Resolução ficha dezembro 2022

1. Acontecimentos dados:

***R*:** "A soma dos números das bolas retiradas é um número ímpar."

***S*:** "As duas bolas têm número par."

Seja n o número de bolas transferidas da caixa B para a caixa A.

O número de bolas da caixa A passa a ser $10+n$, sendo $5+n$ o número de bolas pares.

$$P(R)=\frac{{}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1}{{}^{n+10}C_2} \quad \text{e} \quad P(S)=\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+10}C_2}$$

$$P(R)=P(S) \Leftrightarrow \frac{{}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1}{{}^{n+10}C_2}=\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+10}C_2} \Leftrightarrow {}^{5}C_1\times{}^{n+5}C_1={}^{n+5}C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(n+5)=\frac{(n+5)!}{(n+3)!2!} \Leftrightarrow 5(n+5)=\frac{(n+5)(n+4)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10(n+5)-(n+5)(n+4)=0 \Leftrightarrow (n+5)(10-n-4)=0 \Leftrightarrow n=-5 \vee n=6$$

Como $n\in\mathbb{N}$, tem-se $n=6$.

Resposta: Transferiram-se seis bolas da caixa B para a caixa A.

2.

Considerando o primeiro ponto do enunciado, temos duas situações distintas que é importante considerar.

A primeira em que ainda temos um número cujo algarismo das dezenas é o 1:

				1	7,9
___	___	___	___	___	___
				1	2

e a segunda em que já não temos o 1 como algarismo das dezenas:

				2,3,4, …,9	1,3,5, 7,9
___	___	___	___	___	___
				8	5

Para o segundo ponto do enunciado, temos de te ter em conta que a palavra "matemática" tem 6 letras distintas e que uma e só uma delas tem de aparecer na combinação, sendo um dos espaços ocupado por ela enquanto que no outro apenas podem aparecer as restantes letras (20):

		A,C,E, I,M,T	restantes		
___	___	___	___	___	___
		6	20		

$\times 2$

No terceiro ponto do enunciado apenas é pedido que o primeiro dígito seja um número primo, nada sendo imposto no segundo, temos:

$$\underset{4}{\overset{2,3,\ 5,7}{\underline{\qquad}}}\ \underset{10}{\overset{\text{todos}}{\underline{\qquad}}}\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}$$

A solução será:

$$4 \times 10 \times 6 \times 20 \times 2 \times (1 \times 2 + 8 \times 5) = 403200$$

Opção: $\boxed{\text{A}}$

3.1

Sejam:

A: «A bola é preta.»

B: «A bola está numerada com um número par.»

Do enunciado sai que:

- $P(A) = 0{,}625$
- $P(B|A) = \frac{3}{5}$
- $P\left(\overline{A}\middle|B\right) = \frac{1}{3}$

Queremos saber o valor de $P\left(\overline{B}\right)$.

Como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{P(B \cap A)}{0{,}625} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times 0{,}625 &= P(B \cap A) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} &= P(B \cap A) \end{aligned}$$

Sabemos também que:

$$P\left(\overline{A}\middle|B\right) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{\frac{3}{8}}{P(B)} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{9}{16} = 43{,}75\%$$

3.2 De acordo com a definição de X e Y feita no enunciado, $P(Y|X)$ é a probabilidade de as bolas com a mesma cor serem extraídas consecutivamente sabendo que isso acontece com as bolas brancas. Assim, apenas temos de considerar o que acontece com as pretas (à falta de um valor concreto para o seu número vamos considerar n) e com a azul mas também com o posicionamento dos três grupos de cores presentes na extração.

Podemos visualizar uma das situações que queremos que aconteça (casos favoráveis):

Claro que os grupos podem trocar de posição entre si e, por isso, o número de casos favoráveis é: $3! = 6$.

