um ano é de 3552,50 €.

1.2. $C_2 = 3500\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^2 \approx 3605,79$

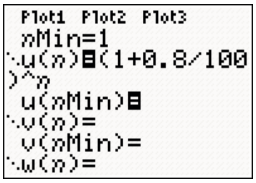
O capital disponível ao fim de dois anos é de 3605,79 €.

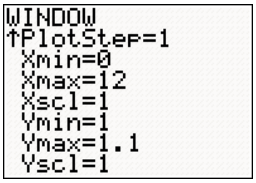
1.3. $C_5 = 3500\left(1+\frac{1,5}{100}\right)^5 \approx 3770,49$

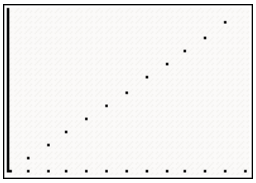
O capital disponível ao fim de cinco anos é de 3770,49 €.

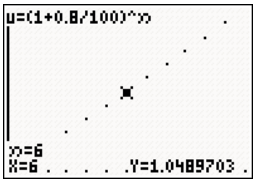
2. Se os juros forem de pelo menos 500 euros, então o capital disponível será de pelo menos 10 500 euros.

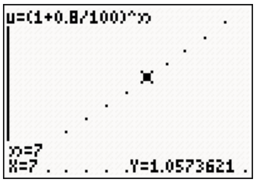
$$C_n \geq 10500 \Leftrightarrow 10000\left(1+\frac{0,8}{100}\right)^n \geq 10500 \Leftrightarrow \left(1+\frac{0,8}{100}\right)^n \geq 1,05$$











Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, concluiu-se que Pedro deve manter o depósito durante 7 anos para obter pelo menos 500 euros de juros.

Pág. 8

3.

<u>Opção A :</u> $C = 8000\left(1+\frac{1,3}{100\times 2}\right)^2 \approx 8104,34$

<u>Opção B :</u> $C = 8000\left(1+\frac{1,25}{100\times 12}\right)^{12} \approx 8100,57$

Assim sendo, a opção mais favorável para a Sofia é a A.

Pág. 10

4.1. $0,0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

4.2. $\frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$

4.3. $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$

4.4. $0,0016 = \frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 5^{-4}$

4.5. $0,0625 = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$

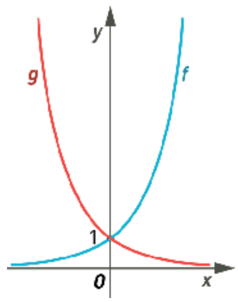
4.6. $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^{-2} = \left(\sqrt{2}\right)^{-4}$

5. Comparando as bases das funções apresentadas, tem-se que $\sqrt{2} < e < \pi < 4$. Então, a correspondência é: $y = \left(\sqrt{2}\right)^x \to d$; $y = 4^x \to a$; $y = e^x \to c$ e $y = \pi^x \to b$.

Pág. 11

6.1. $g(x) = f(-x) = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

6.2. O gráfico de *g* é simétrico do gráfico de *f* em relação ao eixo das ordenadas. A representação gráfica da função *g* é:



6.3. A função *f* é estritamente crescente pois é uma função do tipo $y = a^x$, em que $a > 1$, e a função *g* é estritamente decrescente pois é uma função do tipo $y = a^x$, em que $0 < a < 1$.

7. Como $f(0) = 1$, exclui-se de imediato a opção (C). Sendo *f* uma função estritamente decrescente, conclui-se que $0 < a < 1$. Então, a opção correta é a (B).

Pág. 12

8. O gráfico de *f* interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0,5)$, isto é, $f(0)=5$. Ora, $f(0)=5 \Leftrightarrow k+3^0=5 \Leftrightarrow k=4$.

Então, $f(x)=4+3^{-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+3^{-x}\right)=4+0=4$

Assíntota horizontal: $y=4$. Logo, $b=4$.

9.1. O gráfico de *h* interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0,4)$, isto é, $h(0)=4$.

Ora, $h(0)=4 \Leftrightarrow a+2^0=4 \Leftrightarrow a=3$.

9.2. A reta de equação $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y=2^x$, logo a reta de equação *y* = 3 é uma assíntota horizontal do gráfico da função $h(x)=3+2^x$.

10.1. $D_f=\mathbb{R}$; $D'_f=\left]-1,+\infty\right[$ e $y=-1$ é uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função *f*.

$\forall x\in\mathbb{R},\quad 2^{x+1}>0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad -1+2^{x+1}>-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)>-1$

10.2. O gráfico da função *g* obtém-se do da função *f* através das seguintes transformações: simetria em relação ao eixo das abcissas seguida de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0,3)$.

Conclui-se então que: $D_g=\mathbb{R}$; $D'_g=\left]-\infty,4\right[$ e $y=4$ é uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função *g*.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>-1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ -f(x)<1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 3-f(x)<4 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)<4$

10.3. O gráfico da função *h* obtém-se do da função *f* através de uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{u}(1,0)$ seguida de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0,2)$.

Conclui-se então que: $D_h=\mathbb{R}$; $D'_h=\left]1,+\infty\right[$ e $y=1$ é uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função *h*.

$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x-1)>-1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad 2+f(x-1)>-1+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)>1$

Pág. 13

11.1. $7^x=\sqrt{7} \Leftrightarrow 7^x=7^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

11.2.

$5\times\left(2^x\right)^3=640 \Leftrightarrow 2^{3x}=128 \Leftrightarrow 2^{3x}=2^7 \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$

11.3.

$3^{x+1}=\frac{1}{9^x} \Leftrightarrow 3^{x+1}=\frac{1}{3^{2x}} \Leftrightarrow 3^{x+1}=3^{-2x} \Leftrightarrow x+1=-2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

11.4.

$27^x=\sqrt{3^{x+2}} \Leftrightarrow 3^{3x}=3^{\frac{x+2}{2}} \Leftrightarrow 3x=\frac{x+2}{2} \Leftrightarrow 6x=x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$

11.5.

$5^{x+1}=6-5^{-x} \Leftrightarrow 5^x\times 5^1-6+\frac{1}{5^x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\times\left(5^x\right)^2-6\times 5^x+1=0 \wedge \underbrace{5^x\neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow 5\times\left(5^x\right)^2-6\times 5^x+1=0$

Fazendo $5^x=y$, tem-se:

$5y^2-6y+1=0 \Leftrightarrow y=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{10} \Leftrightarrow y=1 \vee y=\frac{1}{5}$.

Como $5^x=y$, tem-se: $5^x=1 \vee 5^x=\frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^x=5^0 \vee 5^x=5^{-1} \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$.

12.1.

$\forall x\in\mathbb{R}$, tem-se:

$x^2\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9-x^2\leq 9 \Leftrightarrow g(x)\leq 9$

Então, $D'_g=\left]-\infty,9\right]$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, tem-se:

$g(x)\leq 9 \Leftrightarrow 0<e^{g(x)}\leq e^9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<h(x)\leq e^9$

Então, $D'_h=\left]0,e^9\right]$.

12.2.

$h(x)=9-g(e) \Leftrightarrow e^{9-x^2}=9-\left(9-e^2\right) \Leftrightarrow e^{9-x^2}=e^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9-x^2=2 \Leftrightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x=-\sqrt{7} \vee x=\sqrt{7}$

Pág. 14

13.1. $10^x\geq 0{,}0001 \Leftrightarrow 10^x\geq 10^{-4} \Leftrightarrow x\geq -4$

Então, $x\in\left[-4,+\infty\right[$.

13.2. $2^x>0{,}125 \Leftrightarrow 2^x>\frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x>2^{-3} \Leftrightarrow x>-3$

Então, $x\in\left]-3,+\infty\right[$.

13.3.

$9^{x+1}-\sqrt{3}\leq 0 \Leftrightarrow \left(3^2\right)^{x+1}\leq 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3^{2x+2}\leq 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x+2\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\leq -\frac{3}{4}$, então, $x\in\left]-\infty,-\frac{3}{4}\right]$.

13.4.

$$e^{x-1} < x \cdot e^x \Leftrightarrow e^x \cdot e^{-1} - x \cdot e^x < 0 \Leftrightarrow e^x\left(\frac{1}{e} - x\right) < 0 \underset{\forall x \in \mathbb{R},\, e^x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} - x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}\text{, então, } x \in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[.$$

13.5.

$$\frac{1}{5^{2x}} - 5^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 5^{-2x} \geq 5^{-x} \Leftrightarrow -2x \geq -x \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Então, $x \in \left]-\infty, 0\right]$.

13.6.

$$7^x - 8 \leq -7^{-x+1} \Leftrightarrow 7^x - 8 + \frac{7^1}{7^x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(7^x\right)^2 - 8 \times 7^x + 7 \leq 0 \wedge \underbrace{7^x \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow \left(7^x\right)^2 - 8 \times 7^x + 7 \leq 0$$

Fazendo $7^x = y$, tem-se: $y^2 - 8y + 7 \leq 0$.
Vamos começar por determinar as soluções da equação $y^2 - 8y + 7 = 0$.

$$y^2 - 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} \Leftrightarrow y = 7 \vee y = 1$$

Assim, $y^2 - 8y + 7 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \;\wedge\; y \leq 7$.

Como $7^x = y$, tem-se: $7^x \geq 1 \wedge 7^x \leq 7 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 1$

Então, $x \in \left[0, 1\right]$.

14.1.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 25 - 5^{1-2x} = 0 \Leftrightarrow 25 = 5^{1-2x} \Leftrightarrow 5^2 = 5^{1-2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = 1 - 2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

b) $f(x) = 24 \Leftrightarrow 25 - 5^{1-2x} = 24 \Leftrightarrow 1 = 5^{1-2x} \Leftrightarrow 5^0 = 5^{1-2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

14.2.

$$f(x) \geq -100 \Leftrightarrow 25 - 5^{1-2x} \geq -100 \Leftrightarrow -5^{1-2x} \geq -125 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{1-2x} \leq 5^3 \Leftrightarrow 1 - 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$A = \mathbb{R}^- \cap \left[-1, +\infty\right[= \left[-1, 0\right[$$

15.1.

$\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 5 \Leftrightarrow f(x) \leq 5$

Então, $D'_f = \left]-\infty, 5\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$f(x) \leq 5 \Leftrightarrow 0 < e^{f(x)} \leq e^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < g(x) \leq e^5$

Então, $D'_g = \left]0, e^5\right]$.

15.2.

$$g(x) > 5 - f(e) \Leftrightarrow e^{5-x^2} > 5 - \left(5 - e^2\right) \Leftrightarrow e^{5-x^2} > e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - x^2 > 2 \Leftrightarrow 3 - x^2 > 0$$

$$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

Assim, $3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt{3} \;\wedge\; x < \sqrt{3}$.

Conclui-se que $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$.

Pág. 15

16.1. $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$4^{-x} > 0 \Leftrightarrow -4^{-x} < 0 \Leftrightarrow 7 - 4^{-x} < 7 \Leftrightarrow g(x) < 7.$$

Então, $D'_g = \left]-\infty, 7\right[$.

16.2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 4^{-x_1} > 4^{-x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4^{-x_1} < -4^{-x_2} \Leftrightarrow 7 - 4^{-x_1} < 7 - 4^{-x_2} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

g é uma função crescente porque $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

16.3.

$$D_h = \left\{x \in D_g : g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \left[-25, +\infty\right[\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq -25\right\} = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$$

Cálculos auxiliares:

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x + 25 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -25\right\} = \left[-25, +\infty\right[$.

$$g(x) \geq -25 \Leftrightarrow 7 - 4^{-x} \geq -25 \Leftrightarrow 4^{-x} \leq 32 \Leftrightarrow 2^{-2x} \leq 2^5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x \leq 5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

16.4.

a) $g(x) < f(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) < 0$

Seja h a função definida por $h(x) = g(x) - f(x)$.

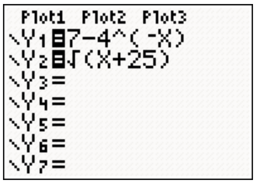
h é contínua em $\left[-1, 1\right]$ por ser a diferença entre funções contínuas.

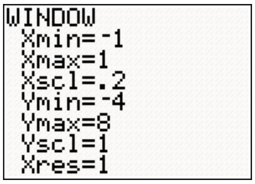
$h(-1) = g(-1) - f(-1) = 7 - 4 - \sqrt{24} = 3 - \sqrt{24} < 0$ e

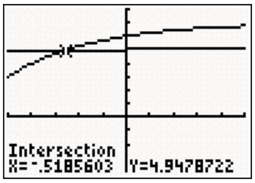
$h(1) = g(1) - f(1) = 7 - \frac{1}{4} - \sqrt{26} > 0$, logo $h(-1) \times h(1) < 0$.

Como h é contínua em $\left[-1, 1\right]$ e $h(-1) \times h(1) < 0$, o corolário do teorema de Bolzano permite concluir que $\exists\, c \in \left]-1, 1\right[: h(c) = 0$, ou seja, $\exists\, c \in \left]-1, 1\right[: g(c) = f(c)$.

b) Pretende-se determinar graficamente o valor de c pertencente ao intervalo $\left]-1, 1\right[$ tal que $g(c) = f(c)$.







Donde se conclui que $c \approx -0{,}52$.

17.1. $f(x)<0 \Leftrightarrow 4e^x - e^x \cdot x^2 < 0 \ \wedge \ x \in D_f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x\left(4-x^2\right)<0 \ \wedge \ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4-x^2<0 \Leftrightarrow x<-2 \ \vee \ x>2 \Leftrightarrow$

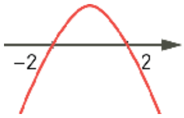
$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

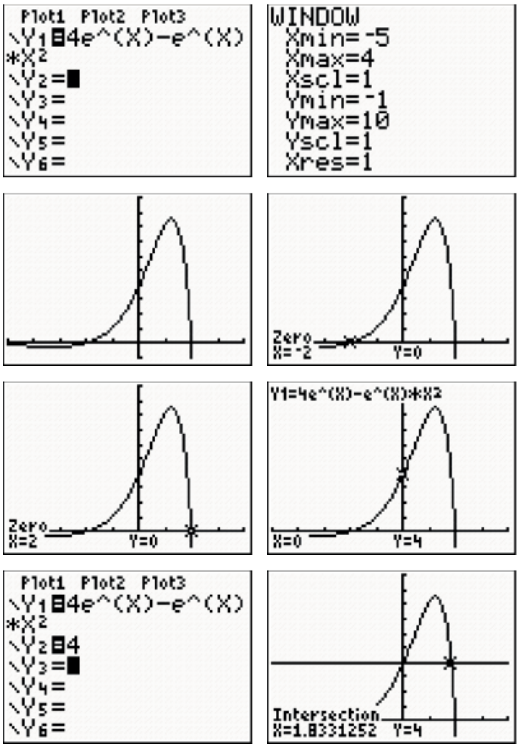
$4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\sqrt{4} \vee x=-\sqrt{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

$4-x^2<0 \Leftrightarrow x<-2 \ \vee \ x>2$



17.2. Recorrendo à calculadora gráfica, deve-se determinar as coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C* e *D*, seguindo, por exemplo, os procedimentos indicados a seguir:



Verificou-se que: $A(-2\,,0)$, $B(2\,,0)$, $C(0\,,4)$ e $D(1{,}83\,;4)$.

Então, $A_{[ABCD]}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\times\overline{OC}=\dfrac{4+1{,}83}{2}\times 4 \approx 11{,}7\ \text{cm}^2$.

Tarefa 1

1.1. $f(x)=5 \Leftrightarrow 2+3^x=5 \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

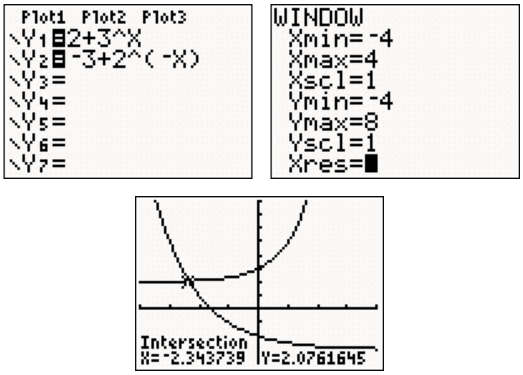
Donde se conclui que $A(1\,,5)$ e $D(1,0)$.

$g(x)=5 \Leftrightarrow -3+2^{-x}=5 \Leftrightarrow 2^{-x}=8 \Leftrightarrow 2^{-x}=2^3 \Leftrightarrow -x=3 \Leftrightarrow x=-3$

Donde se conclui que $B(-3\,,5)$ e $C(-3,0)$.

Então, $A_{[ABCD]}=\overline{CD}\times\overline{AD}=(1+3)\times 5=20\ \text{m}^2$.

1.2. Vamos começar por determinar graficamente as coordenadas do ponto *P*, ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*.



Conclui-se que $P(-2{,}344;2{,}076)$.

Então, $A_{[APD]}=\dfrac{5\times\left|-2{,}344-1\right|}{2}=\dfrac{5\times 3{,}344}{2}\approx 8{,}4\ \text{m}^2$.

1.3.

a)

$g(x)=f(3) \Leftrightarrow -3+2^{-x}=2+3^3 \Leftrightarrow 2^{-x}=32 \Leftrightarrow 2^{-x}=2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x=5 \Leftrightarrow x=-5$

b) $2^{x+1}+g(x)<0 \Leftrightarrow 2^{x+1}-3+2^{-x}<0 \Leftrightarrow 2^x\times 2-3+\dfrac{1}{2^x}<0 \Leftrightarrow$

$\underset{\forall x\in\mathbb{R},\ 2^x>0}{\Leftrightarrow} \left(2^x\right)^2\times 2-3\times 2^x+1<0$

Fazendo $2^x=y$, tem-se $2y^2-3y+1<0$.

$2y^2-3y+1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow y=1 \vee y=\dfrac{1}{2}$

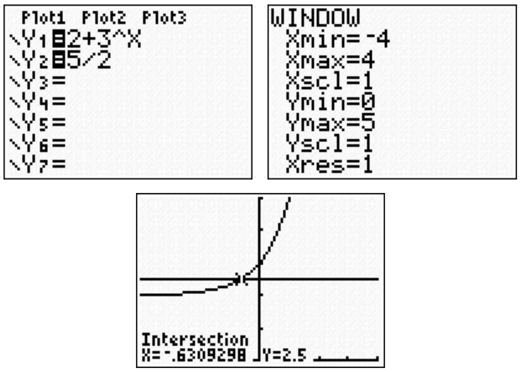
Assim, $2y^2-3y+1<0 \Leftrightarrow y>\dfrac{1}{2} \ \wedge \ y<1$.

Como $2^x=y$, tem-se:

$2^x>\dfrac{1}{2} \wedge 2^x<1 \Leftrightarrow 2^x>2^{-1} \wedge 2^x<2^0 \Leftrightarrow x>-1 \wedge x<0$.

Então, $x\in\left]-1,0\right[$.

1.4. Pretende-se determinar a abcissa do ponto do gráfico de *f* que está a igual distância de [*AB*] e de [*CD*]. Sabe-se que [*AB*] e [*CD*] são paralelos e distam entre si 5 unidades. Assim sendo, pretende-se resolver graficamente a equação $f(x)=\dfrac{5}{2}$.



A abcissa do ponto pedido é $-0{,}63$.

2.1. $\begin{cases} f(1)=-2\\ f(2)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\times 2^{p\times 1-2}-3=-2\\ k\times 2^{p\times 2-2}-3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k\times 2^{p-2}=1\\ k\times 2^{2p-2}=4\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2^{p-2}}\\ \dfrac{1}{2^{p-2}}\times 2^{2p-2}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2^{p-2}}\\ 2^{p}=2^{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1\\ p=2\end{cases}$

2.2. Atendendo aos resultados obtidos no item anterior, tem-se: $f(x)=2^{2x-2}-3$.

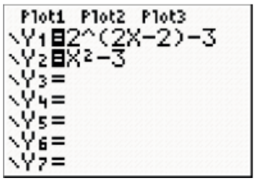
Ora, $5\in D'_f$ se $\exists\, x\in D_f : f(x)=5$.

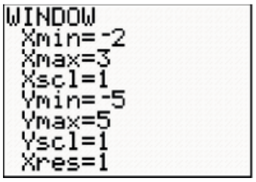
$f(x)=5 \Leftrightarrow 2^{2x-2}-3=5 \Leftrightarrow 2^{2x-2}=8 \Leftrightarrow 2^{2x-2}=2^{3} \Leftrightarrow 2x-2=3 \Leftrightarrow$

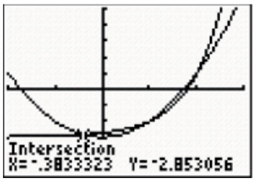
$\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Donde se conclui que $5\in D'_f$.

2.3. Recorrendo à calculadora gráfica, pode proceder-se da seguinte forma:







Conclui-se, então, que $b\approx -0{,}38$.

Pág. 16

18.1. $\lim\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(e^{5}\right)^{2}=e^{10}$

18.2. $\lim\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{n}=\lim\left(1+\dfrac{\frac{1}{4}}{n}\right)^{n}=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}$

18.3. $\lim\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{5n}=\lim\left(\left(1-\dfrac{3}{n}\right)^{n}\right)^{5}=\left(e^{-3}\right)^{5}=e^{-15}$

18.4. $\lim\left(1-\dfrac{1}{8n}\right)^{3n}=\lim\left(\left(1-\dfrac{\frac{1}{8}}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\left(e^{-\frac{1}{8}}\right)^{3}=e^{-\frac{3}{8}}$

18.5. $\lim\left(1-\dfrac{7}{4n}\right)^{3n}=\lim\left(\left(1-\dfrac{\frac{7}{4}}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\left(e^{-\frac{7}{4}}\right)^{3}=e^{-\frac{21}{4}}$

18.6.

$$\lim\left(1+\frac{\pi}{3n}\right)^{2n}=\lim\left(\left(1+\frac{\frac{\pi}{3}}{n}\right)^{n}\right)^{2}=\left(e^{\frac{\pi}{3}}\right)^{2}=e^{\frac{2\pi}{3}}$$

19.1.

$$\frac{n^2+5}{n^2+3}=\frac{n^2+3+2}{n^2+3}=\frac{n^2+3}{n^2+3}+\frac{2}{n^2+3}=1+\frac{2}{n^2+3}$$

19.2.

$$\lim u_n=\lim\left(1+\frac{2}{n^2+3}\right)^{n^2}=\lim\left(1+\frac{2}{n^2+3}\right)^{n^2+3-3}=$$

$$=\lim\left(1+\frac{2}{n^2+3}\right)^{n^2+3}\times\lim\left(1+\frac{2}{n^2+3}\right)^{-3}=e^2\times 1^{-3}=e^2$$

Pág. 17

20.1.

$$\lim\left(\frac{n+8}{n+3}\right)^{n}=\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{8}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}\right)^{n}=\frac{\lim\left(1+\frac{8}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}}=\frac{e^8}{e^3}=e^5$$

20.2.

$$\lim\left(\frac{n-7}{n+2}\right)^{n}=\lim\left(\frac{n\left(1-\frac{7}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^{n}=\frac{\lim\left(1-\frac{7}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}=\frac{e^{-7}}{e^2}=e^{-9}$$

20.3.

$$\lim\left(\frac{3n}{2n-5}\right)^{n}=\lim\left(\frac{3n}{2n\left(1-\frac{5}{2n}\right)}\right)^{n}=\frac{\lim\left(\frac{3}{2}\right)^{n}}{\lim\left(1-\frac{\frac{5}{2}}{n}\right)^{n}}=\frac{+\infty}{e^{-\frac{5}{2}}}=+\infty$$

20.4.

$$\lim\left(\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{3}}\right)^{n}=\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)}{n\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)}\right)^{n}=\frac{\lim\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{n}}=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{2}}}{e^{-\sqrt{3}}}=e^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

20.5.

$$\lim\left(\frac{4n^2+3}{4n^2+1}\right)^{-n^2}=\lim\left(\frac{4n^2\left(1+\frac{3}{4n^2}\right)}{4n^2\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)}\right)^{-n^2}=$$

$$=\frac{\lim\left(\left(1+\frac{\frac{3}{4}}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{-1}}{\lim\left(\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{-1}}=\frac{\left(e^{\frac{3}{4}}\right)^{-1}}{\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}}=\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{e^{-\frac{1}{4}}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

21.

$$\lim u_n=\lim\left(\frac{8-n}{n+8}\right)^n=\lim\left(\frac{-n\left(1-\frac{8}{n}\right)}{n\left(1+\frac{8}{n}\right)}\right)^n=$$

$$=\lim(-1)^n\times\frac{\lim\left(1-\frac{8}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{8}{n}\right)^n}$$

Se n é par, tem-se $\lim u_n=1\times\frac{e^{-8}}{e^8}=e^{-16}$.

Se n é ímpar, tem-se $\lim u_n=-1\times\frac{e^{-8}}{e^8}=-e^{-16}$.

Donde se conclui que a sucessão (u_n) não tem limite.

Pág. 18

22.1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^x-3}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\left(e^x-1\right)}{2x}=\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$

22.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(e^x-1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

22.3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\left(e^x-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}e^x\times\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1\times1=1$

23. Se a reta r é paralela à reta de equação $y=ex$ então $m_r=e$.

$m_r=e\Leftrightarrow f'(x)=e\Leftrightarrow\left(e^x\right)'=e\Leftrightarrow e^x=e\Leftrightarrow x=1$; $f(1)=e^1=e$.

Então, $P(1,e)$.

24.1. $f'(x)=\left(x^3\right)'\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)'\times x^3=3x^2\times e^{-x}+\left(-e^{-x}\right)\times x^3=$

$=e^{-x}\left(3x^2-x^3\right)$

24.2. $f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x}\right)'e^{\frac{2x+1}{x}}=\left(2+\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{2x+1}{x}}=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{2x+1}{x}}$

24.3. $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'e^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

24.4. $f'(x)=\left(\frac{2-xe^{-x}}{e^x}\right)'=\left(2e^{-x}-xe^{-2x}\right)'=$

$=-2e^{-x}-\left(1\times e^{-2x}+(-2)e^{-2x}x\right)=\frac{-2}{e^x}-\frac{1-2x}{e^{2x}}=\frac{-2e^x+2x-1}{e^{2x}}$

Pág. 19

25. 0 é ponto aderente e pertence ao domínio de j.

$\lim\limits_{x\to0}j(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\left(e^x-1\right)}{x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=-1$

$j(0)=-e^k$

Para a função ser contínua em 0 tem de existir limite quando x tende para 0, ou seja, $\lim\limits_{x\to0}j(x)=j(0)$.

Então, tem-se: $-1=-e^k\Leftrightarrow1=e^k\Leftrightarrow k=0$.

26. $g'(x)=(x)'\times e^{1-x^2}+\left(e^{1-x^2}\right)'\times x=e^{1-x^2}+\left(-2xe^{1-x^2}\right)\times x=$

$=e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)$

$g(x)=g'(x)\Leftrightarrow xe^{1-x^2}=e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xe^{1-x^2}-e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)=0\Leftrightarrow e^{1-x^2}\left(x-1+2x^2\right)=0\underset{\forall x\in\mathbb{R},\ e^{1-x^2}\neq0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow2x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\vee x=-1$

Como $x_A<x_B$, conclui-se que $x_A=-1$ e $x_B=\frac{1}{2}$.

27. O domínio da função f é $\mathbb{R}$.

Se $x<0$, então $f'(x)=\left(e^x\right)'=e^x$.

Se $x>0$, então $f'(x)=\left(-e^x+2\right)'=-e^x$.

Seja $x=0$, então:

$f'\left(0^-\right)=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\frac{e^h-1}{h}=1$

$f'\left(0^+\right)=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{-e^h+2-1}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{-e^h+1}{h}=\lim\limits_{h\to0^+}\left(-\frac{e^h-1}{h}\right)=-1$

Como $f'\left(0^-\right)\neq f'\left(0^+\right)$ então a função não é derivável em $x=0$.

Assim, a função derivada de f é definida por:

$$f':\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\begin{cases}e^x & \text{se } x<0\\ -e^x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Pág. 20

28.1. 0 é ponto aderente e pertence ao domínio de *f*.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(3x^2 + \frac{x}{2}\right) = 0$$

Não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Donde se conclui que *f* não é contínua no ponto de abcissa 0.

28.2. A função *f* não é diferenciável em $x=0$. Se fosse diferenciável em $x=0$, então a função seria contínua nesse ponto (o que não acontece).

28.3. O domínio da função *f* é $\mathbb{R}$.

Se $x<0$, então $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{2x}\right)' = \frac{e^x\times 2x - (e^x - 1)\times 2}{(2x)^2} =$

$$= \frac{2xe^x - 2e^x + 2}{4x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{2x^2}.$$

Se $x>0$, então $f'(x) = \left(3x^2 + \frac{x}{2}\right)' = 6x + \frac{1}{2}$.

Seja $x=0$, então:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{e^h-1}{2h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{2h^2} = \lim_{h\to 0^-}\left(\frac{e^h-1}{h}\times\frac{1}{2h}\right) = 1\times(-\infty) = -\infty\,;$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{3h^2 + \frac{h}{2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{h\left(3h + \frac{1}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\left(3h + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ então a função não é derivável em $x=0$.

Assim, a função derivada de *f* é definida por:

$$f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{2x^2} & \text{se } x<0 \\ 6x + \dfrac{1}{2} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

29.1. Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1. Sabe-se que $m_t = f'(1)$.

Como $f'(x) = (x-1)'\times e^x + (e^x)'\times(x-1) = 1\times e^x + e^x\times(x-1) =$

$= xe^x$, tem-se $m_t = e$.

$t:\ y = ex + b$

Como o ponto de coordenadas $(1, 0)$ pertence à reta *t*, tem-se:

$0 = e\times 1 + b \Leftrightarrow b = -e$.

Uma equação da reta *t* é: $y = ex - e$.

29.2.

$$f''(x) = (xe^x)' = (x)'\times e^x + (e^x)'\times x = 1\times e^x + e^x\times x =$$

$= e^x(1+x)$;

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \ \vee 1 + x = 0 \Leftrightarrow \ x = -1$

x	$-\infty$		$+\infty$
f''	$-$	0	+
f	$\frown$	$f(-1) = -\frac{2}{e}$	$\smile$

No intervalo $]-\infty, -1]$, a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $[-1, +\infty[$, a concavidade é voltada para cima.

Ponto de inflexão: $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$

30.

$$f'(x) = \left(\frac{ex^2}{8} - e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \frac{2ex}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \frac{ex}{4} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{ex}{4} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \frac{e}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \frac{e}{4} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{4} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = e \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f''	$-$	0	+
f	$\frown$	$f(-2)$	$\smile$

O gráfico de *f* tem um único ponto de inflexão, de abcissa -2.

Tarefa 2

1.1. Sendo $f(x) = e - \sqrt{e^x}$, então $f'(x) = 0 - \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = -\frac{\sqrt{e^x}}{2}$.

Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0.

$m_t = f'(0) = -\frac{\sqrt{e^0}}{2} = -\frac{1}{2}$ e $f(0) = e - \sqrt{e^0} = e - 1$.

O ponto $P(0, e-1)$ pertence à reta $t: y = -\frac{1}{2}x + b$, logo:

$e - 1 = -\frac{1}{2}\times 0 + b \Leftrightarrow b = e - 1$.

Assim, a reta *t* é definida pela equação $y = -\frac{1}{2}x + e - 1$.

1.2. Se a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *P* é perpendicular à reta de equação $y = \frac{2}{e^3}x - 5$ então o seu declive é $-\frac{e^3}{2}$.

$$f'(x)=-\frac{e^3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{e^x}=-\frac{e^3}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}=e^3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=3 \Leftrightarrow x=6$$

$$f(6)=e-\sqrt{e^6}=e-e^3$$

Assim, $P\left(6,\, e-e^3\right)$.

1.3.

$$f''(x)=\left(-\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\times\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}=-\frac{\sqrt{e^x}}{4}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}f'(x)=\frac{f'(x)}{2}$$

2.1.

$$f'(x)=\left(2x^2e^{-\frac{x}{2}}\right)'=4xe^{-\frac{x}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}2x^2=e^{-\frac{x}{2}}\left(4x-x^2\right)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}}\left(4x-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}=0}_{\text{impossível}} \ \vee \ 4x-x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=4$$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	$32e^{-2}$	$\searrow$

f é estritamente crescente no intervalo $\left[0,4\right]$.

f é estritamente decrescente no intervalo $\left]-\infty,0\right]$ e no intervalo $\left[4,+\infty\right[$.

Mínimo: 0 ; Máximo: $32e^{-2}$.

2.2.

$$f''(x)=\left(e^{-\frac{x}{2}}\left(4x-x^2\right)\right)'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(4x-x^2\right)+\left(4-2x\right)e^{-\frac{x}{2}}=$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-4x+4\right);\ f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}=0}_{\text{impossível}} \ \vee \ \frac{x^2}{2}-4x+4=0 \Leftrightarrow x^2-8x+8=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=4+2\sqrt{2} \ \vee \ x=4-2\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$4-2\sqrt{2}$		$4+2\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$f\left(4-2\sqrt{2}\right)$	$\cap$	$f\left(4+2\sqrt{2}\right)$	$\cup$

Donde se conclui que as abcissas dos pontos *P* e *Q*, e consequentemente dos pontos *A* e *B*, são $4-2\sqrt{2}$ e $4+2\sqrt{2}$.

Então, $A_{[ABC]}=\frac{4\sqrt{2}\times 32e^{-2}}{2}=\frac{64\sqrt{2}}{e^2}$.

Pág. 21

Proposta 1

1.1.

a) $C=20000\left(1+\frac{3}{100\times 2}\right)^2\approx 20604,5$

Se o Sr. José optasse pelo banco A, o seu capital ao fim de um ano seria de 20 604,50 €.

b) $C=20000\left(1+\frac{3}{100\times 2}\right)^4\approx 21227,27$

Se o Sr. José optasse pelo banco A, o seu capital ao fim de dois anos seria de 21 227,27 €.

1.2.

Banco B: $C=20000\left(1+\frac{2,98}{100\times 12}\right)^{12}\approx 20604,21$

Banco A: $C=20000\left(1+\frac{3}{100\times 2}\right)^{2}\approx 20604,5$

A melhor proposta para o Sr. José é a do banco A.

Proposta 2

2.1.

a) $C=10000\left(1+\frac{5}{100\times 4}\right)^4\approx 10509,45$

Se as capitalizações forem trimestrais, o capital acumulado pela mãe da Luísa ao fim de um ano será de 10 509,45 €.

b) $C=10000\left(1+\frac{5}{100\times 4}\right)^4\approx 10512,67$

Se as capitalizações forem diárias, o capital acumulado pela mãe da Luísa ao fim de um ano será de 10 512,67 €.

2.2. No caso de as capitalizações serem contínuas, o capital acumulado ao fim de um ano será dado por:

$$C=\lim\left[10000\left(1+\frac{5}{100\times n}\right)^n\right]=10000\times\lim\left(1+\frac{0,05}{n}\right)^n=$$

$=10000\times e^{0,05}$ euros.

Proposta 3

3.1. Ao fim do 2.º dia há 9 pessoas doentes: as 3 que estavam doentes no final do 1.º dia mais as 6 pessoas que foram contagiadas (cada um dos 3 doentes contagiou outros dois).

3.2.

a) A função *f* é definida por $f(x)=3^x,\ x\in\mathbb{R}_0^+$.

b₁) Como o ponto *A* pertence ao gráfico da função *f* e tem abcissa 6, a sua ordenada é dada por 3^6, ou seja, é igual a 729.

b₂) Como o ponto *B* pertence ao gráfico da função *f* e tem ordenada 2187, a sua abcissa é a solução da equação $3^x = 2187$, ou seja, é 7.

$$f(x)=2187 \Leftrightarrow 3^x=2187 \Leftrightarrow 3^x=3^7 \Leftrightarrow x=7$$

Pág. 22

Proposta 4

Determinando a imagem de zero através de cada uma das funções podemos facilmente fazer corresponder a cada função uma das representações gráficas.

$f(0)=2^0=1$; $g(0)=-2^0=-1$;

$h(0)=2^{-1}=\frac{1}{2}$; $j(0)=-1+2^0=0$.

Assim sendo, a correspondência é a seguinte:

I – h ; II – f ; III – g ; IV – j .

Proposta 5

5.1. $f(0)=2^{-3}=\frac{1}{8}$, $g(0)=2^0-3=1-3=-2$ e $h(0)=2^{3-0}=8$.

Assim, a correspondência é a seguinte: f – III; g – II; h – I.

5.2. $\forall x\in\mathbb{R},\ 2^{x-3}>0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>0$. Logo,

$D'_f=\left]0,+\infty\right[$.

$\forall x\in\mathbb{R}, 2^x>0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, 2^x-3>-3 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}, g(x)>-3$

Então, $D'_g=\left]-3,+\infty\right[$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ 2^{3-x}>0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ h(x)>0$. Assim sendo,

$D'_h=\left]0,+\infty\right[$.

5.3.

a) O gráfico de *f* não interseta o eixo das abcissas porque $0\notin D'_f$.

b) Como $g(0)=-2$, o gráfico de *g* interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0,-2)$.

c) A abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções de *f* e de *h* é a solução da equação $f(x)=h(x)$.

$f(x)=h(x) \Leftrightarrow 2^{x-3}=2^{3-x} \Leftrightarrow x-3=3-x \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

A ordenada do ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *h* é $h(3)=2^{3-3}=2^2=1$. Os gráficos de *f* e de *h* intersetam-se no ponto de coordenadas $(3,\ 1)$.

5.4.

a) $g(x)>-2 \Leftrightarrow 2^x-3>-2 \Leftrightarrow 2^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Então, $A=\left]0,+\infty\right[$.

b) $h(x)<1 \Leftrightarrow 2^{3-x}<1 \Leftrightarrow 2^{3-x}<2^0 \Leftrightarrow 3-x<0 \Leftrightarrow x>3$

Então, $B=\left]3,+\infty\right[$.

Proposta 6

6.1. $b^{-x}=\frac{1}{b^x}=\frac{1}{5}$

6.2. $a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}=\frac{15}{3}=5$

6.3. $\left(\frac{b}{a}\right)^x=\frac{b^x}{a^x}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

6.4. $a^{x+y}=a^x\times a^y=15\times 3=45$

6.5. $\left(b^x\right)^2=5^2=25$

6.6. $a^{\frac{y}{2}}=\sqrt{a^y}=\sqrt{3}$

Pág. 23

Proposta 7

7.1.

$3^{x+1}=\frac{1}{243} \Leftrightarrow 3^{x+1}=3^{-5} \Leftrightarrow x+1=-5 \Leftrightarrow x=-6$

O conjunto-solução da equação é $\{-6\}$.

7.2.

$4^{x+1}=1024 \Leftrightarrow 4^{x+1}=4^5 \Leftrightarrow x+1=5 \Leftrightarrow x=4$

O conjunto-solução da equação é $\{4\}$.

7.3.

$2\times\left(3^x\right)^2=1459 \Leftrightarrow 3^{2x}=729 \Leftrightarrow 3^{2x}=3^6 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$

O conjunto-solução da equação é $\{3\}$.

7.4.

$3^{x-5}=\frac{1}{9^{x+1}} \Leftrightarrow 3^{x-5}=\frac{1}{\left(3^2\right)^{x+1}} \Leftrightarrow 3^{x-5}=\frac{1}{3^{2x+2}} \Leftrightarrow 3^{x-5}=3^{-2x-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-5=-2x-2 \Leftrightarrow x=1$

O conjunto-solução da equação é $\{1\}$.

7.5.

$\sqrt{5}\,e^x-xe^x=0 \Leftrightarrow e^x\left(\sqrt{5}-x\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x=0}_{\text{impossível}} \vee \sqrt{5}-x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{5}$.

O conjunto-solução da equação é $\left\{\sqrt{5}\right\}$.

7.6.

$3^{x^2}=\frac{1}{\sqrt{3^{x-1}}} \Leftrightarrow 3^{x^2}=\frac{1}{3^{\frac{x-1}{2}}} \Leftrightarrow 3^{x^2}=3^{\frac{-x+1}{2}} \Leftrightarrow x^2=\frac{-x+1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \ \vee\ x=-1$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$.

7.7.

$0{,}000007=\frac{7}{10^{3x+6}} \Leftrightarrow \frac{7}{10^6}=\frac{7}{10^{3x+6}} \Leftrightarrow 10^6=10^{3x+6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6=3x+6 \Leftrightarrow 3x=0 \Leftrightarrow x=0$

O conjunto-solução da equação é $\{0\}$.

7.8.

$$3^{2+x}+3^{-x}=10 \Leftrightarrow 3^2\times 3^x+\frac{1}{3^x}-10=0 \underset{\forall x\in\mathbb{R},\ 3^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 9\times\left(3^x\right)^2+1-10\times 3^x=0$$

Fazendo $3^x=y$, tem-se: $9y^2-10y+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{18}\Leftrightarrow y=1\vee y=\frac{1}{9}$. Como $3^x=y$, tem-se:

$3^x=1\vee 3^x=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 3^x=3^0\vee 3^x=3^{-2}\Leftrightarrow x=0\vee x=-2$.

O conjunto-solução da equação é $\{-2,0\}$.

7.9.

$$\frac{14^{x+2}}{7^x}=6272\Leftrightarrow\frac{14^x\times 14^2}{7^x}=6272\Leftrightarrow\left(\frac{14}{7}\right)^x\times 196=6272\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^x=32\Leftrightarrow 2^x=2^5\Leftrightarrow x=5$

O conjunto-solução da equação é $\{5\}$.

7.10.

$$\underbrace{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^x}_{\text{Soma de } x+1 \text{ termos consecutivos de uma progressão geométrica de } r=2}=1023\Leftrightarrow 1\times\frac{1-2^{x+1}}{1-2}=1023\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^{x+1}-1=1023\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{10}\Leftrightarrow x=9$

O conjunto-solução da equação é $\{9\}$.

Proposta 8

8.1. $f(0)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2^0+k=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow k=-\frac{3}{2}-1\Leftrightarrow k=-\frac{5}{2}$

8.2. Sendo $k=-\frac{5}{2}$, então $f(x)=2^x-\frac{5}{2}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ 2^x>0\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ 2^x-\frac{5}{2}>-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>-\frac{5}{2}$,

logo $D'_f=\left]-\frac{5}{2},+\infty\right[$.

8.3. O ponto *A* pertence ao gráfico da função *f* e tem ordenada igual a $k=\frac{11}{2}$, logo a sua abcissa é a solução da equação

$f(x)=\frac{11}{2}$.

$f(x)=\frac{11}{2}\Leftrightarrow 2^x-\frac{5}{2}=\frac{11}{2}\Leftrightarrow 2^x=\frac{16}{2}\Leftrightarrow 2^x=8\Leftrightarrow x=3$

Então, $A\left(3,\frac{11}{2}\right)$.

Proposta 9

9.1. $7^{2x}>\frac{1}{7\sqrt{7}}\Leftrightarrow 7^{2x}>7^{-\frac{3}{2}}\Leftrightarrow 2x>-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>-\frac{3}{4}$

O conjunto-solução da inequação é $\left]-\frac{3}{4},+\infty\right[$.

9.2.

$$5^{x+1}+5^{-x}<6\Leftrightarrow 5^x\times 5+\frac{1}{5^x}-6<0\underset{\forall x\in\mathbb{R},\ 5^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\left(5^x\right)^2\times 5+1-6\times 5^x<0$$

Fazendo $5^x=y$, tem-se $5y^2-6y+1<0$.

Vamos começar por determinar as soluções da equação $5y^2-6y+1=0$.

$5y^2-6y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{10}\Leftrightarrow y=1\vee y=\frac{1}{5}$

Assim, $5y^2-6y+1<0\Leftrightarrow y>\frac{1}{5}\ \wedge\ y<1$.

Como $y=5^x$, tem-se:

$5^x>\frac{1}{5}\wedge 5^x<1\Leftrightarrow 5^x>5^{-1}\wedge 5^x<5^0\Leftrightarrow x>-1\wedge x<0$.

O conunto-solução da inequação é $]-1,0[$.

9.3.

$$3^{|x-3|-1}\le\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{|x-3|-1}\le 3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow|x-3|-1\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow|x-3|\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x-3\le\frac{3}{2}\wedge x-3\ge-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x\le\frac{9}{2}\wedge x\ge\frac{3}{2}$$

O conjunto-solução da inequação é $\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$.

9.4.

$$2^{3x}-9\le-8^{-x+1}\Leftrightarrow 8^x-9+\frac{8^1}{8^x}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(8^x\right)^2-9\times 8^x+8\le 0\wedge\underbrace{8^x\ne 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow\left(8^x\right)^2-9\times 8^x+8\le 0$$

Fazendo $8^x=y$, tem-se:

$y^2-9y+8\le 0$.

Vamos começar por determinar as soluções da equação $y^2-9y+8=0$.

$y^2-9y+8=0\Leftrightarrow y=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{2}\Leftrightarrow y=8\vee y=1$

Assim, $y^2-9y+8=0\Leftrightarrow y\ge 1\ \vee\ y\le 8$.

Como $8^x=y$, tem-se:

$8^x\ge 1\wedge 8^x\le 8\Leftrightarrow x\ge 0\wedge x\le 1$.

O conjunto-solução da inequação é $[0,1]$.

9.5.

<u>Zeros</u>: $\left(2^{x+1}-8\right)(x+1)=0\Leftrightarrow 2^{x+1}-8=0\vee x+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3\vee x=-1\Leftrightarrow x=2\vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2^{x+1}-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\left(2^{x+1}-8\right)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Da análise do quadro resulta que:
$\left(2^{x+1}-8\right)\left(x+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-1\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.
O conjunto-solução da inequação é $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.

9.6. <u>Zeros</u>: $\left(3^{2x}-1\right)\left(16-4^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-1=0 \vee 16-4^{-x}=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{2x}=3^0 \vee 4^2=4^{-x} \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$3^{2x}-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$16-4^{-x}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\left(3^{2x}-1\right)\left(16-4^{-x}\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Da análise do quadro resulta que:
$\left(3^{2x}-1\right)\left(16-4^{-x}\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-2,0\right[$
O conjunto-solução da inequação é $\left]-2,0\right[$.

Proposta 10

10.1.

a)
$f(x)=0 \Leftrightarrow 8-2^{1+2x}=0 \Leftrightarrow 8=2^{1+2x} \Leftrightarrow 2^3=2^{1+2x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3=1+2x \Leftrightarrow x=1$

b)
$f(x)=7 \Leftrightarrow 8-2^{1+2x}=7 \Leftrightarrow 1=2^{1+2x} \Leftrightarrow 2^0=2^{1+2x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0=1+2x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

10.2.
$f(x)\geq -120 \Leftrightarrow 8-2^{1+2x}\geq -120 \Leftrightarrow -2^{1+2x}\geq -128 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{1+2x}\leq 2^7 \Leftrightarrow 1+2x\leq 7 \Leftrightarrow x\leq 3$
$A=\mathbb{R}^+\cap\left]-\infty,3\right]=\left]0,3\right]$

Pág. 24

Proposta 11

11.1. $f(x)=g(-2) \Leftrightarrow 6-2^x=-2 \Leftrightarrow 2^x=8 \Leftrightarrow 2^x=2^3 \Leftrightarrow x=3$

11.2.
$h(x)=(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(2-x^2\right)=6-2^{2-x^2}$
$\forall x\in\mathbb{R}$, tem-se:
$x^2\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\leq 0 \Leftrightarrow 2-x^2\leq 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0<2^{2-x^2}\leq 2^2 \Leftrightarrow 0>-2^{2-x^2}\geq -4 \Leftrightarrow 6>6-2^{2-x^2}\geq 6-4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6>h(x)\geq 2$
Então, $D'_h=\left[2,6\right[$.
Donde se conclui que a equação $h(x)=1$ é impossível.

Proposta 12

12.1. Como *A* é o ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*, a sua abcissa é a solução da equação $f(x)=g(x)$.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2^{x+1}=\frac{1}{8^x} \Leftrightarrow 2^{x+1}=\frac{1}{\left(2^3\right)^x} \Leftrightarrow 2^{x+1}=\frac{1}{2^{3x}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{-3x} \Leftrightarrow x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$

A ordenada do ponto *A* é igual a $g\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Como $g\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8^{-\frac{1}{4}}}=8^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{8}$, então $A\left(-\frac{1}{4},\sqrt[4]{8}\right)$.

B é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo das ordenadas, logo $B\left(0\,,\,f(0)\right)$.
Como $f(0)=2^{0+1}=2$, então $B(0\,,2)$.

12.2.

$g(x)>\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8^x}>\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{-3x}>2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -3x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{6}$

O conjunto-solução da inequação $g(x)>\sqrt{2}$ é $\left]-\infty,-\frac{1}{6}\right[$.

Proposta 13

13.1. Como o vértice *B* tem abcissa 2 e pertence ao gráfico da função *f*, sabe-se que a sua ordenada é igual a $f(2)$.

$f(2)=2^{-2}+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$, logo $B\left(2,\frac{5}{4}\right)$.

b) Como o vértice *C* pertence ao gráfico da função *f* e tem ordenada 9, para determinar a sua abcissa tem-se de resolver a equação $f(x)=9$.

$f(x)=9 \Leftrightarrow 2^{-x}+1=9 \Leftrightarrow 2^{-x}=8 \Leftrightarrow 2^{-x}=2^3 \Leftrightarrow -x=3 \Leftrightarrow x=-3$

Assim, conclui-se que $C(-3,9)$ e $D(-3,0)$.

O trapézio tem 5 cm de altura $\left(\overline{AD}=5\right)$.

13.2.

a) Sabe-se que $C\left(x,2^{-x}+1\right)$ e $D(x,0)$, com $x\in\mathbb{R}^-$.

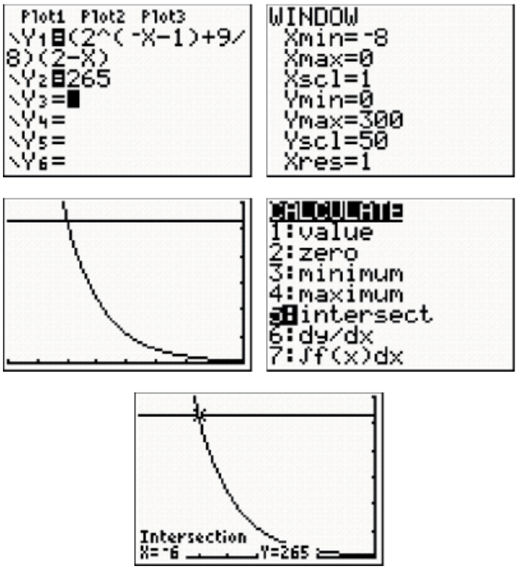
$\overline{CD}=4\times\overline{AB} \Leftrightarrow 2^{-x}+1=4\times\frac{5}{4} \Leftrightarrow 2^{-x}=4 \Leftrightarrow 2^{-x}=2^2 \Leftrightarrow -x=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-2$

b)

$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2}\times\overline{AD}=\frac{2^{-x}+1+\frac{5}{4}}{2}\times(2-x)=$
$=\left(2^{-x-1}+\frac{9}{8}\right)\times(2-x)$

A equação que traduz o problema é a seguinte:
$\left(2^{-x-1}+\frac{9}{8}\right)\times(2-x)=265$

Recorrendo à calculadora gráfica, pode proceder-se da seguinte forma:



A abcissa dos pontos *C* e *D* deve ser igual a –6.

13.3. $f(0)=2$;

A área do trapézio tende para

$$\frac{2+\frac{5}{4}}{2}\times 2 = 2+\frac{5}{4}=\frac{13}{4}=3{,}25 .$$

Quando *x* tende para zero, a área do trapézio tende para

3,25 cm².

Pág. 25

Proposta 14

14.1. $\forall x\in \mathbb{R},\ 2^x>0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ -2^x<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 6-2^x<6 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)<6$

$D_f=\mathbb{R}$, $D'_f=\left]-\infty,6\right[$ e $y=6$ é uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função *f*.

$D_g=\mathbb{R}$; $D'_g=\left]0,+\infty\right[$ e $y=0$ é uma equação da assíntota horizontal do gráfico da função *g*.

14.2.

a) $f(x)\le -2 \Leftrightarrow 6-2^x\le -2 \Leftrightarrow 2^x\ge 8 \Leftrightarrow 2^x\ge 2^3 \Leftrightarrow x\ge 3$

Então, $x\in\left[3,+\infty\right[$.

b) $(f+g)(x)<6 \Leftrightarrow f(x)+g(x)<6 \Leftrightarrow 6-2^x+4^x<6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^x<2^x \Leftrightarrow 2^{2x}<2^x \Leftrightarrow 2x<x \Leftrightarrow x<0$

Então, $x\in\left]-\infty,0\right[$.

c) $f(x)>g(x) \Leftrightarrow 6-2^x>4^x \Leftrightarrow -2^{2x}-2^x+6>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2+2^x-6<0$

Fazendo $2^x=y$, tem-se: $y^2+y-6<0$. Vamos começar por determinar as soluções da equação $y^2+y-6=0$.

$$y^2+y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow y=2 \vee y=-3$$

Assim, $y^2+y-6\le 0 \Leftrightarrow y>-3 \ \vee \ y<2$.

Como $2^x=y$, tem-se: $\underbrace{2^x>-3}_{\text{Condição universal}} \wedge 2^x<2 \Leftrightarrow x<1$.

Então, $x\in\left]-\infty,1\right[$.

14.3. O ponto *P* é o ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*. Assim, $P(1,4)$.

Se *P* pertence ao gráfico de *h*, então $h(1)=4$.

$$h(1)=4 \Leftrightarrow k\times 3^{-1}=4 \Leftrightarrow k\times\frac{1}{3}=4 \Leftrightarrow k=12$$

Proposta 15

15.1.

$$\lim\left(\frac{n-5}{n+2}\right)^n=\lim\left(\frac{n\left(1-\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n=\frac{\lim\left(1-\frac{5}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{e^{-5}}{e^2}=e^{-7}$$

15.2.

$$\lim\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^n=\lim\left(\frac{3n\left(1-\frac{1}{3n}\right)}{7n\left(1+\frac{2}{7n}\right)}\right)^n=$$

$$=\lim\left(\frac{3}{7}\right)^n\times\frac{\lim\left(1-\frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{2}{7}}{n}\right)^n}=0\times\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{\frac{2}{7}}}=0$$

15.3.

$$\lim\left(2-\frac{1+n}{n+4}\right)^n=\lim\left(\frac{2n+8-1-n}{n+4}\right)^n=\lim\left(\frac{n+7}{n+4}\right)^n=$$

$$=\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{7}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{7}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}=\frac{e^7}{e^4}=e^3$$

15.4.

$$\lim\left(1-\frac{3}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)\right)^{\sqrt{n}}=$$

$$=\lim\left(1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\times\lim\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=e^{-\sqrt{3}}\times e^{\sqrt{3}}=e^0=1$$

15.5.

$$\lim\left(-2+\frac{n+1}{n+4}\right)^n=\lim\left(\frac{-2n-8+n+1}{n+4}\right)^n=\lim\left(\frac{-n-7}{n+4}\right)^n=$$

$$=\lim\left(\frac{-n\left(1+\frac{7}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)}\right)^n=\lim(-1)^n\times\frac{\lim\left(1+\frac{7}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}$$

Se n é par, tem-se $\lim\left(-2+\frac{n+1}{n+4}\right)^n=1\times\frac{e^7}{e^4}=e^3$.

Se n é ímpar, tem-se $\lim\left(-2+\frac{n+1}{n+4}\right)^n=-1\times\frac{e^7}{e^4}=-e^3$.

Donde se conclui que não existe $\lim\left(-2+\frac{n+1}{n+4}\right)^n$.

15.6.

$$\lim\left(\frac{n^2-2}{2n^2+1}\right)^n=\lim\left(\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{2n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)}\right)^n=$$

$$=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{\lim\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n^2}\right)^n}=0\times\frac{\lim\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n^2}\right)^n}=0$$

Proposta 16

16.1.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{3x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3\right)=1\times3=3$$

16.2.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\sqrt{2}x}-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{\sqrt{2}x\to0}\left(\frac{e^{\sqrt{2}x}-1}{\sqrt{2}x}\times\sqrt{2}\right)=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

16.3.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{4x}}{5x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{-e^{2x}}{5}\times\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=$$

$$=\frac{-1}{5}\times\lim_{2x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2\right)=-\frac{1}{5}\times(1\times2)=-\frac{2}{5}$$

16.4.

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{x}{-\left(e^x-1\right)}=-\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=$$

$$=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=-\frac{1}{1}=-1$$

16.5.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{4x}}{6x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-e^x\left(e^{3x}-1\right)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{6}\times\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}=$$

$$=\frac{-1}{6}\times\lim_{3x\to0}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3\right)=-\frac{1}{6}\times(1\times3)=-\frac{1}{2}$$

16.6.

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{1-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{-(x-1)(x+1)}=-\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y(y+2)}=$$

$$=-\lim_{y\to0}\left(\frac{e^y-1}{y}\times\frac{1}{y+2}\right)=-\left(1\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável:</u>
Fazendo $x-1=y$, vem $y=x+1$. Se $x\to1$, então $y\to0$.

Pág. 26

Proposta 17

$$j'(x)=\left(e^{\sqrt{h(x)}}\right)'=\left(\sqrt{h(x)}\right)'\times e^{\sqrt{h(x)}}=\frac{(h(x))'}{2\sqrt{h(x)}}\times e^{\sqrt{h(x)}}=$$

$$=\frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}\times e^{\sqrt{h(x)}}$$

Por observação gráfica, sabe-se que $h(1)=\frac{1}{4}$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1.

$$h'(1)=m_t=\frac{\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1-0}=\frac{\frac{2}{4}}{1}=\frac{1}{2}$$

Então,

$$j'(1)=\frac{h'(1)}{2\sqrt{h(1)}}\times e^{\sqrt{h(1)}}=\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}\times e^{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

Proposta 18

18.1. Seja *t* a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 0. Sabe-se que $m_t = g'(0)$.

$$g'(x) = (x)' \times e^{x^3-2x} + \left(e^{x^3-2x}\right)' \times x = 1 \times e^{x^3-2x} + \left(3x^2-2\right)e^x \times x =$$

$$= e^{x^3-2x}\left(1+3x^3-2x\right)$$

Então, tem-se $m_t = 1$ e $t:\ y = x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(0, 0)$ pertence à reta *t*, tem-se $b = 0$.

