Exercícios de aula de 8.03.2024

1º. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{3n^2+1}$

Série é alternada

a) Para testar a convergência simples, aplicamos critério de Leibnitz:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3n+\frac{1}{n}} = 0$ ✓

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n-1}{3n^2+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ – decrescente? $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n, \forall$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)-1}{3(n+1)^2+1} - \frac{n-1}{3n^2+1} = \frac{n(3n^2+1)-(n-1)(3(n^2+2n+1)+1)}{(3(n+1)^2+1)(3n^2+1)}$$

$$= \frac{3n^3+n-3n^3-6n^2-4n+3n^2+6n+4}{(3(n+1)^2+1)(3n^2+1)} = \frac{-3n^2+3n+4}{(3(n+1)^2+1)(3n^2+1)} =$$

$$= \frac{-3n(n-1)+4}{(3(n+1)^2+1)(3n^2+1)} \leq 0 \text{ para } \forall n\in\mathbb{N}$$

Logo, série alternada converge simplesmente.

b) Convergência absoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n-1}{3n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n^2+1} \leftarrow \text{série de módulos}$$

Para estudar a convergência da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n^2+1}$, vamos usar critério de comparação II (de limite)

polinómio de grau 1 → $\frac{n-1}{3n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ ← polinómio de grau 2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{3n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{3n^2+1} = \lim \frac{1-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

Logo, $\sum \frac{n-1}{3n^2+1} \sim \sum \frac{1}{n}$ ← série harmónica divergente

Logo, convergência absoluta não se verifica

2º $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$

Verificamos a condição necessária da convergência

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3-\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Logo, série diverge

3º. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$

Condição necessária:

$$\lim_{n\to\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}} - ?$$

Seja $y_n = \ln\left(\left((1+2n)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \frac{1}{n} \ln(1+2n)$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2n)}{n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(1+2n))'}{n'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1+2n}}{1} = 0$$

$$y_n \to 0 \Rightarrow e^{y_n} = e^{\ln((1+2n)^{\frac{1}{n}})} = (1+2n)^{\frac{1}{n}} \to 1$$

Condição necessária de convergência não está satisfeita $\Rightarrow$ série diverge

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n!}$

Série de módulos é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Vamos estudar a natureza da série de módulos usando Critério D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cancel{(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Logo, série de módulos converge $\Rightarrow$ série original converge absolutamente

5° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\frac{1}{3}}}$ 4

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$$

$$\lim \frac{\frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{5/3}}} = \lim \frac{n^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}}{n^2+1} = \lim \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

$\Rightarrow$ Série original é da mesma natureza do que série harmónica $\sum \frac{1}{n^{5/3}}$ - convergente

6° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)}{n^{5/2}+7n+3}$ - série de termo qualquer

Série de módulos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(2n-1)|}{n^{5/2}+7n+3}$

Pelo critério de comparação:

$$\frac{|\cos(2n-1)|}{n^{5/2}-7n+3} \leq \frac{1}{n^{5/2}+7n+3} \leq \frac{1}{n^{5/2}}$$

Série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ - converge (harmónica de ordem $\frac{5}{2} > 1$)

$\Rightarrow$ Série original converge absolutamente

7º $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

Série de módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}\right]^{n}$$

Critério de Cauchy (raiz):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}\right]^{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2-2}{n+2}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{n+2}}_{\to e^{-2}} \underbrace{\left(\frac{n}{n+2}\right)^{-2}}_{\to 1}$$

$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$$

Logo, série converge absolutamente.