No entanto, podemos ter um caso assim:

Para contarmos todas as situações possíveis vamos considerar que temos n bolas pretas, 1 bola azul e 1 grupo de bolas brancas que estará sempre junto, o que perfaz um total de $n+2$ elementos/espaços. Vamos começar por colocar todas as bolas pretas - n - nos $n+2$ espaços:

$$^{n+2}C_n = \frac{(n+2)!}{n!(n+2-n)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Isto terá de ser multiplicado pelas trocas entre a bola azul e o grupo de bolas brancas, assim:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} \times 2 = (n+2)(n+1)$$

Assim sendo:

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{(n+2)(n+1)} && = \frac{1}{22} \\
\Leftrightarrow \quad & 132 && = n^2 + 3n + 2 \\
\Leftrightarrow \quad & n^2 + 3n - 130 && = 0 \quad \text{Usando a fórmula resolvente} \\
\Leftrightarrow \quad & \boxed{n = 10} \vee n = -13 \notin \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Temos $10 + 5 + 1 = 16$ bolas dentro da caixa.

4.

Comecemos por definir os acontecimentos:

H: «O funcionário é homem.»
L: «O funcionário é licenciado.»

Pela informação presente no enunciado, sai que:

- $P(H) = 0,2$
- $P\left(\overline{L}|\overline{H}\right) = 0,6$

Daqui podemos tirar mais alguns dados:

$$P\left(\overline{H}\right) = 1 - P(H) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$P\left(\overline{L}|\overline{H}\right) = \frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)}{P\left(\overline{H}\right)} \Leftrightarrow 0,6 = \frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)}{0,8}$$

$$\Leftrightarrow 0,6 \times 0,8 = P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right) \Leftrightarrow 0,48 = P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)$$

pelo que podemos concluir também que:

$$P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right) = P\left(\overline{H}\right) - P\left(L\cap\overline{H}\right) = 0,8 - 0,48 = 0,32$$

Considere-se agora que $\underline{n}$ é o número de mulheres licenciadas e $\underline{m}$ o número de trabalhadores que não são mulheres licenciadas. Então:

$$P\left(L\cap\overline{H}\right) = \frac{n}{n+m} \Leftrightarrow 0,32 = \frac{n}{n+m}$$

$$\Leftrightarrow 0,32(n+m) = n$$

$$\Leftrightarrow 0,32m = n - 0,32n$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{0,68n}{0,32}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{17}{8}n$$

Temos agora de considerar o acontecimento:

M: «São escolhidas duas mulheres licenciadas para representar os trabalhadores.»

Temos:

- Casos possíveis: ${}^{n+m}C_2$
- Casos favoráveis: ${}^{n}C_2$

Então:

$$P(M)=\frac{{}^{n}C_2}{{}^{n+m}C_2}=\frac{92}{925}$$

$$\frac{{}^{n}C_2}{{}^{n+m}C_2}=\frac{92}{925}$$

Recordar que

$${}^{n}C_p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{n!}{2!\times(n-2)!}}{\frac{(n+m)!}{2!\times(n+m-2)!}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{n\times(n-1)\times\cancel{(n-2)!}}{2!\times\cancel{(n-2)!}}}{\frac{(n+m)\times(n+m-1)\times\cancel{(n+m-2)!}}{2!\times\cancel{(n+m-2)!}}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{n\times(n-1)}{\cancel{2!}}}{\frac{(n+m)\times(n+m-1)}{\cancel{2!}}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n\times(n-1)}{(n+m)\times(n+m-1)}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\frac{n}{n+m}}_{0{,}32=\frac{8}{25}}\times\frac{n-1}{n+m-1}=\frac{92}{925}$$

Como vimos anteriormente:

$$m=\frac{17}{8}n$$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{25}\times\frac{n-1}{n+\frac{17}{8}n-1}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n-1}{\frac{25}{8}n-1}=\frac{23}{74}$$

$$\Leftrightarrow 74n-74=\frac{575}{8}n-23$$

$$\Leftrightarrow\frac{17}{8}n=51\Leftrightarrow n=24$$

Concluímos assim que na empresa trabalham 24 mulheres licenciadas num universo de 75 trabalhadores.

5.

Vamos começar por definir o acontecimento:

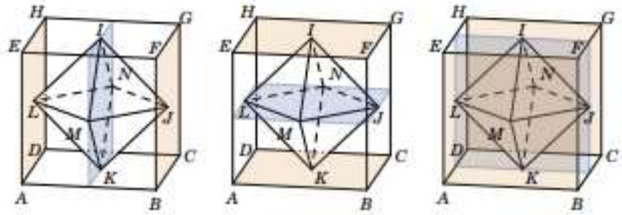
A: «Os dois conjuntos de vértices definem planos paralelos ou coincidentes.»