Uma equação da reta *t* é $y = x$.

18.2. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^3-2x}\left(1+3x^3-2x\right) = 0 \Leftrightarrow$

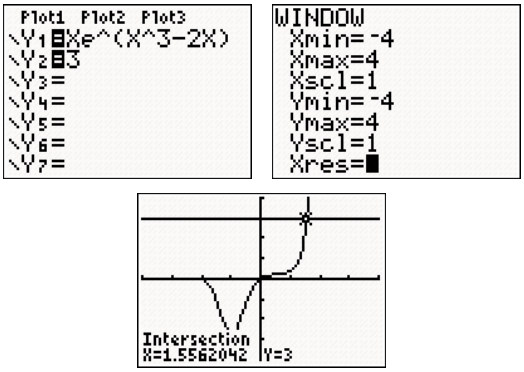
$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{x^3-2x} = 0}_{\text{impossível}} \ \vee\ 1+3x^3-2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(3x^2-3x+1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \ \vee\ \underbrace{3x^2-3x+1 = 0}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
e^{x^3-2x}	+	+	+
$x+1$	–	0	+
$3x^2-3x+1$	+	+	+
g'	–	0	+
g	↘	$-e$	↗

Mínimo: $-e$

18.3.



Donde se conclui que, $A(1{,}56;\ 3)$.

Proposta 19

O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^-$ e voltada para cima em $\mathbb{R}^+$. Logo, conclui-se que a função f'' é negativa em $\mathbb{R}^-$ e positiva em $\mathbb{R}^+$.

A opção correta é a (B).

Proposta 20

20.1. Se a reta *t* é paralela ao eixo das abcissas então $m_t = 0$.

Como a reta *t* é tangente ao gráfico de *g* no ponto *A*, de abcissa x_A, então $m_t = g'(x_A)$.

$$g'(x) = \left(-5x e^x\right)' = -5 \times e^x + (-5x) \times e^x = -5e^x(1+x).$$

$$m_t = g'(x_A) \Leftrightarrow 0 = -5e^{x_A}(1+x_A) \Leftrightarrow \underbrace{-5e^{x_A} = 0}_{\substack{\text{equação} \\ \text{impossível}}} \vee 1 + x_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A = -1$$

A abcissa do ponto *A* é -1.

20.2. A ordenada do ponto *A* é dada por $g(-1)$.

$$g(-1) = -5 \times (-1) \times e^{-1} = 5 \times \frac{1}{e} = \frac{5}{e}$$

A ordenada do ponto *A* é $\frac{5}{e}$.

Proposta 21

21.1. *f* é uma função ímpar e tem domínio $\mathbb{R}$, logo a função f', função derivada de *f*, é par. Se *f* é ímpar então $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ e se f' é par então $f'(-x) = f'(x)$, $\forall x \in D_{f'}$. Assim, a tabela que relaciona o sinal de f' e a variação de *f* é a seguinte:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'	–	0	+	+	+	0	–
f	↘	-1	↗	0	↗	1	↘

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$.

f é estritamente crescente em $[-1, 1]$.

-1 é mínimo e 1 é máximo.

21.2. *f* é contínua em $\mathbb{R}$ porque admite derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

21.3. *f* é uma função ímpar. A função f' é par e função f'' é ímpar. Assim, a tabela que relaciona o sinal de f'' e o sentido das concavidades do gráfico de *f* é:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	–	0	+	0	–	0	+
f	∩	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	∪	0	∩	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	∪

Nos intervalos $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right]$ e $\left[0, \sqrt{3}\right]$ a concavidade é voltada para baixo. Nos intervalos $\left[-\sqrt{3}, 0\right]$ e $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$ a concavidade é voltada para cima. Pontos de inflexão:

$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

21.4. Como o domínio da função *f* é $\mathbb{R}$ e *f* é contínua, então o seu gráfico não admite assíntotas verticais. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$, logo a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x \to +\infty$. Como *f* é uma função ímpar, então conclui-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$. Assim, a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x \to -\infty$.

<u>Conclusão</u>: O gráfico de *f* tem uma única assíntota, a reta de equação $y = 0$.

Proposta 22

$f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=\left(-2xe^{-x^2}\right)'=-2e^{-x^2}+(-2x)\left(-2xe^{-x^2}\right)=e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)$

O ponto *C* pertence ao eixo das ordenadas e ao gráfico de f'', logo $C(0, f''(0))$, ou seja, $C(0,-2)$. Os pontos *A* e *B* pertencem ao gráfico de f'' e têm ordenada nula, pois pertencem ao eixo das abcissas.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x^2}=0}_{\text{equação impossível}} \vee -2+4x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Então, conclui-se que $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Pág. 28

Proposta 23

23.1. $6^{x^2-5}-\frac{1}{\sqrt{6^x}}=0 \Leftrightarrow 6^{x^2-5}=\frac{1}{\sqrt{6^x}} \Leftrightarrow 6^{x^2-5}=\frac{1}{6^{\frac{x}{2}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6^{x^2-5}=6^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow x^2-5=-\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x^2+x-10=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-\frac{5}{2}$

O conjunto-solução da equação é $\left\{-\frac{5}{2}, 2\right\}$.

23.2. $\underbrace{3^x+3^{x-1}+3^{x-2}+3^{x-3}+3^{x-4}+3^{x-5}}_{\text{Soma de 6 termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{3}}=364 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}}=364 \Leftrightarrow 3^x \times \frac{\frac{728}{729}}{\frac{2}{3}}=364 \Leftrightarrow 3^x \times \frac{364}{243}=364 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x=243 \Leftrightarrow 3^x=3^5 \Leftrightarrow x=5$

O conjunto-solução da equação é $\{5\}$.

Proposta 24

<u>Zero do numerador</u>:

$4^x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 4^x=\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{2x}=2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

<u>Zeros do denominador</u>:

$x\left(e^{x+1}-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^{x+1}-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^{x+1}=e^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4^x-\sqrt{2}$	–	–	–	–	–	0	+
x	–	–	–	0	+	+	+
$e^{x+1}-1$	–	0	+	+	+	+	+
$\frac{4^x-\sqrt{2}}{x\left(e^{x+1}-1\right)}$	–	n.d.	+	n.d.	–	0	+

Da análise do quadro resulta que:

$\frac{4^x-\sqrt{2}}{x\left(e^{x+1}-1\right)}>0 \Leftrightarrow \left]-1,0\right[\cup \left]\frac{1}{4},+\infty\right[$.

O conjunto-solução da inequação é $\left]-1,0\right[\cup \left]\frac{1}{4},+\infty\right[$.

Proposta 25

25.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^x-2}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+e^x-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{2x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2\right)+1=1\times 2+1=3$

25.2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right) \overset{0\times\infty}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}=1$

<u>Mudança de variável:</u>

Fazendo $\frac{1}{x}=y$, vem $x=\frac{1}{y}$. Se $x\to+\infty$, então $y\to 0^+$.

Proposta 26

A abcissa do ponto *A* é a solução positiva da equação $f(x)=f'(x)$.

$f(x)=f'(x) \Leftrightarrow 3x^2e^{-x}=6xe^{-x}+3x^2\left(-e^{-x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2e^{-x}=6xe^{-x}-3x^2e^{-x} \Leftrightarrow 6x^2e^{-x}-6xe^{-x}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2e^{-x}-6xe^{-x}=0 \Leftrightarrow 6xe^{-x}(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x=0 \vee \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{equação impossível}} \vee x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

Como $f(1)=3e^{-1}=\frac{3}{e}$, então $A\left(1, \frac{3}{e}\right)$.

Para determinar a abcissa do ponto *B* temos de resolver a equação $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6xe^{-x}-3x^2e^{-x}=0 \Leftrightarrow 3xe^{-x}(2-x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=0 \vee \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{equação impossível}} \vee 2-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Conclui-se então que $B(2, 0)$. O ponto *C* pertence ao gráfico da função *f* e tem a mesma abcissa do ponto *B*, logo $C(2, f(2))$.

Como $f(2)=12e^{-2}$, então $C\left(2, 12e^{-2}\right)$.

$A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times(y_B-y_A)}{2}=\frac{12e^{-2}\times 1}{2}=6e^{-2}$

Pág. 29

Tarefa 3

1.1.

a) Consideremos dois objetos x_1 e x_2 pertencentes ao domínio da função *f*.

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow 2^{x_1}=2^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$

A função *f* é injetiva porque $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$.

b) $\forall x \in D_f,\ 2^x>0$, ou seja, $\forall x \in D_f, f(x)>0$.

A função *f* é sobrejetiva porque o contradomínio $\left(\mathbb{R}^+\right)$ coincide com o conjunto de chegada $\left(\mathbb{R}^+\right)$.

1.2. A função *f* é bijetiva (pois é injetiva e sobrejetiva), logo admite função inversa.

1.3.

f $\qquad$ f^{-1}

1	2	3,2	4	a
2	4	$2^{3,2}$	16	2^a, $a>0$

Pág. 30

31.1. $f^{-1}(5)=-2$ porque $f(-2)=5$.

31.2. $f(7)=\sqrt{2}$ porque $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)=7$.

31.3. $f\circ f^{-1}(3)=3$

31.4. $f^{-1}\circ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

32.1. $f(x)=y \Leftrightarrow 2-5^{x-1}=y \Leftrightarrow 5^{x-1}=2-y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=\log_5(2-y) \Leftrightarrow x=\log_5(2-y)+1$

Então, $f^{-1}(x)=\log_5(2-x)+1$.

32.2. $g(x)=y \Leftrightarrow 1+\log_3(2x+1)=y \Leftrightarrow \log_3(2x+1)=y-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=3^{y-1} \Leftrightarrow x=\frac{3^{y-1}-1}{2}$

Então, $g^{-1}(x)=\frac{3^{x-1}-1}{2}$.

33.1. $\log_5 125=3$ porque $5^3=125$.

33.2. $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)=-5$ porque $2^{-5}=\frac{1}{32}$.

33.3. $\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$ porque $3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}$.

33.4. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{8}=-\frac{3}{2}$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$.

33.5. $\log 0{,}00001=-5$ porque $10^{-5}=0{,}00001$.

33.6. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2}$ porque $e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

34.1. $5=2^{\log_2 5}$

34.2. $5=\log_2\left(2^5\right)$

34.3. $\log_5\left(5^k\right)=k$

34.4. $3^{\log_3 k}=k$

Pág. 31

35.1. O gráfico de *f* pode ser obtido a partir do gráfico de $y=\log_2 x$ seguindo a seguinte sequência de transformações: translação associada ao vetor $\vec{u}=(-2,0)$ seguida de uma translação associada ao vetor $\vec{v}=(0,3)$.

35.2.

a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+2>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>-2\}=]-2,+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

d) $y_A=3+\log_2(-1+2)=3+\log_2(1)=3+0=3$

e) $y_B=3+\log_2(0+2)=3+\log_2(2)=3+1=4$

f) $3+\log_2(x+2)=5 \Leftrightarrow \log_2(x+2)=2 \Leftrightarrow x+2=2^2 \Leftrightarrow x=2$

A abcissa do ponto *C* é igual a 2.

36.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: 3-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x<3\}=]-\infty,3[$

36.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge \ln x\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>0\wedge x\geq 1\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\geq 1\}=[1,+\infty[$

36.3. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4x\geq 0\}=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$

$x^2-4x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-4)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\geq 0\wedge x-4\geq 0)\vee(x\leq 0\wedge x-4\leq 0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\geq 0\wedge x\geq 4)\vee(x\leq 0\wedge x\leq 4)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geq 4 \vee x\leq 0$

36.4. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: \frac{x}{x-1}>0\wedge x-1\neq 0\right\}=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-1}$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pág. 32

37.1. $f(3)=-1 \Leftrightarrow \log_a 3=-1 \Leftrightarrow a=3^{-1} \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$

37.2. $y_B=\log_{\frac{1}{3}} 9=-2$

37.3. $\log_{\frac{1}{3}} x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

A abcissa do ponto *C* é igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

38.1. $\log_{0,5}(7)<\log_{0,5}(6)$ porque a função logaritmo de base *a*, sendo $0<a<1$, é estritamente decrescente.

38.2. $\log_6(0{,}5)<\log_6(0{,}55)$ porque a função logaritmo de base *a*, sendo $a>1$, é estritamente crescente.

38.3. $\log_4(3) > \log_{0,25}(3)$ porque $\log_4(3) > 0$ e $\log_{0,25}(3) < 0$.

38.4. $\log_3(1) = \log_5(1)$ porque $\log_3(1) = 0$ e $\log_5(1) = 0$.

39.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \log_2\left(x^2+2\right) \geq \log_2 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 1$

Então, $D'_g = [1, +\infty[$.

39.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \log_{0,5}\left(x^2+2\right) \leq \log_{0,5} 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leq -1$

Então, $D'_g =]-\infty, -1]$.

Pág. 33

40.1.

a	b	$\log_2(ab)$	$\log_2 a + \log_2 b$
2	4	$\log_2(2\times4) = \log_2 8 = 3$	$\log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$
4	8	$\log_2(4\times8) = \log_2 32 = 5$	$\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$
4	16	$\log_2(4\times16) = \log_2 64 = 6$	$\log_2 4 + \log_2 16 = 4 + 4 =$ $= 6$
2^n	2^m	$\log_2\left(2^n\times2^m\right) = \log_2\left(2^{n+m}\right) =$ $= n + m$	$\log_2\left(2^n\right) + \log_2\left(2^m\right) =$ $= n + m$

40.2.

a	b	$\log_3\left(\frac{a}{b}\right)$	$\log_3 a - \log_3 b$
3	9	$\log_3\left(\frac{3}{9}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = -1$	$\log_3 3 - \log_3 9 = 1 - 2 = -1$
$\frac{1}{3}$	27	$\log_3\left(\frac{\frac{1}{3}}{27}\right) = \log_3\left(\frac{1}{81}\right) =$ $= -4$	$\log_3\left(\frac{1}{3}\right) - \log_3 27 =$ $= -1 - 3 = -4$
9	81	$\log_3\left(\frac{9}{81}\right) = \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$	$\log_3 9 - \log_3 81 = 2 - 4 =$ $= -2$

40.3.

a	$-\log_2 a$	$\log_2\left(\frac{1}{a}\right)$
4	$-\log_2 4 = -2$	$\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$
$\frac{1}{2}$	$-\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -(-1) = 1$	$\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 2 = 1$
8	$-\log_2 8 = -3$	$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

Tarefa 4

1.1.

a	x	y	$\log_a A = \log_a(xy)$	$P = \log_a x + \log_a y$
2	8	4	5	5
5	625	125	7	7
3	3^{15}	3^4	19	19
10	10^6	10^5	11	11
e	e^3	e^7	10	10

1.2. Os resultados obtidos nas duas últimas colunas são iguais, o que nos leva a conjeturar que: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

2.1.

n	x	$I = \log_2 x$	$P = n\log_2 x$	$\log_2\left(x^n\right)$
3	2	1	3	3
4	8	3	12	12
5	16	4	20	20
6	256	8	48	48

2.2. Os resultados obtidos nas duas últimas colunas são iguais, o que nos leva a conjeturar que: $\log_a\left(x^n\right) = n\log_a x$.

Pág. 34

41.1. $\log_3 2 + \log_3 5 = \log_3(2\times5) = \log_3 10$

41.2. $\log_2 15 - \log_2 5 = \log_2(15:5) = \log_2 3$

41.3. $3\log_5 2 + \log_5 4 = \log_5\left(2^3\right) + \log_5 4 = \log_5(8\times4) = \log_5 32$

41.4. $\log_{0,5} 3 - 2\log_{0,5} 5 = \log_{0,5} 3 - \log_{0,5}\left(5^2\right) = \log_{0,5}\left(\frac{3}{25}\right)$

41.5. $3 + \log_2 5 = \log_2 8 + \log_2 5 = \log_2(8\times5) = \log_2 40$

41.6. $2 - \log 3 = \log\left(10^2\right) - \log 3 = \log\left(\frac{100}{3}\right)$

41.7. $(2 + \ln 3) - \ln 2 = \left(\ln e^2 + \ln 3\right) - \ln 2 = \ln\left(3e^2\right) - \ln 2 =$

$= \ln\left(\frac{3e^2}{2}\right)$

42.1. $y_B = 1 + \ln(2e) = \ln e + \ln(2e) = \ln(e\times2e) = \ln\left(2e^2\right)$

42.2. $y_A = 1 + \ln\left(2\times\frac{e}{2}\right) = \ln e + \ln e = \ln(e\times e) = \ln\left(e^2\right)$

$y_A - y_B = \ln\left(e^2\right) - \ln\left(2e^2\right) = \ln\left(\frac{e^2}{2e^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2^{-1}\right) = -\ln 2$

43.1. $\log_a\left(\frac{a}{b}\right) = \log_a a - \log_a b = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

43.2.

$\log_a\left(\sqrt{ab}\right)=\log_a(ab)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a(ab)=\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)=$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$

43.3. $\log_a\left(\frac{a^2b}{\sqrt[3]{a}}\right)=\log_a\left(a^2b\right)-\log_a\left(\sqrt[3]{a}\right)=$

$=\log_a\left(a^2\right)+\log_a b-\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=2+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

Pág. 35

44.1. $\log_3\left(81\times 9^4\right)=\log_3 81+\log_3\left(9^4\right)=4+4\log_3 9=4+4\times 2=$

$=12$

44.2. $\log_2\left(\frac{\sqrt{0,5^3}}{2^{-5}}\right)=\log_2\sqrt{0,5^3}-\log_2\left(2^{-5}\right)=$

$=\log_2\left(0,5^{\frac{3}{2}}\right)-(-5)=\log_2\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)+5=-\frac{3}{2}+5=\frac{7}{2}$

44.3. $\log_5\left(0,2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3=3\log_5\left(0,2\times\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=$

$=3\left(\log_5 0,2+\log_5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)=3\left(\log_5\left(5^{-1}\right)+\log_5\left(5^{-\frac{1}{2}}\right)\right)=$

$=3\left(-1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$

45.1. $\log_a\sqrt{x}=6\Leftrightarrow\log_a\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=6\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_a x=6\Leftrightarrow\log_a x=12$

Então, $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y=12+(-2)=10$.

45.2. $\log_a\left(\frac{x^2}{\sqrt{y}}\right)=\log_a\left(x^2\right)-\log_a\left(\sqrt{y}\right)=2\log_a x-\log_a y^{\frac{1}{2}}=$

$=2\log_a x-\frac{1}{2}\log_a y=2\times 12-\frac{1}{2}\times(-2)=24+1=25$

45.3. $\log_a\left(\frac{x\sqrt[3]{y}}{a^2}\right)=\log_a\left(x\sqrt[3]{y}\right)-\log_a\left(a^2\right)=\log_a x+\log_a y^{\frac{1}{3}}-2=$

$=12+\frac{1}{3}\log_a y-2=10+\frac{1}{3}\times(-2)=10-\frac{2}{3}=\frac{28}{3}$

46. $f(0)=3-\ln(0+1)=3$. Então, $\overline{OB}=3$.

$\overline{AP}=f(x)=3-\ln(x+1)$ e $\overline{OA}=x$, sendo $x>0$.

Seja $a(x)$ a área do trapézio [$OAPB$].

$a(x)=\frac{\overline{OB}+\overline{AP}}{2}\times\overline{OA}$

$a(x)=\frac{3+3-\ln(x+1)}{2}\times x=x\left(\frac{6-\ln(x+1)}{2}\right)$

$a(x)=\frac{x}{2}\left(\ln e^6-\ln(x+1)\right)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{e^6}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{e^6}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{x+1}}\right)^x$

Assim, tem-se: $a(x)=\ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{x+1}}\right)^x$

Pág. 36

47.1. $\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{k}{2}$

47.2. $\log_{0,5} x=\frac{\log_2 x}{\log_2 0,5}=\frac{k}{\log_2\left(2^{-1}\right)}=\frac{k}{-1}=-k$

47.3. $\log_{\sqrt{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}=\frac{k}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\frac{k}{\frac{1}{2}}=2k$

48.1. $\log_3 7-\log_9 2=\log_3 7-\frac{\log_3 2}{\log_3 9}=\log_3 7-\frac{\log_3 2}{2}=$

$=\log_3 7-\log_3\left(2^{\frac{1}{2}}\right)=\log_3\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

48.2. $\log_4\sqrt{5}+\log_2 3=\frac{\log_2\sqrt{5}}{\log_2 4}+\log_2 3=\frac{\log_2\sqrt{5}}{2}+\log_2 3=$

$=\log_2\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}+\log_2 3=\log_2\left(\sqrt{\sqrt{5}}\times 3\right)=\log_2\left(3\sqrt[4]{5}\right)$

49.1. $y_B-y_A=g(3)-f(3)=4-\log_9 3-\log_3 3=4-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}$

49.2. $y_D-y_C=g(2)-f(2)=4-\log_9 2-\log_3 2=4-\frac{\log_3 2}{\log_3 9}-\log_3 2$

$=4-\frac{\log_3 2}{2}-\log_3 2=4-\log_3 2^{\frac{1}{2}}-\log_3 2=4-\left(\log_3\sqrt{2}+\log_3 2\right)$

$=4-\log_3\left(2\sqrt{2}\right)$

Pág. 37

50.1.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2>0\wedge x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\wedge x>0\right\}=$

$=]0,+\infty[$;

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}: 4x^4>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x^4>0\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\right\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

50.2. $f(x)=\ln\left(x^2\right)+2\ln x+\ln 4=\ln\left(x^2\right)+\ln\left(x^2\right)+\ln 4=$

$=\ln\left(x^2\times x^2\times 4\right)=\ln\left(4x^4\right)$

50.3. $f(2)=g(2)=\ln 64$. Não existe $f(-1)$ e porque $-1 \notin D_f$ e $g(-1)=\ln\left(4\times(-1)^4\right)=\ln(4)$.

50.4. As funções *f* e *g* não são iguais porque $D_f \neq D_g$.

Tarefa 5

1.1. $\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)=\log_a\left(a^2\right)-\log_a b=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

1.2. $\log_a\left(\sqrt{a\sqrt{ab}}\right)=\log_a\left(\sqrt{\sqrt{a^3b}}\right)=\log_a\left(\sqrt[4]{a^3b}\right)=\log_a\left(a^3b\right)^{\frac{1}{4}}=$

$=\frac{1}{4}\log_a\left(a^3b\right)=\frac{1}{4}\left(\log_a\left(a^3\right)+\log_a b\right)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{8}$

1.3. $\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

1.4. $\log_a(ab)-\log_b(ab)=\log_a a+\log_a b-\left(\log_b a+\log_b b\right)=$

$=1+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-1=\frac{5}{6}$

2.1. $\log_k(x)=\log_k(kab)=\log_k(k)+\log_k a+\log_k b=$

$=1+2+(-3)=0$

2.2. $\log_k(x)=\log_k\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)=\log_k\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_k\left(\frac{a}{b}\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\log_k a-\log_k b\right)=\frac{1}{2}\left(2-(-3)\right)=\frac{5}{2}=2{,}5$

2.3. $\log_k(x)=\log_k\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)=\log_k a-\log_k\sqrt{b}=2-\frac{1}{2}\log_k b=$

$=2-\frac{1}{2}\times(-3)=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5$

2.4. $\log_k(x)=\log_k\left(\frac{k^2}{b^3}\right)=\log_k\left(k^2\right)-\log_k\left(b^3\right)=2-3\log_k b=$

$=2-3\times(-3)=2+9=11$

3.1. $\forall\, a,b\in\mathbb{R}^+$ e $a>b$: $\log\left(a^2-b^2\right)=\log\left(a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right)=$

$=\log\left(a^2\right)+\log\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=2\log(a)+\log\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$

3.2. $\forall\, a\in\left]1,+\infty\right[$ e $k\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$:

$\log_k\left(1+\frac{1}{a}\right)-\log_k\left(a-\frac{1}{a}\right)=\log_k\left(\frac{1+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a}}\right)=\log_k\left(\frac{\frac{a+1}{a}}{\frac{a^2-1}{a}}\right)=$

$=\log_k\left(\frac{a+1}{a^2-1}\right)=\log_k\left(\frac{a+1}{(a-1)(a+1)}\right)=\log_k\left(\frac{1}{a-1}\right)$

4. Recorrendo ao resultado obtido em **3.2.**, sabe-se que:

$\log_6\left(1+\frac{1}{7}\right)-\log_6\left(7-\frac{1}{7}\right)=\log_6\left(\frac{1}{7-1}\right)=\log_6\left(\frac{1}{6}\right)=$

$=\log_6\left(6^{-1}\right)=-1$

5.1. $f(x)=y\Leftrightarrow 3-4e^{1-2x}=y\Leftrightarrow e^{1-2x}=\frac{3-y}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-2x=\ln\left(\frac{3-y}{4}\right)\Leftrightarrow 2x=1-\ln\left(\frac{3-y}{4}\right)\Leftrightarrow x=\frac{1-\ln\left(\frac{3-y}{4}\right)}{2}$

Então, $f^{-1}(x)=\frac{1-\ln\left(\frac{3-x}{4}\right)}{2}$.

5.2. $g(x)=y\Leftrightarrow 2+\log_3(2-x)=y\Leftrightarrow\log_3(2-x)=y-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-x=3^{y-2}\Leftrightarrow x=2-3^{y-2}$

Então, $g^{-1}(x)=2-3^{x-2}$.

Pág. 38

51.1. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\log_3\left(\frac{1}{2}+1\right)=$

$=\log_3\left(1-\frac{1}{4}\right)-\log_3\left(\frac{3}{2}\right)=\log_3\left(\frac{3}{4}\right)-\log_3\left(\frac{3}{2}\right)=\log_3\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}\right)=$

$=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\left(2^{-1}\right)=-\log_3 2$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\left(1-\frac{1}{2}\right)=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)=\log_3\left(2^{-1}\right)=-\log_3 2$

51.2. $f(x)=\log_3\left(1-x^2\right)-\log_3(x+1)=\log_3\left(\frac{1-x^2}{x+1}\right)=$

$=\log_3\left(\frac{(1-x)(1+x)}{x+1}\right)=\log_3(1-x)=g(x),\quad\forall x\in D_f\cap D_g$

f e *g* são iguais em *D* porque $\forall x\in D,\ f(x)=g(x)$.

52.1. $\log_2(2x-1)=3\Leftrightarrow 2x-1=2^3\ \wedge\ x-1>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}\ \wedge\ x>1\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

52.2. $x\log_5 x-2x=0\Leftrightarrow x\left(\log_5 x-2\right)=0\ \wedge\ x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee\log_5 x-2=0\right)\ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee\log_5 x=2\right)\ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow\left(x=0\vee x=25\right)\ \wedge\ x>0\Leftrightarrow x=25$

52.3. $2\ln x-\ln(x+2)=0\Leftrightarrow\ln x^2=\ln(x+2)\ \wedge\ x>0\wedge\ x+2>0$

$\Leftrightarrow x^2=x+2\ \wedge\ x>0\ \wedge\ x>-2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\wedge\ x>0\Leftrightarrow\left(x=2\ \vee\ x=-1\right)\wedge\ x>0\Leftrightarrow x=2$

52.4. $\log_3(x)+\log_3(x-1)=\log_3(x+8)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-x)=\log_3(x+8) \ \wedge\ x>0 \ \wedge\ x-1>0 \ \wedge\ x+8>0$

$\Leftrightarrow x^2-x=x+8 \ \wedge\ x>0 \ \wedge\ x>1 \ \wedge\ x>-8$

$\Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \wedge x>1 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} \wedge x>1$

$\Leftrightarrow (x=4 \ \vee\ x=-2) \wedge x>1 \Leftrightarrow x=4$

52.5. $\ln^2 x+2=3\ln x \Leftrightarrow \ln^2 x-3\ln x+2=0$

$\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \wedge x>0 \Leftrightarrow (\ln x=2 \ \vee\ \ln x=1)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow (x=e^2 \ \vee\ x=e) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=e^2 \vee x=e$

52.6. $\log_3(x+1)=3-\log_3(x-5)$

$\Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_3(x-5)=3 \ \wedge\ x+1>0 \ \wedge\ x-5>0$

$\Leftrightarrow \log_3[(x+1)(x-5)]=3 \ \wedge\ x>-1 \ \wedge\ x>5$

$\Leftrightarrow x^2-5x+x-5=27 \ \wedge\ x>5 \Leftrightarrow x^2-4x-32=0 \wedge x>5$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16+128}}{2} \wedge x>5 \Leftrightarrow (x=8 \vee x=-4) \wedge x>5 \Leftrightarrow x=8$

52.7. $\log_5(3-x)-\log_5(x^2-9)=0$

$\Leftrightarrow \log_5(3-x)=\log_5(x^2-9) \ \wedge\ 3-x>0 \ \wedge\ x^2-9>0$

$\Leftrightarrow 3-x=x^2-9 \ \wedge\ x<3 \ \wedge\ (x-3)(x+3)>0$

$\Leftrightarrow x^2+x-12=0 \ \wedge\ x<-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} \ \wedge\ x\in\,]-\infty,-3[$

$\Leftrightarrow (x=3 \ \vee\ x=-4) \ \wedge\ x\in\,]-\infty,-3[\Leftrightarrow x=-4$

52.8. $\dfrac{\log_a(10-x)}{\log_a(4-x)}=2 \Leftrightarrow \log_a(10-x)=2\log_a(4-x) \ \wedge$

$\wedge\ \log_a(4-x)\neq 0 \ \wedge\ 10-x>0 \ \wedge\ 4-x>0$

$\Leftrightarrow \log_a(10-x)=\log_a(4-x)^2 \ \wedge\ 4-x\neq 1 \ \wedge\ x<10 \ \wedge\ x<4$

$\Leftrightarrow 10-x=16-8x+x^2 \ \wedge\ x\neq 3 \ \wedge\ x<4$

$\Leftrightarrow 3x^2-7x+6=0 \ \wedge\ x\neq 3 \ \wedge\ x<4$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} \wedge x\neq 3 \ \wedge\ x<4$

$\Leftrightarrow (x=6 \ \vee\ x=1) \ \wedge\ x\neq 3 \ \wedge\ x<4 \Leftrightarrow x=1$

52.9. $\log_a(3x-5)+\log_a(x-2)=\log_a 2$

$\Leftrightarrow \log_a[(3x-5)(x-2)]=\log_a 2 \ \wedge\ 3x-5>0 \ \wedge\ x-2>0$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x-5x+10=2 \ \wedge\ x>\dfrac{5}{3} \ \wedge\ x>2$

$\Leftrightarrow 3x^2-11x+8=0 \wedge x>2 \Leftrightarrow x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-96}}{6} \wedge x>2$

$\Leftrightarrow \left(x=\dfrac{8}{3} \ \vee\ x=1\right) \wedge x>2 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$

53. O ponto $P(1,4)$ pertence ao gráfico de *f* se:

$f(1)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\log_2(a\times 1+2)=4 \Leftrightarrow \log_2(a+2)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+2=8 \ \wedge\ a+2>0 \Leftrightarrow a=6 \ \wedge\ a>-2 \Leftrightarrow a=6$

Pág. 39

54.1. $\log_2(2x-1)<-3 \Leftrightarrow 2x-1<2^{-3} \ \wedge\ 2x-1>0$

$\Leftrightarrow 2x<\dfrac{1}{8}+1 \ \wedge\ x>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<\dfrac{9}{16} \ \wedge\ x>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left]\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{16}\right[$

54.2. $\log_{\frac{1}{2}}(x+3)<2 \Leftrightarrow x+3>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \ \wedge\ x+3>0$

$\Leftrightarrow x>-\dfrac{11}{4} \ \wedge\ x>-3 \Leftrightarrow x>-\dfrac{11}{4} \Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{11}{4},+\infty\right[$

54.3. $\ln(x+2)-\ln(2x)>0$

$\Leftrightarrow \ln(x+2)>\ln(2x) \ \wedge\ x+2>0 \ \wedge\ 2x>0$

$\Leftrightarrow x+2>2x \ \wedge\ x>-2 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x<2 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x\in\,]0,2[$

54.4. $\log_3(x+2)+\log_3 x>1$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2+2x)>1 \ \wedge\ x+2>0 \ \wedge\ x>0$

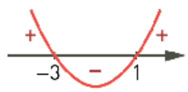
$\Leftrightarrow x^2+2x>3 \ \wedge\ x>-2 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x^2+2x-3>0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow (x<-3 \ \vee\ x>1) \wedge x>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x\in\,]1,+\infty[$

Cálculo auxiliar:

$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-3$



54.5. $\log_2(3x+1)>2\log_2 x+2$

$\Leftrightarrow \log_2(3x+1)>\log_2(x^2)+\log_2 4 \ \wedge\ 3x+1>0 \ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow \log_2(3x+1)>\log_2(4x^2) \ \wedge\ x>-\dfrac{1}{3} \ \wedge\ x>0$

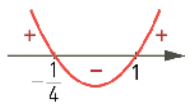
$\Leftrightarrow 3x+1>4x^2 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow 4x^2-3x-1<0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \left(x>-\dfrac{1}{4} \ \wedge\ x<1\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow x>0 \ \wedge\ x<1 \Leftrightarrow x\in\,]0,1[$

Cálculo auxiliar:

$4x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-\dfrac{1}{4}$



54.6. $\log(3x-x^2)\geq\log(3-x)$

$\Leftrightarrow 3x-x^2\geq 3-x \ \wedge\ 3x-x^2>0 \ \wedge\ 3-x>0$

$\Leftrightarrow -x^2+4x-3\geq 0 \ \wedge\ x(3-x)>0 \ \wedge\ 3-x>0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3\leq 0 \ \wedge\ x>0 \ \wedge\ x<3$

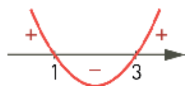
$\Leftrightarrow (x\geq 1 \ \wedge\ x\leq 3) \wedge x>0 \ \wedge\ x<3 \Leftrightarrow x\geq 1 \ \wedge\ x<3$

$\Leftrightarrow x\in[1,3[$

Cálculo auxiliar:

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=1$



54.7. $\frac{\ln(x+1)}{1+\ln x}>0 \Leftrightarrow \left[\left(\ln(x+1)>0 \ \wedge\ 1+\ln x>0\right) \ \vee\right.$

$\vee \left.\left(\ln(x+1)<0 \ \wedge\ 1+\ln x<0\right)\right] \ \wedge\ x+1>0 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left(x+1>1 \ \wedge\ \ln x>-1\right) \ \vee\ \left(x+1<1 \ \wedge\ \ln x<-1\right)\right] \ \wedge$

$\wedge\ x>-1 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\left(x>0 \ \wedge\ x>e^{-1}\right) \ \vee\ \left(x<0 \ \wedge\ x<e^{-1}\right)\right] \ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow \left(x>\frac{1}{e} \ \vee\ x<0\right) \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e} \Leftrightarrow x\in \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$

54.8. $\log_2\left(\frac{x+3}{x}\right)>1 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x}>2 \ \wedge\ \frac{x+3}{x}>0 \ \wedge\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x}-2>0 \ \wedge\ \frac{x+3}{x}>0 \ \wedge\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-x+3}{x}>0 \ \wedge\ \frac{x+3}{x}>0 \ \wedge\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow (x>0 \ \wedge\ x<3) \ \wedge\ (x<-3 \ \vee\ x>0) \ \wedge\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0 \ \wedge\ x<3 \Leftrightarrow x\in \left]0, 3\right[$

<u>Cálculos auxiliares</u>:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-x+3$	+	+	+	0	–
x	–	0	+	+	+
$\frac{-x+3}{x}$	–	n.d.	+	0	–

x	$-\infty$	-3		0	$+\infty$
$x+3$	–	0	+	+	+
x	–	–	–	0	+
$\frac{x+3}{x}$	+	0	–	n.d.	+

55.1. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: 2x+1>0 \wedge 1-\log_4(2x+1)\geq 0\right\}$

$2x+1>0 \wedge 1-\log_4(2x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2} \wedge \log_4(2x+1)\leq 1$

$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2} \wedge 2x+1\leq 4 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2} \wedge x\leq\frac{3}{2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x>-\frac{1}{2} \wedge x\leq\frac{3}{2}\right\}=\left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

55.2. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge \ln x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge x>1\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x>1\right\}=\left]1, +\infty\right[$

55.3. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x>0 \wedge 1-\log_2\left(x^2-3x\right)\geq 0\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x>0 \wedge \log_2\left(x^2-3x\right)\leq 1\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x>0 \wedge x^2-3x\leq 2\right\}=$

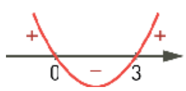
$=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2-3x>0 \wedge x^2-3x-2\leq 0\right\}$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow$

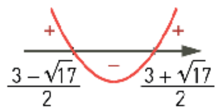
$\Leftrightarrow x=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

$x^2-3x>0 \Leftrightarrow x<0 \vee x>3$



$x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{2} \vee x=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$



$x^2-3x-2\leq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{3-\sqrt{17}}{2} \wedge x\leq\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

$x^2-3x>0 \ \wedge\ x^2-3x-2\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x<0 \ \vee\ x>3) \ \wedge\ \left(x\geq\frac{3-\sqrt{17}}{2} \wedge x\leq\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x\geq\frac{3-\sqrt{17}}{2} \wedge x<0\right) \ \vee\ \left(x>3 \wedge x\leq\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

Então, $D_f=\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0\right[\cup \left]3, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

55.4. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge 1-\ln x>0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge \ln x<1\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge x<e\right\}=\left]0, e\right[$

Pág. 40

56.1. $1+\log_2(x-2)=0 \Leftrightarrow \log_2(x-2)=-1 \ \wedge\ x-2>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{2} \ \wedge\ x>2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2} \ \wedge\ x>2$

$2-\log_3(x+1)=0 \Leftrightarrow \log_3(x+1)=2 \ \wedge\ x+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1=9 \ \wedge\ x>-1 \Leftrightarrow x=8 \ \wedge\ x>-1$

x	-1		2		$\frac{5}{2}$		3	$+\infty$
$1+\log_2(x-2)$				–	0	+	+	+
$2-\log_3(x+1)$		+	+	+	+	+	0	–
$\frac{1+\log_2(x-2)}{2-\log_3(x+1)}$				–	0	+	n.d.	–

Então, $\frac{1+\log_2(x-2)}{2-\log_3(x+1)}<0 \Leftrightarrow x\in\left]2, \frac{5}{2}\right[\cup \left]8, +\infty\right[$.

56.2. $(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6=0 \Leftrightarrow \log_2 x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x=3 \ \vee\ \log_2 x=2) \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow (x=8 \ \vee\ x=4) \ \wedge\ x>0$

$1-(\log_2 x)^2=0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2=1 \ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x=1 \ \vee\ \log_2 x=-1) \ \wedge\ x>0$

$\Leftrightarrow \left(x=2 \ \vee\ x=\frac{1}{2}\right) \ \wedge\ x>0$

x	0		$\frac{1}{2}$		2		4		8	$+\infty$
$(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6$		+	+	+	+	+	0	–	0	+
$1-(\log_2 x)^2$		–	0	+	0	–	–	–	–	–
$\frac{(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6}{1-(\log_2 x)^2}$		–	n.d.	+	n.d.	–	0	+	0	–

Então, $\frac{(\log_2 x)^2-5\log_2 x+6}{1-(\log_2 x)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2}, 2\right[\cup \left[4, 8\right]$.

56.3. $\log_2\left(e^{2x}-e^x\right)>1 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x>2 \ \wedge\ e^{2x}-e^x>0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-e^x-2>0 \ \wedge\ e^{2x}>e^x \Leftrightarrow \left(e^x+1\right)\left(e^x-2\right)>0 \ \wedge\ 2x>x$

$\Leftrightarrow e^x-2>0 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x>\ln 2 \ \wedge\ x>0 \Leftrightarrow x>\ln 2$

$\Leftrightarrow x\in\left]\ln 2,+\infty\right[$

Cálculo auxiliar:

$e^{2x}-e^x-2=0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow e^x=2 \ \vee\ e^x=-1$

57.1. $f(x)<0 \Leftrightarrow x^2\ln x-9\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x\left(x^2-9\right)<0$

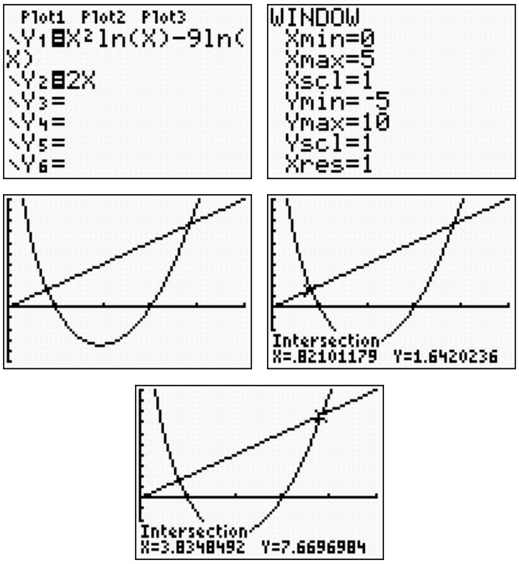
$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \wedge x>0$

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \ \vee\ x=-3$

x	$-\infty$	-3		0		1		3	$+\infty$
$\ln x$					$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-9	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$					$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]1,3\right[$

57.2. Como os pontos *A* e *B* pertencem ao gráfico de *f* e as ordenadas são o dobro das respetivas abcissas, sabe-se que *A* e *B* são os pontos de interseção do gráfico de *f* com a reta de equação $y=2x$.



As coordenadas dos pontos *A* e *B* são, respetivamente, $(0{,}8210;1{,}6420)$ e $(3{,}8348;7{,}6697)$.

Sendo *M* o ponto médio de [*AB*], então

$M\left(\dfrac{0{,}8210+3{,}8348}{2};\dfrac{1{,}6420+7{,}6697}{2}\right)$, ou seja,

$M\left(2{,}3279;4{,}65585\right)$.

Assim sendo, a abcissa do ponto *M* é, aproximadamente, igual a 2,3.

Pág. 41

58.1.

$f'(x)=\left(2^{3x-1}+x\right)'=3\ln 2\times 2^{3x-1}+1$

58.2.

$f'(x)=\left(x^3\times 4^x\right)'=\left(x^3\right)'\times 4^x+\left(4^x\right)'\times x^3=$

$=3x^2\times 4^x+\ln 4\times 4^x\times x^3=4^x\left(3x^2+\ln 4\times x^3\right)$

58.3.

$f'(x)=\left(\dfrac{5^{2x-1}}{x}\right)'=\dfrac{\left(5^{2x-1}\right)'\times x-(x)'\times 5^{2x-1}}{x^2}=$

$=\dfrac{2\ln 5\times 5^{2x-1}\times x-1\times 5^{2x-1}}{x^2}=\dfrac{5^{2x-1}\left(2x\ln 5-1\right)}{x^2}$

58.4.

$f'(x)=\left(\sqrt{2^x-x}\right)'=\dfrac{\left(2^x-x\right)'}{2\sqrt{2^x-x}}=\dfrac{\ln 2\times 2^x-1}{2\sqrt{2^x-x}}$

59.1.

$f'(x)=\left(x^2\times 3^x\right)'=\left(x^2\right)'\times 3^x+\left(3^x\right)'\times x^2=$

$=2x\times 3^x+\ln 3\times 3^x\times x^2=3^x\left(2x+\ln 3\times x^2\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3^x\left(2x+\ln 3\times x^2\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{3^x=0}_{\text{impossível}} \vee\ 2x+\ln 3\times x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(2+\ln 3\times x\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\dfrac{2}{\ln 3}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{2}{\ln 3}$		0	$+\infty$
3^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x+\ln 3^3\times x^2$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	$f\left(-\dfrac{2}{\ln 3}\right)$	↘	$f(0)$	↗

Como a ordenada do ponto *A* é um máximo relativo da função *f*, conclui-se que $x_A=-\dfrac{2}{\ln 3}$.

59.2. Como a reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1 sabe-se que $m_t=f'(1)$.

$m_t=3^1\left(2+\ln 3\times 1^2\right)=3\left(2+\ln 3\right)=3\left(\ln\left(e^2\right)+\ln 3\right)=3\ln\left(3e^2\right)$

$=\ln\left(3e^2\right)^3=\ln\left(27e^6\right)$

Pág. 42

60.1.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{2+h}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\ln(2+h)+\ln(2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h}=-\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{2}{h}}\right)^{\frac{2}{h}}\right)\underset{\frac{2}{h}=y}{=}-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)\right)=-\frac{1}{2}\ln e=-\frac{1}{2}$$

60.2.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+\ln(1+h)-(1+\ln 1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h+\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=$$

$$=1+\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{h}}\right)\right]\underset{\frac{1}{h}=y}{=}1+\ln\left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]=1+\ln e=1+1=2$$

61.1.

$$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{x}$$

61.2.

$$f'(x)=\left(\ln\left(\frac{3}{x}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{3}{x}\right)'}{\frac{3}{x}}=\frac{-\frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x}}=-\frac{1}{x}$$

61.3.

$$f'(x)=\left(x\ln\left(x^2-x\right)\right)'=(x)'\times\ln\left(x^2-x\right)+\left(\ln\left(x^2-x\right)\right)'\times x$$

$$=1\times\ln\left(x^2-x\right)+\frac{2x-1}{x^2-x}\times x=\ln\left(x^2-x\right)+\frac{2x-1}{x-1}$$

61.4.

$$f'(x)=\left(x\ln^2 x\right)'=(x)'\times\ln^2 x+\left(\ln^2 x\right)'\times x=$$

$$=1\times\ln^2 x+2\ln x\times\frac{1}{x}\times x=\ln^2 x+2\ln x$$

61.5.

$$f'(x)=\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2x}$$

61.6.

$$f'(x)=\left(\log_3(2x-1)\right)'=\frac{(2x-1)'}{\ln 3(2x-1)}=\frac{2}{\ln 3(2x-1)}$$

61.7.

$$f'(x)=\left(x\log_2\left(\frac{1}{x}\right)-2x\right)'=$$

$$=(x)'\times\log_2\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\times x-21\times\log_2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\ln 2\times\frac{1}{x}}\times x-2$$

$$=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{-\frac{1}{x^2}}{\ln 2\times\frac{1}{x}}\times x-2=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\ln 2}-2$$

62.1.

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0\wedge\frac{1}{x}>0\wedge\ln\left(\frac{1}{x}\right)>0\right\}$$

$$x\neq 0\wedge\frac{1}{x}>0\wedge\ln\left(\frac{1}{x}\right)>0\Leftrightarrow x\neq 0\wedge x>0\wedge\frac{1}{x}>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>0\wedge\frac{1-x}{x}>0\Leftrightarrow x>0\wedge 1-x>0\Leftrightarrow x>0\wedge x<1$$

Então, $D_f=\left]0,1\right[$.

62.2. $$f'(x)=\left[\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]'=\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}}{\ln\left(x^{-1}\right)}=\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}{-\ln x}=$$

$$=\frac{1}{x\ln x}$$

62.3. $$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(e^{-1}+h\right)-f\left(e^{-1}\right)}{h}=f'\left(e^{-1}\right)=\frac{1}{e^{-1}\ln\left(e^{-1}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{e}\times(-1)}=$$

$$=-e$$

Pág. 43

63.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x}\right)=+\infty-0=$$

$$=+\infty$$

63.2.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{\ln x}{x}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

63.3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{e^x}+\frac{x^2}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right)+\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}=+\infty+\frac{1}{+\infty}=+\infty+0=+\infty$$

63.4.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{3x}-1\right)\ln x}{x^2}=3\lim_{3x\to0^+}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}=3\times1\times\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

63.5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{3x}-1\right)\ln x}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^{3x}}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\left(\frac{e^x}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\right]=(+\infty-0)\times(+\infty)=+\infty$$

64.1.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}:x+1>0\wedge x>0\}=\{x\in\mathbb{R}:x>-1\wedge x>0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=\,]0,+\infty[$

<u>Assíntotas verticais:</u>

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\ln(x+1)-\ln x\right)=0+0-(-\infty)=+\infty$

$x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Como *f* é contínua em todo o seu domínio, não existem outras assíntotas verticais.

<u>Assíntota não vertical</u>: $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(x+1)-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}\right)=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=1+\frac{0}{+\infty}=1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln(x+1)-\ln x-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\ln(1+0)=0$$

A reta $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f*.

64.2. $f'(x)=\left(x+\ln(x+1)-\ln x\right)'=1+\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{1}{x}=$

$$=1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x(x+1)+x-x-1}{x(x+1)}=\frac{x^2+x-1}{x(x+1)}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+x-1}{x(x+1)}=0\Leftrightarrow x^2+x-1=0\wedge x\in D\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\wedge x\in D\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

x	0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
x^2+x-1		$-$	0	$+$
$x(x+1)$		$+$	$+$	$+$
f'		$-$	0	$+$
f		↘	$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$	↗

A função atinge o mínimo absoluto no ponto de abcissa $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

64.3.

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(x^2+x-1\right)'\times\left(x^2+x\right)-\left(x^2+x\right)'\times\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2+x\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)\times\left(x^2+x\right)-(2x+1)\times\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2+x\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)\times\left(x^2+x-x^2-x+1\right)}{\left(x^2+x\right)^2}=\frac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}$$

65.1.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x}>0\wedge x\neq0\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x>0\wedge x\neq0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=\,]0,+\infty[$

<u>Assíntotas verticais</u>

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0+\ln(+\infty)=+\infty$

$x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Como *f* é contínua em todo o seu domínio, não existem outras assíntotas verticais.

<u>Assíntota não vertical</u>: $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(x^{-1}\right)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\ln\left(0^+\right)=-\infty$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, conclui-se que não existe assíntota oblíqua ao gráfico de *f*.

65.2. $f'(x)=\left(x+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=1+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}=1+\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x-1=0\wedge x\in D\Leftrightarrow x=1\wedge x\in D$

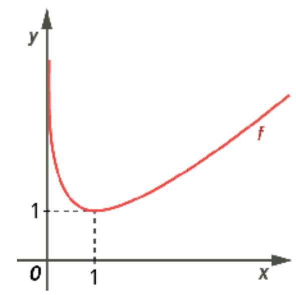
x	0		1	$+\infty$
$x-1$		–	0	+
x		+	+	+
f'		–	0	+
f		↘	$f(1)=1$	↗

f é estritamente decrescente em $]0,1]$. f é estritamente crescente em $[1,+\infty[$. Mínimo absoluto: 1.

65.3. $f''(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'=0+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}$

O gráfico de f não tem pontos de inflexão porque $\forall x\in D_f$, $f''(x)>0$.

65.4.



Pág. 44

66.1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x+1)}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{3x+1=y}{=}}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{2\left(\frac{y-1}{3}\right)}=\frac{3}{2}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y-1}=$

$=\frac{3}{2}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y\left(1-\frac{1}{y}\right)}=\frac{3}{2}\times\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\times\frac{1}{1-\frac{1}{y}}\right)=\frac{3}{2}\times0\times\frac{1}{1}=0$

66.2. $\lim_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\times\infty}{\underset{y=\frac{1}{x}}{=}}\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\ln\left(y^{-1}\right)\right)=$

$=\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{\ln y}{y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right)=-0=0$

66.3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-x^2\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{y\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x}-x\right)\right]=+\infty\times(0-(+\infty))=$

$=+\infty\times(-\infty)=-\infty$

67.1. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{e^{2x}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2}=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}}{\lim_{2x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2}=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$

67.2. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{2x\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2\ln x}\underset{y=x-1}{=}\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\lim_{y\to0}\frac{\ln(y+1)}{y}}=$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$

67.3. $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^x}{\ln(x+1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x\left(e^x-1\right)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}e^x\times\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=$

$=1\times\frac{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{1}{1}=1$

67.4. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times2}{\frac{e^x-1}{x}}=\frac{\lim_{2x\to0}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times2}{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=$

$=\frac{1\times2}{1}=2$

68.1. $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(e^{1-x}+x\right)=e$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\ln\left(x^2\right)\right)=-\infty$

Não existe $\lim_{x\to0}f(x)$ porque $\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x)$.

f é descontínua em 0 porque não existe $\lim_{x\to0}f(x)$.

$x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f porque $\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty$.

68.2. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}+x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}\right)=e^{-\infty}=0$.

Como $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, conclui-se que $y=x$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$.

68.3. Se $x<0$, então $f'(x)=\left(\ln\left(x^2\right)\right)'=\frac{\left(x^2\right)'}{x^2}=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$.

Se $x>0$, então $f'(x)=\left(e^{1-x}+x\right)'=-e^{1-x}+1$.

f não é diferenciável em 0 porque é descontínua em 0.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{x}=0\ \wedge\ x<0\right)\vee\left(-e^{1-x}+1=0\ \wedge\ x>0\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\varnothing\ \vee\ (1-x=0\ \wedge\ x>0)\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f'	–	n.d.	–	0	+
f	↘	e	↘	2	↗

f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $[0,1]$.

f é estritamente crescente em $[1,+\infty[$.

Mínimo relativo: 2.

69.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge x\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}=]0,+\infty[$

Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-\ln x}{x}=\frac{0-(-\infty)}{0^+}=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

$x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Como *f* é contínua em todo o seu domínio, não existem outras assíntotas verticais.

Assíntota não vertical: $y=mx+b$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x}\right)=0+0\times 0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln x}{x}\right)=2-0=2$$

A reta $y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

69.2.

$$f'(x)=\left(\frac{2x-\ln x}{x}\right)'=\frac{(2x-\ln x)'\times x-(x)'\times(2x-\ln x)}{x^2}=$$

$$=\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\times x-1\times(2x-\ln x)}{x^2}=\frac{2x-1-2x+\ln x}{x^2}=\frac{\ln x-1}{x^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{\ln x-1}{x^2}\right)'=\frac{(\ln x-1)'\times x^2-(x^2)'\times(\ln x-1)}{(x^2)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times x^2-2x\times(\ln x-1)}{x^4}=\frac{x-2x\times(\ln x-1)}{x^4}=\frac{1-2\times(\ln x-1)}{x^3}=$$

$$=\frac{3-2\ln x}{x^3}$$

Pág. 45

70.1. Um exemplar vivo do organismo encontrado possui 350 mg da substância, logo $Q_0=350$.

$$Q(t)=53\Leftrightarrow 350\times e^{-0{,}000121t}=53\Leftrightarrow e^{-0{,}000121t}=\frac{53}{350}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}000121t=\ln\left(\frac{53}{350}\right)\Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{53}{350}\right)}{-0{,}000121}\Leftrightarrow t\approx 15600$$

Pode-se então concluir que, desde a morte do organismo encontrado, decorreram, aproximadamente, 15 600 anos.

70.2. $Q(20000)=12\Leftrightarrow Q_0\times e^{-0{,}000121\,\times\,20000}=12\Leftrightarrow Q_0=\dfrac{12}{e^{-2{,}42}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q_0\approx 135$

Assim, a quantidade dessa substância que o organismo teria antes de morrer era, aproximadamente, 135 mg.

Pág. 46

71.1. Sabe-se que no início do ano 2010 havia 2500 plantas, ou seja, $P(0)=2{,}5$, e que, no início do ano 2015, o número de plantas tinha triplicado, ou seja, $P(5)=3\times 2{,}5$.

$$\begin{cases}P(0)=2{,}5\\P(5)=7{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ce^{k\times 0}=2{,}5\\Ce^{k\times 5}=7{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=2{,}5\\2{,}5e^{5k}=7{,}5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=2{,}5\\e^{5k}=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C=2{,}5\\5k=\ln 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=2{,}5\\k=\frac{\ln 3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=2{,}5\\k\approx 0{,}22\end{cases}$$

71.2. Sendo $C=2{,}5$ e $k\approx 0{,}22$, então $P(t)=2{,}5e^{0{,}22t}$.

$$\text{t.m.v.}_{[2,6]}=\frac{P(6)-P(2)}{6-2}=\frac{2{,}5e^{0{,}22\times 6}-2{,}5e^{0{,}22\times 2}}{4}=$$

$$=\frac{2{,}5e^{1{,}32}-2{,}5e^{0{,}44}}{4}\approx 1{,}37$$

A taxa média de crescimento entre o início de 2012 e o início de 2016 foi de, aproximadamente, 1,37 milhares de plantas por ano.

71.3. $P'(t)=\left(2{,}5e^{0{,}22t}\right)'=2{,}5\times 0{,}22e^{0{,}22t}=0{,}55e^{0{,}22t}$

$P'(8)=0{,}55e^{0{,}22\times 8}=0{,}55e^{1{,}76}\approx 3{,}2$

A taxa de crescimento no início de 2018 é de, aproximadamente, 3,2 milhares de plantas por ano.

71.4. $P''(t)=\left(0{,}55e^{0{,}22t}\right)'=0{,}55\times 0{,}22e^{0{,}22t}=0{,}121e^{0{,}22t}$

Sabe-se que $\forall\, t\geq 0,\ P''(t)>0$. Portanto, a taxa de crescimento do número de plantas é estritamente crescente.

Pág. 47

72.1. $M(t)=3\times 2^{t+1}=3\times 2^t\times 2=6\times 2^t=6\left(e^{\ln 2}\right)^t=6e^{\ln 2\times t}$

$c=6$ e $k=\ln 2$.

72.2. $M(t)=\dfrac{3^{2t-1}}{2}=\dfrac{3^{2t}\times 3^{-1}}{2}=\dfrac{(3^2)^t\times\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{9^t}{6}=\dfrac{\left(e^{\ln 9}\right)^t}{6}=\dfrac{1}{6}e^{\ln 9\times t}$

$c=\dfrac{1}{6}$ e $k=\ln 9$.

72.3. $M(t)=5\times 3^{-2t+1}=5\times 3^{-2t}\times 3=15\times\left(3^{-2}\right)^t=15\times\left(\dfrac{1}{9}\right)^t=$

$=15\left(e^{\ln\frac{1}{9}}\right)^t=15e^{-\ln 9\times t}$; $c=15$ e $k=-\ln 9$.

73.1. Sabe-se que $C'(t)=0{,}75C(t)$.

Então, a função *C* é do tipo $C(t)=c\,e^{0{,}75t}$.