É importante notar que se escolhermos três vértices do cubo nunca teremos três pontos colineares, ou seja, define-se sempre um plano. Isto é válido também para o octaedro.

Assim, para os casos possíveis, temos:

Dos oito vértices do cubo escolhemos três. ⟷ $^8C_3 \times {}^6C_3$ ⟷ Dos seis vértices do octaedro escolhemos três.

Já no que a casos favoráveis diz respeito, precisamos considerar algumas situações:



Número de planos definidos no octaedro.

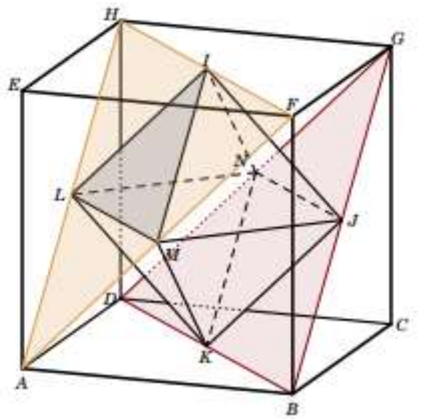
Número de faces do cubo paralelas ao plano definido pelos vértices do octaedro.

$$3 \times {}^4C_3 \times 2 \times {}^4C_3$$

Formas de escolher 3 vértices do octaedro de entre os 4 disponíveis para cada plano.

Formas de escolher 3 vértices de uma face do cubo paralela ao plano definido no octaedro.

Para além destes, temos para cada uma das oito faces do octaedro, uma situação como a que se apresenta de seguida:



em que se verifica a existência de dois planos, um paralelo e outro coincidente com o plano que contém a face de referência. Assim, serão mais 16 casos favoráveis a acrescentar aos anteriores.

Com isto, chegamos a:

$$P(A) = \frac{3 \times {}^4C_3 \times 2 \times {}^4C_3 + 16}{{}^8C_3 \times {}^6C_3} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

6.

1	2	3	4	5	6
		7	8	9	10

Uma resposta possível é:

$$^{3}C_1 \times {}^{2}C_1 \times {}^{10}C_6 \times 6! \times {}^{2}C_1 \times 4! = 43\ 545\ 600$$

- $^{3}C_1$ representa o número de possibilidades de escolher a linha que fica livre.
- $^{2}C_1$ representa o número de possibilidades de escolher a linha que fica ocupada com exatamente 6 cartões.
- $^{10}C_6 \times 6!$ representa o número de possibilidades de escolher, entre os 10 cartões numerados, 6 para ocupar a linha, permutando-os pelas 6 posições.
- $^{2}C_1 \times 4!$ representa o número de possibilidades de escolher uma das duas laterais da grelha e permutar os 4 cartões restantes, mantendo-os juntos e encostados.

Opção (B)

7.

$$\underline{\ 1\ } \quad \cdots \quad \underline{\quad} \quad \underset{p=14}{\underline{\ k\ }} \quad \cdots \quad \underset{p=36}{\underline{\ k\ }} \quad \underline{\quad} \quad \cdots \quad \underline{\ 1\ }$$

$$\underline{\ 1\ } \quad \cdots \quad \underline{\quad} \quad \cdots \quad \underline{\quad} \quad \cdots \quad \underline{\ 1\ }$$

$$^{n}C_{14} = ^{n}C_{36} \Leftrightarrow 36 = n - 14 \Leftrightarrow n = 50$$

Logo, a linha seguinte, daterminada para $n = 51$ tem 52 elementos, dos quais $2 \times 14 = 28$ são inferiores a k.