$C(t)=10\,C(0)\Leftrightarrow c\,e^{0{,}75t}=10\times c\,e^{0{,}75\times 0}\Leftrightarrow c\,e^{0{,}75t}=10c\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{0{,}75t}=10\Leftrightarrow 0{,}75t=\ln 10\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 10}{0{,}75}\Leftrightarrow t\approx 3$

Para o número de bactérias passar a 10 vezes mais do que era no início são necessárias 3 horas.

73.2. $C(0)=1200\Leftrightarrow c\,e^{0{,}75\times 0}=1200\Leftrightarrow c=1200$

Então, $C(5)=1200\,e^{0{,}75\times 5}=1200\,e^{3{,}75}\approx 51025$.

Se o número inicial de bactérias for 12 000, passadas 5 horas existirão 51 025 bactérias.

Pág. 48

74.1. $Q(6)=4\times e^{-0{,}08\times 6}=4\times e^{-0{,}48}\approx 2{,}5$

Passadas 6 horas, a quantidade de medicamento existente no sangue era de, aproximadamente, 2,5 ml.

74.2. $Q(t)\geq 1{,}5 \Leftrightarrow 4\times e^{-0{,}08t}\geq 1{,}5 \Leftrightarrow e^{-0{,}08t}\geq \frac{1{,}5}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}08t \geq \ln 0{,}375 \Leftrightarrow t\leq \frac{\ln 0{,}375}{-0{,}08}$

Ora, $\frac{\ln 0{,}375}{-0{,}08}\approx 12$. O maior intervalo de tempo que deve decorrer até voltar a tomar o medicamento é de 12 horas.

74.3. $Q'(t)=-kQ(t)\Leftrightarrow \left(4\times e^{-0{,}08t}\right)'=-k\times\left(4\times e^{-0{,}08t}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0{,}32\times e^{-0{,}08t}=-4k\times e^{-0{,}08t}\Leftrightarrow -0{,}32=-4k\Leftrightarrow k=0{,}08$

Tarefa 6

1.1. $C(2)=2\times 1{,}05^{-2\times 2}\approx 1{,}6$

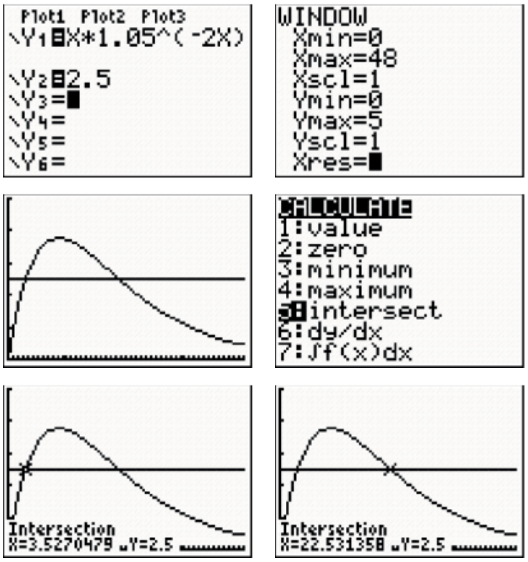
Passadas duas horas após ter sido administrado, a concentração do fármaco era, aproximadamente, igual a 1,6 mg/l.

1.2. $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t\times 1{,}05^{-2t}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{1{,}05^{2t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{\left(1{,}05^2\right)^t}{t}}=$

$=\frac{1}{+\infty}=0$

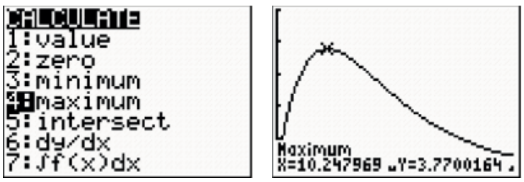
Com o passar do tempo a concentração de fármaco no sangue tende a desaparecer.

1.3.



Conclui-se que $a\approx 3{,}53$ e $b\approx 22{,}53$.

1.4. Pode-se determinar a que horas é que a concentração de "Saratex" foi máxima recorrendo à calculadora gráfica. Para tal procede-se da seguinte forma:



A concentração de "Saratex" no sangue foi máxima aproximadamente após 10,248 horas a sua administração ao doente, ou seja, aproximadamente, às 18 horas e 15 minutos (10 horas e quinze minutos após a sua administração).
Entre a administração dos dois fármacos decorreram 7 horas (15 h − 8 h = 7 h) mas, segundo o conselho médico, o segundo fármaco deveria ter sido tomado às 18 horas e 15 minutos, quando se registou a concentração máxima de "Saratex" no sangue, o que não ocorreu. O doente não cumpriu as recomendações dadas pelo médico.

2.1. $\begin{cases}Q(0)=80\\ Q(4)=\frac{80}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Q_0\cdot a^0=80\\ Q_0\cdot a^{-4}=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Q_0=80\\ 80\cdot a^{-4}=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Q_0=80\\ a^{-4}=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}Q_0=80\\ a^4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Q_0=80\\ a=\sqrt[4]{2}\end{cases}$

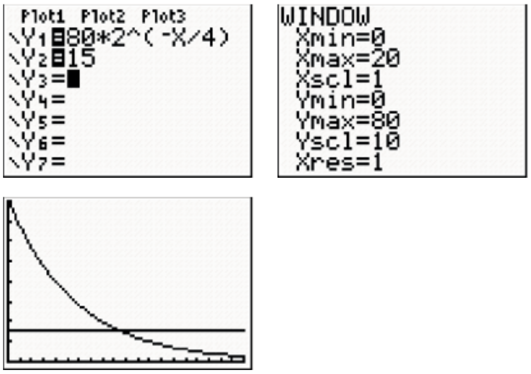
2.2. Sendo $Q_0=80$ e $a=\sqrt[4]{2}$, a expressão que dá a quantidade de cafeína em função do tempo é:

$Q(t)=80.\left(\sqrt[4]{2}\right)^{-t}\Leftrightarrow Q(t)=80.\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{-t}\Leftrightarrow Q(t)=80\times 2^{-\frac{t}{4}}$

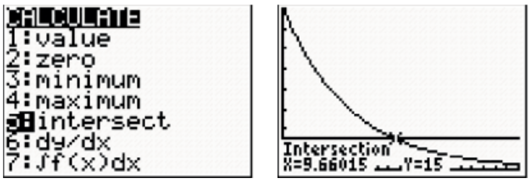
A quantidade de cafeína no organismo passadas 3 horas é dada por: $Q(3)=80\times 2^{-\frac{3}{4}}\approx 47{,}6$. Assim, passadas três horas, a quantidade de cafeína no organismo é de, aproximadamente 47,6 mg.

2.3. Pretende-se determinar *t* de modo que $Q(t)\geq 15$.

Recorrendo à calculadora gráfica, introduzem-se as funções $y_1=80\times 2^{-\frac{t}{4}}$ e $y_2=15$, escolhe-se uma janela adequada e obtêm-se as representações gráficas.



De seguida, determina-se as coordenadas do ponto de interseção dos dois gráficos.



A quantidade de cafeína no organismo é superior a 15 mg durante aproximadamente 9,66 horas, ou seja, a cafeína produz efeito estimulante durante, aproximadamente, 9 horas e 40 minutos.

Pág. 49

Proposta 27

27.1.

x	a	$\log_a x$
1	7	0
9	3	2
0,001	10	–3
100 000	10	5
64	4	3
64	8	2

27.2.

x	a	$y=a^x$	$\log_a y$
3	2	8	3
2	5	25	2
4	3	81	4
–2	2	0,25	–2

Proposta 28

Como o ponto A pertence ao gráfico da função f e tem abcissa 2, sabe-se que a sua ordenada é igual a $f(2)$. $f(2)=\frac{3^2}{2}=\frac{9}{2}$, logo $A\left(2,\frac{9}{2}\right)$. Como o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem ordenada 3, sabe-se que a sua abcissa é solução da equação $f(x)=3$. $f(x)=3 \Leftrightarrow \frac{3^x}{2}=3 \Leftrightarrow 3^x=6 \Leftrightarrow x=\log_3 6$, logo $B(\log_3 6, 3)$.

Proposta 29

29.1. $f^{-1}\left(\frac{9}{2}\right)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 5-2^{-x+3}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2^{-x+3}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2^{-x+3}=2^{-1} \Leftrightarrow -x+3=-1 \Leftrightarrow x=4$

29.2. $f^{-1}(-27)=x \Leftrightarrow f(x)=-27 \Leftrightarrow 5-2^{-x+3}=-27 \Leftrightarrow 2^{-x+3}=32$

$\Leftrightarrow 2^{-x+3}=2^5 \Leftrightarrow -x+3=5 \Leftrightarrow x=-2$

Proposta 30

30.1. $g(-2)=\left(\sqrt{2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$, então $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=-2$.

O ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2},-2\right)$ pertence ao gráfico da função inversa de g porque $g(-2)=\frac{1}{2}$.

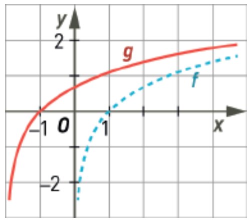
30.2. $g^{-1}(3k+1)=8 \Leftrightarrow g(8)=3k+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^8=3k+1$

$\Leftrightarrow 16=3k+1 \Leftrightarrow k=5$

Pág. 50

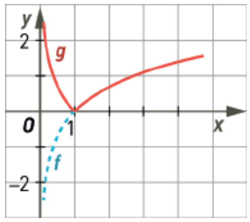
Proposta 31

31.1.



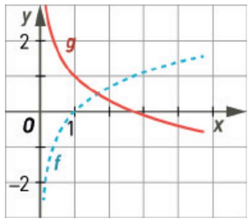
$D_g=\left]-2,+\infty\right[$ e $D'_g=\mathbb{R}$.

31.2.



$D_g=\left]0,+\infty\right[$ e $D'_g=\mathbb{R}_0^+$.

31.3.



$D_g=\left]0,+\infty\right[$ e $D'_g=\mathbb{R}$.

Proposta 32

32.1. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+1>0\}=\left]-1,+\infty\right[$

32.2. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge \log_3 x-2\neq 0\}$

$\log_3 x-2=0 \Leftrightarrow \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=3^2 \Leftrightarrow x=9$

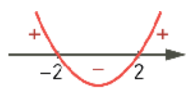
Então, $D_f=\left]0,+\infty\right[\setminus\{9\}$.

32.3. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4>0\}=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\sqrt{4} \vee x=-\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

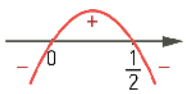


32.4. $D_f=\{x\in\mathbb{R}: x-2x^2>0\}=\left]0,\frac{1}{2}\right[$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$x-2x^2=0 \Leftrightarrow x(1-2x)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee 1-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{1}{2}$



32.5. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{2-x} > 0 \wedge 2-x \neq 0\right\}$

<u>Cálculo auxiliar</u>: Zero do numerador: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Zero do denominador: $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x+1}{2-x}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$

Então, $D_f =]-1, 2[$.

Proposta 33

33.1. $0 < h(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(h(x)) < \ln 1 \Leftrightarrow f(x) < 0$

Então, $D'_f =]-\infty, 0[$.

33.2. $j(x) \geq e \Leftrightarrow \ln(j(x)) \geq \ln e \Leftrightarrow f(x) \geq 1$

Então, $D'_f = [1, +\infty[$.

Proposta 34

34.1. $f^{-1}(2)$ representa um elemento do domínio de *f* cuja imagem por *f* é 2. Sabe-se que $f(1)=2$, então $f^{-1}(2)=1$.

34.2. f^{-1} e f são funções inversas uma da outra, logo $(f^{-1} \circ f)(0) = 0$.

34.3. f^{-1} e f são funções inversas uma da outra, logo $(f \circ f^{-1})(3) = 3$.

34.4. $(f^{-1} \circ g^{-1})\left(\frac{1}{2}\right) = f^{-1}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f^{-1}(2) = 1$

<u>Cálculo auxiliar</u>: $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{1-x} = 2^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-x=-1 \Leftrightarrow x=2$

Proposta 35

35.1. $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

35.2. $3^{x+1} = 5 \Leftrightarrow x+1 = \log_3 5 \Leftrightarrow x = -1 + \log_3 5$

35.3. $xe^x - 5x = 0 \Leftrightarrow x(e^x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ e^x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \ln 5$

35.4.

$3 \times 2^{-2x} - \frac{1}{2^x} = 0 \Leftrightarrow 3 \times 2^{-2x} - 2^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2^{-x}(3 \times 2^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{2^{-x} = 0}_{\text{impossível}} \vee 3 \times 2^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$

35.5. $e^x + 2e^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + 2 - 3e^x = 0 \wedge \underbrace{e^x \neq 0}_{x \in \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

Fazendo $e^x = y$, tem-se: $y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = 1$

Como $y = e^x$, tem-se: $e^x = 2 \ \vee \ e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 2 \ \vee \ x = 0$.

35.6. $9^x - 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow (3^2)^x - 3^x \times 3 - 4 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3 \times 3^x - 4 = 0$

Fazendo $3^x = y$, tem-se: $y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$. Como $y = 3^x$, tem-se: $3^x = 4 \ \vee \ \underbrace{3^x = -4}_{\text{impossível}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \log_3 4$.

Proposta 36

$g(0) = -5 \Leftrightarrow 1 - e^{0+k} = -5 \Leftrightarrow 6 = e^k \Leftrightarrow \ln 6 = k$

A opção correta é a (A).

Proposta 37

O ponto *A* pertence ao gráfico de *f* porque $f(-\log_2 3) = 4^{\log_2 3} =$

$= (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3^2} = 3^2 = 9$

A opção correta é a (A).

Proposta 38

38.1. $\log_2 \frac{1}{4} + \log_2 0{,}0625 = \log_2\left(\frac{1}{4} \times 0{,}0625\right) = \log_2\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{16}\right) =$

$= \log_2\left(\frac{1}{64}\right) = \log_2(2^{-6}) = -6$

38.2. $\log_2 128 - \log_2 0{,}25 = \log_2\left(\frac{128}{0{,}25}\right) = \log_2(512) = \log_2(2^9) =$

$= 9$

38.3. $\log_5(0{,}2) - 2\log_3\sqrt{3} = \log_5\left(\frac{1}{5}\right) - \log_3\left(\sqrt{3}\right)^2 =$

$= \log_5(5^{-1}) - \log_3 3 = -1 - 1 = -2$

38.4. $\frac{\log_{12}(3) + \log_{12}(4)}{\log_3(18) - \log_3(2)} = \frac{\log_{12}(3 \times 4)}{\log_3\left(\frac{18}{2}\right)} = \frac{\log_{12}(12)}{\log_3(9)} = \frac{1}{2}$

38.5.

$\log_2 \sqrt[3]{8} + \log_4(2) \times \log_2(4) = \log_2(2) + \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \times \log_2(2^2) =$

$= 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 1 + 1 = 2$

38.6. $\ln\left(\frac{1}{9e}\right) + 2\ln(3e) = \ln\left(\frac{1}{9e}\right) + \ln\left[(3e)^2\right] = \ln\left(\frac{1}{9e} \times 9e^2\right) =$

$= \ln e = 1$

Proposta 39

$\ln a = \ln 2 + \ln b \Leftrightarrow \ln a = \ln(2b) \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow b = \dfrac{a}{2}$

A opção correta é a (D).

Pág. 52

Proposta 40

$\log_a\left(a\sqrt{b}\right) = \log_a(a) + \log_a\left(\sqrt{b}\right) = 1 + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \dfrac{1}{2}\log_a(b) =$

$= 1 + \dfrac{1}{2} \times 4 = 1 + 2 = 3$

A opção correta é a (A).

Proposta 41

41.1. $\log\left(\sqrt{a \cdot b}\right) = \log(a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log(a \cdot b) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b) =$

$= \dfrac{1}{2}(1{,}3 + 3{,}5) = \dfrac{1}{2} \times 4{,}8 = 2{,}4$

41.2. $\log\left(\sqrt[3]{\dfrac{a \cdot c}{b}}\right) = \log\left(\dfrac{a \cdot c}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\log\left(\dfrac{a \cdot c}{b}\right) =$

$= \dfrac{1}{3}(\log a + \log c - \log b) = \dfrac{1}{3}(1{,}3 - 1{,}5 - 3{,}5) = \dfrac{1}{3} \times (-3{,}7) =$

$= \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{37}{10}\right) = -\dfrac{37}{30}$

41.3. $\log\left(\dfrac{a^2 \cdot b}{\sqrt{c}}\right) = \log\left(a^2 \cdot b\right) - \log\left(\sqrt{c}\right) =$

$= \log\left(a^2\right) + \log b - \log\left(c^{\frac{1}{2}}\right) = 2\log a + \log b - \dfrac{1}{2}\log c =$

$= 2 \times 1{,}3 + 3{,}5 - \dfrac{1}{2} \times (-1{,}5) = 6{,}85$

Proposta 42

42.1. $\log_2(2-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_2(2-x) = 3 \ \wedge \ 2 - x > 0$

$\Leftrightarrow 2 - x = 2^3 \ \wedge \ -x > -2 \Leftrightarrow x = -6 \ \wedge \ x < 2 \Leftrightarrow x = -6$

42.2. $\ln(7-x) = 1 \Leftrightarrow 7 - x = e \wedge \ 7 - x > 0$

$\Leftrightarrow x = 7 - e \ \wedge \ x < 7 \Leftrightarrow x = 7 - e$

42.3. $\log_3\left(x^3\right) = 15 \Leftrightarrow x^3 = 3^{15} \ \wedge \ x^3 > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3^{15}} \ \wedge \ x > 0$

$\Leftrightarrow x = 3^5 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow x = 243$

42.4. $e^{2x} - 8 \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow e^x\left(e^x - 8\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{condição impossível}} \ \vee \ e^x = 8$

$\Leftrightarrow x = \ln 8$

42.5. $2\log_4(x) = 1 \Leftrightarrow \log_4(x) = \dfrac{1}{2} \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{2}} \ \wedge \ x > 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{4} \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow x = 2$

42.6. $\left(4 - x^2\right) \cdot \ln\left(2x^2 + x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(4 - x^2 = 0 \ \vee \ \ln\left(2x^2 + x\right) = 0\right) \wedge \ 2x^2 + x > 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 = 4 \ \vee \ 2x^2 + x = 1\right) \wedge \ 2x^2 + x > 0$

$\Leftrightarrow \left(x = 2 \ \vee \ x = -2 \ \vee \ 2x^2 + x - 1 = 0\right) \wedge \ 2x^2 + x > 0$

$\Leftrightarrow \left(x = 2 \ \vee \ x = -2 \ \vee \ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}\right) \wedge \ 2x^2 + x > 0$

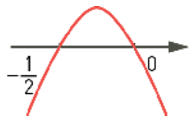
$\Leftrightarrow \left(x = 2 \vee x = -2 \vee x = \dfrac{1}{2} \vee x = -1\right) \wedge \ x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1 \vee x = \dfrac{1}{2} \vee x = 2$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\dfrac{1}{2}$



$2x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2} \ \vee \ x > 0$

42.7. $x \times \ln(x+3) - 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(\ln(x+3) - 2\right) = 0 \wedge \ x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \ \vee \ \ln(x+3) = 2\right) \wedge \ x > -3$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \ \vee \ x + 3 = e^2\right) \wedge \ x > -3$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \ \vee \ x = e^2 - 3\right) \wedge \ x > -3 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = e^2 - 3$

42.8. $(\ln x)^2 - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x > 0$

$\Leftrightarrow (\ln x = 2 \ \vee \ \ln x = -3) \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = e^2 \ \vee \ x = e^{-3}\right) \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = e^2 \ \vee \ x = e^{-3}$

42.9. $\ln(1+x) + \ln(2x) = \ln(x+3)$

$\Leftrightarrow \ln\left(2x^2 + 2x\right) = \ln(x+3) \ \wedge \ 1 + x > 0 \ \wedge \ 2x > 0 \ \wedge \ x + 3 > 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = x + 3 \ \wedge \ x > -1 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x > -3$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \ \wedge \ x > 0$

$\Leftrightarrow \left(x = 1 \ \vee \ x = -\dfrac{3}{2}\right) \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

42.10. $\log(3x-4) - \log x = \log(x-2) \Leftrightarrow \log(3x-4) =$

$= \log(x-2) + \log x \ \wedge \ 3x - 4 > 0 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow \log(3x-4) = \log\left(x^2 - 2x\right) \ \wedge \ x > \dfrac{4}{3} \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ x > 2$

$\Leftrightarrow 3x - 4 = x^2 - 2x \ \wedge \ x > 2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \ \wedge \ x > 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{-2} \wedge x > 2 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = 4) \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 4$

Proposta 43

Sabe-se que $D_f=\mathbb{R}$ e $D_g=\{x\in\mathbb{R}: 2-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x<2\}=$

$=]-\infty, 2[$.

$D_{g\circ f}=\{x\in D_f: f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}: f(x)<2\}=\{x\in\mathbb{R}: x>1\}=$

$=]1,+\infty[$

A opção correta é a (B).

Proposta 44

44.1. $D_f=\mathbb{R}$ e $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x^2}=\left(9^{-1}\right)^{1-x^2}=9^{x^2-1}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ x^2-1\ge -1 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 9^{x^2-1}\ge 9^{-1}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\ge\frac{1}{9}$; logo, $D'_f=\left[\frac{1}{9},+\infty\right[$.

$D_g=\mathbb{R}$ e $D'_g=\mathbb{R}^+$ porque $\forall x\in\mathbb{R},\ 3^{-3x}\ge 0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)\ge 0$.

44.2. $f(x)=\sqrt{3}\Leftrightarrow 9^{x^2-1}=3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow \left(3^2\right)^{x^2-1}=3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 3^{2x^2-2}=3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x^2-5=0\Leftrightarrow x^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{4}}\ \vee\ x=-\sqrt{\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{2}\ \vee\ x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

44.3. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 9^{x^2-1}=3^{-3x}\Leftrightarrow \left(3^2\right)^{x^2-1}=3^{-3x}\Leftrightarrow 3^{2x^2-2}=3^{-3x}$

$\Leftrightarrow 2x^2-2=-3x\Leftrightarrow 2x^2+3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ \vee\ x=-2$

$g(-2)=3^6$ e $g\left(\frac{1}{2}\right)=3^{-\frac{3}{2}}$. Os gráficos das funções *f* e *g* intersetam-se nos pontos de coordenadas $\left(-2, 3^6\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 3^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Pág. 53

Proposta 45

45.1. A abcissa do ponto *A* é a solução da equação $f(x)=0$.

$3x-2x\ln x=0\Leftrightarrow x(3-2\ln x)=0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow (x=0\vee 3-2\ln x=0)\wedge x>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=0\vee \ln x=\frac{3}{2}\right)\wedge x>0\Leftrightarrow \left(x=0\vee x=e^{\frac{3}{2}}\right)\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{e^3}\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$

45.2. *B* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com a reta de equação $y=x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

$\begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ 3x-2x\ln x=x\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ 2x-2x\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ 2x(1-\ln x)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ 2x(1-\ln x)=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ 2x=0\vee 1-\ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ \underbrace{x=0}_{\substack{\text{impossível}\\ D=\mathbb{R}^+}}\vee \ln x=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-2x\ln x\\ x=e\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=e\\ x=e\end{cases}$

Então, $B(e,e)$. Assim, $A_{[OAB]}=\frac{\overline{OA}\times y_B}{2}=\frac{e\sqrt{e}\times e}{2}=\frac{e^2\sqrt{e}}{2}$.

Proposta 46

46.1.

$2^{x+1}-2^x\ln(x-2)\ge 0\Leftrightarrow \underbrace{2^x}_{2^x>0,\forall x\in\mathbb{R}}\left(2-\ln(x-2)\right)\ge 0\wedge x-2>0$

$\Leftrightarrow 2-\ln(x-2)\ge 0\ \wedge\ x>2\Leftrightarrow \ln(x-2)\le 2\ \wedge\ x>2$

$\Leftrightarrow x-2\le e^2\ \wedge\ x>2\Leftrightarrow x\le 2+e^2\ \wedge\ x>2\Leftrightarrow x\in\left]2, 2+e^2\right]$

46.2. $\log_3\left(x^2-x\right)-\log_3(x)\le 1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x\right)\le\log_3 3+\log_3(x)\wedge x^2-x>0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-x\right)\le\log_3(3x)\wedge x(x-1)>0\wedge x>0$

$\Leftrightarrow x^2-x\le 3x\ \wedge\ x>1\Leftrightarrow x^2-4x\le 0\ \wedge\ x>1$

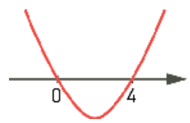
$\Leftrightarrow (x\ge 0\ \wedge\ x\le 4)\wedge\ x>1\Leftrightarrow x>1\ \wedge\ x\le 4\Leftrightarrow x\in]1, 4]$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee x-4=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$

$x^2-4x\le 0\Leftrightarrow x\ge 0\ \wedge\ x\le 4$



46.3. $\frac{x\log x}{1-\log x}>0$

O domínio da condição dada é:

$D=\{x\in\mathbb{R}: x>0\wedge 1-\log x\ne 0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x>0\wedge x\ne 10\}=]0,+\infty[\setminus\{10\}$

Para resolver a condição dada pode-se construir um quadro de sinais.

Zeros do numerador:

$x\log x=0\Leftrightarrow x=0\vee\log x=0\ \Leftrightarrow x=0\ \vee x=1$

Zero do denominador:

$1-\log x=0\Leftrightarrow\log x=1\Leftrightarrow x=10$

x	$-\infty$	0		1		10	$+\infty$
x	–	0	+	+	+	+	+
$\log x$			–	0	+	+	+
$1-\log x$			+	+	+	0	–
$\frac{x\log x}{1-\log x}$			–	0	+	n.d.	–

Da análise do quadro resulta que:

$\frac{x\log x}{1-\log x}>0\Leftrightarrow x\in]1, 10[$

46.4. $\ln^2(x+2)>\ln(x+2)^2$

$\Leftrightarrow \ln^2(x+2)>2\ln(x+2)\ \wedge\ x+2>0\ \wedge\ (x+2)^2>0$

$\Leftrightarrow \ln^2(x+2)-2\ln(x+2)>0\ \wedge\ x>-2\ \wedge\ x+2\ne 0$

$\Leftrightarrow \ln(x+2)\left(\ln(x+2)-2\right)>0\ \wedge\ x>-2\ \wedge\ x\ne -2$

$\Leftrightarrow \ln(x+2)\left(\ln(x+2)-2\right)>0\ \wedge\ x>-2$

Para resolver a condição dada pode-se construir um quadro de sinais. Zeros: $\ln(x+2)(\ln(x+2)-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x+2)=0 \vee \ln(x+2)-2=0 \Leftrightarrow x+2=1 \vee x+2=e^2$

$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=e^2-2$

x	$-\infty$	-2		-1		e^2-2	$+\infty$
$\ln(x+2)$			$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\ln(x+2)-2$			$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln(x+2)(\ln(x+2)-2)$			$+$	0	$-$	0	$+$

Da análise do quadro resulta que:

$\ln(x+2)(\ln(x+2)-2)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left]-2,-1\right[\cup\left]e^2-2,+\infty\right[$

Proposta 47

47.1. Por observação gráfica, sabe-se que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq -4$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq -4 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 2^{f(x)}\geq 2^{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ -2^{f(x)}\leq -\frac{1}{16} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 3-2^{f(x)}\leq 3-\frac{1}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)\leq \frac{47}{16}$

Então, $D'_g=\left]-\infty,\frac{47}{16}\right]$.

47.2. $D_h=\{x\in D_f : x>0 \wedge f(x)>0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R}: x>0 \wedge (x<-1 \vee x>3)\}=\{x\in\mathbb{R}: x>3\}=\left]3,+\infty\right[$

Pág. 54

Proposta 48

48.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=3-1=2$

<u>Cálculo auxiliar</u>: Mostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

Fazendo $\ln(x+1)=y$, tem-se $x=e^y-1$.

Se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{1}=1$

48.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(6x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(6x+1)}{6x}\times 6\right)\underset{y=6x}{=}\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\ln(y+1)}{y}\times 6\right)=$

$=1\times 6=6$

48.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{x}{\ln(x+1)}\times 2\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}\times 2=\lim\limits_{2x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}}\times 2=$

$=1\times\frac{1}{1}\times 2=2$

Proposta 49

49.1. $f'(x)=(\ln(3x-1))'=\frac{(3x-1)'}{3x-1}=\frac{3}{3x-1}$

49.2. $f'(x)=\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}$

49.3.

$f'(x)=\left(\log_2\left(x^3-3x+4\right)\right)'=\frac{\left(x^3-3x+4\right)'}{\ln 2\left(x^3-3x+4\right)}=$

$=\frac{3x^2-3}{\ln 2\left(x^3-3x+4\right)}$

49.4.

$f'(x)=\left(xe^{x^2-3x}\right)'=1e^{x^2-3x}+x(2x-3)e^{x^2-3x}=$

$=e^{x^2-3x}\left(2x^2-3x+1\right)$

49.5. $f'(x)=\left(\ln\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\right)'=\frac{\left(\frac{x^2}{x+3}\right)'}{\frac{x^2}{x+3}}=\frac{\frac{2x(x+3)-x^2\times 1}{(x+3)^2}}{\frac{x^2}{x+3}}=$

$=\frac{\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}}{\frac{x^2}{x+3}}=\frac{x^2+6x}{x^2(x+3)}=\frac{x(x+6)}{x^2(x+3)}=\frac{x+6}{x^2+3x}$

49.6. $f'(x)=\left(4^{3x}-\frac{4}{x}\right)'=3\ln 4\times 4^{3x}+\frac{4}{x^2}$

49.7.

$f'(x)=\left(\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)'=\frac{\frac{e^x}{e^x+1}\times x-\ln\left(e^x+1\right)\times 1}{x^2}=$

$=\frac{e^x\times x-\ln\left(e^x+1\right)\times\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)\times x^2}$

49.8.

$f'(x)=\left(x+\log_2\left(\frac{x}{2^x}\right)\right)'=1+\frac{\left(\frac{x}{2^x}\right)'}{\ln 2\times\left(\frac{x}{2^x}\right)}=$

$=1+\frac{\frac{1\times 2^x-\ln 2\times 2^x\times x}{\left(2^x\right)^2}}{\ln 2\times\left(\frac{x}{2^x}\right)}=1+\frac{\frac{2^x-\ln 2\times 2^x\times x}{2^x}}{\ln 2\times x}=1+\frac{1-\ln 2\times x}{\ln 2\times x}=$

$=\frac{1}{\ln 2\times x}$

Proposta 50

50.1. Sendo $f(x)=\ln x$ e $g(x)=e^{2x+1}$, então $f'(x)=\frac{1}{x}$ e $g'(x)=2e^{2x+1}$.

$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\times g'(x)=f'\left(e^{2x+1}\right)\times 2e^{2x+1}=$

$=\frac{1}{e^{2x+1}}\times 2e^{2x+1}=2$ e $D_{(f\circ g)'}=D_{f\circ g}=\mathbb{R}$. Conclui-se que a representação gráfica da função $(f\circ g)'$ é uma reta horizontal que interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0,2)$, ou seja, é paralela ao eixo das abcissas.

50.2. $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)=g'(\ln x)\times\frac{1}{x}=2e^{2\ln x+1}\times\frac{1}{x}=$

$=\frac{2e^{2\ln x+1}}{x}$

Sabe-se que o declive da reta tangente ao gráfico da função $g\circ f$ no ponto de abcissa $\frac{1}{2e}$ é dado por $(g\circ f)'\left(\frac{1}{2e}\right)$.

$$(g\circ f)'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{2e^{2\ln\left(\frac{1}{2e}\right)+1}}{\frac{1}{2e}}=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{2e}\right)^2+\ln e}}{\frac{1}{2e}}=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{4e^2}\times e\right)}}{\frac{1}{2e}}=\frac{2e^{\ln\left(\frac{1}{4e}\right)}}{\frac{1}{2e}}=$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{4e}}{\frac{1}{2e}}=1$$

Se o declive da reta tangente ao gráfico da função $g\circ f$ no ponto de abcissa $\frac{1}{2e}$ é igual a 1 então a reta é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Pág. 55

Proposta 51

51.1. Pretende-se determinar $x\in D_f$ tal que $f(x)=\frac{x}{2}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{1}{x}>0\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=\mathbb{R}^+$

$f(x)=\frac{x}{2}\Leftrightarrow x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{2}\Leftrightarrow -x\ln(x)-\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\left(-\ln(x)-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\notin D_f}\vee\ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{e}}{e}$

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{e}}{e}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{e}}{2e}$

As coordenadas do ponto do gráfico da função *f*, em que a ordenada é metade da abcissa, são $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$.

51.2. $f'(x)=\left[x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=1\times\ln\left(\frac{1}{x}\right)+x\times\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=-\ln x-1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'		+	0	−
f		↗	$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}$	↘

A função *f* tem um máximo absoluto igual a $\frac{1}{e}$.

51.3. A reta de equação $y=-2x+e$ é tangente ao gráfico da função *f* no ponto $(x,f(x))$. Então, sabe-se que $f'(x)=-2$.

$f'(x)=-2\Leftrightarrow -\ln x-1=-2\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$

Como $f(e)=e\ln\left(\frac{1}{e}\right)=e\times(-1)=-e$, conclui-se que $P(e,-e)$.

Proposta 52

$T(2)=\frac{1}{4}T_0\Leftrightarrow T_0\times e^{-2k}=\frac{1}{4}T_0\Leftrightarrow e^{-2k}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow -2k=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k=-\ln 4\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}\ln 4\Leftrightarrow k=\ln 4^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow k=\ln\sqrt{4}\Leftrightarrow k=\ln 2$

Proposta 53

53.1. No ano $n+1$ de contrato o preço C_{n+1} a pagar por cada peça é igual ao preço pago no ano anterior, C_n, acrescido de 4%. Assim, tem-se: $C_{n+1}=C_n+0{,}04C_n\Leftrightarrow C_{n+1}=1{,}04C_n$. (C_n) é uma progressão geométrica de razão 1,04 e primeiro termo igual a 6. O termo geral é dado por: $C_n=6\times 1{,}04^{n-1}$. Donde se conclui que o preço de cada peça no enésimo ano de contrato é dado por $C_n=6\times 1{,}04^{n-1}$. O preço de x milhares de peças, representado por $P_n(x)$, é dado por $P_n(x)=1000\,x\times C_n$, ou seja, $P_n(x)=6000\,x\times 1{,}04^{n-1}$.

53.2. Fazendo $n=3$ e $x=7{,}5$, tem-se:

$P_3(7{,}5)=6000\times 7{,}5\times 1{,}04^{3-1}=48\,672$.

O cliente, no terceiro ano de contrato, pagou 48 672 €.

53.3. Pretende-se determinar o valor de x sabendo que $P_5(x)=41413$.

$P_5(x)=41413\Leftrightarrow 6000x\times 1{,}04^4=41413\Leftrightarrow x=\frac{41413}{6000\times 1{,}04^4}$

$\Leftrightarrow x\approx 5{,}9$

No quinto ano de contrato, o cliente comprou 5900 peças.

Pág. 56

Proposta 54

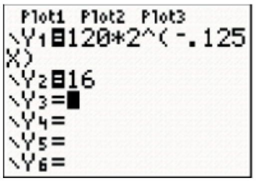
54.1. Inicialmente o número de azevinhos com doença era $0,15\times 800 = 120$ e passados 8 anos, ou seja, para $t=8$, era 60.

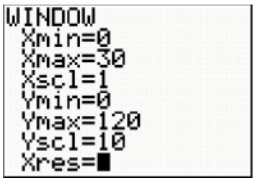
$$\begin{cases} N(0)=120 \\ N(8)=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\times 2^0 = 120 \\ A\times 2^{8B}=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=120 \\ 120\times 2^{8B}=60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

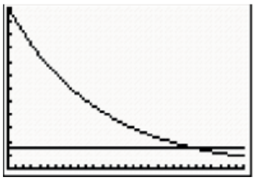
$$\begin{cases} A=120 \\ 2^{8B}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=120 \\ 2^{8B}=2^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=120 \\ 8B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

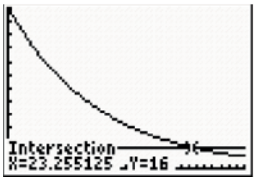
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=120 \\ B=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=120 \\ B=-0,125 \end{cases}$$

54.2. Pretende-se determinar t de modo que $N(t)<0,02\times 800$, ou seja, $N(t)<16$. Recorrendo à calculadora gráfica, a resposta à questão colocada pode ser encontrada, seguindo, por exemplo, os procedimentos indicados a seguir:









Os dois gráficos têm um único ponto de interseção pois a função N é estritamente decrescente. A abcissa desse ponto é, aproximadamente, 23,3. Assim sendo, prevê-se que o número de azevinhos com doença seja inferior a 2% em 2023.

Proposta 55

55.1. $N(0)=\dfrac{6}{1+5\times e^0}=\dfrac{6}{1+5}=1$

No início da criação dos viveiros foram utilizados 1000 peixes.

55.2. Meio ano corresponde a 6 meses.

$$N(6)=\frac{6}{1+5\times e^{-6}}\approx 5,926$$

Ao fim de meio ano havia, aproximadamente, 5926 peixes.

55.3. $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{6}{1+5e^{-t}}=\dfrac{6}{1+5\times 0}=6$

Com o passar do tempo o número de peixes tende para 6 milhares, ou seja, para 6000.

Pág. 57

Proposta 56

$$\frac{4-\log_2(x-1)}{1-3^{1-x}}>0$$

O domínio da condição dada é:

$D=\left\{x\in\mathbb{R}: x-1>0 \wedge 1-3^{1-x}\neq 0\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x>1 \wedge 1-x\neq 0\right\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x>1 \wedge x\neq 1\right\}=\left]1,+\infty\right[$

Para resolver a condição dada pode-se construir um quadro de sinais.

Zero do numerador:

$4-\log_2(x-1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)=4 \wedge x-1>0 \Leftrightarrow x-1=4^2 \wedge x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=17 \wedge x>1 \Leftrightarrow x=17$

Zero do denominador:

$1-3^{1-x}=0\Leftrightarrow 3^{1-x}=1\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1		17	$+\infty$
$4-\log_2(x-1)$			+	0	–
$1-3^{1-x}$	–	0	+	+	+
$\dfrac{4-\log_2(x-1)}{1-3^{1-x}}$			+	0	–

Da análise do quadro resulta que:

$$\frac{4-\log_2(x-1)}{1-3^{1-x}}>0\Leftrightarrow x\in\left]1,17\right[$$

Proposta 57

57.1. A altura do triângulo [*OAB*] relativa ao lado [*AO*] é igual à ordenada do ponto *B*. A abcissa do ponto *B* é a solução da equação $f(x)=g(x)$.

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(x+1)=\ln\left(10-\dfrac{3x}{2}\right) \wedge x+1>0 \wedge 10-\dfrac{3x}{2}>0$

$\Leftrightarrow x+1=10-\dfrac{3x}{2} \ \wedge\ x>-1 \ \wedge\ 20-3x>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x}{2}=9 \ \wedge\ x>-1 \ \wedge\ x<\dfrac{20}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{18}{5} \ \wedge\ x>-1 \ \wedge\ x<\dfrac{20}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{18}{5}$

A ordenada do ponto *B* é dada por $f\left(\dfrac{18}{5}\right)$.

$$f\left(\frac{18}{5}\right)=\ln\left(\frac{18}{5}+1\right)=\ln\left(\frac{23}{5}\right)$$

Conclui-se que $\ln\left(\dfrac{23}{5}\right)$ é o valor exato da altura do triângulo [*OAB*] relativa ao lado [*AO*].

57.2. *A* é o ponto de interseção do gráfico de *g* com o eixo das abcissas, logo a abcissa do ponto *A* é a solução da equação $g(x)=0$.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(10-\frac{3x}{2}\right)=0 \wedge 10-\frac{3x}{2}>0$$

$$\Leftrightarrow 10-\frac{3x}{2}=1 \ \wedge \ 20-3x>0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}=9 \ \wedge \ x<\frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{18}{3} \ \wedge \ x<\frac{20}{3} \Leftrightarrow x=6$$

Então, $A_{[OAB]}=\frac{\overline{OA}\times y_B}{2}=\frac{6\times\ln\left(\frac{23}{5}\right)}{2}=3\ln\left(\frac{23}{5}\right)\approx 4{,}6\text{ cm}^2$.

Proposta 58

58.1. Sendo o triângulo [*OAB*] isósceles, a abcissa do ponto *B* é $\frac{a}{2}$ e a ordenada é $f\left(\frac{a}{2}\right)=4\ln(a+1)-a$.

A área do triângulo [*OAB*] é dada por:

$$A(a)=\frac{\overline{OA}\times f\left(\frac{a}{2}\right)}{2}=\frac{a\times(4\ln(a+1)-a)}{2}=2a\ln(a+1)-\frac{a^2}{2} \ ,$$

$a\in]0,8]$.

58.2. $A'(a)=\left(2a\ln(a+1)-\frac{a^2}{2}\right)'=2\ln(a+1)+2a\times\frac{1}{a+1}-a=$

$=2\ln(a+1)+\frac{2a}{a+1}-a$

A função A' é contínua em $]0,8]$, em particular é contínua em $[5{,}4;5{,}5]$. $A'(5{,}4)=2\ln(6{,}4)+\frac{10{,}8}{6{,}4}-5{,}4\approx 9{,}6\times10^{-5}$ e

$A'(5{,}5)=2\ln(6{,}5)+\frac{11}{6{,}5}-5{,}5\approx -0{,}064$.

Como função A' é contínua em $[5{,}4;5{,}5]$ e $A'(5{,}5)<0<A'(5{,}4)$, então pelo Teorema de Bolzano conclui-se que $\exists\, c\in]5{,}4;5{,}5[:A'(c)=0$. Como a derivada passa de positiva a negativa, no intervalo $]5{,}4;5{,}5[$, conclui-se que no ponto de abcissa *c* a função *A* atinge um máximo. Então, a área do triângulo [*OAB*] é máxima para um valor de *a* pertencente ao intervalo $]5{,}4;5{,}5[$.

58.3. $A''(a)=\left[2\ln(a+1)+\frac{2a}{a+1}-a\right]'=$

$$=2\frac{1}{a+1}+\frac{2(a+1)-2a\cdot1}{(a+1)^2}-1=\frac{2}{a+1}+\frac{2}{(a+1)^2}-1=$$

$$=\frac{2(a+1)+2-(a+1)^2}{(a+1)^2}=\frac{2a+2+2-a^2-2a-1}{(a+1)^2}=\frac{3-a^2}{(a+1)^2}$$

$$A''(a)=0\Leftrightarrow\frac{3-a^2}{(a+1)^2}=0 \ \wedge \ a\in]0,8]$$

$$\Leftrightarrow 3-a^2=0 \ \wedge \ a\in]0,8]\Leftrightarrow a^2=3 \ \wedge \ a\in]0,8]\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$$

x	0		$\sqrt{3}$		8
A''		+	0	–	–
A		$\cup$	$A(\sqrt{3})$	$\cap$	$A(8)$

O ponto de abcissa $\sqrt{3}$ é um ponto de inflexão do gráfico da função *A*.

Pág. 62

Questões de Exame

1. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2=\left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2=\left(e^1\right)^2=e^2$.

A opção correta é a (D).

2. $\log_a\left(ab^3\right)=5\Leftrightarrow\log_a(a)+\log_a\left(b^3\right)=5\Leftrightarrow1+3\log_a(b)=5$

$\Leftrightarrow\log_a(b)=\frac{4}{3}$

Então, $\log_b(a)=\frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$.

A opção correta é a (B).

3. $f(2)=8\Leftrightarrow e^{a\ln2}=8\Leftrightarrow\left(e^{\ln2}\right)^a=8\Leftrightarrow2^a=2^3\Leftrightarrow a=3$

A opção correta é a (C).

4. $\log_a\left(a^5\sqrt[3]{b}\right)+a^{\log_a b}=\log_a\left(a^5\right)+\log_a\left(\sqrt[3]{b}\right)+b=$

$=5+\frac{1}{3}\log_a b+b=5+\frac{1}{3}\times3+b=6+b$

A opção correta é a (A).

Pág. 63

5.1. $f(x)\geq4+\log_3(x-8)$

$\Leftrightarrow2+\log_3x\geq4+\log_3(x-8)\wedge x>0\wedge x-8>0$

$\Leftrightarrow\log_3x\geq2+\log_3(x-8)\wedge x>0\wedge x>8$

$\Leftrightarrow\log_3x\geq\log_39+\log_3(x-8)\wedge x>8$

$\Leftrightarrow\log_3x\geq\log_3(9x-72)\wedge x>8\Leftrightarrow x\geq9x-72 \ \wedge \ x>8$

$\Leftrightarrow x\leq9 \ \wedge \ x>8\Leftrightarrow x\in]8,9]$

5.2. $f\left(36^{1000}\right)-f\left(4^{1000}\right)=2+\log_3\left(36^{1000}\right)-\left(2+\log_3\left(4^{1000}\right)\right)$

$=\log_3\left(36^{1000}\right)-\log_3\left(4^{1000}\right)=1000\log_336-1000\log_34$

$=1000(\log_336-\log_34)=1000\log_3\left(\frac{36}{4}\right)=1000\log_39$

$=1000\times2=2000$

6. $f(x)=0\Leftrightarrow1-\ln\left(x^2\right)=0\wedge x^2>0\Leftrightarrow\ln\left(x^2\right)=1\wedge x\neq0$

$\Leftrightarrow x^2=e\wedge x\neq0\Leftrightarrow\left(x=\sqrt{e}\vee x=-\sqrt{e}\right)\wedge x\neq0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{e}\vee x=-\sqrt{e}$

O gráfico de *f* interseta o eixo *Ox* nos pontos de coordenadas $\left(-\sqrt{e},0\right)$ e $\left(\sqrt{e},0\right)$.

7. $A=D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:1-x^2>0\right\}$

$1-x^2>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(1-x>0\wedge 1+x>0)\vee(1-x<0\wedge 1+x<0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x<1\wedge x>-1)\vee(x>1\wedge x<-1)$

$\Leftrightarrow(x<1\wedge x>-1)\vee x\in\varnothing\Leftrightarrow -1<x<1$

Então, $A=\left]-1,1\right[$. A opção correta é a (B).

8.1. $7{,}1=\frac{2}{3}\log_{10}(E)-2{,}9\Leftrightarrow 10=\frac{2}{3}\log_{10}(E)\Leftrightarrow 15=\log_{10}(E)$

$\Leftrightarrow E=10^{15}$

$10^{15}=M_0\times 1{,}6\times 10^{-5}\Leftrightarrow\frac{10^{15}}{1{,}6\times 10^{-5}}=M_0\Leftrightarrow 0{,}625\times 10^{20}=M_0$

$\Leftrightarrow 6{,}25\times 10^{19}=M_0$

8.2. $M_1-M_2=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-2{,}9-\left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)-2{,}9\right)=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\log_{10}(E_1)-\frac{2}{3}\log_{10}(E_2)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\log_{10}(E_1)-\log_{10}(E_2)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)=1\Leftrightarrow\frac{E_1}{E_2}=10\Leftrightarrow E_1=10E_2$

Pág. 64

9. $D_f=\mathbb{R}_0^+$

$f'(x)=\left(x^2e^{1-x}\right)'=\left(x^2\right)'\times e^{1-x}+\left(e^{1-x}\right)'\times x^2=$

$=2x\times e^{1-x}-e^{1-x}\times x^2=e^{1-x}\left(2x-x^2\right)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}\left(2x-x^2\right)=0\Leftrightarrow\underbrace{e^{1-x}=0}_{\text{impossível}}\vee 2x-x^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$

x	0		2	$+\infty$
e^{1-x}	+	+	+	+
$2x-x^2$	0	+	0	–
f'	0	+	0	–
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$

f é estritamente crescente no intervalo $[0,2]$.

f é estritamente decrescente no intervalo $[2,+\infty[$.

Mínimo relativo: 0.

Máximo relativo: $\frac{4}{e}$.

10. $D_g=\mathbb{R}^+$

$g'(x)=\left(\frac{1+\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(1+\ln x)'\times x^2-\left(x^2\right)'\times(1+\ln x)}{\left(x^2\right)^2}=$

$=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-2x\times(1+\ln x)}{x^4}=\frac{x-2x(1+\ln x)}{x^4}=\frac{1-2(1+\ln x)}{x^3}=$

$=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1-2\ln x}{x^3}=0\Leftrightarrow -1-2\ln x=0\wedge x\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln x=-\frac{1}{2}\wedge x\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}\wedge x\in\mathbb{R}^+\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$-1-2\ln x$		+	0	–
x^3		+	+	+
g'		+	0	–
g		$\nearrow$	$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	$\searrow$

g é estritamente crescente no intervalo $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$.

g é estritamente decrescente no intervalo $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$.

g tem um máximo relativo para $x=e^{-\frac{1}{2}}$.

11. $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}$

$f''(x)=\left[e^x\left(x^2+x+1\right)\right]'=\left(e^x\right)'\times\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)'\times e^x=$

$=e^x\times\left(x^2+x+1\right)+(2x+1)\times e^x=e^x\left(x^2+x+1+2x+1\right)=$

$=e^x\left(x^2+3x+2\right)$

$f''(x)=0\Leftrightarrow e^x\left(x^2+3x+2\right)=0\Leftrightarrow\underbrace{e^x=0}_{\text{impossível}}\vee x^2+3x+2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}\Leftrightarrow x=-1\vee x=-2$

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
x^2+3x+2	+	0	–	0	+
f''	+	0	–	0	+
f	$\cup$	$f(-2)$	$\cap$	$f(-1)$	$\cup$

Nos intervalos $\left]-\infty,-2\right]$ e $\left[-1,+\infty\right[$ a concavidade é voltada para cima. No intervalo $[-2,-1]$ a concavidade é voltada para baixo. Abcissas dos pontos de inflexão: -2 e -1.

12. $f''(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}x^2(x-1)=0\Leftrightarrow\underbrace{e^{-x}=0}_{\text{impossível}}\vee x^2=0\vee x-1=0$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
x^2	+	0	+	+	+
$x-1$	–	–	–	0	+
f''	–	0	–	0	+
f	$\cap$	$f(0)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$

O gráfico de *f* tem um único ponto de inflexão, o ponto de abcissa 1. A opção correta é a (D).

Pág. 65

13.1. $D_f = \mathbb{R}^+$

Assíntotas verticais:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x - 2\ln x) = 0 - 2\ln(0^+) = -2\times(-\infty) = +\infty$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Como *f* é contínua em todo o seu domínio, não existem outras assíntotas verticais.

Assíntota não vertical: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(3 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 3 - 2\times 0 = 3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} (3x - 2\ln x - 3x) = \lim_{x\to+\infty} (-2\ln x) =$$

$$= -2\times(+\infty) = -\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, conclui-se que não existe assíntota não vertical ao gráfico de *f*.

13.2. $f'(x) = (3x - 2\ln x)' = 3 - 2\times\frac{1}{x} = 3 - \frac{2}{x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{2}{x} = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \wedge x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

x	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'		–	0	+
f		↘	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	↗

$f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de *f*.

13.3. $f(x) = 3x \Leftrightarrow 3x - 2\ln x = 3x \wedge x > 0 \Leftrightarrow -2\ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

A abcissa do único ponto do gráfico de *f* cuja ordenada é o triplo da abcissa é 1.

14.1.

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{(e^x)' \times (x-1) - (x-1)' \times (e^x)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \times (x-1) - 1\times(e^x)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(x-2) = 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{e^x = 0}_{\text{impossível}} \vee x - 2 = 0\right) \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
$x-2$	–	–	–	0	+
$(x-1)^2$	+	0	+	+	+
f'	–	n.d.	–	0	+
f	↘	n.d.	↘	e^2	↗

f é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 1[$ e no intervalo $]1, 2]$. *f* é estritamente crescente no intervalo $[2, +\infty[$.

Mínimo relativo: e^2

14.2.

$$\ln[f(x)] = x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x \wedge x \in D_f \wedge f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) - \ln(x-1) = x \wedge x \neq 1 \wedge x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x - \ln(x-1) = x \wedge x \neq 1 \wedge x > 1 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \ \wedge \ x > 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \ \wedge \ x > 1 \Leftrightarrow x = 2$$

14.3. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Como *f* é contínua em todo o seu domínio, não existem outras assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

Não existe assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $+\infty$.

15.1. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{4x} - 1}{4x}\times 4} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim\limits_{4x\to 0^-} \left(\frac{e^{4x} - 1}{4x}\times 4\right)} = \frac{1}{1\times 4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln x) \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y^{-1})}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln y}{y} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = -0 = 0$$

$x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Como *f* é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, o gráfico de *f* não admite assíntotas verticais.

15.2. Como $D_g = \mathbb{R}^+$, tem-se:

$g(x) = f(x) - x + \ln^2 x \Leftrightarrow g(x) = x\ln x - x + \ln^2 x$

$g'(x) = \left(x\ln x - x + \ln^2 x\right)' = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + 2\ln x \times \frac{1}{x} =$

$= \ln x + 1 - 1 + \frac{2\ln x}{x} = \ln x + \frac{2\ln x}{x} = \ln x\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 0 \ \wedge 0 < x \le e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\ln x = 0 \ \vee \ 1 + \frac{2}{x} = 0\right) \ \wedge \ 0 < x \le e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 1 \ \vee \ x = -2) \ \wedge \ 0 < x \le e \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		e
g'		–	0	+	+
g		↘	$g(1)$	↗	$g(e)$

$g(1) = -1$ e $g(e) = 1$.

g é estritamente decrescente no intervalo $]0, 1]$.

g é estritamente crescente no intervalo $[1, e]$.

Mínimo relativo: -1
Máximo relativo: e

16. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax^2 + a^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax(x+a)} =$

$= \lim\limits_{ax\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x+a} = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

A opção correta é a (A).

Pág. 66

Avaliar – 1.ª Parte

1.

$\lim u_n = \sqrt{e} \Leftrightarrow \lim\left(\frac{n+k}{n+3}\right)^n = \sqrt{e} \Leftrightarrow \lim\left(\frac{n\left(1 + \frac{k}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)}\right)^n = \sqrt{e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\lim\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n} = \sqrt{e} \Leftrightarrow \frac{e^k}{e^3} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k - 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$

A opção correta é a (A).

2.

$g'(x) = \left(3 - \ln(x^2 + 1)\right)' = 0 - \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1}$

$(f \circ g)'(0) = g'(0) \times f'(g(0)) = 0 \times f'(3) = 0$.

A opção correta é a (C).

3. $\log_{a^2}(k) = \frac{\log_a(k)}{\log_a(a^2)} = \frac{2}{2} = 1$

A opção correta é a (D).

4. $y_A = 4 - \log_2 1 = 4 - 0 = 4$

$A_{[AOP]} = 10 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times x_P}{2} = 10 \Leftrightarrow \frac{4 \times x_P}{2} = 10 \Leftrightarrow x_P = 5$

$y_P = 4 - \log_2(5+1) = \log_2 16 - \log_2 6 = \log_2\left(\frac{16}{6}\right) = \log_2\left(\frac{8}{3}\right)$

A opção correta é a (B).

5. $f'(x) = \left(x\sqrt{\ln x}\right)' = (x)' \times \sqrt{\ln x} + \left(\sqrt{\ln x}\right)' \times x =$

$= 1 \times \sqrt{\ln x} + \frac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} \times x = \sqrt{\ln x} + \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} \times x = \sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} =$

$= \frac{2\ln x + 1}{2\sqrt{\ln x}}$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} = f'(e) = \frac{2\ln e + 1}{2\sqrt{\ln e}} = \frac{2 \times 1 + 1}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$

A opção correta é a (C).

Pág. 67

Avaliar – 2.ª Parte

1.1. $f(x) = \ln\left(\frac{8}{2-x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{8}{2-x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{8}{2-x} \ \wedge \ \frac{x}{x+1} > 0 \ \wedge \ x + 1 \ne 0 \ \wedge \ \frac{8}{2-x} > 0 \ \wedge \ 2 - x \ne 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x = 8x + 8 \ \wedge \ (x < -1 \vee x > 0) \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \ \wedge \ (x < -1 \vee x > 0) \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} \ \wedge \ (x < -1 \vee x > 0) \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow (x = -4 \vee x = -2) \ \wedge \ (x < -1 \vee x > 0) \wedge \ x < 2$

$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -2$

1.2. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x+1} > 0 \wedge x + 1 \ne 0\right\}$

$\frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge x + 1 > 0) \vee (x < 0 \wedge x + 1 < 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > 0 \wedge x > -1) \vee (x < 0 \wedge x < -1) \Leftrightarrow x > 0 \vee x < -1$

Então, $D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

<u>Assíntotas verticais:</u>

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$

$x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*. Como *f* é contínua em todo o seu domínio, não existem outras assíntotas verticais.

<u>Assíntotas horizontais</u>:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\right) = \ln(1) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\right) = \ln(1) = 0$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $-\infty$ e em $+\infty$.

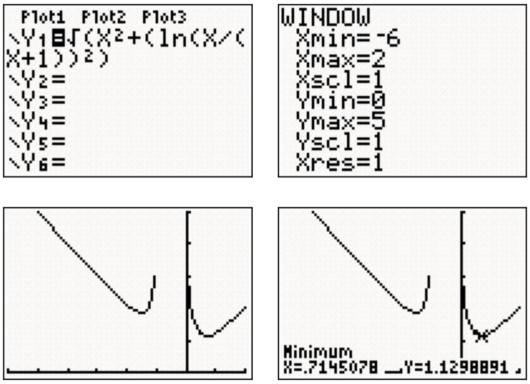
1.3. Seja P um ponto do gráfico de *f*.

Então $P\left(x, f(x)\right)$, ou seja, $P\left(x, \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$, $x \in D_f$.

Distância do ponto *P* ao ponto $O(0,0)$:

$$\overline{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)^2}$$

Pretende-se determinar graficamente a abcissa do ponto *P* do gráfico de *f* cuja distância ao ponto $O(0,0)$ é mínima.



Conclusão: $x_P \approx 0{,}71$.

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + 1 > 0\} = \mathbb{R}$

f é contínua em $\mathbb{R}$ porque resulta de operações entre funções contínuas. Então, *f* é contínua em $[0, 1]$. $f(0) < 3 < f(1)$, pois $f(0) = \ln 2 \approx 0{,}7$ e $f(1) = 2 + \ln(e+1) \approx 3{,}3$.