Donde

<u>Número de casos possíveis:</u> $^{52}C_5$

<u>Número de casos favoráveis:</u> $^{52}C_5 - ^{24}C_5 - ^{24}C_4 \times ^{28}C_1$

Pelo que

$$P(x) = \frac{^{52}C_5 - ^{24}C_5 - ^{24}C_4 \times ^{28}C_1}{^{52}C_5}$$

$$\simeq 86,92\%$$

8.

$$\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\left(^{12}C_k \times (x^{-2})^{12-k} \times (-x)^k\right) = \sum_{k=0}^{12}\left(^{12}C_k \times x^{-24+3k} \times (-1)^k\right)$$

O termo independente de x resulta quando $-24 + 3k = 0$, ou seja, $k = 8$.

Se $k = 8$, o termo independente de x é igual a $^{12}C_8$.

Resposta: $n = 12$ e $k = 8$.

9.1 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{(x+1)(x-1)} =$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{[f(x) - f(-1)]}{x+1} \times \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{g(x)}{x-1} = f'(-1) \times \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{g(x)}{x-1} = \dfrac{1-(-1)^2}{\left((-1)^2+1\right)^2} \times \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{(1-x)(x-1)} =$

$\dfrac{0}{4} \times \left(\dfrac{-1}{-4}\right) = 0$

Resposta: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{x^2 - 1} = 0$

9.2 Como a função f admite derivada finita em todos os pontos do domínio, em particular em $[-1, 2]$, a função é contínua em $[-1, 2]$.

$f(-1) = g(-1) = -\frac{1}{2}$ e $f(2) = g(2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Como $-\frac{1}{2} < 0{,}1 < \frac{2}{5}$, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in]-1, 2[: f(c) = 0{,}1$.

Logo, a equação $f(x) = 0{,}1$ é possível em $]-1, 2[$.

9.3 Sendo $g(-1) = -\frac{1}{2}$ e $g(2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, verifica-se que $-\frac{1}{2} < 0{,}1 < \frac{2}{5}$ e $g(-1) \times g(2) < 0$.

Como $\lim_{x \to 0^+} \frac{10 - x}{10x} = \frac{10}{0^+} = +\infty$, a função g não é contínua em $[-1, 2]$, logo o Teorema de Bolzano-Cauchy não é aplicável neste intervalo.

Resposta: Não é possível garantir que $g(x) = 0{,}1$ é possível através do Teorema de Bolzano-Cauchy.

10.1 $f'(x) = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \times \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{3x^2}{(x+1)^4}$, como queríamos demonstrar.

10.2 $f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Seja $y = mx + b$ a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$m = f'(1) = \frac{3}{16}$. Então, tem-se $y - \frac{1}{8} = \frac{3}{16}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{3x}{16} - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \frac{3x}{16} - \frac{1}{16}$

Resposta: $y = \frac{3x}{16} - \frac{1}{16}$

10.3 Sabendo que $f''(x) = \frac{6x(1-x)}{(x+1)^5}$, podemos fazer o estudo de sinais de f''.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$6x$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)^5$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$

Por observação da tabela identifica-se $x_A = 0$ e $x_B = 1$, abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f.

$\forall x \in]0, 1[, \; f''(x) > 0$

11.1 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right) = 0+\frac{2}{0^+} = +\infty$

Resposta: Uma equação da assíntota vertical do gráfico de f é $x=0$.

11.2 $f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2x^2}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$(x=2 \vee x=-2) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=2$

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	2	$\nearrow$

$f(2)$ é mínimo da função. Tem-se $f(2)=2$, ou seja $C(2,2)$.

$\overline{OC} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$.

Equação da circunferência de centro C e que passa na origem: $(x-2)^2+(y-2)^2=8$

Resposta: $(x-2)^2+(y-2)^2=8$

11.3 Seja $A\hat{O}B = \alpha$ e $y=mx+b$ a equação reduzida da reta AB.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = 2$$

$m = \tan(180-\alpha) = -\tan\alpha = -2$

Assim, $f'(x)=-2 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2x^2}=-2 \Leftrightarrow \frac{x^2-4+4x^2}{2x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-4}{2x^2}=0$.

Tem-se: $\left(x=\frac{2}{\sqrt{5}} \vee x=-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}+\frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. O ponto P tem coordenadas $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

Resposta: $P\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$

12.