Como *f* é contínua em $[0, 1]$ e $f(0) < 3 < f(1)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, c \in \left]0, 1\right[:\ f(c) = 3$.

Daqui resulta que a equação $f(x) = 3$ tem pelo menos uma solução em $\left]0, 1\right[$, ou seja, é possível em $\left]0, 1\right[$.

$$f'(x) = \left(2x + \ln\left(e^x + 1\right)\right)' = (2x)' + \left(\ln\left(e^x + 1\right)\right)' =$$

$$= 2 + \frac{\left(e^x + 1\right)'}{e^x + 1} = 2 + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, então $\forall x \in \mathbb{R},\ 2 + \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$.

f é estritamente crescente no seu domínio porque $\forall x \in D_f,\ f'(x) > 0$. pPortanto, a equação $f(x) = 3$ tem uma única solução pertencente ao intervalo $\left]0, 1\right[$.

3.1. $f(x) < 2 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x < 2 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - e^x - 2 < 0$

Vamos começar por resolver a equação $\left(e^x\right)^2 - e^x - 2 = 0$.

Fazendo $e^x = y$, tem-se:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1.$$

Como $y = e^x$, tem-se:

$e^x > -1 \ \wedge\ e^x < 2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \ \wedge\ x < \ln 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$

Portanto, $x \in \left]-\infty, \ln 2\right[$.

3.2. $f'(x) = \left(e^{2x} - e^x\right)' = 2e^{2x} - e^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x\left(2e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{impossível}} \vee 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(2^{-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	↘	$f(-\ln 2)$	↗

A ordenada do ponto *A* é o mínimo absoluto da função *f*, donde se conclui que a abcissa de *A* é $-\ln 2$.

$f''(x) = \left(2e^{2x} - e^x\right)' = 4e^{2x} - e^x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x\left(4e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{impossível}} \vee 4e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(4^{-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\ln 4$

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	∩	$f(-\ln 2)$	∪

Como o ponto *B* é ponto de inflexão do gráfico de *f*, conclui-se que a abcissa de *B* é $-\ln 4$.

$x_A = -\ln 2$ e $x_B = -\ln 4$, logo

$x_B = -\ln 4 = -\ln\left(2^2\right) = -2\ln 2 = 2x_A$.

4.1. $T(0) = 80 \Leftrightarrow C + 65e^{-k\times 0} = 80 \Leftrightarrow C + 65e^0 = 80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C + 65 \times 1 = 80 \Leftrightarrow C = 80 - 65 \Leftrightarrow C = 15$

Assim sendo, a constante *C* é igual à temperatura ambiente (15 °C).

4.2. $T(2) = 50 \Leftrightarrow 15 + 65e^{-k\times 2} = 50 \Leftrightarrow 65e^{-2k} = 35 \Leftrightarrow e^{-2k} = \frac{35}{65} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2k = \ln\left(\frac{7}{13}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{-2} \Leftrightarrow k \approx 0{,}31$$

4.3. Considerando $C = 15$ e $k \approx 0{,}31$, tem-se:

$T(t) = 15 + 65e^{-0{,}31t}$

$T(t) = 0{,}25T(0) \Leftrightarrow 15 + 65e^{-0{,}31t} = 0{,}25 \times 80 \Leftrightarrow 15 + 65e^{-0{,}31t} = 20$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}31t} = \frac{5}{65} \Leftrightarrow -0{,}31t = \ln\left(\frac{1}{13}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{13}\right)}{-0{,}31} \Leftrightarrow t \approx 8{,}2740$$

$0{,}2740 \times 60 = 16{,}44 \approx 16$

Para que a temperatura sofra uma redução de 75%, devem decorrer, aproximadamente, 8 minutos e 16 segundos.

Pág. 71

Tarefa 1

1.1. $\sin(-\alpha)=\frac{3}{7} \Leftrightarrow -\sin\alpha=\frac{3}{7} \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{3}{7}$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{3\pi}{2}\right[$ e $\sin\alpha<0$, conclui-se que $\alpha \in 3.^\circ$ Q.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{3}{7}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{40}{49}$$

Como $\alpha \in 3.^\circ$ Q, conclui-se que $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

1.2. $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow \sin^2\beta+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\beta=\frac{5}{9}$

Como $\beta \in \left[\pi, 2\pi\right[$, conclui-se que $\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Então, $\sin(-\beta)=-\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

1.3. $\tan(-\beta)=-\tan\beta=-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=-\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

2.1.

$$f(x)=2\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)=2\sin x+(-\cos x)=$$
$$=2\sin x-\cos x$$

A opção correta é a (C).

2.2. $\tan(\pi+\alpha)=2 \Leftrightarrow \tan\alpha=2$

Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\tan\alpha>0$, conclui-se que $\alpha \in 1.^\circ$ Q.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+2^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 5=\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{5}.$$

Como $\alpha \in 1.^\circ$ Q, conclui-se que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha=2\times\frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Então, $f(\alpha)=2\sin\alpha-\cos\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

3. O ponto $A\left(2\theta, \frac{5}{2}\right)$ pertence ao gráfico de *f*, então sabe-se que $f(2\theta)=\frac{5}{2}$.

$$f(2\theta)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 1+2\cos\theta=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \cos\theta=\frac{3}{4}$$

Como $\theta \in \left]\pi, 2\pi\right[$ e $\cos\theta>0$, conclui-se que $\theta \in 4.^\circ$ Q.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\theta=\frac{7}{16}$$

Como $\theta \in 4.^\circ$ Q, conclui-se que $\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Então, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Pág. 72

1.1. Como $\alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[$ e $\cos\alpha>0$, conclui-se que $\alpha \in 4.^\circ$ Q.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{8}{9}$$

Como $\alpha \in 4.^\circ$ Q, conclui-se que $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=$$
$$=\frac{-4+\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}-4}{6}$$

1.2.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$$

1.3.

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=$$
$$=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}=-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

2.1.

$$f(\alpha)=2 \Leftrightarrow 3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2}{3}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\frac{\alpha}{2} \in 1.^\circ$ Q.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{5}{9}$$

Como $\frac{\alpha}{2} \in 1.^\circ$ Q, conclui-se que $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$y_B=f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=3\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

2.2.

$$y_C = f\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Tarefa 2

1. $O\hat{P}A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, logo $B\hat{P}P = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\pi}{2} = \alpha$.

2. $\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \sin(\alpha+\beta)$

3. $\sin\beta = \frac{\overline{PP''}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP''} = \sin\beta$

4. $\cos\alpha = \frac{\overline{P''B}}{\sin\beta} \Leftrightarrow \overline{P''B} = \cos\alpha\ \sin\beta$

5. $\cos\beta = \frac{\overline{OP''}}{1} \Leftrightarrow \overline{OP''} = \cos\beta$

6. $\sin\alpha = \frac{\overline{AP''}}{\cos\beta} \Leftrightarrow \overline{AP''} = \sin\alpha\ \cos\beta$

7. $\overline{AP''} + \overline{P''B} = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$

8. Como $\overline{PP'} = \overline{AP''} + \overline{P''B}$, conclui-se que $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$.

Pág. 73

3.1.

$$g\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos\left(3\times\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3.2.

$$g\left(-\frac{\pi}{18}\right) = \cos\left(3\times\left(-\frac{\pi}{18}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4.1.

$$\cos(x+y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

4.2.

$$\cos(x-y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (x-y)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

5. $\cos\ c = \cos(\pi - (a+b)) = -\cos(a+b) =$

$$= -(\cos a\cos b - \sin a\sin b) = \sin a\sin b - \cos a\cos b$$

Pág. 74

6.1.

a) $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} =$

$$= \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b} + \frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b} - \frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}\times\frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

b) $\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a\cos b - \cos a\sin b}{\cos a\cos b + \sin a\sin b} =$

$$= \frac{\frac{\sin a\cos b}{\cos a\cos b} - \frac{\cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b} + \frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1 + \frac{\sin a}{\cos a}\times\frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$

6.2.

$$\frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan x} = -1 \Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan x} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \wedge \tan x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \wedge x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

7.1.

$$\cos x\cos\frac{\pi}{3} = \sin x\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{3} - \sin x\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

7.2.

$$\sin x\cos\frac{x}{2} + \cos x\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \frac{3x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{4k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{9} + \frac{4k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

8.

$$f(x)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}\cos x+\sin\frac{2\pi}{3}\sin x+\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}\sin x$$

$$f(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sin x=\frac{3}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $x=\frac{\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}$.

Donde se conclui que $b-a=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

Pág. 75

9.1. $2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

9.2. $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

9.3. $4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\left[2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)=$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$$

10.1. $\tan(2a)=\tan(a+a)=\frac{\tan a+\tan a}{1-\tan a\tan a}=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

10.2. $4\cos(2x)\sin x\cos x=2\cos(2x)\times2\sin x\cos x=$

$$=2\cos(2x)\sin(2x)=\sin(2\times2x)=\sin(4x)=2\times\frac{1}{2}=1$$

10.3. $\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=$

$$=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)=1-\sin x$$

10.4. $\frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}=\frac{2\frac{\sin a}{\cos a}}{\frac{1}{\cos^2 a}}=\frac{\frac{2\sin a}{1}}{\frac{1}{\cos a}}=2\sin a\cos a=\sin(2a)$

10.5.

$$\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}=\frac{1-\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^2 a}}=\frac{\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^2 a}}=\cos^2 a-\sin^2 a=$$

$$=\cos(2a)$$

11.1.

$$f(x)=a\sin^2 x+b\sin x+c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos(2x)-\sin x=a\sin^2 x+b\sin x+c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x=a\sin^2 x+b\sin x+c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow1-\sin^2 x-\sin^2 x-\sin x=a\sin^2 x+b\sin x+c\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow-2\sin^2 x-\sin x+1=a\sin^2 x+b\sin x+c$$

Donde se conclui que $a=-2$, $b=-1$ e $c=1$.

11.2.

$$f(x)=1\Leftrightarrow-2\sin^2 x-\sin x+1=1\Leftrightarrow-2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x(-2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\sin x=0\vee\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi\ \vee\ x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \vee\ x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0,\ 2\pi]$, conclui-se que $x\in\left\{0,\ \pi,\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6},\ 2\pi\right\}$.

Tarefa 3

1.

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$; $A(2,\ 0)$; $B(2,\ \sin\theta)$

Então, $a(\theta)=\frac{(2-\cos\theta)\times\sin\theta}{2}=\frac{2\sin\theta-\cos\theta\sin\theta}{2}=$

$$=\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\sin\theta-\frac{1}{4}(2\cos\theta\sin\theta)=\sin\theta-\frac{1}{4}\sin(2\theta).$$

2.1.

a) $A_A+A_B=(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

b) $A_A-A_B=(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos(2\theta)$

2.2. $A_A-A_B=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(2\theta)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(2\theta)=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow2\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ 2\theta=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \vee\ \theta=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $\theta\in\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Assim sendo, $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pág. 76

12.1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}=0$

Sabe-se que, $\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leq\sin^2 x\leq1$.

Quando x tende para $+\infty$, tem-se: $\frac{0}{x}\leq\frac{\sin^2 x}{x}\leq\frac{1}{x}$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{0}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, necessariamente $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}=0$.

12.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+0=1$

12.3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(2-\frac{\tan x}{x}\right)=2-(+\infty)=-\infty$

12.4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{1-\cos x}=\frac{\pi}{1-(-1)}=\frac{\pi}{2}$

12.5.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos x}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{0}{2}=0$$

Pág. 77

13.1.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(5x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{5x\to0}\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\times\frac{5}{2}\right)=1\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

13.2.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cos(2x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

13.3.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\sin(4x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}-\frac{\sin(4x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{\frac{x}{2}\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}\right)-\lim_{4x\to0}\left(\frac{\sin(4x)}{4x}\times4\right)=1\times\frac{1}{2}-1\times4=-\frac{7}{2}$$

13.4.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\sin(3x)}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{3x\to0}\left(-3\times\frac{\sin(3x)}{3x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=$$

$$=\frac{-3\times1}{1}=-3$$

13.5.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(-2x)}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{\lim\limits_{-2x\to0}\left(-2\times\frac{\sin(-2x)}{-2x}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{-2\times1}{1}=-2$$

13.6.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi+x)-\sin(3x)}{\sin(\pi-2x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\sin(x)-\sin(3x)}{\sin(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}-\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2\cos x}\right)-\frac{\lim\limits_{3x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\times3\right)}{\lim\limits_{2x\to0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times2\right)}=-\frac{1}{2}-\frac{1\times3}{1\times2}=-2$$

13.7.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{|\sin x|}{x}\right)=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{|\sin x|}{x}\right)\right]=\ln\left(0^+\right)=-\infty$$

13.8.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1$$

<u>Mudança de variável</u>: Fazendo $\frac{1}{x}=y$, vem $x=\frac{1}{y}$. Se $x\to+\infty$, então $y\to0^+$.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]}=e^1=e$.

14.1.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))}{x^2(1+\cos(2x))}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(2x)}{x^2(1+\cos(2x))}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{4}{1+\cos(2x)}\right)=$$

$$=\left(\lim_{2x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\left(\frac{4}{1+\cos(2x)}\right)=1^2\times2=2$$

14.2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

14.3.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(2x)}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))}{x\sin x(1+\cos(2x))}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2(2x)}{x\sin x(1+\cos(2x))}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(2x)}{x\sin x(1+\cos(2x))}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\sin x}\times\lim_{2x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\times\lim_{x\to0}\frac{2}{1+\cos(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}(2\cos x)\times1\times\frac{2}{2}=2\times1=2$$

Pág. 78

15.1. $\frac{\pi}{6}$ é ponto aderente e pertence ao domínio da função *f*.

Então *f* é contínua em $\frac{\pi}{6}$ se existir $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)$, ou seja, se

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(3x)}{6x-\pi} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(3\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{6y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(3y+\frac{\pi}{2}\right)}{6y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(3y)}{6y} = \lim_{3y\to 0}\left(\frac{\sin(3y)}{3y}\times\frac{-1}{2}\right) = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>: Fazendo $x-\frac{\pi}{6}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{6}$. Se $x\to\frac{\pi}{6}$, então $y\to 0$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=k$

Portanto, *f* é contínua em $\frac{\pi}{6}$ se $k=-\frac{1}{2}$.

15.2. 1 é ponto aderente e pertence ao domínio da função *f*.

Então *f* é contínua em 1 se existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ou seja, se

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{(y+1)^2+y+1-2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y^2+3y} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\sin y}{y}\times\frac{1}{y+3}\right) = 1\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

<u>Mudança de variável</u>: Fazendo $x-1=y$, vem $x=y+1$. Se $x\to 1^+$, então $y\to 0^+$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(e^k-\frac{2}{3}\right) = e^k-\frac{2}{3}$$

$$f(1) = e^k-\frac{2}{3}$$

Portanto, *f* é contínua em 1 se $e^k-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

$$e^k-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow e^k=1 \Leftrightarrow k=0$$

16.1. 0 é ponto aderente e pertence ao domínio da função *f*.

Então *f* é contínua em 0 se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja, se

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{e^x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+1\right)} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$$

Donde se conclui que *f* é contínua em 0.

16.2.

<u>Assíntota horizontal</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}=0$$

Sabe-se que, $\forall x\in\mathbb{R}, -1\le\sin x\le 1$.

Quando *x* tende para $+\infty$, tem-se: $\frac{-1}{e^x-1}\le\frac{\sin x}{e^x-1}\le\frac{1}{e^x-1}$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$, necessariamente

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}=0$.

Então, $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* em $+\infty$.

<u>Assíntota oblíqua:</u> $y=mx+b$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=$$

$$=-\sqrt{1+0}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\overset{\infty-\infty}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Então, $y=-x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* em $-\infty$.

Pág. 79

17.1. $f'(x)=\left(\frac{x}{3}+\sin(2x)\right)'=\frac{1}{3}+2\cos(2x)$

17.2. $f'(x)=\left[\frac{2}{x}+\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right]'=-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2}\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

17.3.

$$f'(x)=\left(\frac{\sin(2x)}{3-\sin x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(\sin(2x)\right)'\times(3-\sin x)-(3-\sin x)'\times\sin(2x)}{(3-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{2\cos(2x)\times(3-\sin x)-(-\cos x)\times\sin(2x)}{(3-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{6\cos(2x)-2\cos(2x)\sin x+\cos x\sin(2x)}{(3-\sin x)^2}$$

17.4.

$$f'(x)=\left(2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'=(2x)'\times\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)'\times 2x=$$

$$=2\times\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)+\left(\frac{\pi}{x}\right)'\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\times 2x=2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)-\frac{2\pi}{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

17.5. $f'(x)=\left(x^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)'=$

$$=\left(x^2\right)'\times\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)'\times x^2=$$

$$=2x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)x^2$$

17.6. $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x+\sin x}\right)'=\dfrac{(x+\sin x)'}{3\sqrt[3]{(x+\sin x)^{3-1}}}=\dfrac{1+\cos x}{3\sqrt[3]{(x+\sin x)^2}}$

18.1.

$$m_t=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{x+\sin(x)-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}+\frac{\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}\right)=1+\lim_{y\to 0}\frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{y}=$$

$$=1+\lim_{y\to 0}\frac{\sin y\cos\frac{\pi}{3}+\cos y\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{y}=$$

$$=1+\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin y+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{y}=1+\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\times 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to 0}\frac{(\cos y-1)(\cos y+1)}{y(\cos y+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\cos^2 y-1}{y(\cos y+1)}=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to 0}\frac{-\sin^2 y}{y(\cos y+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\times\frac{-\sin y}{\cos y+1}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\times\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{\cos y+1}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1\times\frac{0}{2}=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>: Fazendo $x-\frac{\pi}{3}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{3}$.

Se $x\to\frac{\pi}{3}$, então $y\to 0$.

18.2. $f'(x)=(x+\sin x)'=1+\cos x$

Se a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *B* é paralela ao eixo *Ox* então tem declive nulo.

$m_t=0\Leftrightarrow 1+\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

A menor solução positiva da equação anterior é π.

Então, $B(\pi, f(\pi))$, ou seja, $B(\pi,\pi)$.

Pág. 80

19. $f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}+\sin x}\right)'=\left(\frac{x}{2}+\sin x\right)'e^{\frac{x}{2}+\sin x}=\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)e^{\frac{x}{2}+\sin x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)e^{\frac{x}{2}+\sin x}=0\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}$

Como $x\in[0,2\pi]$, conclui-se que $x=\frac{2\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{4\pi}{3}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f'	+	+	0	−	0	+	+
f	$f(0)$	↗	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	↘	$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	↗	$f(2\pi)$

Donde se conclui que $x_A=\frac{2\pi}{3}$ e $x_B=\frac{4\pi}{3}$.

20.1.

$$g'(x)=\left(\frac{\sin x}{2+\sin x}\right)'=\frac{\cos x(2+\sin x)-\sin x\times\cos x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{2\cos x+\cos x\sin x-\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}=\frac{2\cos x}{(2+\sin x)^2}$$

20.2. Sendo a reta tangente paralela ao eixo das abcissas então o seu declive é nulo.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2\cos x}{(2+\sin x)^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x=0\wedge\underbrace{(2+\sin x)^2\neq 0}_{\text{condição universal}}\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em cada intervalo do tipo $[2k\pi, 2\pi+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$, há 2 zeros da função derivada. Assim, no intervalo $[460\pi, 551\pi]$.

($551\pi-460\pi=91\pi=45{,}5\times 2\pi$, o que corresponde a 45 voltas e meia) há 91 zeros da função derivada, ou seja, há 91 pontos do gráfico de *h* em que a reta tangente ao gráfico em cada um desses pontos é paralela ao eixo *Ox*.

Pág. 81

21.1. $f'(x)=\left(1+\frac{\cos x}{2}\right)'=-\frac{\sin x}{2}$

21.2. $f'(x)=\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{x^2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$

$$=\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

21.3. $f'(x)=\left(x^2\cos(3x)\right)'=\left(x^2\right)'\times\cos(3x)+\left(\cos(3x)\right)'\times x^2=$

$$=2x\cos(3x)-3x^2\sin(3x)$$

21.4. $f'(x)=\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'\left(-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\sqrt{x}\right)$

21.5. $f'(x)=\left(xe^{\cos x}\right)'=(x)'\times e^{\cos x}+x\times\left(e^{\cos x}\right)'=$

$=1e^{\cos x}+x(-\sin x)e^{\cos x}=e^{\cos x}(1-x\sin x)$

21.6.

$$f'(x)=\left[\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{\cos x(2+\cos x)-(-\sin x)\sin x}{(2+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}}\times\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

21.7.

$$f'(x)=\left(\ln\left(\cos(3x-\pi)\right)\right)'=\frac{\left(\cos(3x-\pi)\right)'}{\cos(3x-\pi)}=$$

$$=\frac{-3\sin(3x-\pi)}{\cos(3x-\pi)}=-3\tan(3x-\pi)$$

22.1.

$$f'(x)=\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'(2+\sin x)-(2+\sin x)'\cos x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x(2+\sin x)-\cos x\cos x}{(2+\sin x)^2}=\frac{-2\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=-\frac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}$$

22.2.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2\sin x+1}{(2+\sin x)^2}=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x+1=0\wedge x\in[0,\,2\pi]\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{6}\vee x=\frac{11\pi}{6}$$

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\searrow$	$f(2\pi)$

$$f(0)=\frac{\cos 0}{2+\sin 0}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\cos\frac{7\pi}{6}}{2+\sin\frac{7\pi}{6}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\cos\frac{11\pi}{6}}{2+\sin\frac{11\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$f(2\pi)=\frac{\cos(2\pi)}{2+\sin(2\pi)}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

O mínimo absoluto é $f\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ e o máximo absoluto é $f\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

Donde se conclui que $a=\dfrac{7\pi}{6}$ e $b=\dfrac{11\pi}{6}$.

22.3. Atendendo aos resultados obtidos anteriormente, tem-se que $D'_f=\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Pág. 82

23.1.

$$f(x)=1\Leftrightarrow\frac{\sin(2x)}{2}+\cos^2 x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin x\cos x}{2}+\cos^2 x-1=0\Leftrightarrow\sin x\cos x-\sin^2 x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x(\cos x-\sin x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\ \vee\ \sin x=\cos x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

23.2.

$$f'(x)=\left(\frac{\sin(2x)}{2}+\cos^2 x\right)'=\frac{2\cos(2x)}{2}+2\cos x(\cos x)'=$$

$$=\cos(2x)+2\cos x(-\sin x)=\cos(2x)-2\cos x\sin x=$$

$$=\cos(2x)-\sin(2x)$$

23.3.

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$f''(x)=\left(\cos(2x)-\sin(2x)\right)'=-2\sin(2x)-2\cos(2x)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$$

Como $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$ e $f''\left(\frac{\pi}{8}\right)<0$, conclui-se que $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ é máximo relativo da função *f*.

24.1. $f'(x)=\left(x-\cos(2x)\right)'=1+2\sin(2x)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[-\pi,\pi]$, tem-se $x\in\left\{-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
f'	+	+	0	−	0	+	0	−	0	+	+
f	$f(-\pi)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)$	$\nearrow$	$f(\pi)$

f é estritamente crescente nos intervalos $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{12}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ e $\left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$.

f é estritamente decrescente nos intervalos $\left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right]$ e $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$.

A função tem máximos relativos nos pontos de abcissas $-\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ e π.

A função tem mínimos relativos nos pontos de abcissas $-\pi$, $-\frac{\pi}{12}$ e $\frac{11\pi}{12}$.

24.2. $f''(x)=\left(1+2\sin(2x)\right)'=2\times2\cos(2x)=4\cos(2x)$

$$f''(x)=2 \Leftrightarrow 4\cos(2x)=2 \Leftrightarrow \cos(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x)=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee\ 2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi \ \vee\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$$

Tarefa 4

1.1.

a) $f'(x)=\left(\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)'=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$$=-\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(2x)$$

b) Sendo $k\in\mathbb{Z}$, então $f'\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$.

O declive das retas tangentes ao gráfico de *f* nos pontos de abcissa $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, é nulo, logo essas retas são paralelas ao eixo das abcissas.

1.2. $f''(x)=\left(-\cos(2x)\right)'=2\sin(2x)$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin(2x)=0 \wedge x\in\left]0,\ 2\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x)=0 \wedge x\in\left]0,2\pi\right[\Leftrightarrow 2x=k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \wedge x\in\left]0,2\pi\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \wedge x\in\left]0,2\pi\right[\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \vee x=\pi \vee x=\frac{3\pi}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f''		+	0	−	0	+	0	−	
f		$\cup$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cap$	$f(\pi)$	$\cup$	$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\cap$	

Nos intervalos $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ a concavidade é voltada para cima.

Nos intervalos $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ a concavidade é voltada para baixo.

Os pontos de inflexão são os pontos de abcissas $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$.

2.1. $f'(x)=\left(\sin(2x)-2\cos x\right)'=2\cos(2x)+2\sin x=$

$$=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2\sin x=2\left(1-\sin^2 x\right)-2\sin^2 x+2\sin x=$$

$$=-4\sin^2 x+2\sin x+2$$

2.2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x+2\sin x+2=0 \wedge x\in[0,2\pi] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x=-\frac{1}{2} \vee \sin x=1\right) \ \wedge\ x\in[0,\ 2\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \ \vee\ x=\frac{7\pi}{6} \ \vee\ x=\frac{11\pi}{6}$$

Assim sendo, $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $B\left(\frac{7\pi}{6},0\right)$ e $C\left(\frac{11\pi}{6},0\right)$.

2.3.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'	+	+	0	+	0	−	0	+	+
f	$f(0)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\nearrow$	$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\nearrow$	$f(2\pi)$

A função *f* atinge extremos nos pontos de abcissas $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

2.4. $f''(x)=\left(2\cos(2x)+2\sin x\right)'=2\left(-2\sin(2x)\right)+2\cos x=$

$$=-4\sin(2x)+2\cos x$$

2.5. A função f'' é contínua em $[0, 2\pi]$, em particular é contínua em $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

$$f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -4\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\sqrt{3} - 1\ ;\ f''\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$$

$$= -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}\,.$$

Como função f'' é contínua em $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right]$ e $f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 0 < f''\left(\frac{11\pi}{6}\right)$, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy conclui-se que $\exists\, c \in \left]\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right[: f''(c) = 0$.

Como a segunda derivada da função *f* passa de negativa a positiva, no intervalo $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right[$, conclui-se que o gráfico de *f* admite um ponto de inflexão pertencente ao intervalo $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right[$.

Pág. 83

25.1. $f'(x) = \left(x + \tan(3x)\right)' = 1 + \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

25.2.

$$f'(x) = \left(x\tan^2 x\right)' = 1\times\tan^2 x + x\times 2\tan x\times\frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \tan^2 x + \frac{2x\tan x}{\cos^2 x}$$

25.3.

$$f'(x) = \left(\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\,.$$

25.4.

$$f'(x) = \left(\sin x + \tan\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \cos x + \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \cos x + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)} = \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\left(\sqrt{x}\right)}$$

25.5. $f'(x) = \left[\left(1 - \tan x\right)^2\right]' = 2\left(1 - \tan x\right)\times\left(-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) =$

$$= \frac{-2 + 2\tan x}{\cos^2 x}$$

25.6.

$$f'(x) = \left[x + \tan\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\right]' = 1 + \frac{2\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2\cos^2\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}$$

26.1.

$$\lim_{x\to 0}\left(x\,h(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(x\times\frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

26.2. $h'(x) = \left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = \dfrac{0 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \dfrac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

26.3. A função h' não tem zeros e é sempre negativa.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
h'		$-$		$-$	
h		$+\infty$ ↘ 0^+		0^- ↘ $-\infty$	

Por observação da tabela conclui-se que a função *h* é decrescente em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

26.4. $h''(x) = \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)' = \left(-\sin^{-2} x\right)' =$

$$= -(-2)\sin^{-3} x\times\cos x = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

$$h''(x) \neq 0,\ \forall\, x \in \left]0, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
h''		$+$		$-$	
h		∪		∩	

No intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a concavidade é voltada para cima.

No intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, a concavidade é voltada para baixo.

Não existem pontos de inflexão.

27.1. $f'(x)=(kx+4\tan x)'=k+\dfrac{4}{\cos^2 x}$

$$f''(x)=\left(k+\frac{4}{\cos^2 x}\right)'=0+\frac{0-4\times 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}=\frac{8\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f''(x)=0 \ \wedge \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \frac{8\sin x}{\cos^3 x}=0 \ \wedge \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=0 \ \wedge \ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(0)=0$	$\cup$	

Então, qualquer função da família tem um ponto de inflexão em $x=0$.

27.2. Sendo $k=-8$, então:

$$f'(x)=(-8x+4\tan x)'=-8+\frac{4}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -8+\frac{4}{\cos^2 x}=0 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $x=-\frac{\pi}{4} \ \vee \ x=\frac{\pi}{4}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$		$+$	
f		$\nearrow$	$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\nearrow$	

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi-4$ e $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-2\pi+4$.

Máximo relativo: $2\pi-4$.
Mínimo relativo: $-2\pi+4$.

Pág. 84

28.1. Como $\sqrt{3}<2$, conclui-se que o gráfico I corresponde à função *g* e o gráfico II corresponde à função *f*.

28.2. $D'_f=[-2,2]$ e $D'_g=\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

28.3. Sendo *a* o máximo da função representada pelo gráfico I, sabe-se que $a=\sqrt{3}$.

$$f(x)=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $x=\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{2\pi}{3}$.

Portanto, $A\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$ e $B\left(\frac{2\pi}{3},\sqrt{3}\right)$.

Pág. 85

29.1. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se:

$$f(x)=\sin(3x)=\sin(3x+2\pi)=\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{2\pi}{3}$.

29.2. Como o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{2\pi}{3}$, atendendo à representação gráfica conclui-se que $a=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}$ e $c=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$, ou seja, $a=-\frac{5\pi}{12}$ e $c=\frac{11\pi}{12}$.

30.1. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se:

$$f(x)=\sin(5x)=\sin(5x+2\pi)=\sin\left(5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{2\pi}{5}$.

30.2. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se: $f(x)=\sin\left(-\frac{x}{4}\right)=\sin\left(-\frac{x}{4}-2\pi\right)=\sin\left(-\frac{1}{4}(x+8\pi)\right)=$

$=\sin\left(\frac{-(x+8\pi)}{4}\right)=f(x+8\pi)$. Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f(x+8\pi)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é 8π.

30.3. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se: $f(x)=\sin(\pi x)=\sin(\pi x+2\pi)=\sin(\pi(x+2))=f(x+2)$.

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f(x+2)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é 2.

Pág. 86

31.1. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se: $f(x)=3\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=$

$$=3\sin\left((4x+2\pi)-\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{\pi}{2}$.

31.2. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se:

$$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}+2\pi\right)=$$

$$=\sin\left((2x+2\pi)+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2(x+\pi)+\frac{\pi}{5}\right)=f(x+\pi).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f$, $f(x)=f(x+\pi)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é π.

32.1. O gráfico da função *g* obtém-se a partir do gráfico da função *f* através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2},0\right)$.

O gráfico da função *h* obtém-se a partir do gráfico da função *g* através de uma dilatação vertical de coeficiente 3.
Então, $f\rightarrow III$; $g\rightarrow II$; $h\rightarrow I$.

32.2. Como *c* corresponde ao máximo da função *h* e $D'_h=[-3,3]$, conclui-se que $c=3$.

$$f(x)=0\Leftrightarrow \sin(2x)=0\Leftrightarrow 2x=k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=1$, então $x=\frac{\pi}{2}$. Então, $a=\frac{\pi}{2}$.

$$g(x)=0\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $x=\frac{\pi}{4}$. Se $k=1$, então $x=\frac{3\pi}{4}$.

Donde se conclui que $b=\frac{3\pi}{4}$.

33.1. $D_g=\mathbb{R}$ e $D'_g=[-2,2]$.

33.2. Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se:

$$g(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=$$

$$=2\sin\left((3x+2\pi)-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_g$, $g(x)=g\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *g* é $\frac{2\pi}{3}$.

33.3. $g(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

O gráfico da função *g* obtém-se a partir do gráfico da função *f* através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}\left(\frac{\pi}{12},0\right)$, seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2.

Pág. 87

34.1.

a) Como 2π é o período positivo mínimo da função seno, tem-se:

$$f(x)=1+\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1+\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=$$

$$=1+\sin\left((3x+2\pi)+\frac{\pi}{6}\right)=1+\sin\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f$, $f(x)=f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{2\pi}{3}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ -1+1\le 1+\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 0\le f(x)\le 2$

Então, $D'_f=[0,2]$.

c) $f(0)=1+\sin\left(3\times 0+\frac{\pi}{6}\right)=1+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Logo, $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

$$f(x)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1+\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ 3x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

Se $k=0$, então $x=0\ \vee\ x=\frac{2\pi}{9}$.

Se $k=1$, então $x=\frac{2\pi}{3}\ \vee\ x=\frac{8\pi}{9}$.

Se $k=-1$, então $x=-\frac{2\pi}{3}\ \vee\ x=-\frac{4\pi}{9}$.

Donde se conclui que $A\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{3}{2}\right)$ e $C\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3}{2}\right)$.

34.2. $f(x)=1+\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1+\sin\left(3\left(x+\frac{\pi}{18}\right)\right)$

O gráfico da função *f* obtém-se a partir do gráfico da função *g* através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}\left(-\frac{\pi}{18},0\right)$, seguida de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$ e de uma translação associada ao vetor $\vec{v}\,(0,1)$.

35. $h(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-3=2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)-3$

O gráfico da função *h* obtém-se a partir do gráfico da função *g* através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}\left(\frac{\pi}{4},0\right)$, seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2 e de uma translação associada ao vetor $\vec{v}\left(0,-3\right)$.

Tarefa 5

1.1. Período da função *f*: $T=\frac{11\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}=\pi$.

1.2. $-1\le\sin\left(bx+\frac{\pi}{4}\right)\le1 \Leftrightarrow d-1\le d+\sin\left(bx+\frac{\pi}{4}\right)\le d+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d-1\le f(x)\le d+1$

Então, $D'_f=\left[d-1\,,d+1\right]$. Por observação gráfica sabe-se que $D'_f=\left[2\,,4\right]$, donde se conclui que $d=3$.

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{11\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\Leftrightarrow\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Leftrightarrow|b|=2\Leftrightarrow b=2\vee b=-2$

Como $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=2$, conclui-se que $b=-2$.

1.3. $C\left(0,f(0)\right)$ porque *C* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo *Oy*.

$f(0)=3+\sin\left(-2\times0+\frac{\pi}{4}\right)=3+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto, $C\left(0,3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.1. $D'_f=\left[-|a|+d\,,|a|+d\right]$

2.2. Período positivo mínimo da função *f*: $\frac{2\pi}{|b|}$.

Pág. 88

36.1.

a) Como 2π é o período positivo mínimo da função cosseno, tem-se:

$f(x)=3+\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)=3+\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)=$

$=3+\cos\left((4x+2\pi)-\frac{2\pi}{3}\right)=3+\cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f$, $f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{\pi}{2}$.

b)

$\forall x\in\mathbb{R},\ -1\le\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)\le1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ -1+3\le3+\cos\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)\le1+3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ 2\le f\ (x)\le4$

Então, $D'_f=\left[2,4\right]$.

36.2. O gráfico da função *g* obtém-se a partir do gráfico da função *f* através de uma translação associada ao vetor $\vec{u}\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$, seguida de uma translação associada ao vetor $\vec{v}\left(0,-3\right)$.

Tarefa 6

1.1.

a) A transformação geométrica que permite obter o gráfico da função *h* a partir do gráfico de *f* é a translação associada ao vetor $\vec{u}\left(\frac{\pi}{3},0\right)$.

b) A transformação geométrica que permite obter o gráfico da função *g* a partir do gráfico de *h* é a dilatação vertical de coeficiente 3.

1.2. Como 2π é o período positivo mínimo da função cosseno, tem-se:

$g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=$

$=3\cos\left((2x+2\pi)-\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\left(2(x+\pi)-\frac{\pi}{3}\right)=g(x+\pi)$.

Daqui se conclui que $\forall\ x\in D_g$, $g(x)=g(x+\pi)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *g* é π.

2.1.

$g(0)=0\Leftrightarrow-1+a\cos\left(b\times0+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-1+a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow a\times\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow a=2$

Por observação gráfica sabe-se que o período positivo mínimo da função *g* é: $T=\frac{10\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{12\pi}{3}=4\pi$.

Então, tem-se: $\frac{2\pi}{|b|}=4\pi\Leftrightarrow|b|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}\vee b=-\frac{1}{2}$.

Como $g\left(\frac{10\pi}{3}\right)=1$, conclui-se que $b=\frac{1}{2}$.

2.2. Sendo $a=2$ e $b=\frac{1}{2}$, então $g(x)=-1+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$.

$g(x)=0\ \wedge\ x\in\left[2\pi,\ 3\pi\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-1+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0\ \wedge\ x\in\left[2\pi,3\pi\right]\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \wedge x\in[2\pi,3\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \wedge x\in[2\pi,3\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in[2\pi,3\pi] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=4k\pi \vee x=-\frac{4\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbb{Z}\right) \wedge x\in[2\pi,3\pi] \Leftrightarrow x=\frac{8\pi}{3}$$

Pág. 89

37.1. Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se:

$$f(x)=\tan(2x)=\tan(2x+\pi)=\tan\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{\pi}{2}$.

37.2. Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se:

$$f(x)=\tan\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)=\tan\left(\frac{4\pi}{3}-2x-\pi\right)=$$

$$=\tan\left(\frac{4\pi}{3}-2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{\pi}{2}$.

37.3. Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se:

$$f(x)=-2\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}+\pi\right)+1=$$

$$=-2\tan\left(\left(\frac{\pi}{4}x+\pi\right)-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2\tan\left(\frac{\pi}{4}(x+4)-\frac{\pi}{2}\right)+1=$$

$$=f(x+4).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f(x+4)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é 4.

37.4. Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se:

$$f(x)=\tan\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=$$

$$=\tan\left(\left(\frac{x}{3}+\pi\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{(x+3\pi)}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=f(x+3\pi).$$ Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f(x+3\pi)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é 3π.

37.5. Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se:

$$f(x)=5-3\tan\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=5-3\tan\left(4x+\frac{\pi}{6}+\pi\right)=$$

$$=5-3\tan\left((4x+\pi)+\frac{\pi}{6}\right)=5-3\tan\left(4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_f,\ f(x)=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *f* é $\frac{\pi}{4}$.

38. $f(0)=g(0)=j(0)=0$ e $h(0)=-1$.

A função *h* corresponde ao gráfico IV porque, das quatros funções dadas, é a única cujo gráfico não passa pela origem do referencial.

Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} g(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} j(x)=-1$, conclui-se que a função *f* corresponde ao gráfico III, a função *g* corresponde ao gráfico II e a função *j* corresponde ao gráfico I.

Tarefa 7

1. O gráfico da função *g* obtém-se a partir do gráfico da função *f* através de uma dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de uma reflexão de eixo *Oy*. Então, a opção correta é a (C).

2.1. Como π é o período positivo mínimo da função tangente, tem-se:

$$h(x)=-1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=$$

$$=-1+\tan\left((2x+\pi)-\frac{\pi}{4}\right)=-1+\tan\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=h\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Daqui se conclui que $\forall x\in D_h,\ h(x)=h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, o período positivo mínimo da função *h* é $\frac{\pi}{2}$.

2.2. $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 2x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}=$

$$=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

A expressão geral das assíntotas verticais ao gráfico de *h* é:

$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Se $k=0$, então $x=\frac{3\pi}{8}$.

Se $k=1$, então $x=\frac{7\pi}{8}$.

Se $k=-1$, então $x=-\frac{\pi}{8}$.

Donde se conclui que $a=\frac{3\pi}{8}$, $b=\frac{7\pi}{8}$ e $c=-\frac{\pi}{8}$.

2.3. $h(x)=0 \Leftrightarrow -1+\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, então $x=\frac{\pi}{8}$.

Se $k=1$, então $x=\frac{5\pi}{8}$.

Donde se conclui que $x_A=\frac{5\pi}{8}$.

Pág. 90

39.1. $-1\le\cos(0,4t)\le 1 \Leftrightarrow -2,5\le 2,5\cos(0,4t)\le 2,5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40-2,5\le 40+2,5\cos(0,4t)\le 40+2,5 \Leftrightarrow 37,5\le d(t)\le 42,5$

A distância mínima da bola ao fundo do reservatório é de 37,5 cm.

$d(t)=37,5 \Leftrightarrow 40+2,5\cos(0,4t)=37,5 \Leftrightarrow \cos(0,4t)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,4t=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=2,5\pi+5k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$ tem-se $t=2,5\pi \Leftrightarrow t\approx 8$.

Após o início da experiência, a distância da bola ao fundo do reservatório é mínima, pela primeira vez, ao fim de aproximadamente 8 segundos.

39.2. O período positivo mínimo da função é $T=\frac{2\pi}{0,4}=5\pi$.

Logo, $p-\frac{\pi}{7}=5\pi \Leftrightarrow p=\frac{36\pi}{7}$.

Tarefa 8

1. Depois de inserirmos os dados da tabela em duas listas da calculadora, por exemplo nas listas L_1 e L_2, procedemos da seguinte forma:

Podemos considerar, por exemplo, $d(t)=40+3\sin(0,5t)$.

2. $-1\le\sin(0,5t)\le 1 \Leftrightarrow -3\le 3\sin(0,5t)\le 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40-3\le 40+3\sin(0,5t)\le 40+3 \Leftrightarrow 37\le d(t)\le 43$

Durante o tempo de ondulação, e de acordo com o modelo obtido, a maior e a menor distância da rolha ao fundo reservatório foram, respetivamente, 43 e 37 centímetros.

3.

$d(t)=38 \wedge t\in[45,60] \Leftrightarrow 40+3\sin(0,5t)=38 \wedge t\in[45,60] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(0,5t)=-\frac{2}{3} \wedge t\in[45,60] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(0,5t)\approx\sin(-0,73) \wedge t\in[45,60] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0,5t\approx -0,73+2k\pi \vee 0,5t\approx \pi-(-0,73)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}) \wedge$

$\wedge\ t\in[45,\ 60] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t\approx -1,46+4k\pi \vee t\approx 2\pi+1,46+4k\pi,\ k\in Z) \wedge t\in[45,60] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\approx 45,4 \vee t\approx 48,8 \vee t\approx 58,0$

Nos últimos 15 segundos de ondulação, a distância da rolha ao fundo do reservatório foi de 38 cm exatamente três vezes.

Pág. 92

40.1.

a) $x(0)=6\cos\left(\frac{\pi}{8}\times 0+\frac{\pi}{2}\right)=6\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=6\times 0=0$

A abcissa de *P* no instante $t=0$ é 0.

b)

$x(2)=6\cos\left(\frac{\pi}{8}\times 2+\frac{\pi}{2}\right)=6\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=6\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=6\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}$

A abcissa de *P* no instante $t=2$ é $-3\sqrt{2}$.

40.2. A amplitude do movimento de *P* é 6.

40.3. O período *T* deste oscilador harmónico é $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$ e a frequência *f* é $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{16}$.

40.4.

$|x(t)|=3 \Leftrightarrow x(t)=3 \vee x(t)=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=3 \vee 6\cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2} \vee \cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{3} \vee \cos\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee \frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee$

$\vee \frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee \frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}t+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+2k \vee \frac{1}{8}t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}+2k \vee \frac{1}{8}t+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+2k \vee$

$\vee \frac{1}{8}t+\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}+2k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=-\frac{4}{3}+16k \vee t=-\frac{20}{3}+16k \vee$

$\vee t=\frac{4}{3}+16k \vee t=-\frac{28}{3}+16k,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 20[$, conclui-se que:

$t=\frac{4}{3} \vee t=\frac{20}{3} \vee t=\frac{28}{3} \vee \vee t=\frac{44}{3} \vee t=\frac{52}{3}$.

41. A amplitude deste oscilador harmónico é 5, logo a distância máxima da origem é 5.

$|x(t)|=5 \Leftrightarrow x(t)=5 \vee x(t)=-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}\right)=5 \vee 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}\right)=-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}\right)=1 \vee \cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t+\frac{2\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{1}{6}t+\frac{2}{3}=k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}t=-\frac{2}{3}+k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=-4+6k,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $t\in[0,25[$, conclui-se que $t\in\{2\ ,\ 8\ ,\ 14\ ,\ 20\}$.

Pág. 93

42.1.

$-1\le\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-2\le 5+2\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\le 5+2 \Leftrightarrow 3\le f(t)\le 7$

A distância mínima e máxima do corpo ao solo é, respetivamente, 3 dm e 7 dm .

42.2. A fase do oscilador harmónico é $\frac{\pi}{3}$.

Pág. 94

Proposta 1

1.1.

a) Atendendo à lei dos senos, tem-se:

$\frac{\sin\alpha}{\overline{BC}}=\frac{\sin\beta}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{5}}{8}=\frac{\sin\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3}{40}=\frac{\sin\beta}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\beta=\frac{3\times 12}{40} \Leftrightarrow \sin\beta=\frac{9}{10}$

b) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25}$

Como α é agudo (pois o triângulo [*ABC*] é acutângulo), conclui-se que $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^2+\cos^2\beta=1 \Leftrightarrow \cos^2\beta=\frac{19}{100}$

Como β é agudo (pois o triângulo [*ABC*] é acutângulo), conclui-se que $\cos\beta=\frac{\sqrt{19}}{10}$.

1.2.

a) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{19}}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}=$

$=\frac{3\sqrt{19}+36}{50}$

b)

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\frac{\sqrt{19}}{10}\times\frac{4}{5}+\frac{9}{10}\times\frac{3}{5}=$

$=\frac{4\sqrt{19}+27}{50}$

c)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{19}}{10}-\frac{3}{5}\times\frac{9}{10}=$

$=\frac{4\sqrt{19}-27}{50}$

Proposta 2

2.1.

$\overline{AD}^2=4^2+1^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2=17 \Leftrightarrow \overline{AD}=\sqrt{17}$ e $\overline{BC}^2=5^2-4^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BC}^2=9 \Leftrightarrow \overline{BC}=3$.

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=\frac{4}{5}\times\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=$

$=\frac{16}{5\sqrt{17}}+\frac{3}{5\sqrt{41}}=\frac{19}{5\sqrt{17}}$

2.2.

$\sin(\theta+\delta)=\sin(\pi-(\beta-\alpha))=\sin(\beta-\alpha)=$

$=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\frac{3}{5}\times\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{8}{5\sqrt{17}}$

2.3.

$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{19}{16}}=\frac{8}{19}$

Pág. 95

Proposta 3

3.1.

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow -\sin\theta=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin\theta=-\frac{2}{3}$

Como $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ e $\sin\theta<0$, conclui-se que $\theta\in 3.^{\circ}$ Q .

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \cos^2\theta=\frac{5}{9}$

Como $\theta\in 3.^{\circ}$ Q , conclui-se que $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Então, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.2.

$$\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)-\cos(2\theta)=$$

$$=\sin\theta\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\theta\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}-\left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}\right)=\frac{6\sqrt{2}+3\sqrt{10}-2}{18}$$

3.3.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)+\sin(2\theta)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\theta-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{15}}{6}+\frac{1}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}=\frac{-3\sqrt{15}+6+8\sqrt{5}}{18}$$

3.4.

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}+1}{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times 1}=\frac{2\sqrt{5}+5}{5-2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{5}+5\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)}{\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)}=\frac{10\sqrt{5}+20+25+10\sqrt{5}}{25-20}=\frac{20\sqrt{5}+45}{5}=$$

$$=4\sqrt{5}+9$$

Proposta 4

4.1.

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=$$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=$$

$$=(\sin\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha\sin\beta)^2=$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\beta\right)-\left(1-\sin^2\alpha\right)\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

4.2.

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$=(\cos\alpha\cos\beta)^2-(\sin\alpha\sin\beta)^2=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\left(1-\sin^2\alpha\right)\cos^2\beta-\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\beta\right)=$$

$$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

4.3.

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}\times\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}\times\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-1}{1-\tan^2\alpha}=\frac{-\left(-\tan^2\alpha+1\right)}{1-\tan^2\alpha}=-1$$

Proposta 5

5.1.

$$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

5.2. O máximo absoluto da função f é 2 porque $D'_f=[-2,2]$.

$$f(x)=2\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

Então, $A\left(\frac{\pi}{3},2\right)$.

5.3. O mínimo absoluto da função f é -2 porque $D'_f=[-2,2]$.

$$f(x)=-2\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-2\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{3}$$

Então, $B\left(\frac{4\pi}{3},-2\right)$.

Pág. 96

Proposta 6

6.1.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \ \vee \ x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.2. $\sin^2 x=3\cos^2 x\Leftrightarrow 1-\cos^2 x=3\cos^2 x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \ \vee \ \cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \ \vee \ \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ \vee$

$\vee \ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.3. $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{x}{2}+2k\pi \ \vee \ 2x=-\frac{x}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{2}=2k\pi \ \vee \ \frac{5x}{2}=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{4k\pi}{3} \ \vee \ x=\frac{4k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$

6.4. $\sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{2x}{3}\right)=1\Leftrightarrow \frac{2x}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+3k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.5. $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin x-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{x}{2}\right)=-\sin x\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sin(-x)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=-x+2k\pi \ \vee \ \frac{x}{2}=\pi+x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{2}=2k\pi \ \vee \ -\frac{x}{2}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{4k\pi}{3} \ \vee \ x=-2\pi-4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.6. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=-\frac{1\pi}{12}+2k\pi \ \vee \ \frac{x}{2}=\frac{19\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+4k\pi \ \vee \ x=\frac{19\pi}{6}+4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.7. $\sqrt{3}\cos(3x)-\sin(3x)=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(3x)-\frac{1}{2}\sin(3x)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(3x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(3x)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ \vee \frac{\pi}{6}+3x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} \ \vee \ x=-\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

6.8. $4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.9. $2\sin^3 x\cos x+\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(2\sin x\cos x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(\sin(2x)+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=0 \ \vee \ \sin(2x)+1=0$

$\Leftrightarrow \sin x=0 \ \vee \ \sin(2x)=-1$

$\Leftrightarrow x=k\pi \ \vee \ 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=k\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

6.10. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos x=\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\cos x=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{1}{2}+\cos x=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\times\frac{3}{2}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\sin x\times\frac{1}{2}+\cos x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin x\times\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\times\sin\frac{\pi}{3}=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Proposta 7

7.1.

a) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(2\times\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $3\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}\times2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=$

$=\frac{3}{2}\times\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}\times\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

7.2.

a)

$\cos\left(\frac{\pi}{6}-k\right)=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos k+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin k=\frac{2}{5}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}\cos k+\frac{1}{2}\sin k=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos k+\sin k=\frac{4}{5}$

b)

$4\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\right)+1=0\Leftrightarrow4\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos k+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin k\right)=-1$

$\Leftrightarrow4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos k+\frac{1}{2}\sin k\right)=-1\Leftrightarrow2\sqrt{3}\cos k+2\sin k=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos k+\sin k=-\frac{1}{2}$

Proposta 8

8.1.

a) $\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos^2x-\left(1-\cos^2x\right)=$

$=\cos^2x-1+\cos^2x=2\cos^2x-1$

b) $\cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x=1-\sin^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x$

8.2.

a) Considerando $2x=y$ na equação $\cos(2x)=2\cos^2x-1$, tem-se:

$\cos y=2\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)-1\Leftrightarrow\cos y+1=2\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\cos y+1}{2}=\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)$

b) Considerando $2x=y$ na equação $\cos(2x)=1-2\sin^2x$, tem-se:

$\cos y=1-2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)\Leftrightarrow2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)=1-\cos y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{1-\cos y}{2}$

8.3.

a) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow-\cos\alpha=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{3}$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\alpha+1}{2}\Leftrightarrow\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{3}+1}{2}\Leftrightarrow\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}\vee\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1}{3}}$

Como $\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, então $\frac{\alpha}{2}\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$.

Logo, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)<0$.

Donde se conclui que $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{2}{3}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0$ porque $\frac{\alpha}{2}\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$.

Donde se conclui que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Pág. 97

Proposta 9

9.1.

a) $D_f=\{x\in\mathbb{R}:1+\cos x\neq0\}=\{x\in\mathbb{R}:\cos x\neq-1\}$

Então, $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x\neq\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

b) $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sin x}{1+\cos x}=0\Leftrightarrow\sin x=0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge x\in D_f\Leftrightarrow x=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

c) $f(x)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sin x=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos x\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z\right)\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow\left(x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\vee x=\pi+2k\pi,k\in Z\right)\wedge x\in D_f$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Se $k=0$, então $x=\frac{2\pi}{3}$.

Se $k=-1$, então $x=-\frac{4\pi}{3}$.

Donde se conclui que $b-a=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{6\pi}{3}=2\pi$.

9.2.

a)

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{-1}{1+0}=-1$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{1+0}=1$$

Ora, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Donde se conclui que $0\in\left[f\left(\frac{3\pi}{2}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

b)

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sin x}{1+\cos x}=0\;\Leftrightarrow \sin x=0\wedge x\in D_f\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-=k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\wedge x\in D_f\Leftrightarrow x=2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$$

Logo, $\forall\, x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\; f(x)\neq 0$.

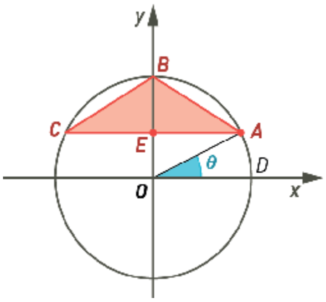
9.3. Nos resultados obtidos em 9.3. não contrariam o Teorema de Bolzano porque a função *f* não é contínua em $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

Proposta 10

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BE}}{2}=\frac{\overline{AC}\times\left(\overline{OB}-\overline{OE}\right)}{2}$$

$$f(\theta)=\frac{2\cos\theta\times(1-\sin\theta)}{2}=\frac{2\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta}{2}=$$

$$=\frac{2\cos\theta-\sin(2\theta)}{2}=\cos\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)$$



Pág. 98

Proposta 11

11.1.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{3x\to0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\times\frac{3}{2}\right)=1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

11.2.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{1}{2}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times1}=2$$

11.3.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{2x}-\frac{\sin x}{2x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times1=0$$

11.4.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan(2x)}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin(2x)}{x\cos(2x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{3}\lim_{2x\to0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times\frac{2}{\cos(2x)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\times1-\frac{1}{3}\times(1\times2)=-\frac{1}{3}$$

11.5.

$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}\right)=$$

$$=2\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=2\times1^2\times\frac{1}{2}=1$$

11.6.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{-\sin y}{2y}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=$$

$$=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>:

Fazendo $x-\frac{\pi}{2}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{2}$.

Se $x\to\frac{\pi}{2}$, então $y\to0$.

11.7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan(3x)}{3x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{\tan\left(3\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{3y}=\lim_{y\to0}\frac{\tan(3y+\pi)}{3y}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\tan(3y)}{3y}=\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin(3y)}{3y}\times\frac{1}{\cos(3y)}\right)=$$

$$=\lim_{3y\to0}\left(\frac{\sin(3y)}{3y}\right)\times\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{\cos(3y)}\right)=1\times\frac{1}{1}=1$$

<u>Mudança de variável</u>:

Fazendo $x-\frac{\pi}{3}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{3}$.

Se $x\to\frac{\pi}{3}$, então $y\to0$.

11.8.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y(y+1+1)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin y}{y}\times\frac{1}{y+2}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>:
Fazendo $x-1=y$, vem $x=y+1$.
Se $x\to1$, então $y\to0$.

11.9.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to0}\frac{1+\cos(y+\pi)}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y^2(1+\cos y)}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos^2 y}{y^2(1+\cos y)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin^2 y}{y^2}\times\frac{1}{1+\cos y}\right)=\left(\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}\right)^2\times\lim_{y\to0}\left(\frac{1}{1+\cos y}\right)=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>:
Fazendo $x-\pi=y$, vem $x=y+\pi$. Se $x\to\pi$, então $y\to0$.

11.10.

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+3\sin x}{5x+\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2+3\times\frac{\sin x}{x}}{5+\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim_{x\to0}\left(2+3\times\frac{\sin x}{x}\right)}{\lim_{x\to0}\left(5+\frac{\sin x}{x}\right)}=$$

$$=\frac{2+3\times1}{5+1}=\frac{5}{6}$$

11.11.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\ln(\sin(2x))-\ln(2x)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\ln\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\right)=$$

$$=\ln\left(\lim_{2x\to0^+}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)\right)=\ln1=0$$

Proposta 12

12.1.

a) 0 é ponto aderente e pertence ao domínio da função *f*.
Então *f* é contínua em $x=0$ se existir $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, ou seja, se
$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{\lim\limits_{2x\to0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\times2\right)}{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}}=\frac{1\times2}{1}=2$$

$$f(0)=4\log_2\left(\sqrt{2}\right)=4\times\frac{1}{2}=2$$

Donde se conclui que *f* é contínua em $x=0$.

b) $\frac{\pi}{4}$ é ponto aderente e pertence ao domínio da função *f*.

Então *f* é contínua em $\frac{\pi}{4}$ se existir $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)$, ou seja, se

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\left(\frac{x}{\pi}\cos x\right)=\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{4x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{\sin\left(2\left(y+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{2}\right)}{4y}=$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin(2y)}{4y}=\frac{1}{2}\lim_{2y\to0^+}\frac{\sin(2y)}{2y}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>:

Fazendo $x-\frac{\pi}{4}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{4}$. Se $x\to\frac{\pi}{4}^+$, então $y\to0^+$.

Assim sendo, não existe $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)$.

Donde se conclui que *f* é descontínua em $x=\frac{\pi}{4}$.

12.2. 1 é ponto aderente e pertence ao domínio da função *f*.
Então, *f* é contínua em $x=1$ se existir $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, ou seja, se
$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin(x-1)}{2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to0^-}\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to0^-}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>:
Fazendo $x-1=y$, vem $x=y+1$.
Se $x\to1^-$, então $y\to0^-$.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y(y+1+1)}=$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}\times\lim_{y\to0^+}\frac{1}{y+2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

<u>Mudança de variável</u>:
Fazendo $x-1=y$, vem $x=y+1$.
Se $x\to1^+$, então $y\to0^+$.
$f(1)=k$

Portanto, *f* é contínua em $x=1$ se $k=\frac{1}{2}$.