Área do triângulo [*ABC*]: $\frac{\overline{AB}\times(a-1)}{2}=\frac{3(a-1)}{2}$

Área do triângulo [*ADC*]: $\frac{(2-1)\times f(a)}{2}=\frac{-a^3+4a}{2}$

Como se pretende que as áreas sejam iguais, então $\frac{3(a-1)}{2}=\frac{-a^3+4a}{2}$.

$\frac{3(a-1)}{2}=\frac{-a^3+4a}{2}\Leftrightarrow a^3-a-3=0$

Pretende-se provar, recorrendo ao Teorema de Bolzano, que a equação $a^3-a-3=0$ é possível no intervalo $]1,2[$.

Seja g a função polinomial definida por $g(x)=x^3-x-3$.

A função polinomial g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, no intervalo $[1,2]$.

$g(1)=-3$ e $g(2)=3$.

Sendo g contínua em $[1,2]$ e $g(1)<0<g(2)$, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que

$\exists a\in\,]1,2[:\ g(a)=0$, ou seja, para este valor de *a*, as medidas das áreas dos dois triângulos são iguais.

13.1 Como a reta $y=1$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$, o seu declive é 0.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{f(x)}{x}\right)=3-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=3-0=3$$

Resposta: Opção **(D)**

13.2 $g(x)=x^2-\sqrt{f(x)}$

$$g'(x)=2x-\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Atendendo a que a reta r passa pelos pontos (2, 3) e (0, 6) e designando por m o seu declive, tem-se $m=\frac{6-3}{0-2}=-\frac{3}{2}$. Então, $f'(2)=-\frac{3}{2}$.

$$g'(2)=4-\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=4-\frac{-\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}}=4+\frac{3}{4\sqrt{3}}=4+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{16+\sqrt{3}}{4}\approx 4,43$$

Resposta: $g'(2)\approx 4,43$

14.1

Como o domínio de f é $\mathbb{R}$ e a função é contínua, uma vez que se trata de uma função irracional, então não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

Seja $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to +\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = x$.

Repetindo o processo quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right) = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+4}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Quando $x \to -\infty$, o gráfico de f admite a assíntota de equação $y = -x$.

Resposta: As assíntotas ao gráfico de f são definidas pelas equações $y = x$ e $y = -x$.

14.2

a) Como a função f é par, a abcissa do ponto Q é $-a$. Então, $\overline{QP} = 2a$.

$g(a) = \dfrac{2a \times f(a)}{2}$, isto é, $g(a) = \dfrac{2a \times \sqrt{a^2+4}}{2} \Leftrightarrow g(a) = a \times \sqrt{a^2+4}$.

b) A função g definida por $g(x) = x\sqrt{x^2+4}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua no intervalo $[1, 2]$.

$g(1) = \sqrt{5}$ e $g(2) = 2\sqrt{2^2+4} = 2\sqrt{8} = \sqrt{32}$

Como $5 < 28 < 32$, então $\sqrt{5} < \sqrt{28} < \sqrt{32}$.

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists a \in \,]1, 2[\, : g(a) = \sqrt{28}$.

15.1 $g(x)\geq 0 \Leftrightarrow 5x-\frac{2x}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2+3x}{x+1}\geq 0$.

Cálculo auxiliar:

$5x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(5x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{3}{5}$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{3}{5}$		0	$+\infty$
$5x^2+3x$	+		+	0	−	0	+
$x+1$	−		+	+	+	+	+
$g(x)$	−		+	0	−	0	+

$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-1,-\frac{3}{5}\right] \cup [0,+\infty[$

15.2 Equação da assíntota é do tipo $y=mx+b$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(5-\frac{2}{x+1}\right)=5-0=5$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(5x-\frac{2x}{x+1}-5x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{1+\frac{1}{x}}\right)=-2$$

Equação da assíntota oblíqua: $y=5x-2$

15.3 Coordenadas de um vetor diretor da reta *r*: $(1,3)$

O declive da reta *r* é 3.

$$g'(x)=\left(5x-\frac{2x}{x+1}\right)'=5-\left(\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}\right)=5-\frac{2}{(x+1)^2}.$$

Seja $P(x,g(x))$ o ponto do gráfico de *g*, de abcissa não nula, no qual a reta tangente tem declive 3.

$$g'(x)=3 \Leftrightarrow 5-\frac{2}{(x+1)^2}=3 \Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}=2 \Leftrightarrow (x+1)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x+1=1 \vee x+1=-1 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$$

$$P(-2,g(-2))=(-2,-14)$$

16.1

$$f(1)=2-3+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(2x^2-3x+\frac{3}{4}\right)=2-3+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(x-1)(x+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{-(1-x)(x+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{-(x+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}=-\frac{1}{4}$$

Conclui-se que $\lim_{x\to1} f(x)=-\frac{1}{4}$. Daqui resulta, que *f* é contínua em $x=1$.

16.2 Ponto de tangência: $(0, f(0))=\left(0,\frac{3}{4}\right)$

Se $x<1$, $f'(x)=\left(2x^2-3x+\frac{3}{4}\right)'=4x-3$

$f'(0)=-3$.

Equação da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto $\left(0,\frac{3}{4}\right)$: $y=-3x+\frac{3}{4}$

17.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f(x)=\frac{2x-3}{x+1}=2-\frac{5}{x+1}$

As assíntotas ao gráfico de *f* são: $y=2$ e $x=-1$.

O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f através de uma translação associada ao vetor $(2,-3)$.

Então, as assíntotas de g são $y=-1$ e $x=1$.

Opção: (D) $x=1$ e $y=-1$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & x+1 \\ \cline{2-2} -2x-2 & 2 \\ -5 & \end{array}$$

18.1

$$f(x)\le x \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1}\le x \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1}-x\le 0 \Leftrightarrow \frac{3x-x^2-x}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{x+1}\le 0$$

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$2x-x^2$	−	−	−	0	+	0	−
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+
$\frac{2x-x^2}{x+1}$	+	s.s.	−	0	+	0	−

Cálculo auxiliar

$2x-x^2=0 \Leftrightarrow x(2-x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

$\frac{2x-x^2}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow x\in\left]-1,0\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

Resposta: $x\in\left]-1,0\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

18.2

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{x}} = 3$

Resposta: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{g(x)}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to3} \frac{3-x}{x^2-x-6} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to3} \frac{3-x}{(x-3)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x\to3} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{5}$

Cálculo auxiliar

$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$

Resposta: $\lim\limits_{x\to3} \frac{g(x)}{x^2-x-6} = -\frac{1}{5}$

18.3

$\frac{3x}{x+1} = 3-x \Leftrightarrow \frac{3x}{x+1} - 3 + x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x-3x-3+x^2+x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x-3=0 \wedge x+1\neq0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2} \wedge x\neq-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

Então, $a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ e $b = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Assim, $a+b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = -1$, como se pretendia mostrar.

19.1 $\lim\limits_{x\to-1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = g'(-1) = \frac{0}{4} = 0$

Resposta: Opção **(C)** 0

19.2

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

A função g no intervalo $]1, +\infty[$ é decrescente.

$3<5 \Rightarrow g(3) > g(5)$

Resposta: Opção **(D)** $g(3) > g(5)$

20.

Sejam $x+1$ e x números reais cuja diferença é 1.
O seu produto é dado por $P(x)=x(x+1)=x^2+x$.

$P'(x)=2x+1$

$P'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$P'(x)$	$-$	0	$+$
P	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

Resposta: O produto mínimo é $-\frac{1}{4}$.

21.

Se g tem domínio $\mathbb{R}^+$ e o seu gráfico admite uma assíntota oblíqua, então existem assíntotas em $\mathbb{R}$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ e $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-mx\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)-3x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2g(x)}{x}-\frac{3x}{x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)}{x}-3=0 \Leftrightarrow 2\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)-3x-4}{2}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2g(x)}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{4}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{3}{2}x\right)-2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{3}{2}x\right)=2$$

Portanto, $m=\frac{3}{2}$ e $b=2$, pelo que a reta de equação $y=\frac{3}{2}x+2$ é uma assíntota ao gráfico de g.