Pág. 99

Proposta 13

13.1.

$$m_t = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{x+2\sin x-\frac{\pi}{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}}+\frac{2\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right) =$$

$$=1+2\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{y} =$$

$$=1+2\lim_{y\to0}\frac{\sin y\cos\frac{\pi}{3}+\cos y\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{y} =$$

$$=1+2\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{2}\sin y+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{y} =$$

$$=1+2\times\frac{1}{2}\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\lim_{y\to0}\frac{\cos y-1}{y} =$$

$$=1+1\times1+\sqrt{3}\lim_{y\to0}\frac{(\cos y-1)(\cos y+1)}{y(\cos y+1)} =$$

$$=2+\sqrt{3}\lim_{y\to0}\frac{\cos^2 y-1}{y(\cos y+1)} = 2+\sqrt{3}\lim_{y\to0}\frac{-\sin^2 y}{y(\cos y+1)} =$$

$$=2+\sqrt{3}\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin y}{y}\times\frac{-\sin y}{\cos y+1}\right) = 2+\sqrt{3}\times(1\times0)=2$$

<u>Mudança de variável</u>:

Fazendo $x-\frac{\pi}{3}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{3}$.

Se $x\to\frac{\pi}{3}$, então $y\to0$.

13.2. $f'(x)=(x+2\sin x)'=1+2\cos x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0, 2\pi]$, tem-se $x=\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{3}$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f'	+	+	0	–	0	+	+
f	$f(0)$	↗	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	↘	$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	↗	$f(2\pi)$

f é estritamente crescente nos intervalos $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ e $\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

f é estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

$f(0)=0+2\sin 0=0+2\times0=0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

$f(2\pi)=2\pi+2\sin(2\pi)=2\pi+2\times0=2\pi$

Máximos relativos: $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$ e 2π.

Mínimos relativos: 0 e $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$.

13.3. $f''(x)=(1+2\cos x)'=-2\sin x$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -2\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in[0, 2\pi]$, tem-se $x=0 \vee x=\pi \vee x=2\pi$.

x	0		π		2π
f''	–	–	0	+	+
f	0	∩	π	∪	2π

No intervalo $[0, \pi]$, a concavidade é voltada para baixo.

No intervalo $[\pi, 2\pi]$, a concavidade é voltada para cima.

Ponto de inflexão: $P\ (\pi, \pi)$

13.4.

a)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to0^+}\frac{x+2\sin x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{x}+\frac{2\sin x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(1+2\times\frac{\sin x}{x}\right)=1+2\times1=3$$

b)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\sin(2x)}\lim_{x\to0^+}\frac{x+2\sin x}{\sin(2x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\sin(2x)}+\frac{2\sin x}{\sin(2x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2\times\frac{\sin(2x)}{2x}}+\frac{2\sin x}{2\sin x\cos x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{2x\to0^+}\left(2\times\frac{\sin(2x)}{2x}\right)}+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{\cos x}\right)=\frac{1}{2\times1}+\frac{2}{1}=\frac{3}{2}$$

Proposta 14

14.1.

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{3\sin\left(\frac{x}{2}\right)-3}{x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3\sin\left(\frac{y+\pi}{2}\right)-3}{y}=3\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-1}{y}=-3\lim_{y\to0}\frac{1-\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{y}=$$

$$=-3\lim_{y\to0}\frac{\left(1-\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)\left(1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)}{y\left(1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)}=-3\lim_{y\to0}\frac{1-\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y\left(1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)}=$$

$$=-3\lim_{\frac{y}{2}\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{-\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)}\right)=-3\times1\times\frac{1}{2}\times0=0$$

Mudança de variável:

Fazendo $x-\pi=y$, vem $x=y+\pi$.

Se $x\to\pi$, então $y\to0$.

14.2.

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin(2x)-0}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{2x\to0}\left(1+\frac{\sin(2x)}{2x}\times2\right)=1+1\times2=3$$

14.3.

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x-0}{x-\frac{\pi}{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\left(y+\frac{\pi}{2}\right)(-\sin y)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left[\left(-y-\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{\sin y}{y}\right]=-\frac{\pi}{2}\times1=-\frac{\pi}{2}$$

Mudança de variável:

Fazendo $x-\frac{\pi}{2}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{2}$.

Se $x\to\frac{\pi}{2}$, então $y\to0$.

Proposta 15

15.1.

$$f'(x)=\left(\sin^2 x\cos x\right)'=2\sin x\cos x\cdot\cos x+\sin^2 x(-\sin x)=$$

$$=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$$

15.2.

$$f'(x)=\left(\frac{\cos\left(x^2\right)}{1+\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{-2x\sin\left(x^2\right)(1+\cos x)-(-\sin x)\cos\left(x^2\right)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{-2x\sin\left(x^2\right)(1+\cos x)+\sin x\cos\left(x^2\right)}{(1+\cos x)^2}$$

15.3.

$$f'(x)=\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{x^2}\sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

15.4.

$$f'(x)=\left(\sin^2 x-\sin\left(x^2\right)\right)'=2\sin x\cos x-2x\cos\left(x^2\right)=$$

$$=\sin(2x)-2x\cos\left(x^2\right)$$

15.5.

$$f'(x)=\left(\cos x\, e^{\sin x}\right)'=-\sin x\, e^{\sin x}+\cos x\times\cos x\, e^{\sin x}=$$

$$=e^{\sin x}\left(-\sin x+\cos^2 x\right)=e^{\sin x}\left(\cos^2 x-\sin x\right)$$

15.6.

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}=\frac{1}{1+\sin(2x)}$$

Pág. 100

Proposta 16

16.1.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x+\frac{1}{2}\sin x\cos x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin x\cos x}{2x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\cos x}{2}\right)=$$

$$=1+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

16.2.

$$f'(x)=\left(\sin x+\frac{1}{2}\sin x\cos x\right)'=$$

$$=\cos x+\frac{1}{2}\left(\cos x\times\cos x+(-\sin x)\times\sin x\right)=$$

$$=\cos x+\frac{1}{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)$$

16.3. $x-4y+1=0\Leftrightarrow 4y=x+1\Leftrightarrow y=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

Se a reta tangente é paralela à reta de equação $x-4y+1=0$ então tem declive $\frac{1}{4}$.

$$m_t=\frac{1}{4}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\frac{1}{2}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\frac{1}{2}\left(\cos^2 x-1+\cos^2 x\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\cos^2 x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4\cos^2 x+4\cos x-3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\vee \underbrace{\cos x=-\frac{3}{2}}_{\text{impossível}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0,2\pi]$, tem-se $x=\frac{\pi}{3}\vee x=\frac{5\pi}{3}$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}=-\frac{5\sqrt{3}}{8}$$

Assim sendo, os pontos do gráfico de *f* em que a reta tangente é paralela à reta de equação $x-4y+1=0$ são $P_1\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\sqrt{3}}{8}\right)$ e $P_2\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{5\sqrt{3}}{8}\right)$.

16.4.

$$f''(x)=\left(\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)'=-\sin x+\frac{1}{2}\left(-2\sin(2x)\right)=$$

$$=-\sin x-\sin(2x)$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \sin(2x)=-\sin x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=-x+2k\pi\ \vee\ 2x=\pi+x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x=2k\pi\ \vee\ x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\ \vee\ x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0,2\pi]$, tem-se:

$$x=0\vee x=\frac{2\pi}{3}\vee x=\pi\vee x=\frac{4\pi}{3}\vee\ x=2\pi$$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
f''	–	–	0	+	0	–	0	+	+
f	$f(0)$	$\frown$	$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\smile$	$f(\pi)$	$\frown$	$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$\smile$	2π

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$f(\pi)=\sin(\pi)+\frac{1}{2}\sin(\pi)\cos(\pi)=0+\frac{1}{2}\times0\times(-1)=0$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Então, $A\left(\frac{2\pi}{3},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$, $B(\pi,0)$ e $C\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

Proposta 17

17.1.

$$A(\alpha)=\frac{\cos\alpha\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}$$

Nota: A altura de um triângulo equilátero de lado a é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

17.2.

a) $A(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{16}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\vee\cos\alpha=-\frac{1}{2}$$

Como $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

b) O perímetro do triângulo [*RPQ*] é dado, em função de α, por $P(\alpha)=3\cos\alpha$.

$$P(\alpha)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 3\cos\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi\vee\alpha=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

17.3.

$$A'(\alpha)=\left(\frac{\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}\right)'=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\cos\alpha\,(-\sin\alpha)=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2\alpha)$$

Pág. 101

Proposta 18

18.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2},\, k\in\mathbb{Z}$

A abcissa do ponto *R* é o menor dos zeros positivos da função *f*, logo $R\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

$-1\leq\sin(2x)\leq 1 \;\Leftrightarrow -2\leq 2\sin(2x)\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq f(x)\leq 2$

O máximo da função *f* é 2.

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin(2x)=2 \Leftrightarrow \sin(2x)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}$

Então, a abcissa do ponto *M* é $\dfrac{\pi}{4}$. Assim, $M\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$.

18.2. Sendo $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$, então a ordenada do ponto *P* é

$y_P=f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\times\dfrac{1}{2}=1$.

A altura do triângulo [*PQM*] é dada por y_M-y_P, ou seja, é igual a 1.

A abcissa do ponto *Q* é $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{5\pi}{12}$.

$$A_{[PQNM]}=\frac{\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\times 1}{2}=\frac{\frac{4\pi}{12}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

18.3. Os pontos *P* e *Q* podem ser escritos em função de α da seguinte forma: $P(\alpha,2\sin(2\alpha))$ e $Q\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha,2\sin(2\alpha)\right)$.

A área do triângulo [*PQM*] é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\times(2-2\sin(2\alpha))}{2}=\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\times(1-\sin(2\alpha))$$

A expressão que representa o valor da área do triângulo [*PQM*] é a II.

18.4. $f'(x)=(2\sin(2x))'=2(2\cos(2x))=4\cos(2x)$ e

$f''(x)=(4\cos(2x))'=4(-2\sin(2x))=-8\sin(2x)$.

$4f(x)+f'(x)+f''(x)=2\wedge x\in[0,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sin(2x)+4\cos(2x)-8\sin(2x)=2\wedge x\in[0,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cos(2x)=2\wedge x\in[0,\pi]\Leftrightarrow\cos(2x)=\dfrac{1}{2}\wedge x\in[0,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\vee 2x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right)\wedge x\in[0,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\vee x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right)\wedge x\in[0,\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}\vee x=\dfrac{5\pi}{6}$

Proposta 19

19.1. As ordenadas dos pontos *B* e *C* correspondem a extremos relativos da função.

$f'(x)=(x-2\cos x)'=1-2(-\sin x)=1+2\sin x$

$f'(x)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow 1+2\sin x=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin x=-\dfrac{1}{2}\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\vee x=\dfrac{11\pi}{6}$

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
f'	+	+	0	–	0	+	+
f	-2	↗	$\frac{7\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	$\frac{11\pi}{6}-\sqrt{3}$	↗	$2\pi-2$

Conclui-se então que $B\left(\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$ e $C\left(\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}-\sqrt{3}\right)$.

19.2. A função *f* é contínua em $[0,\pi]$.

$f(0)=-2$ e $f(\pi)=\pi+2\approx 5{,}14$.

Como *f* é contínua em $[0,\pi]$ e $f(0)<4<f(\pi)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy conclui-se que a equação $f(x)=4$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0,\pi[$. Logo, também podemos afirmar que tem, pelo menos, uma solução em $[0,\pi]$.

Sendo a função estritamente crescente no intervalo $[0,\pi]$, então a solução da equação é única.

19.3. $f''(x)=(1+2\sin x)'=2\cos x$

$f''(x)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow 2\cos x=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos x=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f''	+	+	0	–	–
f	-2	∪	$\frac{\pi}{2}$	∩	$\pi+2$

As coordenadas do ponto de inflexão são $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Pág. 102

Proposta 20

20.1. $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

20.2. <u>Assíntotas verticais</u>

Como *g* é contínua no seu domínio (por ser a soma de duas funções contínuas), também é contínua em $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Então, só as retas de equações $x=\dfrac{\pi}{2}$ e $x=\dfrac{3\pi}{2}$ poderão ser assíntotas verticais ao gráfico de *g* no intervalo $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\pi x+\tan x)=\pi\times\frac{\pi}{2}+\tan\left(\frac{\pi}{2}^+\right)=-\infty\ .$$

Portanto, a reta $x=\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} g(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(\pi x+\tan x)=\pi\times\frac{3\pi}{2}+\tan\left(\frac{3\pi}{2}^-\right)=+\infty\ .$$

Portanto, a reta $x=\frac{3\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntotas não verticais

Não existem assíntotas não verticais ao gráfico de g no intervalo $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ porque $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ é um conjunto limitado.

20.3. $g'(x)=(\pi x+\tan x)'=\pi+\frac{1}{\cos^2 x}$

$$g''(x)=\left(\pi+\frac{1}{\cos^2 x}\right)'=0+\frac{0-1\times 2\cos x\times(-\sin x)}{\cos^4 x}=$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x}=\frac{\sin(2x)}{\cos^4 x}$$

Proposta 21

21.1.

a) $D_{f\circ g}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,2\pi[: g(x)\in\mathbb{R}^+\}$

$g(x)\in\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 1+\sin x>0 \Leftrightarrow \sin x>-1 \Leftrightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Então, $D_{f\circ g}=[0,2\pi[\,\backslash\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1+\sin x)=\ln(1+\sin x)$

c) Assíntotas verticais

$\lim_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 0^+}(\ln(1+\sin x))=\ln(1+0)=0$

A reta de equação $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de $f\circ g$.

$\lim_{x\to 2\pi^-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 2\pi^-}(\ln(1+\sin x))=\ln(1+0)=0$

A reta de equação $x=2\pi$ não é assíntota vertical ao gráfico de $f\circ g$.

$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(\ln(1+\sin x))=\ln\left(1+(-1)^+\right)=$

$=\ln(0^+)=-\infty$

A reta de equação $x=\frac{3\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de $f\circ g$.

Assíntotas verticais

Como o domínio da função $f\circ g$ é um conjunto limitado, o seu gráfico não admite assíntotas não verticais.

21.2. $(f\circ g)(x)=\ln(1+\sin x)$

$(f\circ g)'(x)=(\ln(1+\sin x))'=\frac{\cos x}{1+\sin x}$

$\forall x\in D_{f\circ g}$, tem-se:

$$(f\circ g)''(x)=\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)'=$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\times\cos x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(\sin x+1)}{(1+\sin x)^2}=\frac{-1}{1+\sin x}$$

Proposta 22

22.1. $f'(x)=\left(\frac{\sin x}{2-\cos x}\right)'=\frac{\cos x(2-\cos x)-\sin x\times\sin x}{(2-\cos x)^2}=$

$$=\frac{2\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}{(2-\cos x)^2}=\frac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}$$

22.2. $f'(x)=0\wedge x\in]0,\pi[\Leftrightarrow\frac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}=0\wedge x\in]0,\pi[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\wedge x\in]0,\pi[\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f'		+	0	–	
f		↗	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↘	

f é estritamente crescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$.

f é estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right[$.

Máximo absoluto: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

22.3. $f''(x)=\left(\frac{-1+2\cos x}{(2-\cos x)^2}\right)'=$

$$=\frac{-2\sin x(2-\cos x)^2-(-1+2\cos x)\times 2(2-\cos x)\sin x}{(2-\cos x)^4}=$$

$$=\frac{-2\sin x(2-\cos x)[(2-\cos x)+(-1+2\cos x)]}{(2-\cos x)^4}=$$

$$=\frac{-2\sin x(1+\cos x)}{(2-\cos x)^3}$$

22.4. O gráfico de f não tem pontos de inflexão porque $\forall x\in]0,\pi[,\ f''(x)<0$.

Pág. 103

Proposta 23

23.1. $f'(x)=\left(2\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)'=2\cos x-\frac{1}{2}\times 2\cos(2x)=$

$=2\cos x-\cos(2x)$

$f''(x)=\left(2\cos x-\cos(2x)\right)'=-2\sin x+2\sin(2x)$

$f''(x)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow -2\sin x+2\sin(2x)=0\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin x\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2x=x+2k\pi\vee 2x=\pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x=2k\pi\vee x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right)\wedge x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\vee x=\frac{\pi}{3}\vee x=\pi\vee x=\frac{5\pi}{3}\vee x=2\pi$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f''	0	+	0	–	0	+	0	–	0
f	0	$\cup$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\cap$	0	$\cup$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\cap$	0

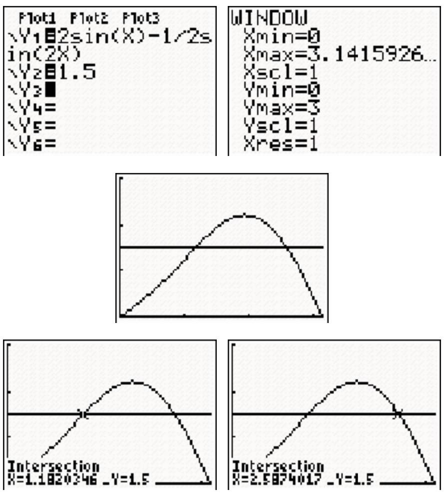
As abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de *f* são $\frac{\pi}{3}$, π e $\frac{5\pi}{3}$.

23.2.

a) $A_{[ABC]}=\frac{2\sin\alpha\,(2-\cos\alpha)}{2}=2\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=$

$=2\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin(2\alpha)=f(\alpha)$

b) Quando $\alpha=\frac{\pi}{2}$, os pontos *A* e *B* coincidem com os pontos de interseção da circunferência trigonométrica com o eixo *Oy*.
Nesse caso, a área do triângulo [*ABC*] é igual a 2.
Pretende-se determinar graficamente as soluções da equação $f(\alpha)=0{,}75\times 2$, ou seja, $2\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin(2\alpha)=1{,}5$, em que $\alpha\in\left]0,\pi\right[$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, procede-se da seguinte forma:



Conclui-se, então, que $\alpha\approx 1{,}18\text{ rad}\vee\alpha\approx 2{,}59\text{ rad}$.

Pág. 104

Proposta 24

24.1. $h(0)=40+50e^{-0{,}2\times 0}\cos(0)=40+50=90$

O concorrente saltou de 90 metros de altura.

24.2.

$h(t)=40\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 40+50e^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=40\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 50e^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=0\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=0\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow\frac{\pi t}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{t}{3}=\frac{1}{2}+k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}+3k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge 0\le t\le 10\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=1{,}5\vee t=4{,}5\vee t=7{,}5$

O concorrente encontrou-se a 40 metros do solo ao fim de 1,5 segundos, 4,5 segundos e 7,5 segundos.

24.3.

$\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(40+50e^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)=$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(40+\frac{50\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)}{e^{0{,}2t}}\right)=40+0=40$

Com o passar do tempo a altura tende a estabilizar e o concorrente ficará a 40 metros do solo.

24.4. $h'(t)=\left[40+50e^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]'=$

$=0+50\left(-0{,}2e^{-0{,}2t}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+50e^{-0{,}2t}\left(-\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)=$

$=-50e^{-0{,}2t}\left(0{,}2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right)$

24.5. A função h' é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, em particular é contínua em $[3,6]$.

$h'(3)=-50e^{-0{,}6}\left(0{,}2\cos(\pi)+\frac{\pi}{3}\sin(\pi)\right)\approx 5{,}5$

$h'(6)=-50e^{-1{,}2}\left(0{,}2\cos(2\pi)+\frac{\pi}{3}\sin(2\pi)\right)\approx -3{,}0$

Como função h' é contínua em $[3,6]$ e $h'(6)<0<h'(3)$, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy conclui-se que $\exists c\in\left]3,6\right[:h'(c)=0$. Como a função derivada de *h* passa de positiva a negativa, no intervalo $\left]3,6\right[$, conclui-se que tem pelo menos um zero nesse intervalo.

Proposta 25

25.1.

a)

$$-1\le\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\le 1\Leftrightarrow -0{,}25\le 0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\le 0{,}25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}25\ge -0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\ge -0{,}25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2{,}5+0{,}25\ge 2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\ge 2{,}5-0{,}25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2{,}25\le V(t)\le 2{,}75$$

Volume máximo: 2,75 l ; Volume mínimo: 2,25 l.

b)

$$V(1)=2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2{,}5 \quad \text{e}$$

$$V(2)=2{,}5-0{,}25\cos(\pi)=2{,}75\,.$$

O volume de ar de reserva nos instantes $t=1$ e $t=2$ é igual a 2,5 l e 2,75 l, respetivamente.

25.2.

$$V'(t)=\left(2{,}5-0{,}25\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'=-0{,}25\times\left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{0{,}25\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Se $0<t<2$ então $V'(t)>0$ e se $2<t<4$ então $V'(t)<0$.

O que significa que durante os primeiros dois segundos de um ciclo respiratório o animal está na fase de inspiração e que nos últimos dois segundos está na fase de expiração.

7 minutos e 29 segundos = 420 + 29 segundos = 449 segundos

e $\frac{449}{4}=112+\frac{1}{4}$. O animal, no instante em que completa 7 minutos e 29 segundos da experiência, encontra-se na fase de inspiração.

25.3.

a) $$V''(t)=\left(\frac{0{,}25\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)'=\frac{0{,}25\pi}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{0{,}25\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$V''(t)=0\Leftrightarrow\frac{0{,}25\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\pi t}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow t=1+2k,\,k\in\mathbb{Z}$$

No intervalo $[4,8]$, a função V'' tem dois zeros: 5 e 7.

x	4		5		7		8
V''	+	+	0	–	0	+	+
V	2,25	∪	2,5	∩	2,5	∪	2,25

As coordenadas dos pontos de inflexão do gráfico da função V no intervalo $[4,8]$ são $(5;2{,}5)$ e $(7;2{,}5)$.

b) A experiência decorreu durante 10 minutos, ou seja, durante 600 segundos. A função V é periódica de período positivo mínimo 4, logo no intervalo $[0,600]$ existem 150 ciclos respiratórios. Em cada um deles, como foi provado na alínea anterior, há dois pontos de inflexão. Conclui-se, então, que o gráfico da função V tem 300 pontos de inflexão.

Pág. 105

Proposta 26

26.1.

a) O período positivo mínimo da função é $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$.

b) $-1\le\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\le 1\Leftrightarrow -4\le 4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\le 4\Leftrightarrow -4\le x(t)\le 4$

A abcissa máxima é 4 e a abcissa mínima é -4 .

26.2. $$x'(t)=\left(4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)'=4\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)=-\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$x''(t)=\left(-\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)'=-\frac{2\pi}{3}\times\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=-\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

$$x''(t)=-k\,x(t)\Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=-k\times 4\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi^2}{9}=-4k\Leftrightarrow k=\frac{\pi^2}{36}$$

Proposta 27

27.1. $$-1\le\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)\le 1\Leftrightarrow -1{,}5\le 1{,}5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)\le 1{,}5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-1{,}5\le 4+1{,}5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)\le 4+1{,}5\Leftrightarrow 2{,}5\le D(t)\le 5{,}5$$

A distância máxima e mínima da esfera ao solo é, respetivamente, 5,5 m e 2,5 m.

27.2. O valor da amplitude do movimento da esfera é 1,5 m.

27.3. O período T deste oscilador harmónico é $T=\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$ e a frequência f é $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{3}$.

27.4.

$$D(t)=4{,}75\Leftrightarrow 4+1{,}5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)=4{,}75\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1{,}5\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)=0{,}75\Leftrightarrow\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{2\pi t}{3}+\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\pi t}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \vee\ \frac{2\pi t}{3}+\pi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi t}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{2\pi t}{3} = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{2t}{3} = -\frac{2}{3} + 2k \vee \frac{2t}{3} = -\frac{4}{3} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = -1 + 3k \vee t = -2 + 3k,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $t \in [0, 9[$, conclui-se que $t \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Proposta 28

28.1.

$x(t) = \sqrt{3}\cos(\pi t) - \sin(\pi t) =$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t) - \frac{1}{2}\sin(\pi t)\right) =$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi t) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(\pi t)\right) = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

Donde se conclui que $A = 2$, $\omega = \pi$ e $\phi = \frac{\pi}{6}$.

28.2. A amplitude do movimento é 2.

O período é $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ e a frequência é $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$. A fase é $\frac{\pi}{6}$.

28.3.

$x'(t) = \left(2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = 2 \times (-\pi)\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= -2\pi\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

$x''(t) = \left(-2\pi\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right)' = -2\pi \times \pi\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) =$

$= -\pi^2 \times 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = -\pi^2\, x(t)$

Pág. 106

Proposta 29

29.1.

a)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{\sin(2x)}{x}\right) = \lim_{2x\to 0^-}\left(1 + \frac{\sin(2x)}{2x} \times 2\right) =$

$= 1 + 1 \times 2 = 3$

A ordenada do ponto *A* é igual a 3.

b)

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{k\cos 0}{2 + \cos 0} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$

Para saber qual é a abcissa do ponto *B*, temos determinar a expressão geral dos zeros da função quando $k \geq 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\cos x}{2 + \cos x} = 0 \Leftrightarrow 3\cos x = 0 \wedge \cos x \neq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

A abcissa do ponto *B* é igual a $\frac{3\pi}{2}$.

29.2. O único ponto onde a função poderá não ser contínua é o ponto de abcissa zero.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{k\cos x}{2 + \cos x} = \frac{k}{3}$, $f(0) = \frac{k}{3}$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$.

f é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Então, tem-se: $\frac{k}{3} = 3 \Leftrightarrow k = 9$.

29.3.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{\sin(2x)}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

Sabe-se que, $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(2x) \leq 1$.

Quando *x* tende para $-\infty$, tem-se: $\frac{-1}{x} \geq \frac{\sin(2x)}{x} \geq \frac{1}{x}$.

Como $\lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, necessariamente $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin(2x)}{x} = 0$.

Então, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de qualquer função da família.

Proposta 30

30.1.

$f'(x) = (n\sin(x) + n\cos(x))' = n\cos(x) - n\sin(x)$ e

$f''(x) = (n\cos(x) - n\sin(x))' = -n\sin(x) - n\cos(x)$.

Logo, $f''(x) - f'(x) = -n\sin(x) - n\cos(x) -$

$-(n\cos(x) - n\sin(x)) = -2n\cos(x)$.

30.2. A função *h* é definida por $h(x) = -2n\cos(x)$.

$h(0) = -3 \Leftrightarrow -2n\cos(0) = -3 \Leftrightarrow -2n = -3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}$

Então, sabe-se que $h(x) = -3\cos(x)$ e

$f(x) = \frac{3}{2}\sin(x) + \frac{3}{2}\cos(x)$.

Seja *t* a reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$. A reta *t* pode ser definida por: $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times 0 = \frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{3}{2}\cos(x) - \frac{3}{2}\sin(x)$, logo

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ = \frac{3}{2} \times 0 - \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$.

Assim sendo, a reta *t* é definida por:

$y - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$

Pág. 110

Questões de Exame

1.1. Sendo $\alpha=\frac{\pi}{3}$, então:

$$h(x)=-\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)x^2+\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)x=$$

$$=-\left(1+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)x^2+\sqrt{3}\,x=-4\,x^2+\sqrt{3}\,x$$

$$h'(x)=\left(-4\,x^2+\sqrt{3}\,x\right)'=-8\,x+\sqrt{3}$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow -8\,x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
h'	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	$h\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$	$\searrow$

$$h\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=-4\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2+\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=-4\times\frac{3}{64}+\frac{3}{8}=\frac{3}{16}=0{,}1875$$

A altura máxima atingida pelo projétil quando, o ângulo de arranque é $\frac{\pi}{3}$, é de 0,1875 km, ou seja, 187,5 m.

1.2. $h(x)=0\Leftrightarrow -\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2+\left(\tan\alpha\right)x=0$

$$\Leftrightarrow x\left[-\left(1+\tan^2\alpha\right)x+\tan\alpha\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad -\left(1+\tan^2\alpha\right)x+\tan\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad\vee\quad x=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Alcance do projétil:

$$\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\sin\alpha\cos\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

1.3.

$$\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\frac{1}{2}\sin(\pi-2\alpha)=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

Donde se conclui que valores complementares do ângulo de arranque provocam a queda do projétil no mesmo local.

1.4. O alcance é máximo quando $\sin(2\alpha)$ for máximo, ou seja, quando $2\alpha=\frac{\pi}{2}$.

$$2\alpha=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4};$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}=0{,}5\,.$$

Alcance máximo: 0,5 km, ou seja, 500 m.

2.1. Assíntota oblíqua: $y=mx+b$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$$

$$=1-0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln x-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\ln x\right)=-\infty$$

Como $b\notin\mathbb{R}$, conclui-se que o gráfico de f não tem assíntota oblíqua.

2.2. No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, tem-se:

$$f'(x)=\left(\frac{2+\sin x}{\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{(2+\sin x)'\times\cos x-(\cos x)'\times(2+\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)\times(2+\sin x)}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1+2\sin x}{\cos^2 x}=0\wedge-\frac{\pi}{2}<x<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin x=0\wedge-\frac{\pi}{2}<x<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}\wedge-\frac{\pi}{2}<x<0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\nearrow$

f é estritamente decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$.

f é estritamente crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},0\right[$.

f tem um mínimo relativo para $x=-\frac{\pi}{6}$.

Pág. 111

3.1.

$$d(t)=d(0)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \pi t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \pi t+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t=2k \vee t=\frac{2}{3}+2k, k\in\mathbb{Z}$$

Quando $t\in[0,3]$, conclui-se que: $t=\frac{2}{3}$s, $t=2$s e $t=\frac{8}{3}$s .

3.2. A função *d* é contínua em $[0,+\infty[$. Em particular, *d* é contínua em $[3,4]$.

$$d(3)=1+\frac{1}{2}\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}=0{,}75$$

$$d(4)=1+\frac{1}{2}\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}=1{,}25$$

Como *d* é contínua em $[3,4]$ e $d(3)<1{,}1<d(4)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists t\in]3,4[: d(t)=1{,}1$, ou seja, houve, pelo menos, um instante, entre os três e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto *P* ao ponto *O* foi igual a 1,1 m.

4.1. Pretende-se determinar a profundidade da água da marina às três horas da tarde desse dia, ou seja, quando $t=15$.

$$P(15)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}\times 15\right)+8=2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)+8=2\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+8=$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+8=2\times 0+8=8$$

A profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia, era de 8 metros.

4.2.

$$P'(t)=\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+8\right)'=2\times\left(-\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)=-\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$P'(t)=0\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)=0\wedge t\in[0,24]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)=0\wedge t\in[0,24]\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t=k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,24]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}t=k, k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,24]\Leftrightarrow t=6k, k\in\mathbb{Z}\wedge t\in[0,24]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\in\{0, 6, 12, 18, 24\}$$

t	0		6		12		18		24
P'	0	–	0	+	0	–	0	–	0
P	10	↘	6	↗	10	↘	6	↗	10

A profundidade da água da marina, nesse dia, foi de 6 metros.

Pág. 112

5.1.

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[10+5e^{-0{,}1t}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right]=10+5\times 0\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$$

À medida que o tempo passa, a distância da bola ao solo tende a estabilizar à volta de 10 cm.

5.2. A função *f* é contínua em $[0,+\infty[$. Então, também é contínua em $[3,4]$.

$$f(3)=10+5e^{-0{,}3}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\approx 7{,}4\ ;$$

$$f(4)=10+5e^{-0{,}4}\cos(\pi)\approx 6{,}6\ .$$

Como *f* é contínua em $[3,4]$ e $f(3)<7<f(4)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists t\in]3,4[: f(t)=7$, ou seja, existe, pelo menos, um instante, entre o terceiro e o quarto segundos, em que a bola se encontra a sete centímetros do solo.

5.3.

$$f(t)=10\Leftrightarrow 10+5e^{-0{,}1t}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)=10\wedge t\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5e^{-0{,}1t}\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)=0\wedge t\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{5e^{-0{,}1t}=0}_{\text{impossível}}\vee\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)=0\right)\wedge t\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge t\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{4}=\frac{1}{2}+k, k\in\mathbb{Z}\wedge t\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t=2+4k, k\in\mathbb{Z}_0^+$$

A bola, nos primeiros 15 segundos, passa 4 vezes a dez centímetros do solo (nos instantes 2, 6, 10 e 14 segundos).

6.1. O único ponto onde a função poderá não ser contínua é o ponto de abcissa zero. Assim, a função *g* tem de ser contínua em $x=0$. Como 0 é ponto aderente e pertence ao domínio da função *g*. Então *g* é contínua em $x=0$ se existir $\lim_{x\to 0} g(x)$, ou seja, se $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(-1+\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)=$$

$$=-1+\frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=-1+\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$$

$$g(0)=e^k-1$$

g é contínua em $x=0$ se $e^k-1=-\frac{1}{2}$.

Então, tem-se:

$e^k-1=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\ln\left(2^{-1}\right) \Leftrightarrow k=-\ln 2$.

6.2.

$f'(x)=\left(-x+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$2f'(x)=\left(f(x)+x\right)^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\left(-x+\sin\left(\frac{x}{2}\right)+x\right)^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1 \Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)-2=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=1 \quad \vee \quad \underbrace{\cos\left(\frac{x}{2}\right)=-2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $x\in\left]-2\pi, 5\pi\right[$, conclui-se que $x=0 \vee x=4\pi$.

Pág. 113

7.1. $g(x)=0 \Leftrightarrow \sin x+\sin(2x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=-\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=-x+2k\pi \vee 2x=\pi-(-x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x=2k\pi \vee x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \vee x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Como $[0, \pi]$, conclui-se que $x\in\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$.

7.2.

Assíntotas verticais

Como a função h é contínua em todo o seu domínio, só a reta $x=\frac{\pi}{2}$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de h.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{g(x)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x+\sin(2x)}{\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{g(x)}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x+\sin(2x)}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

Portanto, a reta $x=\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

Assíntotas não verticais

Como o domínio da função h é um conjunto limitado, então não existem assíntotas não verticais ao gráfico de h.

7.3.

$\cos x=\frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos x=\frac{\overline{CH}}{2} \Leftrightarrow \overline{CH}=2\cos x$

$\sin x=\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin x=\frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH}=2\sin x$

$A_{[ABC]}=\frac{(1+2\cos x)\times 2\sin x}{2}=(1+2\cos x)\times\sin x=$

$=\sin x+2\sin x\cos x=\sin x+\sin(2x)=g(x)$

8.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$ (por ser a diferença entre duas funções contínuas). Então, também é contínua em $[0, \pi]$.

$f(0)=2\times 0-\cos 0=-1$; $f(\pi)=2\times\pi-\cos\pi=2\pi+1$.

Como f é contínua em $[0, \pi]$ e $f(0)<0<f(\pi)$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir que $\exists\, x\in\left]0, \pi\right[: f(x)=0$, ou seja, a função f tem, pelo menos, um zero, no intervalo $\left]0, \pi\right[$.

8.2.

$f'(x)=(2x-\cos x)'=2-(-\sin x)=2+\sin x$

$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \sin x\geq -1 \Leftrightarrow \forall\, x\in\mathbb{R},\ 2+\sin x\geq 2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\, x\in\mathbb{R},\ f'(x)\geq 1$

Como a derivada de f é sempre positiva, conclui-se que a função f é estritamente crescente. Assim sendo, a função f só pode ter no máximo um zero. Atendendo a 8.1. conclui-se que a função f tem um único zero.

8.3.

$f(x)=2x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x-\cos x=2x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k conclui-se que a solução pertencente ao intervalo $[3\pi, 4\pi]$ é $\frac{11\pi}{3}$.

9.1.

Assíntotas verticais

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, só a reta $x=0$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

Portanto, a reta $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

9.2. No intervalo $\left]-\infty, 0\right[$, tem-se:

$f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)'=$

$=\frac{\left(e^{-x}\right)'\times x-(x)'\times e^{-x}}{x^2}=\frac{-e^{-x}\times x-1\times e^{-x}}{x^2}=\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}=0 \Leftrightarrow -e^{-x}(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{-e^{-x}=0}_{\text{impossível}} \vee x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-1	0
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$

$$f(-1)=\frac{e^1}{-1}=-e$$

A função tem máximo no intervalo $]-\infty,0[$ que é $-e$.

9.3. $f(x)=0 \wedge -3<x<3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e^{-x}}{x}=0 \wedge -3<x<3\right) \vee \left(\sin(2x)-\cos x=0 \wedge 0\le x<3\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\varnothing \vee \left(2\sin x\cos x-\cos x=0 \wedge 0\le< x<3\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \wedge 0\le x<3$$

$$\Leftrightarrow (\cos x=0 \vee 2\sin x-1=0) \wedge 0\le x<3$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x=0 \vee \sin x=\frac{1}{2}\right) \wedge 0\le x<3$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right) \wedge 0\le x<3$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{5\pi}{6}$$

Pág. 114

Avaliar – 1.ª Parte

1.

$$\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{BC}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2 \Leftrightarrow 3^2=\left(\overline{BC}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9-3=\left(\overline{BC}\right)^2 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC}=\sqrt{6}$$

$$\left(\overline{DE}\right)^2=\left(\overline{CD}\right)^2+\left(\overline{CE}\right)^2 \Leftrightarrow 5^2=3^2+\left(\overline{CE}\right)^2 \Leftrightarrow 25-9=\left(\overline{CE}\right)^2 \underset{\overline{CE}>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CE}=\sqrt{16} \Leftrightarrow \overline{CE}=4$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=$$

$$=\frac{-3\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{15}$$

A opção correta é a (C).

2. Atendendo à lei dos senos, sabe-se que:

- $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{3}=\dfrac{\sin\theta}{4} \Leftrightarrow \sin\theta=\dfrac{4}{3}\sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin\theta=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta = 1-\sin^2\theta-\sin^2\theta = 1-2\sin^2\theta=$

$$=1-2\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=1-2\times\frac{8}{9}=-\frac{7}{9}$$

A opção correta é a (A).

3. A função f tem de ser contínua em $\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3}$ é ponto aderente e pertence ao domínio da função f.

Então, f é contínua em $\frac{\pi}{3}$ se existir $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$, ou seja, se

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\left(\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+k\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+k=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+k=0+k=k$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+k=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+k=0+k=k$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{3x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{3y}=\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

<u>Mudança de variável:</u>

Fazendo $x-\frac{\pi}{3}=y$, vem $x=y+\frac{\pi}{3}$.

Se $x\to\frac{\pi}{3}^+$, então $y\to 0^+$.

Assim sendo, f é contínua em $\frac{\pi}{3}$ se $k=\frac{1}{3}$.

A opção correta é a (A).

4. Sendo $f(x)=x+\sin^2 x$, então:

$$f'(x)=\left(x+\sin^2 x\right)'=1+2\sin x\cos x=1+\sin(2x) \quad \text{e}$$

$$f''(x)=\left(1+\sin(2x)\right)'=0+2\cos(2x)=2\cos(2x).$$

A opção correta é a (B).

Pág. 115

Avaliar – 2.ª Parte

1.1. Sabe-se que $P(x, x);\ x>0$.

Designemos por Q a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo Ox. Sendo o triângulo $[APQ]$ é retângulo em Q, tem-se:

$$\tan\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \tan\theta=\frac{x}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)\tan\theta=x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\tan\theta-\tan\theta=x \Leftrightarrow x\tan\theta-x=\tan\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\tan\theta-1)=\tan\theta \Leftrightarrow x=\frac{\tan\theta}{\tan\theta-1}$$

Donde se conclui que $P\left(\dfrac{\tan\theta}{\tan\theta-1}, \dfrac{\tan\theta}{\tan\theta-1}\right)$.

1.2.

$$A_{[OAP]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{PQ}}{2}=\frac{1\times\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{3}-1}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\times\left(2\sqrt{3}+2\right)}{\left(2\sqrt{3}-2\right)\times\left(2\sqrt{3}+2\right)}=\frac{6+2\sqrt{3}}{12-4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

1.3.

$$A_{[OAP]}=\frac{\overline{OA}\times\overline{PQ}}{2}=\frac{1\times\frac{\tan\theta}{\tan\theta-1}}{2}=\frac{\tan\theta}{2\tan\theta-2}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{2\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-2}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{2\sin\theta-2\cos\theta}{\cos\theta}}=$$

$$=\frac{\sin\theta}{2(\sin\theta-\cos\theta)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta}{\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta-\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta}{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}=f(\theta)$$

2.1.

$$f'(x)=\left(a\cos(bx)\right)'=a\left(-b\sin(bx)\right)=-ab\sin(bx)$$

$$f''(x)=\left(-ab\sin(bx)\right)'=-ab\left(b\cos(bx)\right)=-ab^2\cos(bx)$$

Então, $f''(x)=-ab^2\cos(bx)=-b^2\left(a\cos(bx)\right)=-b^2 f(x)$.

2.2. Sendo $\frac{3\pi}{2}$ o período positivo mínimo da função *f*, tem-se:

$$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow|b|=\frac{4}{3}\Leftrightarrow b=\frac{4}{3}\ \vee\ b=-\frac{4}{3}.$$

Como $b>0$, conclui-se que $b=\frac{4}{3}$.

Então, $f(x)=a\cos\left(\frac{4}{3}x\right)$ e $f'(x)=-a\times\frac{4}{3}\sin\left(\frac{4}{3}x\right)$.

Como a reta *t* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa π e é paralela à reta definida pela equação $-2x+y=1$, sabe-se que $m_t=2$.

$$m_t=2\Leftrightarrow f'(\pi)=2\Leftrightarrow -a\times\frac{4}{3}\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}a=2\Leftrightarrow a=\sqrt{3}$$

3.1.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-3+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2+\sin\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}\times\left(-3+\frac{0}{2+1}\right)=-\frac{3}{2}$$

3.2. No intervalo $]-\pi,0[$, tem-se:

$$f''(x)=\left(-3+\frac{\cos x}{2+\sin x}\right)'=$$

$$=0+\frac{(\cos x)'\times(2+\sin x)-(2+\sin x)'\times\cos x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{(-\sin x)\times(2+\sin x)-\cos x\times\cos x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-2\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-2\sin x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(2+\sin x)^2}=\frac{-2\sin x-1}{(2+\sin x)^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2\sin x-1}{(2+\sin x)^2}=0\ \wedge\ -\pi<x<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin x-1=0\ \wedge\ -\pi<x<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\ \wedge\ -\pi<x<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{6}\ \vee\ x=-\frac{\pi}{6}$$

x	π		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
f''		–	0	+		–	
f		$\frown$	$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$\smile$	$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\frown$	

No intervalo $\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{6}\right]$ a concavidade é voltada para cima.

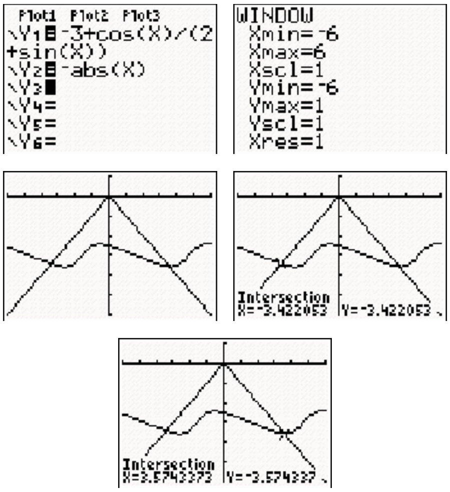
Nos intervalos $\left]-\pi,-\frac{5\pi}{6}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{6},0\right[$ a concavidade é voltada para baixo.

Abcissas dos pontos de inflexão: $-\frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$.

3.3. O conjunto-solução da inequação $f'(x) < -|x|\pi$ é um intervalo aberto $]a, b[$.

$$f'(x) < -|x| \Leftrightarrow -3 + \frac{\cos x}{2 + \sin x} < -|x|$$

Pretende-se determinar graficamente os valores *a* e de *b*.
Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, procede-se da seguinte forma:



Donde se conclui que $a \approx -3{,}42$ e $b \approx 3{,}57$.

Pág. 119

1.1. $F'(x)=(2x+5)'=2=f(x)$

1.2. $F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}-3x+5\right)'=x-3=f(x)$

1.3. $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+3\right)'=x^3=f(x)$

1.4. $F'(x)=\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right)'=\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)'=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}=f(x)$

1.5. $F'(x)=\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)'=\frac{1}{3}\times 3\cos(3x)=f(x)$

1.6. $F'(x)=\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\times 2x\times e^{x^2}=xe^{x^2}=f(x)$

1.7. $F'(x)=(\ln(x-1))'=\frac{1}{x-1}=f(x)$

Tarefa 1

1.1. Por exemplo: $F(x)=3x$; $F(x)=3x+3$ e $F(x)=3x-5$.

1.2. Por exemplo: $G(x)=x^2$; $G(x)=x^2+1$ e $G(x)=x^2-7$.

2.

$F(x)$, primitiva de f (Por exemplo)	$f(x)=F'(x)$
$F(x)=7$	$f(x)=0$
$F(x)=4x$	$f(x)=4$
$F(x)=x^2$	$f(x)=2x$
$F(x)=e^x$	$f(x)=e^x$
$F(x)=\ln x$	$f(x)=\frac{1}{x},\ x>0$
$F(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$
$F(x)=\cos x$	$f(x)=-\sin x$

3.

(A) $F'(x)=\left(1+x+\frac{e^{2x}}{2}\right)'=1+e^{2x}$

(C) $F'(x)=\left(\frac{2x+e^{2x}}{2}\right)'=1+e^{2x}$

Pág. 120

2. $F(x)=\int 5\,dx \ \wedge\ F(-1)=2$

$\int 5\,dx=5x+c$

$F(-1)=2 \Leftrightarrow -5+c=2 \Leftrightarrow c=7$

$F(x)=5x+7$

3. $G(x)=\int \cos x\,dx=\sin x+c$

Como $x\in[0,2\pi]$, tem-se: $-1\le \sin x\le 1$.

$-1+c\le G(x)\le 1+c$

Contradomínio: $[-1+c, 1+c]$

Se o valor máximo é 0, conclui-se que $1+c=0$, ou seja, $c=-1$.

$G(x)=\sin x-1$

Pág. 121

4.1. $\int x^3\,dx=\frac{x^4}{4}+c$

4.2. $\int x^{-2}\,dx=\frac{x^{-1}}{-1}+c=-\frac{1}{x}+c$

4.3. $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+c=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+c$

4.4. $\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c=\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+c=\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+c$

4.5. $\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2x\sqrt{x}}{3}+c$

4.6. $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}+c$

4.7. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\int x^{\frac{8}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}+c=\frac{3x^3\sqrt[3]{x^2}}{11}+c$

5. $F(x)=\int x^{-3}\,dx \ \wedge\ F(1)=\frac{5}{2}$

$\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-2}}{-2}+c=\frac{-1}{2x^2}+c$

$F(1)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}+c=\frac{5}{2} \Leftrightarrow c=3$

$F(x)=-\frac{1}{2x^2}+3$

$F\left(\frac{1}{2}\right)=-2+3=1$

Pág. 122

6.1. $x \in \mathbb{R}^+$

$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c = \ln x + c$

$F(x) = \ln x + c$

$F(e) = 5 \Leftrightarrow \ln e + c = 5 \Leftrightarrow c = 4$

$F(x) = \ln x + 4$

6.2. $x \in \mathbb{R}^-$

$\int g(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c$

$G(x) = \ln(|x|) + c \ \wedge\ G\left(-\frac{1}{e}\right) = -2$

$G\left(-\frac{1}{e}\right) = -2 \Leftrightarrow \ln\left(\left|-\frac{1}{e}\right|\right) + c = -2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) + c = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 + c = -2 \Leftrightarrow c = -1$

$G(x) = \ln(|x|) - 1$

7. $F(x) = \int e^x\,dx = e^x + c$

$F(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + c = 0 \Leftrightarrow e^x = -c$

Esta equação é impossível se e só se $-c \le 0$, ou seja, $c \ge 0$.

$F(x) = e^x + c,\ c \in \mathbb{R}_0^+$

8.1. $G(x) = \int \sin x\,dx \ \wedge\ G(0) = 1$

$G(x) = -\cos x + c \ \wedge\ -\cos 0 + c = 1$

$G(x) = -\cos x + c \ \wedge\ c = 2$

$G(x) = -\cos x + 2$

$G(x) = \frac{5}{2} \ \wedge\ x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \ \wedge\ x \in [-\pi, \pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \ \vee\ x = \frac{2\pi}{3}$

8.2. $G(x) = -\cos x + c$

$\forall\, x \in [-\pi, \pi],\ -1 + c \le G(x) \le 1 + c$

$1 + c = 2 \Leftrightarrow c = 1$

$G(x) = -\cos x + 1$

Pág. 123

9.1. $\int (2x+3)\,dx = 2 \times \frac{x^2}{2} + 3x + c$

9.2. $\int \left(\frac{x^3}{2} - 3x + 1\right) dx = \frac{1}{2} \times \frac{x^4}{4} - 3 \times \frac{x^2}{2} + x + c$

9.3. $\int \left(e^x - 5x\right) dx = e^x - 5 \times \frac{x^2}{2} + c$

9.4. $\int \left(\frac{5}{x} - \sin x\right) dx = 5\ln(|x|) + \cos x + c$

9.5. $\int \left(2\cos x + 3e^x\right) dx = 2\sin x + 3e^x + c$

9.6. $\int \left(x^2(x-1)\right) dx = \int \left(x^3 - x^2\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c$

9.7. $\int \frac{2\sqrt{x} + x^3}{x}\,dx = \int \left(2x^{-\frac{1}{2}} + x^2\right) dx = 2 \times \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{3} + c =$

$= 4\sqrt{x} + \frac{x^3}{3} + c$

9.8. $\int \frac{2x^3 - 3x + 7}{x}\,dx = \int \left(2x^2 - 3 + \frac{7}{x}\right) dx =$

$= 2 \times \frac{x^3}{3} - 3x + 7\ln(|x|) + c$

9.9. $\int \left(3x - \frac{\cos x}{2}\right) dx = 3 \times \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\sin x + c$

9.10. $\int \frac{4 - xe^x}{x}\,dx = \int \left(\frac{4}{x} - e^x\right) dx = 4\ln(|x|) - e^x + c$

Pág. 124

10.1. $\int x^2\,dx$

Uma primitiva de *f* é, por exemplo, $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

10.2. $A(x) = 3(3x+1)^2$

10.3. $\int A(x)\,dx = \int 3(3x+1)^2\,dx = \frac{(3x+1)^3}{3} + c$

11.1. $\int \sqrt{x}\,dx$

Uma primitiva de *f* é, por exemplo, $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$.

11.2. $A(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$

11.3. $\int A(x)\,dx = \int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{2\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{3} + c$

12.1. $\int (2x+3)\left(x^2+3x\right)^5 dx = \frac{\left(x^2+3x\right)^6}{6} + c$

12.2. $\int 5e^{5x}\,dx = e^{5x} + c$

12.3. $\int 3\cos(3x)\,dx = \sin(3x) + c$

Pág. 125

13.1.

a) $\int f(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + c$

b) $\int g(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

13.2. Uma primitiva de *f*, é por exemplo, $F(x) = x^2$. Uma primitiva de *g*, é por exemplo, $G(x) = \frac{e^{2x}}{2}$.

$F(x) \times G(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{2}$ e $f(x) \times g(x) = 2xe^{2x}$.

$(F \times G)'(x) = \left(\frac{x^2 e^{2x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x}\right) = xe^{2x} + x^2 e^{2x}$

Como $(F \times G)'(x) \neq (f \times g)(x)$, conclui-se que $\int \left(f(x)g(x)\right)dx \neq \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx$.

14.1.

$\int (5-3x)^4\,dx = -\frac{1}{3}\int -3(5-3x)^4\,dx = -\frac{1}{3} \times \frac{(5-3x)^5}{5} + c =$

$= -\frac{(5-3x)^5}{15} + c$

14.2. $\int \left(2x - xe^{x^2}\right)dx = \int 2x\,dx - \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = x^2 - \frac{e^{x^2}}{2} + c$

14.3. $\int \frac{3}{3x+5}\,dx = \ln\left(|3x+5|\right) + c$

14.4. $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \ln\left(|x^2+x|\right) + c$

14.5. $\int \frac{x}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}\,dx = \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+2\right) + c$

14.6. $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{5e^{5x}}{e^{5x}+2}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left(e^{5x}+2\right) + c$

14.7. $\int \left(\cos x \sin^2 x\right)dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

Pág. 126

15. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$

$= \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{3} + c$

$F(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{3} + c \;\wedge\; F\left(\sqrt{3}\right) = 3$

$F\left(\sqrt{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{(3+1)\sqrt{3+1}}{3} + c = 3 \Leftrightarrow \frac{8}{3} + c = 3 \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$

Assim, tem-se: $F(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{1}{3}$.

16.1. $F(x) = \ln\left(\cos(2x)\right)$

$F'(x) = \left(\ln\left(\cos(2x)\right)\right)' = \frac{\left(\cos(2x)\right)'}{\cos(2x)} = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)} = -2\tan(2x)$

Como $F'(x) \neq f(x)$, conclui-se que F não é primitiva de f.

16.2.

$\int f(x)dx = \int \tan(2x)dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(|\cos(2x)|\right) + c = -\frac{1}{2}\ln\left(\cos(2x)\right) + c$

17.1. $f(x) = \sin^2(2x)$

$\frac{1-\cos(4x)}{2} = \frac{1-\left(\cos^2(2x) - \sin^2(2x)\right)}{2} =$

$= \frac{1-\left(1-\sin^2(2x) - \sin^2(2x)\right)}{2} = \sin^2(2x)$

Conclui-se que: $f(x) = \frac{1-\cos(4x)}{2}$.

17.2. Aplicando o resultado obtido em 17.1, tem-se:

$\int \sin^2(2x)\,dx = \int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(4x)\,dx =$

$= \int \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\int 4\cos(4x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin(4x) + c$

Tarefa 2

1. $f(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1+\cos^2 x - \sin^2 x}{2} =$

$= \frac{1+\cos^2 x - \left(1-\cos^2 x\right)}{2} = \cos^2 x$

2. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx =$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) + c = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$

3. $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c \;\wedge\; F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + c = \pi \Leftrightarrow c = \frac{3\pi}{4}$

$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3\pi}{4}$

Pág. 128

18.1. Seja A a área do trapézio:

$$A=\frac{f(2)+f(0)}{2}\times 2=\frac{3+2}{2}\times 2=5$$

18.2. $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f(2)+f(0)}{2}\times 2=\frac{3+2}{2}\times 2=5$

18.3. $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f(5)+f(2)}{2}\times(5-2)=\frac{\frac{9}{2}+3}{2}\times 3=\frac{45}{4}$

Pág. 129

19.1. $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

19.2. $\int_3^8 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^8=\left[\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3}\right]_3^8=18-\frac{16}{3}=$

$=\frac{38}{3}$

19.3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}-(-\cos 0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-(-1)=$

$=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

20.1. $\int_1^3 (2x)\,\mathrm{d}x=\left[2\times\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\left[x^2\right]_1^3=3^2-1^2=8$

20.2. $\int_1^e \left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=[2\times\ln x]_1^e=2\ln e-2\ln 1=2$

20.3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin 0=2\times\frac{1}{2}-0=$

$=1$

Pág. 130

21.1. $\int_1^4\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_1^4=\left(\frac{3\times 4^2}{4}+4-\left(\frac{3}{4}+1\right)\right)=14{,}25$

21.2.

a) $\int_1^2\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x+\int_2^4\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_1^2+$

$+\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_2^4=\left(5-\left(\frac{3}{4}+1\right)\right)+(16-5)=3{,}25+11=14{,}25$

Conclui-se que: $\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\int_1^5\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x+\int_5^4\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=$

$=\int_1^5\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x-\int_4^5\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_1^5-\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_4^5=$

$=(23{,}75-1{,}75)-(23{,}75-16)=14{,}25$

Conclui-se que:

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_5^4 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

c) $\int_1^0\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x+\int_0^4\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x$

$=-\int_0^1\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x+\int_0^4\left(\frac{3x}{2}+1\right)\mathrm{d}x=-\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_0^1+\left[\frac{3x^2}{4}+x\right]_0^4=$

$=-(1{,}75-0)+(16-0)=14{,}25$

Conclui-se que:

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

22.1. $-\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^3\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_0^3=$

$=-(9-13{,}5)=4{,}5$

22.2. $\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_3^4\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_3^4=$

$=\left(\frac{64}{3}-24-\left(9-\frac{27}{2}\right)\right)=\frac{11}{6}$

Pág. 131

23.1. $\int_0^3 (x-3)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^3=\frac{9}{2}-9=-\frac{9}{2}$

23.2. $\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2-0=\frac{5}{6}$

23.3. $\int_1^2 f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2-2x-1\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-x\right]_1^2=$

$=\frac{8}{3}-6-\left(\frac{1}{3}-2\right)=-\frac{5}{3}$

24.1. $\int_1^3\frac{2x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x=\int_1^3\left(2x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left[x^2+\ln x\right]_1^3=9+\ln 3-1=$

$=8+\ln 3$

24.2. $\int_0^1\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x=$

$=\int_0^1\left(1+\frac{1}{2}\left(2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\mathrm{d}x=\left[x+\frac{1}{2}\times\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1=$

$=\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$

Tarefa 3

1.1. $\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$

1.2. $\int_1^3 (2x+1)\,\mathrm{d}x=\left[x^2+x\right]_1^3=12-2=10$

1.3. $\int_1^3 \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 \left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 (x+1)^2\,\mathrm{d}x=$

$=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_1^3=\frac{4^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{56}{3}$

2. $\int_1^3 \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{26}{3}+10=\frac{56}{3}$

$\frac{56}{3}=\frac{26}{3}+10$

3.1. $\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 \left(3x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^3=\left[x^3\right]_0^3=3^3=27$

3.2. $3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3\int_0^2 \left(x^2\right)\mathrm{d}x=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=3\times 3^2=27$

3.3. $\int_2^5 4g(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^5 (8x+4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{8x^2}{2}+4x\right]_2^5=\left[4x^2+4x\right]_2^5=$

$=120-24=96$

3.4. $4\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x=4\int_2^5 (2x+1)\,\mathrm{d}x=4\left[x^2+x\right]_2^5=4(30-6)=96$

4.1. $\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x=27$ e $3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=27$.

Daqui resulta que: $\int_0^2 3f(x)\,\mathrm{d}x=3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

4.2. $\int_2^5 4g(x)\,\mathrm{d}x=96$ e $4\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x=96$

Daqui resulta que: $\int_2^5 4g(x)\,\mathrm{d}x=4\int_2^5 g(x)\,\mathrm{d}x$

Pág. 132

25.1. $x^2=-x+6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \vee x=-3$

$-x+6=0 \Leftrightarrow x=6$

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^6 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^2 (-x+6)\,\mathrm{d}x=$

$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[-\frac{x^2}{2}+6x\right]_2^6=\frac{8}{3}+(18-10)=\frac{32}{3}$

25.2. $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x-\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^2-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=10-\frac{8}{3}=$

$=\frac{22}{3}$

26. Equação da reta AB: $y=-x+3$.

Equação da reta BC: $y=mx+b$.

$\overrightarrow{BC}=(4,1)$; declive da reta BC é $\frac{1}{4}$.

$y=\frac{1}{4}x+b$

Sabe-se que $0=\frac{3}{4}+b$. Daqui resulta que $b=-\frac{3}{4}$.

$y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

Equação da reta CD: $y=mx+b$.

$\overrightarrow{CD}=(-2,4)$; declive da reta CD é -2 .

$y=-2x+b$

Sabe-se que $1=-14+b$. Daqui resulta que $b=15$.

$y=-2x+15$

Equação da reta AD: $y=mx+b$.

$\overrightarrow{AD}=(5,2)$; declive da reta AD é $\frac{2}{5}$.

$y=\frac{2}{5}x+3$

A área pedida é dada por:

$\int_0^5\left(\frac{2}{5}x+3\right)\mathrm{d}x-\left(\int_0^3(-x+3)\,\mathrm{d}x+\int_3^5\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}x\right)+$

$+\int_5^7(-2x+15)\,\mathrm{d}x-\int_5^7\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{5}+3x\right]_0^5-$

$-\left(\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^3+\left[\frac{x^2}{8}-\frac{3}{4}x\right]_3^5\right)+\left[-x^2+15x\right]_5^7-\left[\frac{x^2}{8}-\frac{3x}{4}\right]_5^7=$

$=20-\left(4{,}5+(-0{,}625+1{,}125)\right)+(56-50)-(0{,}875+0{,}625)=$

$=20-5+6-1{,}5=19{,}5$

Tarefa 4

1.1.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-2x-3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x=3 \;\vee\; x=-1$

Assim, tem-se: $a=-1$ e $b=3$.

1.2.

a)

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ou seja,

$\int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\int_{-1}^0\left(x^3-2x^2-3x\right)\mathrm{d}x+\int_0^3\left(x^3-2x^2-3x\right)\mathrm{d}x=$

$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{7}{12}-\frac{45}{4}=-\frac{32}{3}$

b) $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx +$

$+\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(x^3-2x^2-3x\right) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(x^3-2x^2-3x\right) dx +$

$+\int_{0}^{1} \left(x^3-2x^2-3x\right) dx + \int_{1}^{3} \left(x^3-2x^2-3x\right) dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} +$

$+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{1}^{3} =$

$= \frac{59}{192}+\frac{53}{192}-\frac{23}{12}-\frac{28}{3}=-\frac{32}{3}$

c) Comparando os resultados obtidos em a) e em b) conclui-se que são iguais.

1.3. A medida da área da região sombreada é dada por:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} -f(x)\,dx$$

Atendendo aos resultados de **a)** tem-se:

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} -f(x)\,dx = \frac{7}{12}-\left(-\frac{45}{4}\right)=\frac{71}{6}$

2.1. $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4}+4=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=4 \vee x=-4$

Conclui-se que $b=4$.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4}+4=x+1 \Leftrightarrow x^2+4x-12=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=-6$

Conclui-se que $a=2$.

2.2.

a) $\int_{0}^{2} g(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} (x+1)\,dx + \int_{2}^{4} \left(-\frac{x^2}{4}+4\right) dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{2} + \left[-\frac{x^3}{12}+4x\right]_{2}^{4} = 4+\left(\frac{32}{3}-\frac{22}{3}\right)=4+\frac{10}{3}=\frac{22}{3}$

A medida da área é $\frac{22}{3}$.

b) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} g(x)\,dx = \int_{0}^{2} \left(-\frac{x^2}{4}+4\right) dx - \int_{0}^{2} (x+1)\,dx =$

$= \left[-\frac{x^3}{12}+4x\right]_{0}^{2} - \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{0}^{2} = \left(-\frac{8}{12}+8\right)-4=\frac{10}{3}$

A medida da área é $\frac{10}{3}$.

Pág. 133

Proposta 1

1.1. $F'(x)=\left(\frac{4x^3}{3}+5\right)'=4x^2=f(x)$

1.2. $F'(x)=\left(\frac{x^2+\sin(2x)}{2}\right)'=x+\cos(2x)=f(x)$

1.3. $F'(x)=\left(\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3}\right)'=\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)'=(x+1)^{\frac{1}{2}}=f(x)$

1.4. $F'(x)=\left(\frac{x^4-2e^{2x}}{4}\right)'=x^3-e^{2x}=f(x)$

1.5. $F'(x)=\left(\frac{\sin^4 x}{4}+\pi\right)'=\sin^3 x\cos x=f(x)$

1.6. $F'(x)=\left(\ln\left(3x^2+2\right)\right)'=\frac{6x}{3x^2+2}=f(x)$

1.7. $F'(x)=\left(\ln(\ln x)+3\right)'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}=f(x)$

Proposta 2

2.1. $\int 2x^3\,dx=\frac{2x^4}{4}+c=\frac{x^4}{2}+c$

2.2. $\int 5\cos(5x)\,dx=\sin(5x)+c$

2.3. $\int \frac{3\sqrt{x}}{x}\,dx=\int 3x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=6\sqrt{x}+c$

2.4. $\int 3e^{2x}\,dx=\frac{3}{2}\int 2e^{2x}\,dx=\frac{3e^{2x}}{2}+c$

2.5. $\int \frac{2}{3x}\,dx=\frac{2}{3}\int \frac{1}{x}\,dx=\frac{2\ln(|x|)}{3}+c$

2.6. $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+c$

2.7. $\int 3x^2\left(x^3+1\right)^5 dx=\frac{\left(x^3+1\right)^6}{6}+c$

2.8. $\int 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) dx=4\times 2\int \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right) dx=-8\cos\left(\frac{x}{2}\right)+c$

2.9. $\int \cos x\sin^3 x\,dx=\frac{\sin^4 x}{4}+c$

Proposta 3

3.1. $\int f(x)\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx=\ln(x-1)+c$

$F(x)=\ln(x-1)+c$ e $F(2)=3$.

$F(2)=3 \Leftrightarrow \ln(2-1)+c=3 \Leftrightarrow c=3$

Assim, tem-se: $F(x)=\ln(x-1)+3$.

Abcissa do ponto B é 4. Então a ordenada do ponto B é $f(4)=\ln(4-1)+3=3+\ln 3$.

Ordenada de B: $3+\ln 3$.

3.2. Ordenada do ponto A é 2. Então a abcissa é x tal que $f(x)=2$.

$f(x)=2 \Leftrightarrow \ln(x-1)+3=2 \Leftrightarrow \ln(x-1)=-1 \Leftrightarrow x=1+\frac{1}{e}$

Abcissa de A: $1+\frac{1}{e}$

Pág. 134

Proposta 4

$$\int f(x)\,dx=\int \cos\left(\frac{x}{4}\right)dx=4\int \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx=4\sin\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

$F(x)=4\sin\left(\frac{x}{4}\right)+c$ e $F(2\pi)=2$.

$$F(2\pi)=2\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+c=2\Leftrightarrow c=-2$$

Assim, tem-se $F(x)=4\sin\left(\frac{x}{4}\right)-2$.

$$F(x)=0\Leftrightarrow 4\sin\left(\frac{x}{4}\right)-2=0\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \vee\ \frac{x}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ x\in[0,2\pi]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

Coordenadas do ponto de interseção do gráfico de F com o eixo das abcissas: $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$.

Proposta 5

5.1. $\int \frac{3x^3-2x+1}{x}\,dx=\int\left(3x^2-2+\frac{1}{x}\right)dx=x^3-2x+\ln(|x|)+c$

5.2. $\int \frac{3x^2+2x-1}{x^2}\,dx=\int\left(3+\frac{2}{x}-x^{-2}\right)dx=3x+2\ln(|x|)+x^{-1}+c$

5.3. $\int\left(2-3e^{2x}\right)dx=\int\left(2-\frac{3}{2}\times 2e^{2x}\right)dx=2x-\frac{3e^{2x}}{2}+c$

5.4. $\int\left(2x-\cos(3x)\right)dx=\int\left(2x-\frac{1}{3}\times 3\cos(3x)\right)dx=$

$=x^2-\frac{\sin(3x)}{3}+c$

5.5. $\int \frac{5-x\sin(2x)}{x}\,dx=\int\left(\frac{5}{x}-\sin(2x)\right)dx=$

$=\int\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{2}\times 2\sin(2x)\right)dx=5\ln(|x|)+\frac{\cos(2x)}{2}+c$

5.6. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+2x\right|\right)+c=$

$=\frac{1}{2}\left(\ln(|x|)+\ln(|x+2|)\right)+c$

Proposta 6

6.1.

a) $\int f(x)\,dx=\int(\sin x)\,dx=-\cos x+c$

b) $\int g(x)\,dx=\int(\cos x)\,dx=\sin x+c$

c) $\int(\sin x+\cos x)\,dx=-\cos x+\sin x+c$

d) $\int f(x)g(x)\,dx=\int(\sin x\cos x)\,dx=-\int(-\sin x\cos x)\,dx=$

$=-\frac{\cos^2 x}{2}+c$

e) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=-\ln(\cos x)+c$

f) $\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln(\sin x)+c$

6.2. $(f+g)'(x)=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x=-(\sin x-\cos x)=$

$=-(f-g)(x)$

$\int\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}\,dx=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=-\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=$

$=-\ln(\sin x+\cos x)+c$

Proposta 7

7.1. $\int\frac{x}{f(x)}\,dx=\int\left(x^3-4x\right)dx=\frac{x^4}{4}-2x^2+c$

7.2. $\frac{1}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{4}}{x-2}-\frac{\frac{1}{4}}{x+2}$

Repara que $\frac{\frac{1}{4}}{x-2}-\frac{\frac{1}{4}}{x+2}=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}=\frac{x+2-x+2}{4(x-2)(x+2)}=$

$=\frac{1}{x^2-4}$

7.3. $\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x^2-4}\,dx$

$\int\frac{1}{x^2-4}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx=$

$=\frac{1}{4}\left(\ln(x-2)-\ln(x+2)\right)+c=\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right)+c$

Pág. 135

Proposta 8

8.1. $\frac{-6}{x^2-x-2}=\frac{Ax-2A-Bx-B}{x^2-x-2}=\frac{(A-B)x-2A-B}{x^2-x-2}$

Daqui resulta que: $\begin{cases}A-B=0\\-2A-B=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=B\\B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=2\end{cases}$

8.2. $\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-2}\right)dx=2\ln(|x+1|)-2\ln(|x-2|)+c$

Proposta 9

9.1. $\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'\,dx=x(-\cos x)-\int -\cos x\,(x)'\,dx=$

$=-x\cos x+\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+\sin x+c$

9.2. $\int(x\ln x)\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx=$

$=\frac{x^2\ln x}{2}-\int\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+c=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+c$

Proposta 10

10.1. $\int_{-1}^{1}(3x+1)\,dx=\left[\frac{3x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2$

10.2. $\int_{1}^{e}\frac{3}{x}\,dx=\left[3\ln x\right]_{1}^{e}=3-0=0$

10.3. $\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}\right]_{-1}^{0}=0-\frac{3}{4}=-\frac{3}{4}$

10.4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\times1-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$

Proposta 11

11.1.

$$\int_{-1}^{1}\left(t^2+1\right)dt=\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

11.2.

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5}\left(e^{3x}-e^{x}\right)dx=\left[\frac{e^{3x}}{3}-e^{x}\right]_{\ln 2}^{\ln 5}=$$

$$=\frac{e^{3\ln 5}}{3}-e^{\ln 5}-\left(\frac{e^{3\ln 2}}{3}-e^{\ln 2}\right)=\frac{125}{3}-5-\frac{8}{3}+2=36$$

11.3.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)\,dt=\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

11.4. $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{t}\,dt=\left[\ln t\right]_{e}^{e^2}=2-1=1$

Proposta 12

12.1.

$$f(x)=\int_{0}^{x}\cos(3t)\,dt=\left[\frac{\sin(3t)}{3}\right]_{0}^{x}=\frac{\sin(3x)}{3}$$

$$f'(x)=\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)'=\cos(3x)$$

12.2.

$$f(x)=\int_{1}^{x}\frac{2t}{t^2+1}\,dt=\left[\ln\left(t^2+1\right)\right]_{0}^{x}=\ln\left(x^2+1\right)$$

$$f'(x)=\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'=\frac{2x}{x^2+1}$$

Pág. 136

Proposta 13

13.1.

$$\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{5}f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}|x-1|\,dx+\int_{1}^{5}|x-1|\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}(1-x)\,dx+\int_{1}^{5}(x-1)\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{1}^{5}=$$

$$=\frac{1}{2}+4+\frac{25}{2}-5+\frac{1}{2}=\frac{25}{2}$$

13.2.

$$\int_{-2}^{5}g(x)\,dx=\int_{-2}^{5}|x-3|\,dx=\int_{-2}^{3}|x-3|\,dx+\int_{3}^{5}|x-3|\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{3}(3-x)\,dx+\int_{3}^{5}(x-3)\,dx=\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{3}+\left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_{3}^{5}=$$

$$=9-\frac{9}{2}-(-6-2)+\frac{25}{2}-15-\left(\frac{9}{2}-9\right)=11+\frac{7}{2}=\frac{29}{2}$$

Proposta 14

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x<2\\ -x+6 & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

14.1. A função *f* é contínua em $x\neq 2$ e se $x=2$ tem-se:

$\lim\limits_{x\to 2^-}x^2=4$; $\lim\limits_{x\to 2^+}(-x+6)=4$ e $f(2)=4$.

Conclui-se que *f* é contínua.

14.2. $f(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2=0\wedge x<2\right)\vee\left(-x+6=0\wedge x\geq 2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=6$

$$\int_{0}^{6}f(x)\,dx=\int_{0}^{2}x^2\,dx+\int_{2}^{6}(-x+6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{x^2}{2}+6x\right]_{2}^{6}=$$

$$=\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3}$$

Proposta 15

15.1.

$f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+4x=0\Leftrightarrow x(-x+4)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$

Zeros de *f*: 0 e 4

15.2.

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -x^2+4x=x^2\Leftrightarrow 2x^2-4x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$

$A(2,g(2))$, ou seja, $A(2,4)$.

15.3.

$$\int_{0}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{0}^{2}\left(-2x^2+4x\right)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+2x^2\right]_{0}^{2}=$$

$$=-\frac{16}{3}+8-0=\frac{8}{3}$$

A medida da área é $\frac{8}{3}$.

Proposta 16

16.1. $\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\times\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$

16.2.

a) $\int_0^4 f(x)\,dx=\left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$

A medida da área é $\frac{26}{3}$.

b) $\int_0^4 (3-f(x))\,dx=\int_0^4 3\,dx-\int_0^4 f(x)\,dx=[3x]_0^4-\frac{26}{3}=12-\frac{26}{3}=$

$=\frac{10}{3}$

A medida da área é $\frac{10}{3}$.

Pág. 137

Proposta 17

17.1. $\overrightarrow{AB}=(5,-2)$; $\overrightarrow{AD}=(4,3)$; $\overrightarrow{CD}=(-1,3)$.

Uma equação da reta AB: $y=-\frac{2}{5}x+b$ e $0=\frac{6}{5}+b$:

$y=-\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}$

Uma equação da reta AD: $y=\frac{3}{4}x+b$ e $3=\frac{3}{4}+b$:

$y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$

Uma equação da reta CD: $y=-3x+b$ e $0=-6+b$:
$y=-3x+6$

Ponto de interseção das retas AD e CD: $(1,3)$

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \\ y=-3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+6=\frac{3}{4}x+\frac{9}{4} \\ y=-3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x+24=3x+9 \\ y=-3x+6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Área do quadrilátero $[ABCD]$:

$$\int_{-3}^{1}\left(\frac{3x}{4}+\frac{9}{4}\right)dx+\int_{1}^{2}(-3x+6)\,dx-\int_{-3}^{2}\left(-\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{3x^2}{8}+\frac{9x}{4}\right]_{-3}^{1}+\left[\frac{-3x^2}{2}+6x\right]_{1}^{2}-\left[-\frac{x^2}{5}-\frac{6x}{5}\right]_{-3}^{2}=$$

$$=\left(\frac{21}{8}+\frac{27}{8}\right)+\left(6-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}\right)=\frac{25}{2}$$

17.2. $\overrightarrow{AB}=(4,-3)$; $\overrightarrow{AD}=(4,1)$; $\overrightarrow{BC}=(2,4)$.

<u>Uma equação da reta AB:</u>

$y=-\frac{3}{4}x+b$ e $0=-\frac{3}{2}+b$: $\quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

<u>Uma equação da reta AD</u>

$y=\frac{1}{4}x+b$ e $4=1+b$: $\quad y=\frac{1}{4}x+3$

<u>Uma equação da reta BC</u>

$y=2x+b$ e $4=8+b$: $\quad y=2x-4$

Área do quadrilátero $[ABCD]$:

$$\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x+3\right)dx-\int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\right)dx+\int_{2}^{4}4\,dx-\int_{2}^{4}(2x-4)\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{8}+3x\right]_{-2}^{2}-\left[-\frac{3x^2}{8}+\frac{3x}{2}\right]_{-2}^{2}+[4x]_2^4-\left[x^2-4x\right]_2^4=$$

$$=\frac{1}{2}+6-\left(\frac{1}{2}-6\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\right)+8+4=12$$

17.3. $A(-3,0)$; $B(0,-3)$ e $C(4,5)$.

$\overrightarrow{AB}=(3,-3)$; $\overrightarrow{AC}=(7,5)$ e $\overrightarrow{BC}=(4,8)$.

Uma equação da reta AB: $y=-x-3$

Uma equação da reta AC: $y=\frac{5x}{7}+\frac{15}{7}$

Uma equação da reta BC: $y=2x-3$

Interseção da reta BC com o eixo Ox: $\left(\frac{3}{2},0\right)$

A área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada por:

$$-\int_{-3}^{0}(-x-3)dx-\int_{0}^{\frac{3}{2}}(2x-3)dx+\int_{-3}^{4}\left(\frac{5x}{7}+\frac{15}{7}\right)dx-\int_{\frac{3}{2}}^{4}(2x-3)dx=$$

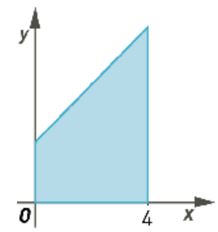
$$=-\left[-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{0}-\left[x^2-3x\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{5x^2}{14}+\frac{15x}{7}\right]_{-3}^{4}-\left[x^2-3x\right]_{\frac{3}{2}}^{4}=$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}+\frac{245}{14}-\frac{25}{4}=18$$

A medida da área do triângulo $[ABC]$ é 18.

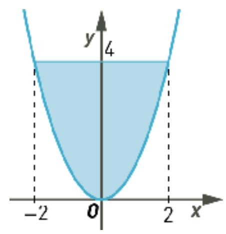
Proposta 18

18.1. Representação gráfica:



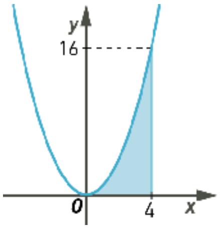
$$\int_0^4 (x+2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4=16$$

18.2. Representação gráfica:



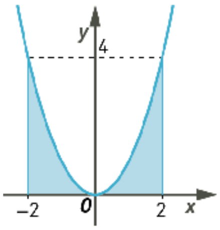
$$2\times\left(\int_0^2 4\,dx-\int_0^2 x^2\,dx\right)=2\times\left([4x]_0^2-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\right)=2\times\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

18.3. Representação gráfica:



$$\int_0^4 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{64}{3}$$

18.4. Representação gráfica:



$$2\int_0^2 x^2\ dx = 2\times\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\times\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Pág. 138

Proposta 19

19.1. $f(x) = \cos^3 x = \cos x\left(1-\sin^2 x\right) = \cos x - \cos x \sin^2 x$

19.2. $\int f(x)\ dx = \int \cos^3 x\ dx = \int\left(\cos x - \cos x\sin^2 x\right) dx$

$$= \int \cos x\ dx - \int \cos x \sin^2 x\ dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

19.3. $g(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx - 2B}{x^2-5x+6} =$

$$= \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{x^2-5x+6}$$

Daqui resulta que:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2-B \\ -6+3B-2B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=5 \end{cases}$$

19.4. $\int g(x) dx = \int\left(\frac{-3}{x-2} + \frac{5}{x-3}\right) dx = -3\int \frac{1}{x-2}\ dx + 5\int\frac{1}{x-3}\ dx =$

$$= -3\ln\left(|x-2|\right) + 5\ln\left(|x-3|\right) + c$$

Proposta 20

20.1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = x + 2k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = -x + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{4k\pi}{3} \ \vee\ x = -\pi + 4k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0, 2\pi]$, tem-se: $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge x\in[0, 2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

A medida da área da região *A* é dada por:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)\ dx =$$

$$= -2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2}$$

20.2. A medida da área da região *B* é dada por:

$$= \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi}(\cos x)\ dx - \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \left[\sin x\right]_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} + 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} =$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}-4}{2}$$

Proposta 21

$$\int_1^a \frac{3}{x}\ dx = 6 \Leftrightarrow \left[3\ln x\right]_1^a = 6 \Leftrightarrow 3\ln a - 0 = 6 \Leftrightarrow \ln a = 2 \Leftrightarrow a = e^2$$

Pág. 142

Avaliar – 1.ª Parte

1. $\int f(x)\ dx = \int 2x^3\ dx = \frac{x^4}{2} + c$

$F(x) = \frac{x^4}{2} + c$ e $F\left(\sqrt{2}\right) = 0$.

$F\left(\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$

Assim, tem-se: $F(x) = \frac{x^4}{2} - 2$.

Opção correta: (C)

2. $F(x) = -\sqrt{5-x^2}$

$$F'(x) = -\frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$

Daqui resulta que $f(1) = \frac{1}{\sqrt{5-1}} = \frac{1}{2}$

Opção correta: (A)

3. $f(x) = \int_2^x e^{2-t}\ dt = -\left[e^{2-t}\right]_2^x = -\left(e^{2-x} - 1\right) = 1 - e^{2-x}$

$$f'(x) = \left(1-e^{2-x}\right)' = e^{2-x}$$

Opção correta: (D)

4. $G(2) - G(-1) = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$

Opção correta: (B)

5. $\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$.

Daqui resulta que:

$9 = \int_a^b f(x)\ dx + 5$, ou seja, $\int_a^b f(x)\ dx = 4$

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx = -4$$

Opção correta: (A)

Pág. 143

Avaliar – 2.ª Parte

1.1.

$$F'\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)\right)'=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)=\frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}\times 2\cos^2 x=\cos^2 x=f(x)$$

1.2. $F'(x)=\left(-\frac{1}{\ln x}\right)'=-\left(\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\right)=\frac{1}{x\ln^2 x}=f(x)$

2.1. $\int\frac{x^3-2}{x^2}\,dx=\int\left(x-2x^{-2}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x}+c$

2.2.

$$\int\left(\sin x+\cos(2x)\right)dx=-\int-\sin x\,dx+\frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\,dx=$$

$$=-\cos x+\frac{1}{2}\sin(2x)+c$$

3.1.

$$\int\frac{x^2+1}{x}\,dx=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\ln x+c$$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+c$ e $F(1)=0$.

$$F(1)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x-\frac{1}{2}$$

3.2.

$$\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\ln x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}=\frac{e^2+1}{2}$$

4.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-4e^x\right)=0-4\times 0$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de *f*.

4.2. $f(x)=0\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x=0\Leftrightarrow e^x\left(e^x-4\right)=0$

$e^x=4\Leftrightarrow x=\ln 4$

Assim tem-se: $a=\ln 4$.

4.3. $f(x)=-3\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+3=0\Leftrightarrow e^x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x=1\ \vee\ e^x=3\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\ln 3$

4.4. $\int\left(e^{2x}-4e^x\right)dx=\frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx-4\int e^x\,dx=\frac{e^{2x}}{2}-4e^x+c$

$F(x)=\frac{e^{2x}}{2}-4e^x+c$ e $F(\ln 2)=0$.

$$F(\ln 2)=0\Leftrightarrow\frac{e^{2\ln 2}}{2}-4e^{\ln 2}+c=0\Leftrightarrow 2-8+c=0\Leftrightarrow c=6$$

$$F(x)=\frac{e^{2x}}{2}-4e^x+6$$

5.1. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(x+\sin x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{9\pi^2}{8}-0-\left(\frac{\pi^2}{18}-\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{77\pi^2}{72}$$

5.2. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}g(x)\,dx=$

$$=\frac{1}{2}+\frac{77\pi^2}{72}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1+\sin\left(\frac{x+\pi}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{77\pi^2}{72}-\left[x-2\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{77\pi^2}{72}-\left(\frac{3\pi}{2}+\sqrt{2}-\left(\frac{\pi}{3}+1\right)\right)=\frac{3}{2}-\sqrt{2}-\frac{7\pi}{6}+\frac{77\pi^2}{72}$$

Pág. 148

1.

	N.° de soluções no conjunto			
Equação	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$x^2-2x=0$	1	2	2	2
$x^2+5=0$	0	0	0	2
$4x^3+x=0$	0	1	1	3

Cálculos auxiliares:

. $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2$

. $x^2+5=0 \Leftrightarrow x^2=-5$

A equação é impossível em $\mathbb{N}$, em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{R}$.

Em $\mathbb{C}$, tem-se: $x^2=-5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-5} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5i^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{5}\,i \ \vee \ x=-\sqrt{5}\,i$

. $4x^3+x=0 \Leftrightarrow x\left(4x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ 4x^2+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x^2=-\dfrac{1}{4}$

A equação é impossível em $\mathbb{N}$.

Em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{R}$ a equação tem uma única solução: 0.

Em $\mathbb{C}$, tem-se: $x=0 \ \vee \ x^2=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}i^2} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\dfrac{1}{2}i \ \vee \ x=-\dfrac{1}{2}i$

2.1. $x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-9} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9i^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3i \ \vee \ x=-3i$

2.2. $x^3=-8x \Leftrightarrow x^3+8x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+8\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x^2+8=0 \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x^2=-8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\pm\sqrt{-8} \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\pm\sqrt{8i^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=2\sqrt{2}\,i \ \vee \ x=-2\sqrt{2}\,i$

2.3. $x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm 2i}{2} \Leftrightarrow x=1+i \ \vee \ x=1-i$

2.4. $x^2-6x=-11 \Leftrightarrow x^2-6x+11=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-44}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm 2\sqrt{2}i}{2} \Leftrightarrow x=3+\sqrt{2}\,i \ \vee \ x=3-\sqrt{2}\,i$

Pág. 149

3.1. $(5,\ -1)+(-3,\ 7)=(5-3,\ -1+7)=(2,\ 6)$

3.2. $(-4,\ 8)\times(7,\ 1)=(-4\times7-8\times1,\ -4\times1+8\times7)=(-36,\ 52)$

3.3. $\left(6,\dfrac{1}{2}\right)\times(2,-1)=\left(6\times2-\dfrac{1}{2}\times(-1),\ 6\times(-1)+\dfrac{1}{2}\times2\right)=$

$=\left(12+\dfrac{1}{2},\ -6+1\right)=\left(\dfrac{25}{2},\ -5\right)$

3.4. $\left(-\sqrt{2},0\right)\times\left(-1,2\sqrt{2}\right)=$

$=\left(-\sqrt{2}\times(-1)-0\times2\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\times2\sqrt{2}+0\times(-1)\right)=\left(\sqrt{2},-4\right)$

4. $(a,b)+(-a,-b)=\left(a+(-a),\ b+(-b)\right)=(0,0)$ e $(0,0)$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{R}^2$.

Pág. 150

5.1. $(a,b)=(2,k)\times\left[(k,-1)+(3,2)\right]=$

$=(2,k)\times(k,-1)+(2,k)\times(3,2)=$

$=\left(2k+k,-2+k^2\right)+\left(6-2k,4+3k\right)=$

$=\left(3k+6-2k,-2+k^2+4+3k\right)=\left(k+6,k^2+3k+2\right)$

5.2. $b-a=-1 \Leftrightarrow k^2+3k+2-(k+6)=-1 \Leftrightarrow k^2+2k-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow k=1 \ \vee \ k=-3$

Se $k=1$, então $(a,b)=(7,6)$. Se $k=-3$, então $(a,b)=(3,2)$.

5.3. $(-5,m)\times(2,m)=(-14,6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(-5\times2-m\times m,\ -5\times m+m\times2)=(-14,6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(-10-m^2,-3m\right)=\left(-14,6\right) \Leftrightarrow -10-m^2=-14 \wedge -3m=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2=4 \ \wedge \ m=-2 \Leftrightarrow (m=2 \vee m=-2) \ \wedge \ m=-2 \Leftrightarrow m=-2$

Pág. 151

6.

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
$2+8i$	2	8
$-2+i$	-2	1
$-6i$	0	-6
$5-i$	5	-1
$4i$	0	4
$\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	0
$-\dfrac{7}{5}$	$-\dfrac{7}{5}$	0
$-\sqrt{3}-i$	$-\sqrt{3}$	-1

7.1. $\text{Re}(z)=3 \ \wedge \ \text{Im}(z)=-1 \Leftrightarrow x-2=3 \ \wedge \ y+1=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=5 \ \wedge \ y=-2$

7.2. $\text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

z é um número real se $x\in\mathbb{R} \ \wedge \ y=-1$.

7.3. z é um número imaginário puro se $\text{Re}(z)=0 \wedge \text{Im}(z)\neq0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=0 \ \wedge \ y+1\neq0 \Leftrightarrow x=2 \ \wedge \ y\neq-1$.

8. z representa um número real negativo se

$\text{Re}(z)<0 \ \wedge \ \text{Im}(z)=0 \Leftrightarrow k+1<0 \ \wedge \ k^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k<-1 \ \wedge \ (k=2 \vee k=-2) \Leftrightarrow k=-2$.

Pág. 152

9. $z_A = 2+2i$, $z_B = -3+2i$, $z_C = -1+0i$, $z_D = 2-i$, $z_E = 1-3i$, $z_F = -2-3i$ e $z_G = 0+3i$.

Pág. 153

10.1. A transformação do plano complexo que corresponde à função *f* é a translação de vetor $\vec{u}(-3,\ 1)$.

10.2. $z-3+i = z+(-3+i)$

Sabe-se que *P* é o afixo de *z*. Designando por *Q* o afixo de $z-3+i$ tem-se: $Q = P+\vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3,\ 1)$.
Assim sendo, o afixo de $z-3+i$ é o ponto *C*.

11. Se o afixo de um determinado complexo z_1 se situa no 3.° quadrante, então o afixo do complexo $-z_1$ pertence ao 1.° quadrante porque os afixos de dois números complexos simétricos são pontos simétricos em relação à origem do referencial. A opção correta é a (A).

12.1. Se o afixo de um complexo z se situa no 4.° quadrante, então o afixo do complexo $-z$ situa no 2.° quadrante porque os afixos de dois números complexos simétricos são pontos simétricos em relação à origem do referencial. Donde se conclui que $\text{Re}(-z) < 0 \wedge \text{Im}(-z) > 0$. A opção correta é a (B).

12.2. A transformação do plano complexo que corresponde à função *f* é a reflexão de centro *O*.

Pág. 154

13.

z	$\overline{z}$
$5-2i$	$5+2i$
$-4+i$	$-4-i$
$-7i$	$7i$
$-\sqrt{5}+3i$	$-\sqrt{5}-3i$
-8	-8
0	0
πi	$-\pi i$

14.1. A imagem geométrica de $\overline{z}$ é o ponto *A* porque os afixos de dois números complexos conjugados são pontos simétricos em relação ao eixo real.

14.2. A imagem geométrica de $-z$ é o ponto *B* porque os afixos de dois números complexos simétricos são pontos simétricos em relação à origem do referencial.

14.3. A imagem geométrica de $-\overline{z}$ é o ponto *C* porque os afixos de dois números complexos conjugados são pontos simétricos em relação ao eixo real e os afixos de dois números complexos simétricos são pontos simétricos em relação à origem do referencial.

15. A transformação do plano complexo que corresponde à função *f* é a reflexão de eixo real seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(2,0)$, ou seja, é a reflexão deslizante de eixo real e vetor $\vec{u}(2,0)$.

Pág. 155

16.1. Se $z = -\overline{z}$ então z é um número imaginário puro.
Portanto, o afixo de z só pode ser o ponto *E*.

16.2. Os pontos que são afixos de um complexo e do seu conjugado são *A* e *C* porque simétricos em relação ao eixo real.

17.1. $z_D = z_A + z_B = (-3+i)+(1+2i) = -2+3i$

$z_C - z_B = z_D - z_A \Leftrightarrow z_C = (-2+3i)-(-3+i)+(1+2i) \Leftrightarrow z_C = 2+4i$

17.2. A transformação geométrica é a reflexão em relação ao eixo real porque os afixos de dois números complexos conjugados são pontos simétricos em relação ao eixo real.

Pág. 156

18.1. $\overline{\overline{z_1}+z_2} = \overline{\overline{z_1}}+\overline{z_2} = z_1+\overline{z_2} = -1+3i-2+i = -3+4i$

18.2. $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1}\,z_2 = (-1-3i)(-2-i) = 2-3+(1+6)i =$
$= -1+7i$

18.3. $i\,\overline{z_1 z_3} - z_2 = i\,\overline{z_1}\,\overline{z_3} - z_2 = i(-1-3i)(-1-2i)-(-2-i) =$
$= i(1-6+(2+3)i)+2+i = i(-5+5i)+2+i = -5i-5+2+i =$
$= -3-4i$

18.4. $z_2\left(\overline{z_1+z_3}\right) = z_2\left(\overline{z_1}+\overline{z_3}\right) = (-2-i)(-1-3i-1-2i) =$
$= (-2-i)(-2-5i) = 4+10i+2i-5 = -1+12i$

19.1. $w_1 = a+bi$ e $w_2 = c-bi$, $a<0$, $b>0$ e $c>0$.

$\overline{w_1}+w_1 = a-bi+a+bi = 2a$

A imagem geométrica de $\overline{w_1}+w_1$ pertence ao semieixo real negativo.

19.2. $w_2-\overline{w_2} = c-bi-(c+bi) = c-bi-c-bi = -2bi$

A imagem geométrica de $w_2-\overline{w_2}$ pertence ao semieixo imaginário negativo.

19.3. $\overline{w_1+w_2} = \overline{(a+bi+c-bi)} = \overline{(a+c)} = a+c$

A imagem geométrica de $\overline{w_1+w_2}$ pertence ao eixo real.

19.4. $i \times w_1 = i\times(a+bi) = ai+bi^2 = -b+ai$

A imagem geométrica de $i\,w_1$ pertence ao terceiro quadrante.

19.5. $-i\times\overline{w_2} = -i(c+bi) = -ci-bi^2 = -ci+b = b-ci$

A imagem geométrica de $-i\,\overline{w_2}$ pertence ao quarto quadrante.

Pág. 157

20.1.

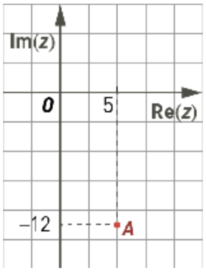
$$\begin{cases} w+\overline{w}=5 \\ w-\overline{w}=-8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\operatorname{Re}(w)=5 \\ 2i\operatorname{Im}(w)=-8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(w)=\dfrac{5}{2} \\ \operatorname{Im}(w)=-4 \end{cases}$$

Então, $w=\dfrac{5}{2}-4i$.

20.2. $w\overline{w}=\left(\dfrac{5}{2}-4i\right)\left(\dfrac{5}{2}+4i\right)=\dfrac{25}{4}+16=\dfrac{89}{4}$

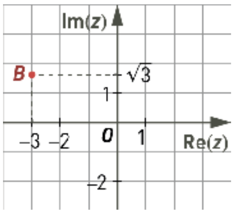
21.1. Sendo $z=5-12i$, então $|z|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=$

$=\sqrt{169}=13$.

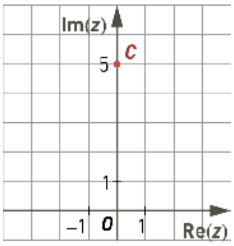


21.2. Sendo $z=-3+\sqrt{3}i$, então $|z|=\sqrt{(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

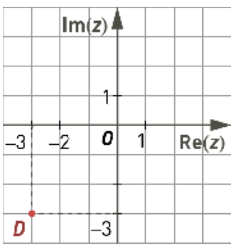


21.3. Sendo $z=5i$, então $|z|=\sqrt{0^2+5^2}=\sqrt{25}=5$.

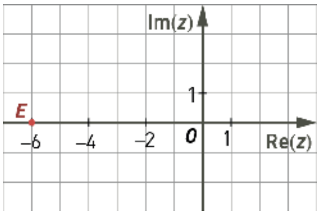


21.4. Sendo $z=-3-3i$, então $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=$

$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.



21.5. Sendo $z=-6$, então $|z|=\sqrt{(-6)^2+0^2}=\sqrt{36}=6$.



Pág. 158

22.1. $\operatorname{Re}(z_B)=\operatorname{Re}(z_A)$, logo $z_B=2+yi \quad (y>0)$.

$|z_B|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{2^2+y^2}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow 4+y^2=20\Leftrightarrow y^2=16\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=4\vee y=-4$

Então, $z_B=2+4i$.

22.2. $A_{[ABC]}=\dfrac{3\times5}{2}=\dfrac{15}{2}$

Tarefa 1

1.1.

$z^2-\sqrt{8}z+3=0\Leftrightarrow z=\dfrac{\sqrt{8}\pm\sqrt{8-12}}{2}\Leftrightarrow z=\dfrac{2\sqrt{2}\pm 2i}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{2}+i\vee z=\sqrt{2}-i$

$z_1=\sqrt{2}+i$ e $z_2=\sqrt{2}-i$, logo z_1 é o conjugado de z_2.

1.2.

a) $\overline{OP}=|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$, $\overline{OQ}=|z_2|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

e $\overline{PQ}=2$. Então, $P_{[POQ]}=2\sqrt{3}+2$.

b) $A_{[POQ]}=\dfrac{2\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

2.1. Seja r o raio da circunferência representada na figura.

$r=|z_A|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

Então, $z_B=-\sqrt{5}i$.

2.2.

$|t|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$

O afixo do número complexo $t=-\sqrt{2}-\sqrt{3}i$ é um ponto da circunferência representada na figura porque o seu módulo é igual ao raio da circunferência.

2.3.

a)

$\overline{z_A}=-w\Leftrightarrow-2-i=3a+(-b+2)i\Leftrightarrow-2=3a\wedge-1=-b+2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a=-\dfrac{2}{3}\wedge b=3$

b) w é um número real $\Leftrightarrow\operatorname{Im}(w)=0\Leftrightarrow b-2=0\Leftrightarrow b=2$

w é um número real quando $a\in\mathbb{R}\ \wedge\ b=2$.

c)
$w = -z_B \Leftrightarrow -3a + (b-2)i = \sqrt{5}i \Leftrightarrow -3a = 0 \wedge b - 2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 2 + \sqrt{5}$

2.4.

a) $M = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{5} \}$

$\mathrm{Im}(z) = 2 \wedge |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow y = 2 \wedge \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 2 \wedge x^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow y = 2 \wedge x^2 = 1 \Leftrightarrow y = 2 \wedge (x = 1 \vee x = -1)$
Então, $z = 1 + 2i \ \vee \ z = -1 + 2i$.

b) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \wedge |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = y \wedge \sqrt{y^2 + y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y \wedge 2y^2 = 5 \Leftrightarrow x = y \wedge x^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = y \wedge \left(x = \sqrt{\frac{5}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{5}{2}} \right) \Leftrightarrow x = y \wedge \left(x = \frac{\sqrt{10}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{10}}{2} \right)$
Então, $z = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i \ \vee \ z = -\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}i$.

c) $\mathrm{Re}(z) + 1 = 0 \wedge |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = -1 \wedge \sqrt{(-1)^2 + y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1 \wedge 1 + y^2 = 5 \Leftrightarrow x = -1 \wedge y^2 = 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1 \wedge (y = 2 \vee y = -2)$
Então, $z = -1 + 2i \ \vee \ z = -1 - 2i$.

Pág. 159

23. Sendo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, então $\bar{z} = a - bi$, $-z = -a - bi$ e $-\bar{z} = -a + bi$. Sejam *P*, *Q*, *R* e *S* as imagens geométricas dos números complexos z, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$, respetivamente. *P*, *Q*, *R* e *S* são vértices de um retângulo. Como $\overline{PQ} = 2|b|$ e $\overline{QR} = 2|a|$, tem-se: $A_{[PQRS]} = \overline{PQ} \times \overline{QR} = 2|b| \times 2|a| = 4|b| \times |a| = 4|ab|$.

24. A condição que representa os complexos z cujos afixos pertencem à mediatriz de [*AB*] é $|z - (2+i)| = |z - (-3-2i)|$, ou seja, é a condição (IV).

25. O conjunto de pontos que definem a região colorida da figura é representado pela condição $1 \le |z - 1 - 2i| \le 2$.

Pág. 160

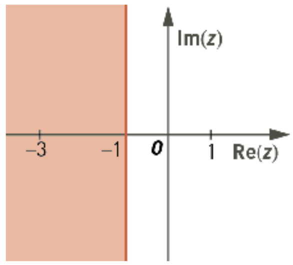
26.1. O conjunto de pontos constituído pelas imagens geométricas dos números complexos que verificam a condição dada é a coroa circular de centro $C(-5, 2)$ e raios 1 e 3.

26.2. O conjunto de pontos constituído pelas imagens geométricas dos números complexos que verificam a condição dada é o semiplano fechado à direita da mediatriz de [*AO*], sendo *O* a origem do referencial e *A* o afixo de $z = \frac{5}{2}$.

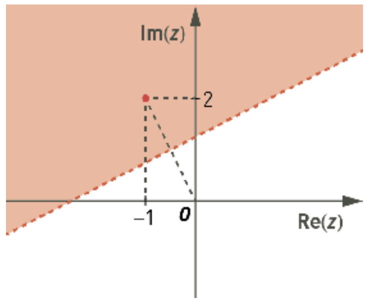
26.3. O conjunto de pontos constituído pelas imagens geométricas dos números complexos que verificam a condição dada é a parte do semiplano superior fechado definido mediatriz de [*AB*], sendo *A* o afixo de $z = -i$ e *B* o afixo de $z = i$, contida no círculo de centro *B* e raio $\sqrt{2}$.

26.4. O conjunto de pontos constituído pelas imagens geométricas dos números complexos que verificam a condição dada é o conjunto de pontos que pertencem simultaneamente ao semiplano inferior aberto definido mediatriz de [*AB*], sendo *A* o afixo de $z = -3$ e *B* o afixo de $z = 1 - i$ e ao semiplano inferior aberto definido mediatriz de [*CD*], sendo *C* o afixo de $z = i$ e *D* o afixo de $z = 1$.

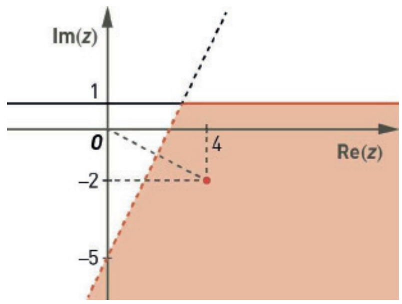
27.1.



27.2.



27.3.



28. Relativamente à circunferência menor, sabe-se que $\overline{AB} = |z_A - z_B| = |-1 + 2i - (-3 + 2i)| = 2$ e $z_C = -2 + 2i$.

A circunferência maior tem centro em *A* e raio 2 (pois é tangente ao eixo real).
O conjunto de pontos que definem a região colorida da figura é representado pela condição $|z + 2 - 2i| \ge 1 \wedge |z + 1 - 2i| \le 2$.

Pág. 161

29.1.
$w = iz + \overline{z} = i(x+yi) + x - yi = xi - y + x - yi =$

$= (x-y) + (x-y)i$

$\text{Re}(w) = \text{Im}(w)$, logo as imagens geométricas dos números complexos w pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.

29.2.
$iz = \overline{z} \Leftrightarrow i(x+yi) = x - yi \Leftrightarrow xi - y = x - yi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -y = x \wedge x = -y \Leftrightarrow y = -x$

29.3.
$|z \times \overline{z}| = 9 \Leftrightarrow |z| \times |\overline{z}| = 9 \Leftrightarrow |z| \times |z| = 9 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow |z| = 3$

Pág. 162

30.1. O número complexo $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ pertence ao conjunto A se e só se $|w-1| = |w+i|$.

$|w-1| = |w+i| \Leftrightarrow |x + yi - 1| = |x + yi + i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow -2x = 2y \Leftrightarrow y = -x$

30.2. O número complexo $u = k^2 - 3i$, $k \in \mathbb{R}$ pertence ao conjunto A se e só se $|u-1| = |u+i|$.

$|u-1| = |u+i| \Leftrightarrow |k^2 - 3i - 1| = |k^2 - 3i + i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(k^2-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{(k^2)^2 + (-2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (k^2-1)^2 + 9 = (k^2)^2 + 4 \Leftrightarrow k^4 - 2k^2 + 1 + 9 = k^4 + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k^2 = 4 - 10 \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{-6}{-2} \Leftrightarrow k^2 = 3 \Leftrightarrow k = \sqrt{3} \vee k = -\sqrt{3}$

30.3. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

z pertence ao conjunto A e tem módulo 2 se e só se $|z-1| = |z+i| \wedge |z| = 2$.

$|z-1| = |z+i| \wedge |z| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 1| = |x + yi + i| \wedge |z| = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \wedge \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x \wedge x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = -x \wedge x^2 + (-x)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x \wedge 2x^2 = 4 \Leftrightarrow y = -x \wedge x^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -x \wedge \left(x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(y = -\sqrt{2} \wedge x = \sqrt{2}\right) \vee \left(y = \sqrt{2} \wedge x = -\sqrt{2}\right)$

Então, $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \ \vee \ z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

31. Sabe-se que $z = a + bi$ e $w = iz = i(a+bi) = ai - b = -b + ai$.

$\overline{OA} = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\overline{OB} = |w| = |-b + ai| =$

$= \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, conclui-se que o triângulo [*OAB*] é isósceles.

$\overline{AB} = |z - w| = |a + bi - (-b + ai)| = |a + bi + b - ai| =$

$= |(a+b) + (b-a)i| = \sqrt{(a+b)^2 + (b-a)^2} =$

$= \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - 2ab + a^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$

Como $\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{OA}\right)^2 + \left(\overline{OB}\right)^2$, conclui-se que o triângulo [*OAB*] é retângulo em *O*.

Tarefa 2

1. Sendo $A(3,1)$ e $B(-2,4)$, então as coordenadas do ponto *M*, ponto médio de [*AB*] são $\left(\dfrac{3-2}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

$z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{3 + i - 2 + 4i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$

Então, o ponto médio de [*AB*] é a imagem geométrica do número complexo z_M.

2. $z_C - z_B = z_A + z_B - z_B = z_A = z_A - z_O$, isto é, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$.

$z_C - z_A = z_A + z_B - z_A = z_B = z_B - z_O$, isto é, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$.

Então, o quadrilátero [*OABC*] é um paralelogramo.

3. $|z_A + z_B|^2 + |z_A - z_B|^2 = (z_A + z_B)\left(\overline{z_A + z_B}\right) + (z_A - z_B)\left(\overline{z_A - z_B}\right) =$

$= (z_A + z_B)\left(\overline{z_A} + \overline{z_B}\right) + (z_A - z_B)\left(\overline{z_A} - \overline{z_B}\right) =$

$= z_A \times \overline{z_A} + z_A \times \overline{z_B} + z_B \times \overline{z_A} + z_B \times \overline{z_B} + z_A \times \overline{z_A} - z_A \times \overline{z_B} -$

$- z_B \times \overline{z_A} + z_B \times \overline{z_B} =$

$= z_A \times \overline{z_A} + z_B \times \overline{z_B} + z_A \times \overline{z_A} + z_B \times \overline{z_B} = 2z_A \times \overline{z_A} + 2z_B \times \overline{z_B} =$

$= 2\left(|z_A|^2 + |z_B|^2\right)$

4. Aplicando a igualdade demonstrada no item anterior, tem-se:

$|z + i|^2 + |z - i|^2 = 2\left(|z|^2 + |i|^2\right) = 2\left(|z|^2 + 1\right) = 2\left(1 + |z|^2\right)$.

5. O lugar geométrico dos pontos que são imagens geométricas dos complexos que satisfazem a condição $|z - z_A| = |z_A - z_B|$ é a circunferência de centro *A* e raio $\overline{AB}$, ou seja, é a circunferência de centro *A* e que passa por *B*.

Pág. 163

32.1. $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{-2+i} = \dfrac{1(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{-2-i}{4+1} = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$

32.2. $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1-4i}{-5+i} = \dfrac{(1-4i)(-5-i)}{(-5+i)(-5-i)} = \dfrac{-5-i+20i-4}{25+1} = -\dfrac{9}{26} + \dfrac{19}{26}i$

32.3. $\dfrac{z+1}{\overline{w}} = \dfrac{-5+i+1}{1+4i} = \dfrac{(-4+i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \dfrac{-4+16i+i+4}{1+16} =$

$= \dfrac{17i}{17} = i$

32.4. $\dfrac{w+t}{z+t} = \dfrac{1-4i-2+i}{-5-i-2+i} = \dfrac{-1-3i}{-7} = \dfrac{1}{7} + \dfrac{3}{7}i$

32.5. $\frac{z}{i}+\frac{i}{t}=\frac{-5+i}{i}+\frac{i}{-2+i}=\frac{(-5+i)(-i)}{i(-i)}+\frac{i(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=$

$=\frac{5i+1}{1}+\frac{-2i+1}{4+1}=1+5i+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i=\frac{6}{5}+\frac{23}{5}i$

33.1. $\frac{1}{w}=\frac{1}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}+i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

33.2. $-\frac{1}{w}=-\frac{1}{\sqrt{3}+i}=-\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=-\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

Pág. 164

34.1. $u=\frac{4}{w}=\frac{4}{2-i}=\frac{4(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{8+4i}{4+1}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i$

$\text{raio}=|u|=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{80}{25}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Logo, $v=\frac{4\sqrt{5}}{5}i$.

34.2. $\bar{u}=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$

35. Como a imagem geométrica do complexo w situa-se no segundo quadrante, então sabe-se que $w=a+bi$, $a<0 \wedge b>0$.

$\frac{1}{w}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

A imagem geométrica do complexo $\frac{1}{w}$ situa-se no terceiro quadrante porque $\text{Re}\left(\frac{1}{w}\right)<0 \wedge \text{Im}\left(\frac{1}{w}\right)<0$ e só pode corresponder ao número complexo z_2.

Pág. 165

36.1. $i^{43}=i^{4\times10+3}=i^3=-i$

36.2. $i^{134}=i^{4\times33+2}=i^2=-1$

36.3. $i^5+i^6+i^7+i^8+i^9=i^{4+1}+i^{4+2}+i^{4+3}+i^{2\times4+0}+i^{2\times4+1}=$

$=i+i^2+i^3+i^0+i=i-1-i+1+i=i$

36.4. $(2i)^3+(1+i)^2=8i^3+1+2i+i^2=-8i+1+2i-1=-6i$

36.5. $(1+i)^4=\left[(1+i)^2\right]^2=(1+2i+i^2)^2=(2i)^2=4i^2=-4$

36.6. $i^{11}(i^5+3i^{73})=i^{4\times2+3}(i^{4+1}+3i^{4\times18+1})=i^3(i^1+3i)=-i(4i)=$

$=-4i^2=4$

36.7. $i^{4n-2}+\frac{1}{i^7}=i^{-2}+\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i^2}+\frac{1}{-i}=-1+\frac{i}{1}=-1+i$

36.8. $\frac{1}{i^{4n+1}}-\frac{1}{i^{8n}}=\frac{1}{i^1}-\frac{1}{i^0}=\frac{1}{i}-\frac{1}{1}=\frac{-i}{1}-1=-1-i$

37. $\frac{1}{i^{491}}=\frac{1}{i^{4\times122+3}}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{1\times i}{-i\times i}=\frac{i}{1}=i$

Logo, i é solução da equação $\frac{1}{z^{491}}=i$.

38. $z^3=(1+2i)^3=(1+2i)^2\times(1+2i)=(1+4i-4)\times(1+2i)=$

$=(-3+4i)\times(1+2i)=-3-6i+4i-8=-11-2i$

$\frac{1}{z^3+11}=\frac{1}{(1+2i)^3+11}=\frac{1}{-11-2i+11}=\frac{1}{-2i}=\frac{1\times i}{-2i\times i}=\frac{i}{2}$

Logo, $1+2i$ é solução da equação $\frac{1}{z^3+11}=\frac{i}{2}$.

39.1. $i^{5+k}+i^7=0 \Leftrightarrow i^5\times i^k+i^{4+3}=0 \Leftrightarrow i^1\times i^k+i^3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow i^{1+k}-i=0 \Leftrightarrow i^{1+k}=i \Leftrightarrow 1+k=4n+1, n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow k=4n, n\in\mathbb{N}$

O menor número natural que verifica a condição é $k=4$.

39.2. $i^{3k+2}=1 \Leftrightarrow 3k+2=4n,\ n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow k=\frac{-2+4n}{3},\ n\in\mathbb{N}$

O menor número natural que verifica a condição é $k=2$.

39.3. $i^{3k+2}=-i \Leftrightarrow 3k+2=4n+2,\ n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow k=\frac{4n}{3},\ n\in\mathbb{N}$

O menor número natural que verifica a condição é $k=4$.

Pág. 166

40.1. $z_1=i^n$, $z_2=i^{n+1}=i^n\times i=z_1\times i$, $z_3=i^{n+2}=i^n\times i^2=$

$=i^n\times(-1)=-z_1$ e $z_4=i^{n+3}=i^n\times i^3=z_1\times(-i)$.

Os números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 têm módulo igual a 1 e cada um deles se situa num dos quatro semieixos. Logo, são vértices de um quadrado centrado na origem. Como o módulo de cada um dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 é 1, sabe-se que o lado l desse quadrado é dado por: $l^2=1^2+1^2 \Leftrightarrow l=\sqrt{2}$. Assim sendo, o perímetro do quadrado é igual a $4\sqrt{2}$.

40.2. Se a imagem geométrica de z_1 se situa no semieixo real negativo é porque $z_1=-1$.

$z_1=-1 \Leftrightarrow i^n=i^{4k+2},\ k\in\mathbb{N}_0 \Leftrightarrow n=4k+2,\ k\in\mathbb{N}_0$

Um valor possível é, por exemplo, $n=2$.

41.1.

$iz^2-z=0 \Leftrightarrow z(iz-1)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee iz-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\frac{1}{i} \Leftrightarrow z=0 \vee z=\frac{1(-i)}{i(-i)} \Leftrightarrow z=0 \vee z=-i$

$z\in\{0,-i\}$

41.2.

$2z-3i=zi \Leftrightarrow 2z-zi=3i \Leftrightarrow z(2-i)=3i \Leftrightarrow z=\frac{3i}{2-i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{3i(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z=\frac{6i-3}{4+1} \Leftrightarrow z=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$

41.3. Fazendo $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$ tem-se:

$$\frac{2z}{i}+\frac{\overline{z}}{i^3}=i\Leftrightarrow\frac{2(x+yi)}{i}+\frac{x-yi}{-i}=i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(2x+2yi)(-i)}{i(-i)}+\frac{(x-yi)\times i}{-i\times i}=i\Leftrightarrow\frac{-2xi+2y}{1}+\frac{xi+y}{1}=i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y-xi=i\Leftrightarrow 3y=0\wedge -x=1\Leftrightarrow y=0\wedge x=-1$$

Então, $z=-1$.

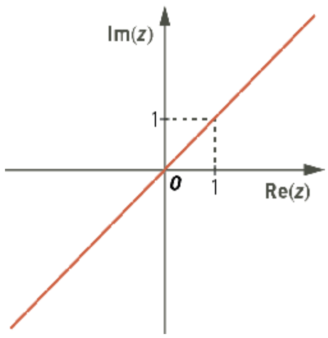
42.1. Fazendo $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$ tem-se: $iz+\overline{z}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow i(x+yi)+x-yi=0\Leftrightarrow xi-y+x-yi=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-y)+(x-y)i=0\Leftrightarrow x-y=0\wedge x-y=0\Leftrightarrow y=x$$

Então, $z=x+xi,\ x\in\mathbb{R}$.

Exemplo de três soluções: $1+i$, $-2-2i$ e $5+5i$.

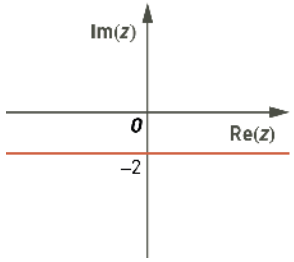


42.2. Fazendo $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$ tem-se: $\mathrm{Re}(z)-z=2i\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-(x+yi)=2i\Leftrightarrow x-x-yi=2i\Leftrightarrow -yi=2i\Leftrightarrow -y=2\Leftrightarrow y=-2$$

Então, $z=x-2i,\ x\in\mathbb{R}$.

Exemplo de três soluções: $1-2i$, $-2i$ e $-4-2i$.