Resposta: (A)

22.1 $f(x)=x+2\sqrt{x}$ e $g(x)=\frac{3x+1}{x+1}$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1+h+2\sqrt{1+h}-\left(1+2\sqrt{1}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1+h+2\sqrt{1+h}-3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+2\sqrt{1+h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{h}+\frac{2\left(\sqrt{1+h}-1\right)}{h}\right]=1+2\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=$$

$$=1+2\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=$$

$$=1+2\lim_{h\to 0}\frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=1+2\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=$$

$$=1+2\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=1+2\times\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=1+2\times\frac{1}{2}=2$$

22.2 $t: y=mx+b$

$m=f'(1)=2$

O ponto de tangência tem coordenadas $(1, 3)$ dado que $f(1)=1+2\sqrt{1}=3$.

Equação da reta t: $y-3=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2+3\Leftrightarrow y=2x+1$

22.3 A reta t terá de intersetar o gráfico de g num ponto em que a derivada de g seja igual a 2:

$$g'(x)=\frac{(3x+1)'(x+1)-(3x+1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{3(x+1)-(3x+1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases}g(x)=2x+1\\ g'(x)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x+1}=2x+1\\ \dfrac{2}{(x+1)^2}=2\end{cases}\overset{x\neq -1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}3x+1=(x+1)(2x+1)\\ 2=2(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1=2x^2+x+2x+1\\ (x+1)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2=0\\ x+1=1\vee x+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=0\vee x=-2\end{cases}\Leftrightarrow x=0$$

$$g(0)=\frac{0+1}{0+1}=1$$

A reta t é tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

23. (C) $f'(x)=0$ *e* $f''(x)<0$

24. (C)

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'	+	0	-	-	-	0	+
f''	-	-	-	0	+	+	+
f	-	M	+	PI	-	m	+

25.(A)

Na tabela seguinte relaciona-se a monotonia de f' com o sinal de f'' e o sentido da concavidade de gráfico de f :

x		x_0	
f'	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	P.I.	$\cup$

Apenas o gráfico apresentado em (A) se ajusta a estes resultados.

26. $\boldsymbol{tg(60°) = \sqrt{3}}$ **e como nos estão a pedir o declive da reta tangente, a resposta é** $\boldsymbol{\sqrt{3}}$**. (A)**

27.

Se f é uma função polinomial do terceiro grau então $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Temos, então:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0$

Como $a \neq 0$, esta equação tem uma única solução que é $x = -\dfrac{2b}{6a} \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$.

Por outro lado, sendo f'' uma função polinomial do primeiro grau muda de sinal no zero, ou seja, em $x = -\dfrac{b}{3a}$.

Portanto, o gráfico da função f tem um e um só ponto de inflexão cuja abcissa é $x = -\dfrac{b}{3a}$.

28. $\boldsymbol{f'(a) = tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$ **(B)**

29.

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-1) = 1-1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [-(x-1)] = -(1-1) = 0 = f(1)$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$ existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ e,

portanto, f é contínua no ponto $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{|x-1| - 0}{x-1}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} = 1$$

Como $f'(-1) \neq f'(1^+)$, então não existe $f'(1)$ pelo que f

não é diferenciável no ponto x=1.

30. $f(x) = a(x+1)(x-3) = a(x^2 - 3x + x - 3) = ax^2 - 3ax + ax - 3a =$

$$= ax^2 - 2ax - 3a$$

- $f'(x) = 2ax - 2a$
- $f'(-1) \times f'(3) = -1 \Leftrightarrow (-2a - 2a) \times (6a - 2a) = -1 \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{4}$
- $Como\ a\ concavidade\ está\ voltada\ para\ baixo,\ a = -\frac{1}{4}$
- $logo, f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)$

31. (C), se A(0,-1) e B(2,0) então $m = 0{,}5$, logo a equação da reta é $y = 0{,}5x - 1$

32. (C) $\boldsymbol{f'(0) = 0\ e\ f''(x) < 0}$ **.**

O gráfico A não tem máximo para x=0; o gráfico B tem a concavidade voltada para cima onde deveria ter a concavidade voltada para baixo; o gráfico D tem um zero para x=0, não um máximo e não tem ponto de inflexão (e deveria ter).

33.1 (C)

33.2 (C)

33.2 (A)