Pág. 167

43.1. $z^3+3z=0\Leftrightarrow z(z^2+3)=0\Leftrightarrow z=0\vee z^2=-3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=0\vee z=\pm\sqrt{-3}\Leftrightarrow z=0\vee z=-\sqrt{3}i\vee z=\sqrt{3}i$$

$z\in\left\{0,\ -\sqrt{3}i,\ \sqrt{3}i\right\}$

43.2. $z^2-z+2=0\Leftrightarrow z=\dfrac{1\pm\sqrt{-7}}{2}\Leftrightarrow z=\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\vee z=\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i\vee z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$z\in\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}i,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}i\right\}$

43.3. $z^2+5=2z\Leftrightarrow z^2-2z+5=0\Leftrightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2+4i}{2}\vee z=\frac{2-4i}{2}\Leftrightarrow z=1+2i\vee z=1-2i$$

$z\in\{1+2i,\ 1-2i\}$

43.4. $z^4+2z^2-3=0\Leftrightarrow\left(z^2\right)^2+2z^2-3=0\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^2=1\vee z^2=-3\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{1}\ \vee\ z=\pm\sqrt{-3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z=-1\ \vee\ z=\sqrt{3}i\ \vee\ z=-\sqrt{3}i$$

$z\in\left\{1,\ -1,\ \sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i\right\}$

43.5. $z^4+5z^2+4=0\Leftrightarrow\left(z^2\right)^2+5z^2+4=0\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-5\pm\sqrt{9}}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^2=-1\vee z^2=-4\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-1}\ \vee\ z=\pm\sqrt{-4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=i\ \vee\ z=-i\ \vee\ z=2i\ \vee\ z=-2i$$

$z\in\{i,\ -i,\ 2i,\ -2i\}$

44.1. $P(1)=1^3+3\times1^2+9\times1-13=1+3+9-13=0$

44.2. Como $P(1)=0$, sabe-se que 1 é uma das raízes do polinómio *P*. Para decompor o polinómio em fatores vamos aplicar a Regra de Ruffini.

	1	3	9	−13
1		1	4	13
	1	4	13	0

Assim, $P(z)=(z-1)(z^2+4z+13)$.

$$P(z)=0\Leftrightarrow(z-1)(z^2+4z-13)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z-1=0\vee z^2+4z+13=0\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z=\frac{-4+6i}{2}\vee z=\frac{-4-6i}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z=-2+3i\vee z=-2-3i$$

$z\in\{1,\ -2+3i,\ -2-3i\}$

45. Seja *P* o polinómio de variável complexa *z* definido por $P(z)=-z^3+z^2-2z+2$. Como 1 é uma das soluções da equação $P(z)=0$, vamos recorrer à Regra de Ruffini para decompor em fatores o polinómio *P*.

	−1	1	−2	2
1		−1	0	−2
	−1	0	−2	0

Assim, $P(z)=(z-1)(-z^2-2)$.

$$P(z)=0\Leftrightarrow(z-1)(-z^2-2)=0\Leftrightarrow z-1=0\ \vee\ -z^2-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z^2=-2\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z=\pm\sqrt{-2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=1\ \vee\ z=\sqrt{2}i\vee z=-\sqrt{2}i$$

$z\in\left\{1,\ \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i\right\}$

46. Como o polinómio *P* é divisível por z^2+1 e $z^2+1=z^2-i^2=(z-i)(z+i)$, então o polinómio também é divisível por $z-i$ e por $z+i$. Para decompor o polinómio *P* em fatores vamos aplicar a Regra de Ruffini.

	1	-3	4	-3	3
i		i	$-1-3i$	$3+3i$	-3
	1	$-3+i$	$3-3i$	$3i$	0
$-i$		$-i$	$3i$	$-3i$	
	1	-3	3	0	

Assim sendo, $P(z)=(z-i)(z+i)(z^2-3z+3)$.

$$z^2-3z+3=0 \Leftrightarrow z=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow z=\frac{3+\sqrt{3}i}{2} \vee z=\frac{3-\sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \vee z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Então, $P(z)=(z-i)(z+i)\left(z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Pág. 168

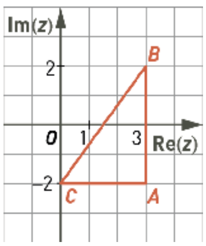
47.1. $z_1=\frac{5+i}{1+i}=\frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5-5i+i+1}{1+1}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$

$$z_2=4-\frac{5}{1+2i}=4-\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=4-\frac{5-10i}{1+4}=4-(1-2i)=$$

$$=3+2i$$

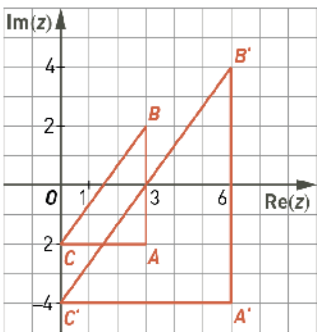
Como $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)$ e $\operatorname{Im}(z_1)=-\operatorname{Im}(z_2)$, conclui-se que z_1 e z_2 são números complexos conjugados.

47.2. $z_3=\frac{z_1-z_2}{\operatorname{Im}(z_2)}=\frac{3-2i-(3+2i)}{2}=\frac{-4i}{2}=-2i$



Quanto aos lados, o triângulo [*ABC*] é escaleno.

47.3. Sabe-se que $f(z)=2z$. A imagem do triângulo [*ABC*] por *f* é o triângulo $[A'B'C']$ representado no referencial abaixo.



A função *f*, no plano complexo, representa uma homotetia de centro *O* e razão 2.

48.1. $z^2+5=4z \Leftrightarrow z^2-4z+5=0 \Leftrightarrow z=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{4+2i}{2} \vee z=\frac{4-2i}{2} \Leftrightarrow z=2+i \vee z=2i$$

$z\in\{2+i, 2-i\}$

48.2. Fazendo $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$2\overline{z}=i-\frac{z}{1+i} \Leftrightarrow 2(x-yi)=i-\frac{x+yi}{1+i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-2yi=i-\frac{(x+yi)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow 2x-2yi=i-\frac{x+yi-xi+y}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-2yi=\frac{-x-y}{2}+\frac{2-y+x}{2}i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{-x-y}{2} \wedge -2y=\frac{2-y+x}{2} \Leftrightarrow y=-5x \wedge x+3y=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-5x \wedge x-15x=-2 \Leftrightarrow y=-\frac{5}{7} \wedge x=\frac{1}{7}$$

Então, $z=\frac{1}{7}-\frac{5}{7}i$.

48.3. Fazendo $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$, tem-se: $z\overline{z}-iz=2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+yi)(x-yi)-i(x+yi)=2 \Leftrightarrow x^2+y^2-xi+y=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+y=2 \wedge -x=0 \Leftrightarrow y^2+y-2=0 \wedge x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-1\pm 3}{2} \wedge x=0 \Leftrightarrow (y=1 \vee y=-2) \wedge x=0$$

$z\in\{-2i, i\}$

48.4. Fazendo $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$, tem-se: $z^2+i=\overline{z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^2+i=x-yi \Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2+i=x-yi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)+(2xy+1)i=x-yi \Leftrightarrow x^2-y^2=x \wedge 2xy+1=-y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \wedge y=-\frac{1}{3}$$

Então, $z=-\frac{1}{3}i$.

48.5. $z^3+5z=0 \Leftrightarrow z(z^2+5)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee z^2=-5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\pm\sqrt{-5} \Leftrightarrow z=0 \vee z=-\sqrt{5}i \vee z=\sqrt{5}i$$

$z\in\{0, \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

48.6. Seja *P* o polinómio de variável complexa *z* definido por $P(z)=z^3-2z^2+z-2$. Como 2 é solução da equação $P(z)=0$ podemos recorrer à Regra de Ruffini para fatorizar o polinómio *P*.

	1	-2	1	-2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Assim, $P(z)=(z-2)(z^2+1)$.

$$z^3-2z^2+z-2=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow z=2 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=2 \vee z=i \vee z=-i$$

$z\in\{2, i, -i\}$

Tarefa 3

1.1. $z_2 = 1+\frac{2-i}{-1+i} = 1+\frac{(2-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = 1+\frac{-2-2i+i-1}{1+1} =$

$= 1-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

A imagem geométrica de z_2 pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares porque $\text{Re}(z_2) = \text{Im}(z_2)$.

1.2. $z_1 = \frac{-2}{1+i} = \frac{-2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2+2i}{1+1} = -1+i$

Sejam *A* e *B* as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2. Sabe-se que $A(-1,\ 1)$ e $B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. A imagem geométrica do número complexo $z_3 = a+1-ai$, $a \in \mathbb{R}$, é colinear com as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2, se pertencer à reta definida pelos pontos *A* e *B*.

O declive da reta é igual a -3 $\left(m = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1} = -3 \right)$.

A reta é definida por: $y-1 = -3(x+1) \Leftrightarrow y = -3x-2$.

Então, a imagem geométrica do número complexo z_3 é colinear com as imagens geométricas dos números complexos z_1 e z_2 se

$-a = -3(a+1)-2 \Leftrightarrow -a = -3a-3-2 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}$.

2.

Imagem geométrica	Número complexo
A	$-\overline{w}$
B	$\overline{w}$
C	$\overline{w}+1$
D	$\frac{1}{2}\overline{w}$
E	$w+i$

3.1.

$z_1 = \frac{1+7i}{2-i} = \frac{(1+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+14i-7}{4+1} = \frac{-5+15i}{5} = -1+3i$

$z_2 = \frac{(1+i)^2}{-1+i} = \frac{1+2i-1}{-1+i} = \frac{2i}{-1+i} = \frac{(2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-2i+2}{1+1} = 1-i$

$z_3 = 1-\frac{3}{(-i)^{87}} = 1-\frac{3}{-i^{4\times 21+3}} = 1-\frac{3}{-i^3} = 1-\frac{3}{i} = 1-\frac{3(-i)}{i(-i)} =$

$= 1-\frac{-3i}{1} = 1+3i$

Então, tem-se que: $z_1 \to Q$, $z_2 \to R$ e $z_3 \to P$.

3.2. O ponto *R* tem coordenadas $(1,\ -1)$ e $M(4,\ 1)$.

$\overrightarrow{RM} = M-R = (4,\ 1)-(1,\ -1) = (3,\ 2)$

Então, $f(z) = z+3+2i$.

Pág. 169

49.1. $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

z é número complexo unitário porque $|z| = 1$.

49.2. Como *z* é número complexo unitário então, sendo θ um argumento de *z*, sabe-se que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Assim sendo, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ e $\sin\theta = -\frac{4}{5}$.

Então, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$.

50.1. Seja α um argumento do número complexo *w*.

Então, sabe-se que $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in 3.^{\circ}\,\text{Q}$.

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\alpha \in 3.^{\circ}\,\text{Q} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Donde se conclui que um argumento de *w* é, por exemplo, $\frac{4\pi}{3}$.

50.2. $w = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Pág. 170

51.1. Por exemplo, $\alpha = \frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$.

51.2.

a) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

b)

$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

c)

$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{6}}{4}i-\frac{\sqrt{6}}{4} =$

$= \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$

d)

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} =$

$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i+\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

Pág. 171

52.1. $-\frac{\pi}{6}$ é um argumento de z_1, então a representação geométrica de z_1 situa-se no 4.° quadrante. $\frac{2\pi}{3}$ é um argumento de z_2, então a representação geométrica de z_2 situa-se no 2.° quadrante.

52.2.

$$z_1\,z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1i = i$$

Como $\text{Re}(z_1\,z_2) = 0$, então o número complexo $z_1\,z_2$ é um imaginário puro.

52.3.

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

53.

$$z = 3e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Tarefa 4

1. Sabe-se que $P\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$ e $Q\left(3\cos\frac{\pi}{3}, 3\sin\frac{\pi}{3}\right)$, logo:

$$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ e } w = 3\cos\frac{\pi}{3} + i\,3\sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= 3\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

2. $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $Q(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$.

3.1. z é um número real negativo se $\alpha = \pi$.

3.2. $\text{Im}(w) > 0 \wedge \text{Re}(w) = 0$ se $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3.3. $\text{Im}(w) < 0 \wedge \text{Re}(w) < 0$ se $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

3.4. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ se $\alpha = \frac{\pi}{4} \vee \alpha = \frac{5\pi}{4}$.

4.1. A imagem geométrica de u pertence ao 2.° quadrante porque $\text{Re}(u) < 0 \wedge \text{Im}(u) > 0$.

4.2. A imagem geométrica de u pertence à circunferência C_2 porque $|u| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$.

5.1. $r = |t| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

5.2. Como S pertence à semirreta $\dot{O}T$ e $\frac{5\pi}{6}$ é um argumento do número complexo cujo afixo é S, então um argumento de t é $\frac{5\pi}{6}$.

Sendo $r = |t|$, então $t = r\,e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Pág. 173

54.1. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

54.2. $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

54.3. Sendo $\frac{2\pi}{3}$ um argumento do complexo z_1, então uma expressão geral dos argumentos de z_1 é $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

54.4. $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

54.5. $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

55.

z	$\|z\|$	$\arg(z)$
$1+i$	$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$-2+2i$	$\sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$1+\sqrt{3}\,i$	$\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$	$\frac{\pi}{3}$
$3+\sqrt{3}\,i$	$\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}i$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}+\frac{10}{4}} = \sqrt{5}$	$-\frac{\pi}{4}$
-4	4	π
$-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$	$\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$
$-2i$	2	$-\frac{\pi}{2}$

56.1. No caso de z ser um imaginário puro e $\operatorname{Im}(z)>0$, então o argumento principal de z é $\frac{\pi}{2}$.

56.2. No caso de z ser um número real negativo, então o argumento principal de z é π.

56.3. No caso de z ser um número real positivo, então o argumento principal de z é 0.

56.4. No caso de z ser um imaginário puro e $\operatorname{Im}(z)<0$, então o argumento principal de z é $-\frac{\pi}{2}$.

Pág. 174

57. Sendo M o ponto médio de [OP], sabe-se que $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OP}=1$.

$\cos\alpha=\frac{1}{2}\wedge 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}$

Então, $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_C=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ e $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

58.1. $w=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1+\sqrt{3}i$

58.2. $z=4-w=4-\left(1+\sqrt{3}i\right)=3-\sqrt{3}i$

$|z|=\sqrt{3^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(z)$.

$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 4.° quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(z)=-\frac{\pi}{6}$. Na forma trigonométrica, $z=2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

59.1. $|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(z_1)$.

$\tan\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z_1 é um ponto do 4.° quadrante.

Então, $\operatorname{Arg}(z_1)=-\frac{\pi}{6}$. Na forma trigonométrica, $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

59.2. $z_2=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

59.3. $z_3=-4e^{i\frac{\pi}{5}}=-4\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=$

$=4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=4\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right)=$

$=4e^{i\frac{6\pi}{5}}$

59.4.

$z_4=i^{34}-\frac{1+i^{17}}{1-i}=i^{4\times 8+2}-\frac{1+i^{4\times4+1}}{1-i}=i^2-\frac{1+i^1}{1-i}=$

$=-1-\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1-\frac{1+2i-1}{1+1}=-1-i$

$|z_4|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(z_4)$.

$\tan\theta=\frac{-1}{-1}=1$ e sabe-se que o afixo de z_4 é um ponto do 3.° quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(z_4)=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $z_4=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Pág. 175

60.1. $|w_1|=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=4$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(w_1)$. $\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de w_1 é um ponto do 1.° quadrante.

Então, $\operatorname{Arg}(w_1)=\frac{\pi}{3}$. Na forma trigonométrica, $w_1=4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ora, $w_1=4e^{i\frac{\pi}{3}}=4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)}=4e^{i\frac{7\pi}{3}}=w_2$.

60.2. $\overline{w_2}=4e^{-i\frac{7\pi}{3}}=4e^{i\left(-\frac{7\pi}{3}+4\pi\right)}=4e^{i\frac{5\pi}{3}}$

O argumento positivo mínimo de $\overline{w_2}$ é $\frac{5\pi}{3}$.

61.1. $|z|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(z)$. $\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 4.° quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(z)=-\frac{\pi}{3}$. Na forma trigonométrica, $z=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\overline{z}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; 1.° quadrante. $-z=2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$; 2.° quadrante.

61.2. $\overline{z}=3e^{-i\frac{9\pi}{8}}=3e^{i\left(-\frac{9\pi}{8}+2\pi\right)}=3e^{i\frac{7\pi}{8}}$; 2.° quadrante.

$-z=3e^{i\left(\pi+\frac{9\pi}{8}\right)}=3e^{i\frac{17\pi}{8}}=3e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{8}\right)}=3e^{i\frac{\pi}{8}}$; 1.° quadrante.

61.3.

$z=5\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=5e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$\overline{z}=5e^{i\frac{\pi}{6}}$; 1.° quadrante.

$-z=5e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=5e^{i\frac{5\pi}{6}}$; 2.° quadrante.

61.4.

$$z=-e^{i\frac{\pi}{7}}=e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}=e^{i\frac{8\pi}{7}};$$

$$\overline{z}=e^{-i\frac{8\pi}{7}}=e^{i\left(-\frac{8\pi}{7}+2\pi\right)}=e^{i\frac{6\pi}{7}};\ \text{2.° quadrante}.$$

$$-z=e^{i\frac{\pi}{7}};\ \text{1.° quadrante}.$$

62.1. Seja $w=\dfrac{4}{-\sqrt{3}-i}$.

$$w=\frac{4}{-\sqrt{3}-i}=\frac{4\left(-\sqrt{3}+i\right)}{\left(-\sqrt{3}-i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)}=\frac{4\left(-\sqrt{3}+i\right)}{3+1}=-\sqrt{3}+i$$

$$|w|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(w)$.

$\tan\theta=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de w é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\text{Arg}(w)=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$. Na forma trigonométrica, $w=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Então, $\overline{w}=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

$$z=\overline{w}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow 2e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow\alpha=\frac{5\pi}{6}$$

62.2. Seja $t=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i}$.

$$t=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i}=\frac{1\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i}{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}}=$$

$$=\sqrt{3}+i$$

$$|t|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(t)$.

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de t é um ponto do 1.° quadrante.

Então, $\text{Arg}(t)=\dfrac{\pi}{6}$. Na forma trigonométrica, $t=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$z=t\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow 2e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{6}}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow\alpha=-\frac{\pi}{6}$$

62.3. Seja $u=-\left(\sqrt{2}i-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}i+\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

$$|u|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(u)$.

$\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{+\sqrt{2}}=-1$ e sabe-se que o afixo de u é um ponto do 4.° quadrante. Então, $\text{Arg}(u)=-\dfrac{\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $u=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$z=u\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow 2e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{4}}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge\alpha\in\left]-\pi,\pi\right]\Leftrightarrow\alpha=-\frac{7\pi}{12}$$

Pág. 176

63.1. Um pentágono regular inscrito numa circunferência divide-a em 5 arcos geometricamente iguais, cada um deles com amplitude $\dfrac{2\pi}{5}$.

Sendo $z_1=4e^{i\frac{\pi}{6}}$ então $z_2=4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{5}\right)}=4e^{i\frac{17\pi}{30}}$.

63.2.

$$z_1w=4e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{6\pi}{5}}=4e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{6\pi}{5}}=4e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{5}\right)}=4e^{i\frac{41\pi}{30}}$$

O vértice do pentágono que é afixo de z_1w é o vértice *D*.

64.1.

$$\left(6e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\times\left(\frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{6}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

64.2. Seja $z=1-i$.

$$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z)$.

$\tan\theta=\dfrac{-1}{1}=-1$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 4.° quadrante.

Então, $\text{Arg}(z)=-\dfrac{\pi}{4}$. Na forma trigonométrica, $z=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$(1-i)e^{i\frac{\pi}{5}}=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)e^{i\frac{\pi}{5}}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}\right)}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{20}}$$

64.3.

$$(-5i)\times\left(-3e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)=\left(5e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)\times\left(3e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)=15e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)}=15e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

Pág. 177

65.1.

$w=-\sqrt{3}+i^{11}=-\sqrt{3}+i^{4\times 2+3}=-\sqrt{3}+i^3=-\sqrt{3}-i$

$|w|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(w)$.

$\tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de w é um ponto do 3.° quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(w)=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$. Na forma trigonométrica, $w=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

$zw=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{3}}2e^{-i\frac{5\pi}{6}}=2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

65.2.

$zw=2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=$

$=2\sqrt{3}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-3+\sqrt{3}i$

66.1.

$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$.

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(z)$.

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 1.° quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{6}$.

Na forma trigonométrica, $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$t=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$

66.2.

a)

$z\times t=\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i+\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}=$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$

b) $zt=2e^{i\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{5\pi}{12}}$

66.3.

$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$

$=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\frac{6+2\sqrt{12}+2}{6-2}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$

Pág. 178

67.1. A imagem geométrica de iz obtém-se aplicando à imagem geométrica de z uma rotação de centro O e amplitude $\frac{\pi}{2}$.

Como a imagem geométrica do número complexo z se situa no 2.° quadrante, então a imagem geométrica do número complexo iz situa-se no 3.° quadrante.

67.2. A imagem geométrica de i^2z obtém-se aplicando à imagem geométrica de z uma rotação de centro O e amplitude π.

Como a imagem geométrica do número complexo z se situa no 2.° quadrante, então a imagem geométrica do número complexo i^2z situa-se no 4.° quadrante.

67.3. A imagem geométrica de $-iz$ obtém-se aplicando à imagem geométrica de z uma rotação de centro O e amplitude $-\frac{\pi}{2}$. Como a imagem geométrica do número complexo z se situa no 2.° quadrante, então a imagem geométrica do número complexo $-iz$ situa-se no 1.° quadrante.

67.4. $i^7\,\overline{z}=i^{4+3}\,\overline{z}=i^3\,\overline{z}=-i\,\overline{z}$

$\operatorname{Arg}\left(i^7\overline{z}\right)=\operatorname{Arg}\left(-i\overline{z}\right)=\operatorname{Arg}(-i)+\operatorname{Arg}(\overline{z})=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arg}(z)$

Como a imagem geométrica do número complexo z se situa no 2.° quadrante, então a imagem geométrica do número complexo $i^7\overline{z}$ situa-se no 2.° quadrante.

68.

$\operatorname{Arg}\left(\frac{i\overline{z}}{2}\right)=\operatorname{Arg}\left(\frac{i}{2}\right)+\operatorname{Arg}(\overline{z})=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arg}(z)$

$\left|\frac{i\overline{z}}{2}\right|=\left|\frac{i}{2}\right|\times|\overline{z}|=\frac{1}{2}\times|z|=\frac{1}{2}|z|$

O ponto D pode ser a imagem geométrica do número complexo $\frac{i\overline{z}}{2}$.

69.1.

$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{7}}}=\frac{1}{2}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{21}}$

69.2. $\frac{z_2}{z_1}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{7}}}{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{2}{1}e^{i\left(\frac{\pi}{7}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{17\pi}{21}}$

Pág. 179

70.1. $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z)$. $\tan\theta=\frac{1}{1}=1$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 1.º quadrante. Então, $\text{Arg}(z)=\frac{\pi}{4}$.

Na forma trigonométrica, $z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$z^8=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8=\left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i\left(8\times\frac{\pi}{4}\right)}=16e^{i2\pi}=16(1+0i)=16$$

Assim, conclui-se que z^8 é um número real.

70.2.

$$z^{-14}=\left(\frac{1}{z}\right)^{14}=\left(\frac{1e^{i0}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{14}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(0-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{14}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{14}e^{i\left(14\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1}{128}e^{-i\frac{7\pi}{2}}=\frac{1}{128}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{128}(0+i)=\frac{1}{128}i$$

Assim, conclui-se que z^{-14} é um número imaginário puro.

70.3. $(2-z)^5=(2-1-i)^5=(1-i)^5$

Seja $w=1-i$.

$|w|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(w)$. $\tan\theta=\frac{-1}{1}=-1$

e sabe-se que o afixo de w é um ponto do 4.º quadrante.

Então, $\text{Arg}(w)=-\frac{\pi}{4}$. Na forma trigonométrica, $w=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$(2-z)^5=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5=\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{i\left(5\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}=4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4+4i$$

Pág. 180

71.1. $z-1=3+2i^7-1=2+2i^{4+3}=2+2i^3=2-2i$

$|z-1|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z-1)$. $\tan\theta=\frac{-2}{2}=-1$ e sabe-se que o afixo de $z-1$ é um ponto do 4.º quadrante.

Então, $\text{Arg}(z-1)=-\frac{\pi}{4}$. Na forma trigonométrica, $z-1=\sqrt{8}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$(z-1)^{128}=\left(\sqrt{8}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{128}=\left(\sqrt{8}\right)^{128}e^{i\left(128\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=8^{64}e^{-i32\pi}=8^{64}e^{i0\pi}=$$

$$=8^{64}(1+0i)=8^{64}$$

Assim conclui-se que $(z-1)^{128}$ é um número real.

71.2. $$\frac{w^4}{wi}=\frac{\left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^4}{2e^{i\frac{\pi}{6}}\times e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{2^4e^{i\left(4\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}}{2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{16e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{16}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}=$$

$$=8e^{i\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}=8e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=8\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-4+4\sqrt{3}i$$

71.3. $$w=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$$

$$z-w-3=3-2i-\left(\sqrt{3}-i\right)-3=-2i-\sqrt{3}+i=-\sqrt{3}-i$$

$$|z-w-3|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z-w-3)$.

$\tan\theta=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de $z-w-3$ é um ponto do 3.º quadrante. Então, $\text{Arg}(z-w-3)=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

Na forma trigonométrica, $z-w-3=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

$$(z-w-3)^3=\left(2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^3=2^3e^{i\left(3\times\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}=8e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)}=8e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}+4\pi\right)}=$$

$$=8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

72.1. $|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$.

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z_1)$. $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z_1 é um ponto do 1.º quadrante.

Então, $\text{Arg}(z_1)=\frac{\pi}{6}$. Na forma trigonométrica, $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$z_1^{\,9}=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^9=2^9e^{i\left(9\times\frac{\pi}{6}\right)}=2^9e^{i\frac{3\pi}{2}}=2^9(0-i)=-2^9i$$

Então, $z_1^{\,9}$ é um número imaginário puro.

72.2. $|z_2|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z_2)$. $\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de z_2 é um ponto do 4.º quadrante.

Então, $\text{Arg}(z_2)=-\frac{\pi}{3}$. Na forma trigonométrica, $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\frac{z_1^{\,7}}{2z_2^{\,5}}=\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^7}{2\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5}=\frac{2^7e^{i\left(7\times\frac{\pi}{6}\right)}}{2\left(2^5e^{i\left(5\times-\frac{\pi}{3}\right)}\right)}=\frac{2^7e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2^6e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}}=\frac{2^7}{2^6}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)}=$$

$$=2e^{i\frac{17\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{17\pi}{6}-2\pi\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Tarefa 5

1.1. $|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\text{Arg}(z)$. $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

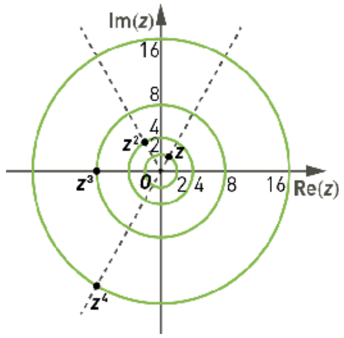
e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 1.° quadrante.

Então, $\text{Arg}(z)=\frac{\pi}{3}$. Na forma trigonométrica, $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$z^2=z\times z=2e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}=4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z^3=z^2\times z=4e^{i\frac{2\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}=8e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=8e^{i\pi}$

$z^4=z^3\times z=8e^{i\pi}\times 2e^{i\frac{\pi}{3}}=16e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}=16\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$



1.2. $|z|=2$, $|z^2|=4$, $|z^3|=8$ e $|z^4|=16$.

$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=2$

$\text{Arg}(|z|)=\frac{\pi}{3}$, $\text{Arg}(|z^2|)=\frac{2\pi}{3}$, $\text{Arg}(|z^3|)=\pi$ e $\text{Arg}(|z^4|)=\frac{4\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\pi=\frac{\pi}{3}$

Os módulos de z, z^2, z^3 e z^4 são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão 2 e os respetivos argumentos positivos mínimos são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{3}$.

1.3. $u=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $u^2=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $u^3=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=e^{i\frac{3\pi}{3}}=e^{i\pi}$,

$u^4=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$|u|=|u^2|=|u^3|=|u^4|=1$

Conclui-se, então, que as imagens geométricas dos números complexos u, u^2, u^3 e u^4 se situam sobre a circunferência centrada na origem e de raio 1.

1.4.

$w^n=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n$	$w=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$	w^2	w^3	w^4	…	w^7	w^8	…	w^n
Módulo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	…	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$
Um argumento	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	…	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	…	$\frac{n\pi}{3}$

2.1. $w=z^n=\left(2e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{5}}$

A imagem geométrica de w pertence ao 2.° quadrante se

$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{n\pi}{5}<\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{n\pi}{5}<\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+2k<\frac{n}{5}<1+2k, k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{5}{2}+10k<n<5+10k, k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n que satisfaz o pedido é 3.

2.2. A imagem geométrica de w é um número real negativo se

$\frac{n\pi}{5}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$\frac{n\pi}{5}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=5+10k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n que satisfaz o pedido é 5.

2.3. A imagem geométrica de w pertence ao 4.° quadrante se

$\frac{3\pi}{2}+2k\pi<\frac{n\pi}{5}<2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$\frac{3\pi}{2}+2k\pi<\frac{n\pi}{5}<2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{3}{2}+2k<\frac{n}{5}<2+2k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{15}{2}+10k<n<10+10k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$

Assim, o menor valor de n que satisfaz o pedido é 8.

2.4. A origem e as imagens geométricas de z e w são colineares, sendo $z\neq w$, se $\frac{n\pi}{5}=\frac{\pi}{5}+k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ n\in\mathbb{N}\ \wedge\ n>1$.

$\frac{n\pi}{5}=\frac{\pi}{5}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ n\in\mathbb{N}\ \wedge\ n>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=1+5k,\ k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ n\in\mathbb{N}\ \wedge\ n>1$

Assim, o menor valor de n que satisfaz o pedido é 6.

Pág. 181

73.1. $z_1{}^2=\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2=2^2e^{i\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)}=4e^{i\frac{3\pi}{2}}=4(0-i)=-4i=z_3$

Então, z_1 é uma raiz quadrada de z_3 porque $z_1{}^2=z_3$.

73.2. $z_1{}^5=\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5=2^5e^{i\left(5\times\frac{3\pi}{4}\right)}=32e^{i\frac{15\pi}{4}}=32e^{i\left(\frac{15\pi}{4}-2\pi\right)}=32e^{i\frac{7\pi}{4}}=$

$=z_2$

Então, z_1 é uma raiz índice 5 de z_2 porque $z_1{}^5=z_2$.

74. $z=\left(2e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n=2^n e^{i\frac{n\pi}{5}}$

z é um número real negativo se $\frac{n\pi}{5}=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$\frac{n\pi}{5}=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=5+10k, k\in\mathbb{Z}$

Assim sendo, o menor valor de n que satisfaz o pedido é 5.

$z=2^5 e^{i\frac{5\pi}{5}}=32e^{i\pi}$

75.

$z_1^{\ 3}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=2^3 e^{i\frac{3\pi}{3}}=8e^{i\pi}=8(-1+0i)=-8$

$z_2^{\ 3}=(-2)^3=-8$

z_1 e z_2 são duas das raízes cúbicas do mesmo número complexo w porque $(z_1)^3=(z_2)^3$.

$w=-8$

Tarefa 6

1.1.

$z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ e $z_3=$

$=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+3\times\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

1.2.

$z_0^{\ 4}=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4=2^4 e^{i\frac{4\pi}{6}}=16e^{i\frac{2\pi}{3}}=$

$=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}i$

$z_1^{\ 4}=\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4=2^4 e^{i\frac{8\pi}{3}}=16e^{i\frac{2\pi}{3}}=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$

$=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}i$

$z_2^{\ 4}=\left(2e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^4=2^4 e^{i\frac{28\pi}{6}}=16e^{i\frac{14\pi}{3}}=16e^{i\frac{2\pi}{3}}=$

$=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}i$

$z_3^{\ 4}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^4=2^4 e^{i\frac{20\pi}{3}}=16e^{i\frac{2\pi}{3}}=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$

$=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}i$

Donde se conclui que z_0, z_1, z_2 e z_3 são soluções da equação $z^4=-8+8\sqrt{3}i$.

2.1. $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4=e^{i\frac{4\pi}{4}}=e^{i\pi}=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$

Conclui-se que $e^{i\frac{\pi}{4}}$ é uma raiz índice 4 de -1 porque $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4=-1$.

2.2. $\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{i\frac{3\pi}{6}}=\frac{1}{8}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{8}i$.

Conclui-se que $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ é uma raiz índice 3 de $\frac{1}{8}i$ porque $\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=\frac{1}{8}i$.

3. Se $2e^{i\frac{\pi}{15}}$ é uma das raízes índice 5 de um número complexo z, então $\left(2e^{i\frac{\pi}{15}}\right)^5=z$.

$z=\left(2e^{i\frac{\pi}{15}}\right)^5=2^5 e^{i\frac{5\pi}{15}}=32e^{i\frac{\pi}{3}}=32\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$

$=32\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16+16\sqrt{3}i$

4.1. $|z_0|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\arg(z_0)$. $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z_0 é um ponto do 1.° quadrante.

Então, $\theta=\frac{\pi}{6}$ e $z_0=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$|z_1|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Considere-se, por exemplo, $\theta_1=\arg(z_1)$. $\tan\theta_1=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z_1 é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\theta_1=\frac{5\pi}{6}$ e $z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

$z_0^{\ 3}=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=2^3 e^{i\frac{3\pi}{6}}=8e^{i\frac{\pi}{2}}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$

$=8(0+i)=8i=w$

$z_1^{\ 3}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^3=2^3 e^{i\frac{15\pi}{6}}=8e^{i\frac{5\pi}{2}}=8e^{i\frac{\pi}{2}}=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$

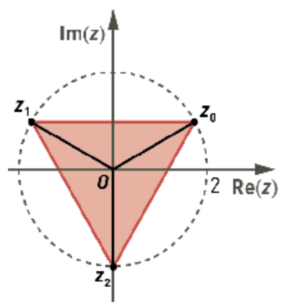
$=8(0+i)=8i=w$

$z_2^{\ 3}=(-2i)^3=-8i^3=-8(-i)=8i=w$

Então, z_0, z_1 e z_2 pertencem ao conjunto $\{z\in\mathbb{C}:\ z^3=w\}$.

4.2. As imagens geométricas dos números complexos z_0, z_1 e z_2 são os vértices de um triângulo equilátero porque

$|z_0-z_1|=|z_2-z_1|=|z_0-z_2|=2\sqrt{3}$



Pág. 182

76.1. O ponto A pertence ao primeiro quadrante e situa-se na bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, $\operatorname{Arg}(z_A)=\frac{\pi}{4}$.

$$|z_A|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$z_A=2e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_B=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{12}}\ \text{ e }\ z_C=2e^{i\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$

76.2.

$$w=(z_A)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3=2^3e^{i\frac{3\pi}{4}}=8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i$$

77.1. $|w|=\sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\arg(w)$.

$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\ =-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de w é um ponto do 2.° quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(w)=\frac{5\pi}{6}$.

Na forma trigonométrica, $w=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

77.2. Seja $z=re^{i\theta}$.

$$z^4=w\Leftrightarrow\left(re^{i\theta}\right)^4=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\Leftrightarrow r^4e^{i(4\theta)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r^4=\sqrt{8}\\4\theta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt[8]{8}\\\theta=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\ \wedge\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt[8]{8}\,e^{i\frac{5\pi}{24}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt[8]{8}\,e^{i\frac{17\pi}{24}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt[8]{8}\,e^{i\frac{29\pi}{24}}$. Se $k=3$ tem-se $z_3=\sqrt[8]{8}\,e^{i\frac{41\pi}{24}}$.

78.1. As restantes raízes índice 6 de z são: $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$,

$$z_2=2e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{3\pi}{4}},\ z_3=2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{13\pi}{12}},$$

$$z_4=2e^{i\left(\frac{13\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{17\pi}{12}}\ \text{ e }\ z_5=2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}+\frac{2\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

78.2. $z=(w)^6=\left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6=2^6e^{i\frac{6\pi}{12}}=64e^{i\frac{\pi}{2}}=$

$$=64\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=64(0+1i)=64i$$

Pág. 183

79.1. A raiz cúbica de z que pertence ao 1.° quadrante é representada na forma trigonométrica por: $2e^{i\left(\frac{5\pi}{7}-\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{21}}$.

79.2. $z=(w)^3=\left(2e^{i\frac{5\pi}{7}}\right)^3=2^3e^{i\frac{15\pi}{7}}=8e^{i\left(\frac{15\pi}{7}-2\pi\right)}=8e^{i\frac{\pi}{7}}$

Seja $u=re^{i\theta}$, $r>0$.

$$u^4=z\Leftrightarrow\left(re^{i\theta}\right)^2=8e^{i\frac{\pi}{7}}\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)}=8e^{i\frac{\pi}{7}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=8\\2\theta=\frac{\pi}{7}+2k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{8}\\\theta=\frac{\pi}{14}+k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\sqrt{2}\\\theta=\frac{\pi}{14}+k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Se $k=0$ tem-se $z_0=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{14}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{15\pi}{14}}$.

80.1. $z=(z_B)^5=\left(1e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^5=1^5e^{i\frac{5\pi}{2}}=1e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

80.2.

a) $z_A=e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{\pi}{10}}$

b) $z_D=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\times\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{13\pi}{10}}$

c) $z_C=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{9\pi}{10}}$, logo $z_{\bar{C}}=e^{-i\frac{9\pi}{10}}$

Pág. 184

81.1. $z_C=2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{19\pi}{24}}$; $\quad z_D=2e^{i\left(\frac{19\pi}{24}+\frac{2\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{31\pi}{24}}$

81.2. $w^n=\left(2e^{i\frac{19\pi}{24}}\right)^n=2^ne^{i\frac{19n\pi}{24}}$

$$w^n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{19n\pi}{24}=k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\frac{24k}{5},k\in\mathbb{Z}$$

Assim sendo, o menor valor de n tal que $w^n\in\mathbb{R}$ é 24.

82.1. $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1e^{i\pi}}=\sqrt[3]{1}\,e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=e^{i\pi}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=e^{i\frac{5\pi}{3}}$. As raízes índice 3 de -1 são $z_0=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_1=e^{i\pi}$ e $z_2=e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

82.2.

$$\sqrt[4]{9i}=\sqrt[4]{9e^{i\frac{\pi}{2}}}=\sqrt[4]{9}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)}=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{8}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{9\pi}{8}}$. Se $k=3$ tem-se $z_3=\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

As raízes quartas de $9i$ são $z_0=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_1=\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $z_2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{9\pi}{8}}$ e $z_3=\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

82.3. $-32e^{i\frac{\pi}{4}}=32e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}=32e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$\sqrt[5]{-32e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[5]{32e^{i\frac{5\pi}{4}}}=\sqrt[5]{32}\,e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)},k\in\{0,1,2,3,4\}=$

$=2e^{i\left(\frac{5\pi+8k\pi}{20}\right)},k\in\{0,1,2,3,4\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=2e^{i\frac{13\pi}{20}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=2e^{i\frac{21\pi}{20}}$. Se $k=3$ tem-se $z_3=2e^{i\frac{29\pi}{20}}$.

Se $k=4$ tem-se $z_4=2e^{i\frac{37\pi}{20}}$. As raízes de índice 5 de $-32e^{i\frac{\pi}{4}}$ são $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1=2e^{i\frac{13\pi}{20}}$, $z_2=2e^{i\frac{21\pi}{20}}$, $z_3=2e^{i\frac{29\pi}{20}}$ e $z_4=2e^{i\frac{37\pi}{20}}$.

Pág. 185

83.1. $z_A=re^{i\frac{\pi}{3}}$, logo $w=(z_A)^5=\left(re^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5=r^5e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Assim, conclui-se que a imagem geométrica de *w* pertence ao 4.° quadrante.

83.2. O argumento positivo mínimo da solução da equação cuja imagem geométrica pertence ao 3.° quadrante é

$\frac{\pi}{3}+2\times\frac{2\pi}{5}=\frac{17\pi}{15}$.

84.1. $z^4+256\,i=0\Leftrightarrow z^4=-256\,i\Leftrightarrow z^4=256e^{i\frac{3\pi}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{256e^{i\frac{3\pi}{2}}}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{256}\,e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)},k\in\{0,1,2,3\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=4e^{i\left(\frac{3\pi+4k\pi}{8}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=4e^{i\frac{3\pi}{8}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=4e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=4e^{i\frac{11\pi}{8}}$. Se $k=3$ tem-se $z_3=4e^{i\frac{15\pi}{8}}$.

Então, $z\in\left\{4e^{i\frac{3\pi}{8}},\ 4e^{i\frac{7\pi}{8}},\ 4e^{i\frac{11\pi}{8}},\ 4e^{i\frac{15\pi}{8}}\right\}$.

84.2. $z^2=\frac{1-i}{i}\Leftrightarrow z^2=\frac{(1-i)(-i)}{i(-i)}\Leftrightarrow z^2=\frac{-1-i}{1}\Leftrightarrow z^2=-1-i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\Leftrightarrow z=\sqrt[2]{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi+8k\pi}{8}\right)},k\in\{0,1\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{8}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

Então, $z\in\left\{\sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{8}}\right\}$.

84.3. $z^4-iz=0\Leftrightarrow z\left(z^3-i\right)=0\Leftrightarrow z=0\vee z^3=i\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\vee z^3=e^{i\frac{\pi}{2}}\Leftrightarrow z=0\vee z=\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\ \vee\ z=\sqrt[3]{1}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\ \vee\ z=1e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)},k\in\{0,1,2\}$

$z=1e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)},k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=e^{i\frac{\pi}{6}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Então, $z\in\left\{0,\ e^{i\frac{\pi}{6}},\ e^{i\frac{5\pi}{6}},\ e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}$.

84.4. Seja $z=re^{i\theta}$, $r\geq 0$. Então, $\overline{z}=re^{i(-\theta)}$, $r\geq 0$.

$z^2+\overline{z}=0\Leftrightarrow\left(re^{i\theta}\right)^2+re^{i(-\theta)}=0\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)}=-re^{i(-\theta)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)}=re^{i(\pi-\theta)}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=r\\2\theta=\pi-\theta+2k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}r^2-r=0\\3\theta=\pi+2k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r(r-1)=0\\\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}r=0\vee r=1\\\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

As soluções da equação são $z_0=1e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_1=1e^{i\pi}$; $z_2=1e^{i\frac{5\pi}{3}}$;

$z_3=0$. Então, $z\in\left\{-1,\ 0,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

84.5. Seja $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $z=re^{i\theta}$, $r>0$. Então, $\overline{z}=re^{i(-\theta)}$, $r>0$.

$\frac{z^3}{\overline{z}}-1=\sqrt{3}i\Leftrightarrow\frac{\left(re^{i\theta}\right)^3}{re^{i(-\theta)}}=1+\sqrt{3}i\Leftrightarrow\frac{r^3e^{i(3\theta)}}{re^{i(-\theta)}}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2e^{i(4\theta)}=2e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=2\\4\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{2}\\\theta=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

As soluções da equação são $z_0=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$; $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$;

$z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$; $z_3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

Então, $z\in\left\{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}},\ \sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}},\ \sqrt{2}\,e^{i\frac{13\pi}{12}},\ \sqrt{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$.

Pág. 186

85.1. Transformação *f*: rotação de centro *O* e amplitude 90°. Transformação *g*: reflexão de centro *O* seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(3,\ 2)$. Transformação *h*: rotação de centro *O* e amplitude 90° seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(2,-3)$.

85.2. $(f\circ h)(z)=f\left(h(z)\right)=f\left(iz+2-3i\right)=i\left(iz+2-3i\right)=$

$=-z+2i+3=g(z)$

85.3. $w=2+i$

$h(w)=h(2+i)=i(2+i)+2-3i=2i-1+2-3i=1-i$

O ponto que corresponde à representação geométrica de $h(w)$ é o ponto *C*.

86.1. Se as imagens geométricas dos números complexos

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ e $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ são raízes são dois vértices consecutivos de um polígono regular inscrito, com n lados, numa circunferência de centro na origem, então sabe-se que

$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = \frac{2\pi}{n}$.

$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 6$

O polígono tem 6 lados.

86.2. O polígono é um hexágono regular. Os números complexos correspondentes aos restantes vértices do polígono são:

$z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_4 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$z_5 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$ e $z_6 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Tarefa 7

1. O vértice C tem de coordenadas $(2, 2)$, logo o vértice A tem coordenadas $(-2, -2)$. O simétrico de A em relação ao eixo real é o ponto D de coordenadas $(-2, 2)$.

$w = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2.1.

a) A função f representa uma reflexão de eixo real. As coordenadas dos vértices do triângulo $[EFA]$ são: $E(2, 0)$, $F(0, 2)$ e $A(-2, -2)$. As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação da função f são $E'(2, 0)$; $F'(0, -2)$; $A'(-2, 2)$.

b) A função g representa uma rotação de centro O e amplitude 90°. As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação da função g são $E'(0, 2)$; $F'(-2, 0)$; $A'(2, -2)$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$

A função h representa uma rotação de centro O e amplitude 30°.

$h(2) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

$h(2i) = 2i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}i + i^2 = -1 + \sqrt{3}i$

$h(-2-2i) = (-2-2i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i - \sqrt{3}i - i^2 =$

$= 1 - \sqrt{3} + \left(-1 - \sqrt{3}\right)i$

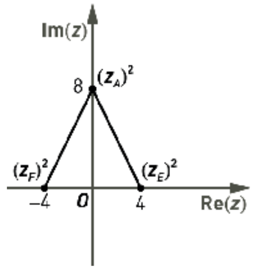
As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação da função h são $E'\left(\sqrt{3}, 1\right)$; $F'\left(-1, \sqrt{3}\right)$; $A'\left(1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right)$.

d) A função u representa uma translação de vetor $\vec{u}(0,1)$.

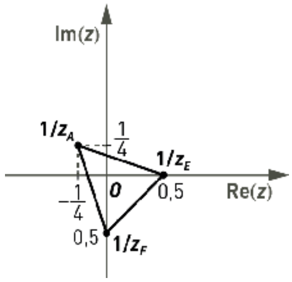
As coordenadas dos vértices do triângulo que se obtém a partir do triângulo $[EFA]$ por aplicação da função u são $E'(2, 1)$; $F'(0, 3)$; $A'(-2, -1)$.

2.2.

a)

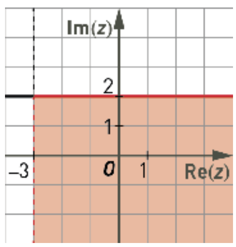


b)

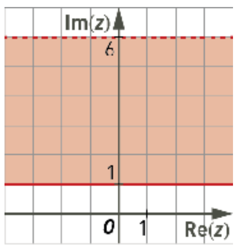


Pág. 187

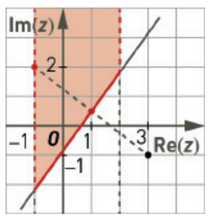
87.1.



87.2.



87.3.



88.1. O conjunto de pontos representado pode ser definido pela condição $\frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$.

88.2.

$$\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(iz) = \operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

O conjunto de pontos representado pode ser definido pela condição $\frac{5\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{7\pi}{4}$.

Pág. 188

89.1. O lugar geométrico do conjunto das imagens geométricas dos números complexos *z* que verificam a condição $\operatorname{Arg}(z) = \pi$ é o semieixo real negativo.

89.2. O lugar geométrico do conjunto das imagens geométricas dos números complexos *z* que verificam a condição $|\operatorname{Arg}(z)| = \frac{\pi}{2}$ é o eixo imaginário.

89.3. O lugar geométrico do conjunto das imagens geométricas dos números complexos *z* que verificam a condição $\operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$ é a bissetriz do 2.° quadrante.

89.4. O lugar geométrico do conjunto das imagens geométricas dos números complexos *z* que verificam a condição

$0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$ é o 1.° quadrante.

90.1. O centro da circunferência é o ponto $A\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ e esta é tangente ao eixo real, logo o seu raio é igual a $2\sqrt{3}$.

$$z_A = 2 - 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Então, o conjunto de pontos da região colorida da figura pode ser definido pela condição:

$$\left|z - 2 - 2\sqrt{3}i\right| < 2\sqrt{3} \ \wedge \ \frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}\left(z - 2 - 2\sqrt{3}i\right) < \pi$$

90.2. $z_C = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

O centro da circunferência é o ponto $C(-2, 2)$ e esta é tangente aos eixos, logo o seu raio é igual a 2. Então, o conjunto de pontos da região colorida da figura pode ser definido pela condição:

$$|z + 2 - 2i| \geq 2 \ \wedge \ \frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi \ \wedge \ \operatorname{Re}(z) \leq -2.$$

Pág. 189

Proposta 1

1.1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x+3) + 2yi = 2 - i \Leftrightarrow x + 3 = 2 \ \wedge \ 2y = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \ \wedge \ y = -\frac{1}{2}$

1.2. $z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow (x+3) + 2yi = 2 + i \Leftrightarrow x + 3 = 2 \ \wedge \ 2y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \ \wedge \ y = \frac{1}{2}$

1.3. $z_1 + z_2 = (x+3) + 2yi \ + 2 - i = (x+5) + (2y-1)i$

$z_1 + z_2$ é um número real se:

$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \ \wedge \ y = \frac{1}{2}$

1.4.

$i z_1 - z_2 = i\left((x+3) + 2yi\ \right) - (2 - i) = (x+3)i - 2y - 2 + i =$

$= (-2y - 2) + (x+4)i$

$i z_1 - z_2$ é um número imaginário puro se:

$-2y - 2 = 0 \ \wedge \ x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow y = -1 \ \wedge \ x \neq -4$

1.5.

$z_1 z_2 = i \Leftrightarrow \left((x+3) + 2yi\ \right)(2 - i) = i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x + 6) - (x+3)i + 4yi + 2y = i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 6 + 2y = 0 \ \wedge \ -x - 3 + 4y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3 - y \ \wedge \ 3 + y - 3 + 4y = 1 \Leftrightarrow x = -3 - y \ \wedge \ y = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{16}{5} \ \wedge \ y = \frac{1}{5}$

1.6.

$\overline{z_1} = (z_2)^2 \Leftrightarrow (x+3) - 2yi = (2 - i)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3) - 2yi = 4 - 4i - 1 \Leftrightarrow x + 3 = 3 \ \wedge \ -2y = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \wedge \ y = 2$

Proposta 2

2.1. $w = \overline{z_B + z_D} = \overline{4 + 2i} = 4 - 2i$

2.2. $z_C - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow z_C = z_B + z_D - z_A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_C = 4 + 2i - (-1 - 2i) \Leftrightarrow z_C = 5 + 4i$

2.3. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$z z_A = \overline{z} + i \Leftrightarrow (x + yi)(-1 - 2i) = x - yi + i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x - 2xi - yi + 2y = x + (-y + 1)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x + 2y) + (-2x - y)i = x + (-y + 1)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x + 2y = x \ \wedge \ -2x - y = -y + 1 \Leftrightarrow x = y \ \wedge \ -2y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \ \wedge \ y = -\frac{1}{2}$

Então, $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Proposta 3

3.1. Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$2z + 1 = \overline{z} + 3i \Leftrightarrow 2(x + yi) + 1 = x - yi + 3i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 2yi + 1 = x + (-y + 3)i \Leftrightarrow (2x + 1) + 2yi = x + (-y + 3)i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = x \ \wedge \ 2y = -y + 3 \Leftrightarrow x = -1 \ \wedge \ 3y = 3 \Leftrightarrow x = -1 \ \wedge \ y = 1$

Então, $z = -1 + i$.

3.2. $z^2 - 2z = -2 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{2 + 2i}{2} \vee z = \frac{2 - 2i}{2} \Leftrightarrow z = 1 + i \vee z = 1 - i$

3.3.

$z^3-2z^2+3z=0 \Leftrightarrow z\left(z^2-2z+3\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \ \vee \ z^2-2z+3=0 \Leftrightarrow z=0 \ \vee \ z=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \ \vee \ z=\dfrac{2+2\sqrt{2}\,i}{2} \vee z=\dfrac{2-2\sqrt{2}\,i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \ \vee \ z=1+\sqrt{2}i \vee z=1-\sqrt{2}i$

3.4.

$z+\dfrac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2+1=z \ \wedge \ z\neq 0 \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \ \wedge \ z\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2} \ \wedge \ z\neq 0 \Leftrightarrow z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2} \ \vee \ z=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \vee z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Pág. 190

Proposta 4

4.1. $|t|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ e

$|w|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$.

4.2. $t=-4+3i=5\left(-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i\right)$

4.3. $w=1+\sqrt{3}\,i=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Proposta 5

5.1. $z-\overline{w}=-2+i-\left(1-3i\right)=-2+i-1+3i=-3+4i$

$|z-\overline{w}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

5.2.

$|z\times w|=|z|\times|w|=\sqrt{(-2)^2+1^2}\times\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\sqrt{50}=$

$=5\sqrt{2}$

5.3. $|\overline{t}|=|t|=\dfrac{1}{2}$

5.4. $|\overline{zt}|=|\overline{z}\times\overline{t}|=|\overline{z}|\times|\overline{t}|=|z|\times|t|=\sqrt{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

5.5. $|z^2|=|z\times z|=|z|\times|z|=\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

5.6. $\overline{z+\overline{w}}=\overline{z}+w=-2-i+1+3i=-1+2i$

$|\overline{z+\overline{w}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

Proposta 6

6.1.

a) $t-s=-1+2i-\left(-3i\right)=-1+5i$

$|t-s|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

b) $\left|\dfrac{1}{w}\right|=\dfrac{1}{|w|}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$

c) $\left|\dfrac{t}{s}\right|=\dfrac{|t|}{|s|}=\dfrac{\sqrt{(-1)^2+2^2}}{\sqrt{0^2+(-3)^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

d) $\left|\dfrac{s^2}{w}\right|=\dfrac{|s\times s|}{|w|}=\dfrac{|s|\times|s|}{|w|}=\dfrac{3\times 3}{2}=\dfrac{9}{2}$

6.2. $w=\sqrt{3}-i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

6.3. $t=-1+2i=\sqrt{5}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}i\right)=\sqrt{5}\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}i\right)$

Proposta 7

7.1.

a) $z+w\times t=-2+i+\left(-3i\right)\left(-1-2i\right)=-2+i+3i-6=-8+4i$

b) $w+\overline{t}=\left(-3i\right)+\left(-1+2i\right)=-1-i$

c) $z^2-w=\left(-2+i\right)^2-\left(-3i\right)=4-4i-1+3i=3-i$

7.2.

a)

$\dfrac{w}{z}=\dfrac{-3i}{-2+i}=\dfrac{\left(-3i\right)\left(-2-i\right)}{\left(-2+i\right)\left(-2-i\right)}=\dfrac{6i-3}{4+1}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i$

A imagem geométrica do complexo $\dfrac{w}{z}$ pertence ao segundo quadrante.

b)

$\dfrac{z-t}{w}=\dfrac{-2+i-\left(-1-2i\right)}{-3i}=\dfrac{\left(-1+3i\right)\left(3i\right)}{\left(-3i\right)\left(3i\right)}=\dfrac{-3i-9}{9}=-1-\dfrac{1}{3}i$

A imagem geométrica do complexo $\dfrac{z-t}{w}$ pertence ao terceiro quadrante.

Pág. 191

Proposta 8

8.1. Seja $z=-i\left(5+4i\right)+\left(2i+1\right)^2+i^2$

$z=-i\left(5+4i\right)+\left(2i+1\right)^2+i^2=-5i+4+4i^2+4i+1-1=-i$

z representa um número imaginário puro porque $\text{Re}\left(z\right)=0$ e $\text{Im}\left(z\right)\neq 0$.

8.2.

$\dfrac{i}{1-i}+\left(i^2+i\right)\left(i^2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{i\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}+\left(-1+i\right)\left(-1+\dfrac{1}{2}\right)=$

$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}+\left(-1+i\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}=0$

8.3. Seja $w=\left[\left(2-\frac{1}{i}\right)^2-\left(\overline{3-i}\right)\right]^2$.

$$w=\left[\left(2-\frac{1}{i}\right)^2-\left(\overline{3-i}\right)\right]^2=\left[\left(2-\frac{1(-i)}{i(-i)}\right)^2-(3+i)\right]^2=$$

$$=\left[(2+i)^2-3-i\right]^2=(4+4i-1-3-i)^2=(3i)^2=9i^2=-9$$

w representa um número real negativo porque $\text{Im}(w)=0$ e $\text{Re}(w)<0$.

Proposta 9

9.1. $r=|z_B-z_A|=|1+5i-(-2+i)|=|1+5i+2-i|=|3+4i|=$

$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

9.2.

a) A reta *r* é a mediatriz de [*AB*], logo pode ser definida pela condição: $|z+2-i|=|z-1-5i|$.

b) A circunferência de centro *A* e que passa em *B* pode ser definida pela condição $|z+2-i|=5$.

9.3.

$$|z_C+2-i|=|-6+4i+2-i|=|-4+3i|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5\,;$$

$$|z_C-1-5i|=|-6+4i-1-5i|=|-7-i|=$$

$$=\sqrt{(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

C pertence à circunferência porque $|z_C+2-i|=5$ e não pertence à reta *r* pois $|z_C+2-i|\neq|z_C-1-5i|$.

Proposta 10

10.1.

$$z=\frac{1-2ki}{1+2i}=\frac{(1-2ki)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{1-2i-2ki-4k}{1+4}=$$

$$=\frac{1-4k}{5}+\frac{-2-2k}{5}i$$

O número complexo *z* é um imaginário puro se $\text{Re}(z)=0$ e $\text{Im}(z)\neq0$.

$$\text{Re}(z)=0\wedge\text{Im}(z)\neq0\Leftrightarrow\frac{1-4k}{5}=0\wedge\frac{-2-2k}{5}\neq0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}\wedge k\neq-1\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}$$

O número complexo *z* é um imaginário puro quando $k=\frac{1}{4}$.

10.2. O número complexo *z* é um número real se $\text{Im}(z)=0$.

$$\text{Im}(z)=0\Leftrightarrow\frac{-2-2k}{5}=0\Leftrightarrow k=-1$$

O número complexo *z* é um imaginário real quando $k=-1$.

10.3. A imagem geométrica de *z* pertence à bissetriz dos quadrantes pares se $\text{Im}(z)=-\text{Re}(z)$.

$$\text{Im}(z)=-\text{Re}(z)\Leftrightarrow\frac{-2-2k}{5}=-\frac{1-4k}{5}\Leftrightarrow-2-2k=-1+4k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-\frac{1}{6}$$

z tem imagem geométrica pertencente à bissetriz dos quadrantes pares quando $k=-\frac{1}{6}$.

Pág. 192

Proposta 11

11.1.

a) $z_2=f(z_1)=\overline{z_1}=3-2i$

b) Em termos geométricos a função *f* representa uma reflexão de eixo real.

11.2.

a) $z_4=g(z_1)=-z_1=-3-2i$

b) Em termos geométricos a função *g* representa uma reflexão central de centro *O* (origem do referencial).

c) Em termos geométricos a função *g* representa uma rotação de centro *O* (origem do referencial) e amplitude 180°.

11.3.

a) $z_3=h(z_1)=\overline{z_1}+2=3-2i+2=5-2i$

b) Em termos geométricos a função *h* representa uma reflexão deslizante de eixo real e vetor $\vec{u}(2,0)$.

11.4.

a) $z_5=j(z_1)=\frac{1}{2}z_1=\frac{1}{2}(3+2i)=\frac{3}{2}+i$

b) Em termos geométricos a função *j* representa uma homotetia de centro *O* (origem do referencial) e razão $\frac{1}{2}$.

11.5.

a) $z_6=m(z_1)=2z_1=2(3+2i)=6+4i$.

b) Em termos geométricos a função *m* representa uma homotetia de centro *O* (origem do referencial) e razão 2.

Pág. 193

Proposta 12

12.1.

$$3z+2i=iz-4\Leftrightarrow3z-iz=-4-2i\Leftrightarrow z(3-i)=-4-2i\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-4-2i}{3-i}\Leftrightarrow z=\frac{(-4-2i)(3+i)}{(3-i)(3-i)}\Leftrightarrow z=\frac{-12-4i-6i+2}{9+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-10-10i}{10}\Leftrightarrow z=-1-i$$

12.2.

$$\frac{z}{2-i}=1+3i\Leftrightarrow z=(1+3i)(2-i)\Leftrightarrow z=2-i+6i+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=5+5i$$

12.3. Seja $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

$2z - i = \overline{z} \Leftrightarrow 2x + 2yi - i = x - yi \Leftrightarrow 2x = x \wedge 2y - 1 = -y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0 \wedge y = \dfrac{1}{3}$

Então, $z = \dfrac{1}{3}i$.

12.4. Seja $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

$z - 2\overline{z} = i + i^2 \Leftrightarrow x + yi - 2(x - yi) = i - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + yi - 2x + 2yi = i - 1 \Leftrightarrow -x = -1 \wedge 3y = 1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = \dfrac{1}{3}$

Então, $z = 1 + \dfrac{1}{3}i$.

12.5.

$z^2 + 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-6 + 4i}{2} \vee z = \dfrac{-6 - 4i}{2} \Leftrightarrow z = -3 + 2i \vee z = -3 - 2i$

$z \in \{-3 + 2i, -3 - 2i\}$

12.6.

$z^3 + 3iz = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 3i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -3i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)},\ k \in \{0, 1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt{3}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} \vee z = \sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$z \in \left\{0, \sqrt{3}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}$

12.7.

$2z^4 + 3z^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{169}}{4} \Leftrightarrow z^2 = \dfrac{5}{2} \vee z^2 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \vee z = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \vee z = -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \vee z = 2i \vee z = -2i$

$z \in \left\{\dfrac{\sqrt{10}}{2}, -\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 2i, -2i\right\}$

12.8.

$4z - 5 = z^2 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{4 + 2i}{2} \vee z = \dfrac{4 - 2i}{2} \Leftrightarrow z = 2 + i \vee z = 2 - i$

$z \in \{2 + i, 2 - i\}$

12.9.

$z^3 - iz^2 = 5(i - z) \Leftrightarrow z^3 - iz^2 = 5i - 5z \Leftrightarrow z^3 - iz^2 + 5z - 5i = 0$

Como i é uma das soluções da equação, aplicando a regra de Ruffini tem-se:

	1	–i	5	$-5i$
i		i	0	$5i$
	1	0	5	0

$z^3 - iz^2 + 5z - 5i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow z = i \vee z^2 = -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = i \vee z = \sqrt{5}i \vee z = -\sqrt{5}i$

$z \in \{i, \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

Proposta 13

13.1. $P(i) = -i^4 + 2i^3 - 7i^2 + 2i - 6 = -1 - 2i + 7 + 2i - 6 = 0$

13.2.

$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow z = i \vee z = -i$

Como i e $-i$ são soluções da equação $P(z) = 0$, aplicando a regra de Ruffini tem-se:

	-1	2	-7	2	6
i		$-i$	$1 + 2i$	$-2 - 6i$	6
	-1	$2 - i$	$-6 + 2i$	$-6i$	0
$-i$		i	$-2i$	$6i$	
	-1	2	-6	0	

$P(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z^2 + 1)(-z^2 + 2z - 6) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$

Então, conclui-se que $a = -1,\ b = 2\ \ e\ \ c = -6$.

13.3.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)(-z^2 + 2z - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \vee -z^2 + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -1 \vee z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-20}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = i \vee z = -i \vee z = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = i \vee z = -i \vee z = -1 + \sqrt{5}i \vee z = -1 - \sqrt{5}i$

$z \in \{i, -i, 1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i\}$

Proposta 14

14.1.

a) Se n é par, então $\dfrac{i^{4n-1} + i^{2n+1}}{i^{8n} - i^{2n+3}} = \dfrac{i^{-1} + i^{1}}{i^{0} - i^{3}} = \dfrac{\frac{1(-i)}{i(-i)} + i}{1 - (-i)} = \dfrac{-i + i}{1 + i} = 0$.

b) Se n é ímpar, então $\dfrac{i^{4n-1} + i^{2n+1}}{i^{8n} - i^{2n+3}} = \dfrac{i^{-1} - i}{i^{0} - i} = \dfrac{\frac{1(-i)}{i(-i)} - i}{1 - i} = \dfrac{-i - i}{1 - i} =$

$= \dfrac{-2i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{-2i + 2}{2} = 1 - i$.

14.2. $i^{3n} = i \Leftrightarrow 3n = 4k + 1,\ k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow n = \dfrac{4k + 1}{3},\ k \in \mathbb{N}_0$

Se $k = 8$ então $n = 11$. Se $k = 11$ então $n = 15$.

Se $k = 14$ então $n = 19$.

....

Se $k = 74$ então $n = 99$.

A sequência 11, 15, 19, …, 99, … tem termo geral $4n + 7$.

$4n + 7 = 99 \Leftrightarrow 4n = 92 \Leftrightarrow n = 23$

Assim, conclui-se que há 23 números naturais de dois algarismos que são solução da equação $i^{3n} = i$.

Proposta 15

15.1. $z_B = 2z_A = 2(-2+i) = -4+2i$

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{-4+2i} = \frac{1(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)} = \frac{-4-2i}{16+4} = -\frac{4}{16} - \frac{2}{20}i =$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$$

15.2. $r = |z_A - z_O| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

A região colorida da figura, incluindo a fronteira, pode ser definida por uma das seguintes condições:

$|z+2-i| \leq \sqrt{5} \;\wedge\; 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \operatorname{Arg}(z_A)$ ou

$|z+2-i| \leq \sqrt{5} \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \geq -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(z)$.

Pág. 194

Proposta 16

16.1. $z_B = 2z_P = 2(2+2i) = 4+4i$

$$z_A = 6 - \frac{1}{i^5} = 6 - \frac{1}{i^1} = 6 - \frac{1(-i)}{i(-i)} = 6+i$$

$$z_C = z_B - z_A = 4+4i - (6+i) = 4+4i-6-i = -2+3i$$

16.2. $w = z_A + z_B + z_C = 6+i+4+4i-2+3i = 8+8i$

$w = 8+8i$; $\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(w) = 8$.

16.3. Em termos geométricos a função *f* representa uma translação de vetor $\vec{u}(2, 1)$. As imagens dos vértices do paralelogramo por essa translação são os pontos:

$O' = O + \vec{u} = (2, 1)$, $A' = A + \vec{u} = (8, 2)$, $B' = B + \vec{u} = (6, 5)$ e $C' = C + \vec{u} = (0, 4)$.

Proposta 17

17.1. $z = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1e^{i\frac{\pi}{5}}$

17.2. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1e^{i\frac{\pi}{3}}$

17.3. $z = -2i = 2(0-1i) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

17.4. $z = -7 = 7(-1+0i) = 7(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 7e^{i\pi}$

17.5.

$$z = \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\,2\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(2\times\frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 1e^{i\frac{4\pi}{7}}$$

17.6. $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Considere-se, por exemplo, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \; = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 4.° quadrante.

Então, $\arg(z) = -\frac{\pi}{6}$ e $z = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

17.7. $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

Considere-se, por exemplo, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\operatorname{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$ e $z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

17.8. $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Considere-se, por exemplo, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.

$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 3.° quadrante.

Então, $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{5\pi}{6}$ e $z = 2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

17.9.

$$z = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= 1e^{-i\frac{3\pi}{8}}$$

17.10.

$$z = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1e^{i\frac{\pi}{10}}$$

Proposta 18

18.1.

a) $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

b) $z_2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}} + i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

18.2.

a)

$$z_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

b)

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Pág. 195

Proposta 19

19.1. $|z_1|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

Seja θ_1 o argumento de z_1 que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$.

$\tan(\theta_1)=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de z_1 é um ponto do 1.° quadrante.

Donde se conclui que $\theta_1=\frac{\pi}{3}$.

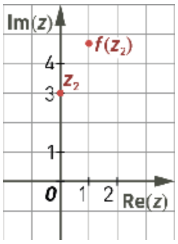
$|z_2|=\sqrt{0^2+3^2}=\sqrt{9}=3$

Seja θ_2 o argumento de z_2 que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$.

Como z_2 é um número imaginário puro positivo, sabe-se que $\theta_2=\frac{\pi}{2}$. Sendo $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e θ_3 o argumento de z_3 que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$, então $|z_3|=\sqrt{2}$ e $\theta_3=\frac{\pi}{4}$.

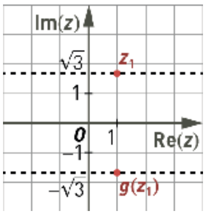
19.2.

a) $z_2=3i$ e $f(z_2)=z_2+z_1=3i+1+\sqrt{3}i=1+\left(3+\sqrt{3}\right)i$.



A transformação geométrica associada é uma translação de vetor $\vec{u}\left(1,\sqrt{3}\right)$.

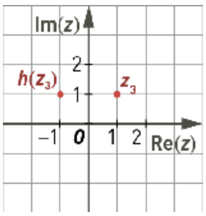
b) $z_1=1+\sqrt{3}i$ e $g(z_1)=\bar{z}_1=1-\sqrt{3}i$.



A transformação geométrica associada é uma reflexão de eixo real.

c) $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$ e

$h(z_3)=iz_3=i(1+i)\ =-1+i$.



A transformação geométrica associada é uma rotação de centro O e amplitude 90°.

Proposta 20

Sendo $z=2e^{i\frac{2\pi}{5}}$, então $-z=2e^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{5}}$.

A opção correta é a (C).

Proposta 21

Sendo $z=\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{7}}$, então $\bar{z}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{9\pi}{7}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{9\pi}{7}+2\pi\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{7}}$.

A opção correta é a (A).

Proposta 22

Se a imagem geométrica de z está no 4.° quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então sabe-se que $z=re^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Logo, $\bar{z}=re^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{re^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{re^{i\frac{\pi}{4}}}=1e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=1e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)}=1e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

A opção correta é a (C).

Pág. 196

Proposta 23

23.1.

a)

$$z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2i}-i^{25}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)(-2i)}{(2i)(-2i)}-i^{4\times6+1}=\frac{-2\sqrt{3}-2i}{4}-i^1=$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

b)

$$z_2=z_1e^{i\frac{\pi}{3}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i-\frac{3}{4}i+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}-\frac{6}{4}i=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

23.2.

a) $|z_1|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$

Seja θ_1 o argumento de z_1 que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$.

$\tan(\theta_1)=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de z_1 é um ponto do 3.° quadrante. Donde se conclui que: $\theta_1=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}$

Então, na forma trigonométrica $z_1=\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

b) $|z_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$

Seja θ_2 o argumento de z_2 que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

$\tan(\theta_2)=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de z_2 é um ponto do 4.° quadrante. Donde se conclui que $\theta_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi=$ $=\frac{5\pi}{3}$. Então, na forma trigonométrica $z_2=\sqrt{3}\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

23.3.

a) $z_B=-z_1=-\left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\pi\right)}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{3}}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_C=iz_B=i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z_B+z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i+\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{\sqrt{3}+3}{2}i$

Proposta 24

A afirmação falsa é a (C) pois $iz_C=z_D$.

Proposta 25

25.1. $z=\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=$

$=-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

$w=1-e^{i\frac{\pi}{3}}=1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=$

$=1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|w|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{4}}=1$

Seja θ o argumento de w que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.

$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$ e sabe-se que o afixo de w é um ponto do 4.° quadrante. Então, $\theta=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$. Na forma trigonométrica, $w=e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

25.2. $w^5=\left(e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^5=e^{i\frac{25\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{25\pi}{3}-8\pi\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

25.3. $w^n=\left(e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{5n\pi}{3}}$

w^n é um número real se $\frac{5n\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$\frac{5n\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=\frac{3}{5}k, k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$

Assim, atribuindo valores a *k*, conclui-se que o menor valor de *n* para o qual w^n é um número real é 3.

Pág. 197

Proposta 26

26.1.

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Então, $\theta=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$.

$z_C=2e^{i\theta}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$

$=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+\sqrt{3}\,i$

26.2.

$z_B=2e^{i\frac{11\pi}{12}}=2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)=$

$=2\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right)=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=$

$=2\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

<u>Cálculos auxiliares</u>:

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{4}$

26.3. Designemos por *r* o raio da circunferência representada na figura. Então, $r=|z_B|=2$. A circunferência é definida pela condição $|z|=2$. O arco *AB* da circunferência é definido pela condição $|z|=2\wedge\frac{\pi}{4}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{11\pi}{12}$. A opção correta é a (A).

Proposta 27

27.1. $z_A = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Como o triângulo [*OAB*] é equilátero, então $z_B = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Ora, $z_B = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Donde se conclui que as coordenadas do ponto *B* são $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

27.2.

a) $(z_B)^n = \left(e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^n = e^{i\frac{5n\pi}{6}}$

A imagem geométrica do complexo $(z_B)^n$ é o ponto *A* se

$\frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$.

$\frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 5n\pi = 3\pi + 12k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{3}{5} + \frac{12}{5}k,\ k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$

Assim, atribuindo valores a *k*, conclui-se que o menor valor de *n* para o qual a imagem geométrica do complexo $(z_B)^n$ é o ponto *A* é 3.

b) $(z_B)^n$ é um número real se $\frac{5n\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$.

$\frac{5n\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = \frac{6}{5}k,\ k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$

Assim, atribuindo valores a *k*, conclui-se que os números naturais menores que 30 para os quais $(z_B)^n$ é um número real são 6, 12, 18 e 24, ou seja, $n \in \{6, 12, 18, 24\}$.

Pág. 198

Proposta 28

28.1.

$w^3 = (-1+2i)^3 = (-1+2i)^2(-1+2i) = (1-4i-4)(-1+2i) =$

$= (-3-4i)(-1+2i) = 3-6i+4i+8 = 11-2i$

28.2.

$w^3 = \left(\sqrt{5}\,e^{i\frac{\theta}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 e^{i\frac{3\theta}{3}} = 5\sqrt{5}e^{i\theta} =$

$= 5\sqrt{5}\cos\theta + i\,5\sqrt{5}\sin\theta$

$w^3 = 11-2i \Leftrightarrow 5\sqrt{5}\cos\theta + i\,5\sqrt{5}\sin\theta = 11-2i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}} \wedge \sin\theta = \frac{-2}{5\sqrt{5}}$

Então, $\tan\theta = -\frac{2}{11}$.

Proposta 29

29.1.

a)

$v = \left(\frac{1}{1-i} + i^{11}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{(1-i)(1+i)} + i^3\right)^3 = \left(\frac{1+i}{2} - i\right)^3 = \left(\frac{1-i}{2}\right)^3 =$

$= \left(\frac{1-i}{2}\right)^2\left(\frac{1-i}{2}\right) = \left(\frac{1-2i-1}{4}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right) = \left(\frac{-i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

b)

$|v| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

A imagem geométrica de *v* situa-se no 3.° quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo $v = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

$\frac{v}{t} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{5\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{8}e^{i\frac{11\pi}{12}}$

c)

$t^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$

$= 16\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -8 - 8\sqrt{3}i$

d)

$w = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) =$

$= \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right) = e^{i\frac{5\pi}{14}}$

29.2.

$w^7 = \left(e^{i\frac{5\pi}{14}}\right)^7 = e^{i\frac{35\pi}{14}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{2}-2\pi\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

w^7 é um número imaginário puro porque $\text{Re}(w^7) = 0$ e $\text{Im}(w^7) \neq 0$.

Proposta 30

30.1. $z_2 = iz_1 = i(4+3i) = -3+4i$, $z_3 = -z_1 = -4-3i$ e $z_4 = -z_2 = 3-4i$.

30.2. $|z_1| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

$z_1 = 5e^{i\theta}$ e $z_1 = 4+3i$.

$5e^{i\theta} = 4+3i \Leftrightarrow 5(\cos\theta + i\sin\theta) = 4+3i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\cos\theta + i\,5\sin\theta = 4+3i \Leftrightarrow 5\cos\theta = 4 \wedge 5\sin\theta = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{4}{5} \wedge \sin\theta = \frac{3}{5}$

30.3. $\overline{AB} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{AO}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 4 \Leftrightarrow \overline{AO} = 2$

Então, $|w| = 2$.

30.4. $w=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta-\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

Logo, $w=2\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{10}+\frac{3\sqrt{3}+4}{10}i\right)=\frac{4\sqrt{3}-3}{5}+\frac{3\sqrt{3}+4}{5}i$.

Pág. 199

Proposta 31

31.1. $|w|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

A imagem geométrica de w situa-se no 2.º quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes pares, logo $w=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4+\left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2+16=4i^3\Leftrightarrow 16e^{i\frac{12\pi}{4}}+4e^{i\frac{6\pi}{4}}+16=4(-i)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16e^{i3\pi}+4e^{i\frac{3\pi}{2}}+16=-4i\Leftrightarrow -16-4i+16=-4i\Leftrightarrow -4i=-4i$

(Proposição verdadeira)

Conclui-se, então, que w é solução da equação $z^4+z^2+16=4i^3$.

31.2.

$iz^3=w\Leftrightarrow z^3=\frac{w}{i}\Leftrightarrow z^3=\frac{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\Leftrightarrow z^3=2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^3=2e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{2e^{i\frac{\pi}{4}}}\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi+8k\pi}{12}\right)},k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

$z\in\left\{\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

Proposta 32

32.1. Seja $w=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$w=1+e^{i\frac{\pi}{3}}=1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$|w|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{4}}=\sqrt{3}$

Seja $\theta=\operatorname{Arg}(w)$.

$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e o afixo de w é um ponto do 1.º quadrante.

Então, $\theta=\frac{\pi}{3}$ e $w=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$z=w^n=\left(\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=\sqrt{3}^n\,e^{i\frac{n\pi}{6}}$

z é um imaginário puro se $\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=3+6k,k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$

Assim, atribuindo valores a k, conclui-se que o menor valor natural n de modo que z seja um imaginário puro é 3.

32.2. z é um número real se $\frac{n\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$\frac{n\pi}{6}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=6k,k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$

Assim, atribuindo valores a k, conclui-se que o menor valor natural n de modo que z seja um número real é 6.

Proposta 33

33.1.

$z^4+16=0\Leftrightarrow z^4=-16\Leftrightarrow z^4=16e^{i\pi}\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{16e^{i\pi}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{16}\,e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)},\ k\in\{0,1,2,3\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Se $k=3$ tem-se $z_3=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

$z\in\left\{2e^{i\frac{\pi}{4}},2e^{i\frac{3\pi}{4}},2e^{i\frac{5\pi}{4}},2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}$

33.2.

$z^3-1=i\Leftrightarrow z^3=1+i\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[6]{2}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

$z\in\left\{\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

33.3. $(1+i)z^6-2zi=0 \Leftrightarrow z\left((1+i)z^5-2i\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^5=\dfrac{2i}{1+i} \Leftrightarrow z=0 \vee z^5=\dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z^5=1+i \Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt[5]{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0 \vee z=\sqrt[10]{2}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$

Atribuindo os valores a *k*, conclui-se que:

$z\in\left\{0,\ \sqrt[10]{2}\,e^{i\frac{\pi}{20}},\ \sqrt[10]{2}\,e^{i\frac{9\pi}{20}},\ \sqrt[10]{2}\,e^{i\frac{17\pi}{20}},\ \sqrt[10]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}},\ \sqrt[10]{2}\,e^{i\frac{33\pi}{20}}\right\}$

33.4. Seja $z=re^{i\theta}$, $r\geq 0$, então $\overline{z}=re^{-i\theta}$.

$z^3 i=\overline{z} \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{2}}=re^{-i\theta} \Leftrightarrow r^3e^{i(3\theta)}e^{i\frac{\pi}{2}}=re^{-i\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^3e^{i\left(3\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=re^{-i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3=r \\ 3\theta+\dfrac{\pi}{2}=-\theta+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r\left(r^2-1\right)=0 \\ 4\theta=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \vee r=1 \\ \theta=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \wedge k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Soluções da equação, para $k\in\{0,1,2,3\}$:

$z=0 \vee z=e^{-i\frac{\pi}{8}} \vee z=e^{i\frac{3\pi}{8}} \vee z=e^{i\frac{7\pi}{8}} \vee z=e^{i\frac{11\pi}{8}}$.

$z\in\left\{0,\ e^{-i\frac{\pi}{8}},\ e^{i\frac{3\pi}{8}},\ e^{i\frac{7\pi}{8}},\ e^{i\frac{11\pi}{8}}\right\}$

33.5. $\dfrac{z^5}{1-i}=(4i)^3 \Leftrightarrow z^5=16i^3(1-i) \Leftrightarrow z^5=-16i\,(1-i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^5=16e^{i\frac{3\pi}{2}}\times\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow z^5=64\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[5]{64\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}} \Leftrightarrow z=2\sqrt[10]{2^3}\,e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)}$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$

Atribuindo os valores a *k*, conclui-se que:

$z\in\left\{2\sqrt[10]{8}\,e^{i\frac{\pi}{4}},\ 2\sqrt[10]{8}\,e^{i\frac{13\pi}{20}},\ 2\sqrt[10]{8}\,e^{i\frac{21\pi}{20}},\ 2\sqrt[10]{8}\,e^{i\frac{29\pi}{20}},\ 2\sqrt[10]{8}\,e^{i\frac{37\pi}{20}}\right\}$

33.6. $z^4-5z^2=36 \Leftrightarrow \left(z^2\right)^2-5z^2-36=0 \Leftrightarrow z^2=\dfrac{5\pm\sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2=9 \ \vee\ z^2=-4 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{9} \ \vee\ z=\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=3 \vee z=3 \vee z=3 \vee z=2i \vee z=-2i$

$z\in\{3,-3,2i,-2i\}$

Proposta 34

34.1. $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{2\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{2+4i}{2} \vee z=\dfrac{2-4i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=1+2i \vee z=1-2i$

Sendo z_1 e z_2 as soluções da equação, tem-se, por exemplo,

$z_1=1+2i$ e $z_2=1-2i$. Logo $z_1+z_2=1+2i+1-2i=2$ e

$z_1z_2=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=1+4=5$.

34.2.

a) $S=3$ e $P=4$. Pretende-se determinar as soluções da equação $z^2-3z+4=0$.

$z^2-3z+4=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{3\pm\sqrt{-7}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{3+\sqrt{7}\,i}{2} \vee z=\dfrac{3-\sqrt{7}\,i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}i \vee z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$

Donde se conclui que, por exemplo, $w=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$ e $t=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$.

b) $S=-2$ e $P=5$. Pretende-se determinar as soluções da equação $z^2+2z+5=0$.

$z^2+2z+5=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{-2+4i}{2} \vee z=\dfrac{-2-4i}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=-1+2i \vee z=-1-2i$

Donde se conclui que, por exemplo, $w=-1+2i$ e $t=-1-2i$.

Proposta 35

35.1. $z=2e^{i\theta}$ e $z^2=\left(2e^{i\theta}\right)^2=4e^{i(2\theta)}$. Assim, $A\hat{O}B=2\theta-\theta=\theta$.

Seja *h* a altura do triângulo [*OAB*] relativa ao vértice *A*. Então, $\sin\theta=\dfrac{h}{2} \Leftrightarrow h=2\sin\theta$. Conclui-se que $A(\theta)=\dfrac{4\times 2\sin\theta}{2}=4\sin\theta$.

35.2. $A(\theta)=2 \wedge 0<\theta<\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4\sin\theta=2 \wedge 0<\theta<\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{2} \wedge 0<\theta<\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$z^5=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5=2^5e^{i\frac{5\pi}{6}}=32\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)=$

$=32\left(-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=32\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=-16\sqrt{3}+16i$

Pág. 200

Proposta 36

36.1. $w=(z_0)^3=\left(3e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^3=3^3e^{i\frac{15\pi}{4}}=27e^{i\left(\frac{15\pi}{4}-4\pi\right)}=27e^{-i\frac{\pi}{4}}=$

$=27\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=27\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=$

$=27\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{27\sqrt{2}}{2}-\dfrac{27\sqrt{2}}{2}i$

36.2. Designemos por z_1 e z_2 as outras duas raízes cúbicas de w. $z_1=3e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{23\pi}{12}}$ e $z_2=3e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+2\times\frac{2\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{31\pi}{12}}$.

36.3. As imagens geométricas das raízes cúbicas de *w* correspondem aos vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 3.
Designemos por *l* o lado do triângulo [*OAB*].

$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\frac{l}{2}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{l}{6} \Leftrightarrow l=3\sqrt{3}$. Logo, $P=3l=3\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

Proposta 37

Os argumentos das cinco soluções da equação $z^5 = i$ estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{5}$. Assim sendo, a opção correta é a (A) porque é a única onde a diferença dos argumentos é igual a $\frac{2\pi}{5}$.

Proposta 38

A condição $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{5}$ representa uma semirreta com origem em *O* e que forma com o semieixo real positivo um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{5}$. Os pontos que pertencem a essa semirreta têm coordenadas não negativas. Logo, excluem-se as condições apresentadas nas opções (A) e (B).

A condição $\operatorname{Arg}(z)=\frac{4\pi}{5}$ representa uma semirreta com origem em *O* e que forma com o semieixo real positivo um ângulo de amplitude $\frac{4\pi}{5}$. Os pontos que pertencem a essa semirreta têm abcissa não positiva e ordenada não negativa. Logo, também se exclui a condição apresentada na opção (D).

Assim sendo, a opção correta é a (C).

Proposta 39

$r=|z_A|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

A reta que passa na origem e no ponto *A* é a bissetriz dos quadrantes pares e pode ser definida pela seguinte condição:
$\operatorname{Im}(z)=-\operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)+\operatorname{Re}(z)=0$.

Então, o conjunto de pontos da região colorida da figura, incluindo a fronteira, pode ser representado por:
$|z|\le 2\sqrt{2} \wedge \operatorname{Im}(z)+\operatorname{Re}(z)\ge 0 \wedge \operatorname{Re}(z)\le 0$.

A opção correta é a (C).

Pág. 201

Proposta 40

$r=|z_A|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

A circunferência de centro *A* que passa pela origem do referencial pode ser representada pela condição $|z-3+2i|=\sqrt{13}$.

A mediatriz de [*OA*] pode ser representada pela condição $|z|=|z-3+2i|$. A reta *OA* pode ser representada pela condição $2\operatorname{Re}(z)+3\operatorname{Im}(z)=0$. Então, o conjunto de pontos da região colorida, incluindo a fronteira, pode ser representado por:

$|z-3+2i|\le\sqrt{13} \wedge \operatorname{Im}(z)\ge -2 \wedge |z|\ge|z-3+2i| \wedge$
$\wedge\ 2\operatorname{Re}(z)+3\operatorname{Im}(z)\ge 0$.

Proposta 41

41.1. Como o triângulo [*ABO*] é equilátero e *M* é o ponto médio de [*AB*], sabe-se que $A\hat{O}B=\frac{\pi}{3}$ e $A\hat{O}M=\frac{\pi}{6}$.

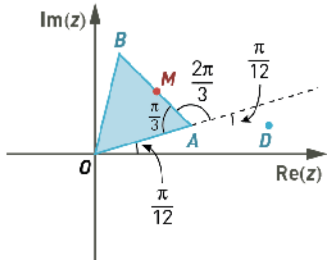
$\overline{OA}=|z_A|=3$ e $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\overline{OM}}{2}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\overline{OM}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\overline{OM}}{3} \Leftrightarrow \overline{OM}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |z_M|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Então, $z_M=\frac{3\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$.

41.2.

a)



Tal como é sugerido na figura, sendo a semirreta *AD* paralela ao eixo real, então: $D\hat{A}B=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$. Então, os números complexos representados pelos pontos pertencentes ao lado [*AB*] do triângulo satisfazem a condição $\operatorname{Arg}(z-z_A)=\frac{3\pi}{4}$.

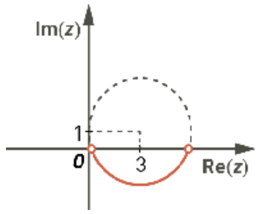
b)

Sendo $\operatorname{Arg}(z_A)=\frac{\pi}{12}$, então $\operatorname{Arg}(z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$.

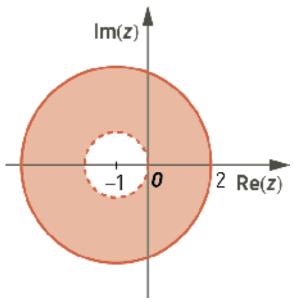
O triângulo [*OAB*] pode ser representado pela seguinte condição:
$\frac{\pi}{12}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{5\pi}{12} \wedge \frac{3\pi}{4}\le\operatorname{Arg}\left(z-3e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\le\frac{13\pi}{12}$.

Proposta 42

42.1. $|z-3-i|=3 \wedge \operatorname{Im}(z)<0 \Leftrightarrow |z-(3+i)|=3 \wedge \operatorname{Im}(z)<0$

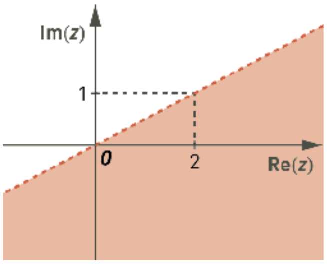


42.2. $1<|z+1|\le|3i| \Leftrightarrow 1<|z-(-1)|\le 3$

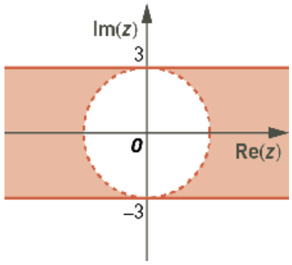


42.3. $\text{Re}(z+iz)>\text{Im}(z)\Leftrightarrow \text{Re}(x+yi+xi-y)>\text{Im}(x+yi)\Leftrightarrow$

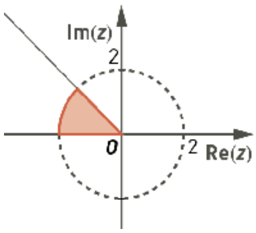
$\Leftrightarrow x-y>y\Leftrightarrow y<\dfrac{x}{2}$



42.4. $|z|>3 \ \wedge \ |\text{Im}(z)|\leq 3$

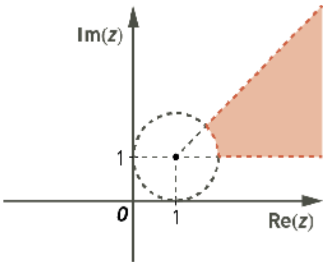


42.5. $|z|\leq 2 \ \wedge \ \dfrac{3\pi}{4}\leq \text{Arg}(z)\leq \pi$



42.6. $|z-1-i|>1 \ \wedge \ 0<\text{Arg}(z-1-i)<\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-(1+i)|>1 \ \wedge \ 0<\text{Arg}(z-(1+i))<\dfrac{\pi}{4}$



Pág. 202

Proposta 43

43.1. A reta *r* é a mediatriz de [*AB*], logo pode ser definida pela condição $|z+2-4i|=|z-2-2i|$.

O raio da circunferência menor é 2 e o raio da circunferência maior é 4.
Assim, a região colorida da figura pode ser definida pela condição:

$|z+2-4i|\leq|z-2-2i| \ \wedge \ 2\leq|z-2-4i|\leq 4$.

43.2.

$$w=\frac{i^{25}(1+4i)}{1+i}=\frac{i^{4\times 6+1}(1+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{i(1-i+4i+4)}{1+1}=$$

$$=\frac{5i-3}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$$

Vamos verificar se a representação geométrica do complexo *w* pertence à zona colorida.

$|w+2-4i|\leq|w-2-2i| \ \wedge \ 2\leq|w-2-4i|\leq 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+2-4i\right|\leq\left|-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i-2-2i\right| \ \wedge \ 2\leq\left|-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i-2-4i\right|\leq 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right|\leq\left|-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}i\right| \ \wedge \ 2\leq\left|-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i\right|\leq 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\leq\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\wedge 2\leq\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\leq 4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{10}{4}}\leq\sqrt{\frac{50}{4}} \ \wedge \ 2\leq\sqrt{\frac{58}{4}}\leq 4$ (Proposição verdadeira)

Conclui-se, então, que a representação geométrica do complexo *w* pertence à zona colorida.

Proposta 44

44.1. O conjunto de pontos que constituem a região colorida da figura pode ser representado por:

$|z-3-2i|\geq 2 \quad\wedge\quad 3\leq\text{Re}(z)\leq 5 \quad\wedge\quad 2\leq\text{Im}(z)\leq 4$

44.2. Seja z_A o número complexo cuja imagem geométrica é o ponto $A(2,2)$.

Então, $\text{Arg}(z_A)=\dfrac{\pi}{4}$ e $r=|z_A|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

O hexágono representado na figura é regular.

$\dfrac{\pi}{4}+2\times\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{12}$

O conjunto de pontos que constituem a região colorida da figura pode ser representado por:

$|z|\leq 2\sqrt{2} \ \wedge \ \dfrac{\pi}{4}\leq\text{Arg}(z)\leq\dfrac{11\pi}{12}$.

44.3. O conjunto de pontos que constituem a região colorida da figura pode ser representado por:

$2\leq|z|\leq 3 \ \vee \ -\dfrac{3\pi}{4}\leq\text{Arg}(z)\leq\dfrac{\pi}{4}$.

44.4. O conjunto de pontos que constituem a região colorida da figura pode ser representado por:

$\left(|z-3-4i|\geq 2 \ \wedge \ \dfrac{\pi}{4}\leq\text{Arg}(z-1)\leq\dfrac{\pi}{2} \ \wedge \ \text{Im}(z)\leq 4\right)\vee$

$\vee\left(|z-3-4i|\leq 2 \ \wedge \ 0\leq\text{Arg}(z-1)\leq\dfrac{\pi}{4}\right)$

Pág. 203

Proposta 45

45.1.

$$w=\left(z_3-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n=\left(-1+2i-i\right)^n=\left(-1+i\right)^n=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^n=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}$$

w é um número real negativo se $\frac{3n\pi}{4}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{3n\pi}{4}=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}$$

Assim, atribuindo valores a k, conclui-se que o menor valor de n para o qual w é um número real negativo é 4.

45.2. Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um número complexo z. Designemos por u e v as outras duas raízes cúbicas de z.

$$u=4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}=4e^{i\pi}=-4 \text{ e } v=4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\times\frac{2\pi}{3}\right)}=4e^{i\frac{5\pi}{3}}=$$

$$=4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2-2\sqrt{3}i$$

45.3. $z_2=z_1+z_3=4e^{i\frac{\pi}{3}}+\left(-1+2i\right)=$

$$=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)-1+2i=4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-1+2i=$$

$$=2+2\sqrt{3}i-1+2i=1+\left(2\sqrt{3}+2\right)i$$

Sabe-se que $z_2=re^{i\theta},\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Então, $\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}+2}{1}=2\sqrt{3}+2$.

45.4. O ponto A é a imagem do número complexo z_1 e $z_1=2+2\sqrt{3}i$. Como a semirreta $\dot{A}O$ tem origem em A, conclui-se que $a=2$ e $b=2\sqrt{3}$. Pode-se considerar $\alpha=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$.

Proposta 46

46.1. $z=w^2=\left(\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-i\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)^2=$

$$=\left(\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\right)^2-2i\left(\sqrt{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)+i^2\left(\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}-2i\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}\right)-\sqrt{6}-\sqrt{3}=$$

$$=-2\sqrt{3}-2i\left(\sqrt{6-3}\right)=-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$$

$$|z|=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

Considere-se, por exemplo, $\theta=\operatorname{Arg}(z)$. $\tan\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}=1$ e sabe-se que o afixo de z é um ponto do 3.º quadrante. Então, $\operatorname{Arg}(z)=-\frac{3\pi}{4}$ e $z=2\sqrt{6}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

46.2. $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\sqrt{24}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt[3]{\sqrt{24}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}=$

$$=\sqrt[6]{24}\,e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}=\sqrt[6]{24}\,e^{i\left(\frac{5\pi+8k\pi}{12}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{21\pi}{12}}=\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

As raízes cúbicas de z são $\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$ e $\sqrt[6]{24}\,e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

Proposta 47

47.1.

a) $|z-\bar{z}|\le 4\ \wedge\ \frac{\pi}{6}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{3\pi}{4}$

Sendo $z=x+yi$, tem-se:

$$|x+yi-x+yi|\le 4\ \wedge\ \frac{\pi}{6}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|2yi|\le 4\ \wedge\ \frac{\pi}{6}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y\le 4\ \wedge\ 2y\ge -4\ \wedge\ \frac{\pi}{6}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\le 2\ \wedge\ y\ge -2\ \wedge\ \frac{\pi}{6}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{3\pi}{4}$$

Então $\operatorname{Im}(z_A)=2$.

Seja P o ponto de interseção de AB com o eixo imaginário.

$\overline{OP}=2$, então $P\hat{A}O=\frac{\pi}{6}$. Como $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$, conclui-se que $\overline{AP}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$. Assim, $z_A=2\sqrt{3}+2i$.

b) Seja P o ponto de interseção de AB com o eixo imaginário.

Como $\operatorname{Arg}(z_B)=\frac{3\pi}{4}$, relativamente ao triângulo [BOP], tem-se:

$P\hat{O}B=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$. Como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\overline{BP}}{\overline{OP}}\Leftrightarrow\overline{BP}=\overline{OP}$, tem-se $\overline{BP}=\overline{OP}=2$ e $z_B=-2+2i$.

$$|z_B|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Assim, $z_B=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

47.2. Seja $z=re^{i\theta},\ r\ge 0$, então $\bar{z}=re^{-i\theta}$.

$$z^2=\bar{z}\Leftrightarrow\left(re^{i\theta}\right)^2=re^{-i\theta}\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)}=re^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=r\\ 2\theta=-\theta+2k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2-r=0\\ 3\theta=2k\pi\wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r(r-1)=0 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \wedge k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=0 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \wedge k \in \{0,1,2\} \end{cases} \vee \begin{cases} r=1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \wedge k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z=0 \vee z=e^{i0} \vee z=e^{i\frac{2\pi}{3}} \vee z=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

A solução da equação $z^2=\overline{z}$ cuja imagem geométrica não pertence ao triângulo $[OAB]$ e pertence ao 3.° quadrante é $z=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Ora, $z=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Pág. 208

Questões de Exame

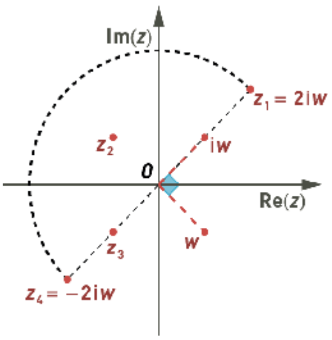
1. $z_1=(k-i)(3-2i)=3k-2ki-3i-2=(3k-2)+(-2k-3)i$

z_1 é um número imaginário puro se:

$3k-2=0 \ \wedge\ -2k-3\neq 0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3} \ \wedge\ k\neq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

A opção correta é a (C).

2.



A opção correta é a (D).

3.

$$z=\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7+(2+i)^3}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}}=\frac{e^{i\frac{7\pi}{7}}+(2+i)^2(2+i)}{-4i}=$$

$$=\frac{e^{i\pi}+(4+4i-1)(2+i)}{-4i}=\frac{-1+(3+4i)(2+i)}{-4i}=$$

$$=\frac{-1+6+3i+8i-4}{-4i}=\frac{1+11i}{-4i}=\frac{(1+11i)i}{(-4i)i}=$$

$$=\frac{i-11}{4}=-\frac{11}{4}+\frac{1}{4}i$$

4.

Como w é um número complexo cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A situado no 1.° quadrante, então $w=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}^+$.

$\overline{w}=a-bi$ e $-w=-a-bi,\ a,b\in\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que os pontos B e C são as imagens geométricas de $\overline{w}$ e $-w$, respetivamente.

$\overline{BC}=8 \Leftrightarrow |\overline{w}-(-w)|=8 \Leftrightarrow |a-bi+a+bi|=8$

$\Leftrightarrow |2a|=8 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a=4$

$|w|=5 \Leftrightarrow |4+bi|=5 \Leftrightarrow \sqrt{4^2+b^2}=5 \Leftrightarrow 16+b^2=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^2=9 \underset{b>0}{\Leftrightarrow} b=3$

Então, $\overline{AB}=2\,\mathrm{Re}(w)=6$.

Assim sendo, $A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AB}}{2}=\frac{8\times 6}{2}=24$.

Pág. 209

5.1. $w=\dfrac{3-i\times(z_1)^7}{\overline{z_2}}=\dfrac{3-i\times\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7}{2-i}=\dfrac{3-i\times e^{i\frac{7\pi}{7}}}{2-i}=\dfrac{3-i\times(-1)}{2-i}=$

$=\dfrac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+3i+2i-1}{4+1}=\dfrac{5+5i}{5}=1+i$

$|w|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Seja $\theta=\mathrm{Arg}(w)$. $\tan\theta=\frac{1}{1}=1$ e o afixo de w é um ponto do 1.° quadrante. Então, $\theta=\frac{\pi}{4}$ e $w=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

5.2.

$z_1+z_2=e^{i\frac{\pi}{7}}+2+i=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+i=$

$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)+i\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)$

Então, $|z_1+z_2|^2=\left(\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)^2}\right)^2=$

$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)^2=$

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+4+\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+1=$

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+5+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=$

$=1+5+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)=$

$=6+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

6.1. $-z_1=-\left(1-\sqrt{3}i\right)=-1+\sqrt{3}i$

$\left|-z_1\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

Seja $\theta=\text{Arg}\left(-z_1\right)$. $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$ e o afixo de $\left(-z_1\right)$ é um ponto do 2.° quadrante. Então, $\theta=-\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{2\pi}{3}$ e $-z_1=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$\left(-z_1\right)^3=\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=2^3e^{i\left(3\times\frac{2\pi}{3}\right)}=8e^{i2\pi}=8e^{i0}$.

Como $\left(-z_1\right)^3=z_2$, conclui-se que $\left(-z_1\right)$ é uma raiz cúbica de z_2.

6.2. $z_3=z_1i^{46}=\left(1-\sqrt{3}i\right)i^{4\times11+2}=\left(1-\sqrt{3}i\right)i^2=\left(1-\sqrt{3}i\right)\times\left(-1\right)=$

$=-1+\sqrt{3}i$

$\overline{AB}=\left|z_1-z_3\right|=\left|1-\sqrt{3}i-\left(-1+\sqrt{3}i\right)\right|=\left|1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i\right|=$

$=\left|2-2\sqrt{3}i\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$

7. Seja $w=-1+\sqrt{3}i$.

$|w|=\sqrt{\left(-1\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

Seja $\theta=\text{Arg}\left(w\right)$.

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$ e o afixo de w é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\theta=-\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{2\pi}{3}$ e $w=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$z_1=\frac{8e^{i\theta}}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{8e^{i\theta}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{8}{2}e^{i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}=4e^{i\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

$$\overline{z_1}\times z_2=2e^{i\left(-\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}\times e^{i2\theta}=2e^{i\left(-\theta+\frac{2\pi}{3}+2\theta\right)}=2e^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}.$$

$\overline{z_1}\times z_2$ é um número real se $\theta+\dfrac{2\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$\theta+\dfrac{2\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=-\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Então, $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ \theta\in\left]0,\pi\right[\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

8. Seja $u=1+i$.

$|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Seja $\theta=\text{Arg}\left(u\right)$.

$\tan\theta=\dfrac{1}{1}=1$ e o afixo de u é um ponto do 1.° quadrante.

Então, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ e $u=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$w=\left(1+i\right)^{2013}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2013}=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}e^{i\left(2013\times\frac{\pi}{4}\right)}=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}e^{i\frac{2013\pi}{4}}$$

Como $\dfrac{2013\pi}{4}=\dfrac{\left(4\times503+1\right)\pi}{4}=\dfrac{4\times503\pi+1\pi}{4}=503\pi+\dfrac{\pi}{4}=$

$=502\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}=502\pi+\dfrac{5\pi}{4}$, conclui-se que $w=\left(\sqrt{2}\right)^{2013}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Assim sendo, o afixo de w é um ponto do 3.° quadrante que pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, $\text{Re}\left(w\right)=\text{Im}\left(w\right)$.

A opção correta é a (D).

Pág. 210

9. Seja $w=-2+2i^{19}$.

Ora, $w=-2+2i^{19}=-2+2i^{4\times4+3}=-2+2i^3=-2+2\left(-i\right)=-2-2i$.

$|u|=\sqrt{\left(-2\right)^2+\left(-2\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Seja $\theta=\text{Arg}\left(w\right)$. $\tan\theta=\dfrac{-2}{-2}=1$ e o afixo de w é um ponto do 3.° quadrante. Então, $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$ e $w=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

$$z=\frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}=\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\theta\right)}=2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\theta\right)}$$

z é um número imaginário puro se $-\dfrac{3\pi}{4}-\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

$-\dfrac{3\pi}{4}-\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\theta=\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\theta=-\dfrac{5\pi}{4}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Então, $\theta=-\dfrac{5\pi}{4}-k\pi,k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ \theta\in\left]0,2\pi\right[\Leftrightarrow\theta=\dfrac{3\pi}{4}\ \vee\ \theta=\dfrac{7\pi}{4}$.

10. Seja $u=-1+i$.

$|u|=\sqrt{\left(-1\right)^2+1^2}=\sqrt{2}$

Seja $\theta=\text{Arg}\left(u\right)$.

$\tan\theta=\dfrac{1}{-1}=-1$ e o afixo de u é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\theta=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$ e $u=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$w=-\sqrt{2}i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$$z=\frac{-1+i}{\left(re^{i\theta}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{r^2e^{i2\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{r^2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)}$$

$z=w\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-2\theta\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{r^2}=\sqrt{2}\ \wedge\ \dfrac{3\pi}{4}-2\theta=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2=1\ \wedge\ -2\theta=-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\underset{r>0}{\Leftrightarrow}r=1\ \wedge\ -2\theta=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r=1\ \wedge\ \theta=-\dfrac{3\pi}{8}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Como $\theta\in\left]0,\ \pi\right[$, atribuindo valores a k, conclui-se que $r=1$ e $\theta=\dfrac{5\pi}{8}$.

11.1. Seja $w=-1+\sqrt{3}i$.

$|w|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

Seja $\theta=\operatorname{Arg}(w)$.

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$ e o afixo de w é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\theta=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$ e $w=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Seja $u=1-i$.

$|u|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

Seja $\alpha=\operatorname{Arg}(u)$.

$\tan\alpha=\frac{1}{-1}=-1$ e o afixo de u é um ponto do 4.° quadrante.

Então, $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ e $u=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$z_1=\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=\frac{\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{2^3e^{i\left(3\times\frac{2\pi}{3}\right)}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{8e^{i2\pi}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{8e^{i0}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{2}}e^{i\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1\times(z_1)^2=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times\left(e^{i\alpha}\right)^2=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i2\alpha}=4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}$$

$z_1\times(z_1)^2$ é um número imaginário puro se

$\frac{\pi}{4}+2\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$$\frac{\pi}{4}+2\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2\alpha=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Então, $\alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\ \wedge\ \alpha\in[0,\pi[\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{8}\ \vee\ \alpha=\frac{5\pi}{8}$.

$\alpha\in\left\{\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right\}$

11.2. Seja $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$.

$$|1+z|^2+|1-z|^2\le 10\Leftrightarrow|1+a+bi|^2+|1-a-bi|^2\le 10\Leftrightarrow$$

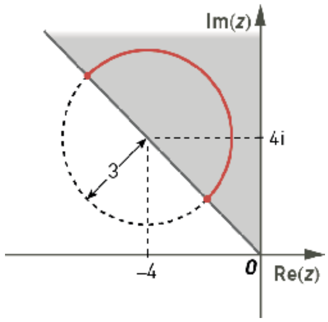
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2+\left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2\le 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1+a)^2+b^2+(1-a)^2+(-b)^2\le 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2\le 10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2\le 8\Leftrightarrow a^2+b^2\le 4\underset{a^2+b^2\ge 0}{\Leftrightarrow}\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{4}\Leftrightarrow|z|\le 2$$

12. A condição $|z+4-4i|=3$ representa a circunferência de centro no afixo do número complexo $w=-4+4i$ e raio 3. A condição $|z+4-4i|=3\ \wedge\ \frac{\pi}{2}\le\operatorname{Arg}(z)\le\frac{3\pi}{4}$ representa uma semicircunferência representada no referencial seguinte:



O perímetro dessa linha é $P=\frac{2\pi\times 3}{2}=3\pi$.

A opção correta é a (C).

Pág. 211

13. Sabe-se que $z_A=1e^{i0}$. Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice *n* de um número complexo *w*, logo correspondem a números complexos com o mesmo módulo. Os argumentos desses números complexos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{5}$. Assim sendo,

$$z_D=1e^{i\left(0+3\times\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{6\pi}{5}}.$$

A opção correta é a (B).

14. Seja $u=1+i$.

$|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Seja $\theta=\operatorname{Arg}(u)$.

$\tan\theta=\frac{1}{1}=1$ e o afixo de u é um ponto do 1.° quadrante.

Então, $\theta=\frac{\pi}{4}$ e $u=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$z_1=(1+i)^6=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6e^{i\left(6\times\frac{\pi}{4}\right)}=8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z_2=\frac{8i}{e^{i\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}}=\frac{8e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}}=8e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)}=8e^{i\frac{17\pi}{10}}$$

Como z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de *n* lados, com centro na origem do referencial, sabe-se que

$\operatorname{Arg}(z_2)-\operatorname{Arg}(z_1)=\frac{2\pi}{n}$.

Assim sendo, tem-se:

$$\operatorname{Arg}(z_2)-\operatorname{Arg}(z_1)=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow\frac{17\pi}{10}-\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\pi}{10}=\frac{2\pi}{n}\Leftrightarrow n=10$$

15.1. $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \vee z=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z\in\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Como *w* é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo, então $w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$|w|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$

Seja $\theta=\operatorname{Arg}(w)$.

$\tan\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$ e o afixo de w é um ponto do 2.° quadrante.

Então, $\theta=-\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{2\pi}{3}$ e $w=1e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\frac{1}{w}=\frac{1e^{i0}}{1e^{i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{1}{1}e^{i\left(0-\frac{2\pi}{3}\right)}=1e^{-i\frac{2\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

15.2. Seja $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$. Ora:

$$(\bar{z}+i)\times(z-i)=(a-bi+i)\times(a+bi-i)=$$
$$=a^2+abi-ai-abi-b^2i^2+bi^2+ai+bi^2-i^2=$$
$$=a^2-b^2i^2+2bi^2-i^2=a^2+b^2-2b+1$$
$$|z-i|^2=|a+bi-i|^2=|a+(b-1)i|^2=\left(\sqrt{a^2+(b-1)^2}\right)^2=$$
$$=a^2+(b-1)^2=a^2+b^2-2b+1$$

Então, para qualquer número complexo *z*, tem-se $(\bar{z}+i)\times(z-i)=|z-i|^2$.

Pág. 212

Avaliar – 1.ª Parte

1. Se a imagem geométrica do número complexo *z* pertence ao 1.° quadrante, então a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ pertence ao 4.° quadrante. Se a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ pertence ao 4.° quadrante, então a imagem geométrica do número complexo $-\bar{z}$ pertence ao 2.° quadrante.

Assim sendo, a opção correta é a (B).

2. A imagem do número complexo *w* pela homotetia de centro *O* e razão $-\dfrac{1}{2}$ é o número complexo representado por $-\dfrac{1}{2}w$. Ora, $-\dfrac{1}{2}w=z_4$.

Assim sendo, a opção correta é a (D).

3. O raio da circunferência é $r=|w|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

A circunferência representada na figura é definida pela condição $|z|=\sqrt{5}$. Ora, $z=\dfrac{5}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\times\bar{z}=5 \Leftrightarrow |z|^2=5 \Leftrightarrow |z|=\sqrt{5}$.

Assim sendo, a opção correta é a (B).

4. A imagem geométrica do número complexo *z* pertence ao 4.° quadrante. Então, tem-se $z=|z|e^{i\alpha}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$.

$$\frac{1}{z}=\frac{e^{i0}}{|z|e^{i\alpha}}=\frac{1}{|z|}e^{-i\alpha}$$

Como $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$, então $0<-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Então, a imagem geométrica do número complexo $\dfrac{1}{z}$ pertence ao 1.° quadrante.

Sendo $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, a imagem geométrica do número complexo $2e^{i\theta}$ pertence ao 1.° quadrante.

Assim sendo, a opção correta é a (A).

5.

$$z^3+8i=0 \Leftrightarrow z^3=-8i \Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8e^{i\frac{3\pi}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8}\,e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\} \Leftrightarrow z=2e^{i\left(\frac{3\pi+4k\pi}{6}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$$

Se $k=0$ tem-se $z_0=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$.

Se $k=1$ tem-se:

$$z_1=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=$$
$$=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i.$$

Se $k=2$ tem-se: $z_2=2e^{i\frac{11\pi}{6}}=$

$$=2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$
$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i.$$

As imagens geométricas das soluções da equação $z^3+8i=0$ são os vértices de um triângulo equilátero centrado na origem. Seja *P* o perímetro desse triângulo.

Então, $P=3\times|z_2-z_1|=3\times\left|\sqrt{3}-i+\sqrt{3}+i\right|=6\sqrt{3}$.

Assim sendo, a opção correta é a (C).

Pág. 213

Avaliar – 2.ª Parte

1.1.

$$z=\frac{a-i^{8n+1}}{1+i}=\frac{a-\left(i^4\right)^{2n}\times i}{1+i}=\frac{(a-1\times i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{a-ai-i-1}{1+1}=$$

$$=\frac{a-1}{2}+\frac{-a-1}{2}i$$

O número complexo z é um imaginário puro se

$$\operatorname{Re}(z)=0 \ \wedge\ \operatorname{Im}(z)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{2}=0 \ \wedge\ \frac{-a-1}{2}\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=1 \ \wedge\ a\neq -1 \Leftrightarrow a=1 .$$

1.2. A imagem geométrica de z, no plano complexo, pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ se $|z|=\sqrt{5}$.

$$|z|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-a-1}{2}\right)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-2a+1}{4}+\frac{a^2+2a+1}{4}=5 \Leftrightarrow 2a^2+2=20 \Leftrightarrow a^2=9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=-3 \vee a=3$$

Então, a imagem geométrica do número complexo z pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ se e só se $a\in\{-3,3\}$.

2.1.

a)

$$z_A=\frac{2-i^{17}}{1+2i}=\frac{2-i^{4\times 4+1}}{1+2i}=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i-i-2}{1+4}=\frac{-5i}{5}=$$

$$=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

b)

$$z_B=z_A+e^{i\frac{\pi}{6}}=-i+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

2.2.

$$|z_A-z_O|=|-i|=1$$

$$|z_B-z_O|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

$$|z_A-z_B|=|z_B-z_A|=\left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right|=1$$

O triângulo $[OAB]$ é equilátero porque:

$$|z_A-z_O|=|z_B-z_O|=|z_A-z_B|=1$$

3.1.

$$|z_A|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$z_A=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$A\hat{O}B=120^\circ$ e $120^\circ\to\frac{2\pi}{3}$ rad.

$$z_B=z_A\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

3.2. A região colorida da figura pode ser definida pela condição:

$$|z|\leq 2\sqrt{2} \ \wedge\ \frac{\pi}{4}\leq \operatorname{Arg}(z)\leq\frac{11\pi}{12} .$$

3.3. $z^3-iz_A=0\Leftrightarrow z^3=i(2+2i)\Leftrightarrow z^3=-2+2i\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{\sqrt{8}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}\Leftrightarrow z=\sqrt[6]{2^3}\,e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$$

Se $k=0$ tem-se $z_0=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Se $k=1$ tem-se $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

Se $k=2$ tem-se $z_2=\sqrt{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

$$z\in\left\{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{12}},\sqrt{2}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$$

4. $z^2=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=$

$$=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2-2i\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)+i^2\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=2-\sqrt{3}-2i\left(\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\right)-2-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}-2i\left(\sqrt{4-3}\right)=$$

$$=-2\sqrt{3}-2i$$

$$\left|z^2\right|=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{16}=4$$

Seja θ_1 o argumento de z^2 que pertence ao intervalo $[0,2\pi[$.

$\tan\theta_1=\frac{-2}{-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e sabe-se que o afixo de z^2 é um ponto do 3.º quadrante.

Donde se conclui que $\theta_1=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$. Então, $z^2=4e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

$$z^2=4e^{i\frac{7\pi}{6}}\Leftrightarrow\left(re^{i\theta}\right)^2=4e^{i\frac{7\pi}{6}}\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)}=4e^{i\frac{7\pi}{6}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} r^2=4 \\ 2\theta=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{7\pi}{12}+k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Como $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, conclui-se que $\theta=-\frac{5\pi}{12}$.