Exemplo 1.2.27. O nosso objectivo será fazer a dedução de

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras} \qquad \text{Tom é um gato}}{\text{Tom tem garras}}$$

1.3 Formas Normais

Definição 1.3.1. Na lógica de 1ª ordem, uma fórmula φ é dita um **literal** se for um átomo ou uma negação de um átomo.

- φ está na FNC se $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$, onde cada $\varphi_i = \bigvee_{j \in J} L_j$ e cada L_j é um literal;

Definição 1.3.2. Uma fórmula da forma $Qx_1 \cdots Qx_n\ \varphi$, onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **forma normal prenex** (**FNP**).

Nota 1.3.3. Relativamente a uma fórmula $Qx_1 \cdots Qx_n\, \varphi$ na FNP, é comum designamos a parte inicial («$Qx_1 \cdots Qx_n$») por **prefixo** e «φ» por **matriz** da fórmula.

É agora absolutamente legítimo perguntarmos de que forma podemos obter/transformar uma dada fórmula na sua FNP.

- Mover as negações («¬») para o interior das fórmulas:

$$\boxed{\neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\ \neg\varphi} \quad \text{e} \quad \boxed{\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\ \neg\varphi}$$

- Mover os quantificadores para o exterior das fórmulas:
  - $(\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi) \equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi)$;
  - $(\exists x\ \varphi) \vee (\exists x\ \psi) \equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi)$;
  - supondo que ψ não contém a variável x:

$$(\forall x\ \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi), \qquad (\exists x\ \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\ (\varphi \wedge \psi),$$
$$(\forall x\ \varphi) \vee \psi \equiv \forall x\ (\varphi \vee \psi), \qquad (\exists x\ \varphi) \vee \psi \equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi).$$

Exemplo 1.3.4. Vamos transformar a fórmula $(\forall x \; P(x)) \to (\exists x \; Q(x))$ para a forma normal prenex.

Exemplo 1.3.5. Vamos transformar a fórmula

$$\forall x \, \forall y \, (\exists z (P(x,z) \wedge P(y,z))) \to (\exists u \, Q(x,y,u))$$

para a forma normal prenex.

Folha 1

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y \, \exists x \; (\; (\; q(x) \to p(y) \;) \; \vee \; (\; p(y) \wedge q(x) \;) \;) \; .$$

Sumário 5

- Forma normal de Skolem.
- Substituição.

Folha 1

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

a) $(\forall x\, S(x)) \to (\exists z\, P(z))$;

b) $\neg(\forall x\, (S(x) \to P(x)))$;

c) $\forall x\, (P(x) \to (\exists y\, Q(x, y)))$;

d) $\exists x\, (\neg(\exists y\, P(x, y)) \to (\exists z\, (Q(z) \to R(x))))$;

e) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$.

Forma Normal de Skolem e Eliminação dos Quantificadores «$\exists$»

Definição 1.3.7. Uma fórmula diz-se na **forma normal de Skolem** (**FNS**) se for uma FNP, estando a matriz na FNC e sendo o prefixo composto apenas por quantificadores universais («$\forall$»).

Exemplo 1.3.10. Vamos aplicar o procedimento descrito anteriormente por forma a obter a FNS da fórmula

$$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists u\ \forall v\ \exists w\ P(x, y, z, u, v, w).$$

Exemplo 1.3.11. Vamos obter a FNS da fórmula

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z)).$$

Nota 1.3.9. As funções e constantes utilizadas para substituição das variáveis existentes (no procedimento acima) são ditas **funções de Skolem**.

- no caso $\exists x_1 \; Q_2 x_2 \; \cdots Q_n x_n \; \varphi$:
  1. escolhemos um novo símbolo de constante (digamos c);
  2. substituimos todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \; \cdots \; Q_n x_n \; \varphi$ por c;
  3. eliminamos $\exists x_1$ do prefixo.
- no caso $\forall x_1 \; \cdots \; \forall x_{k-1} \; \exists x_k \; Q_{k+1} x_{k+1} \; \cdots \; Q_n x_n \; \varphi \; (k > 1)$:
  1. escolhemos um novo símbolo de função (digamos f) de aridade $k-1$;
  2. substituimos todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \; \cdots \; Q_n x_n \; \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$;
  3. eliminamos $\exists x_k$ do prefixo.

Folha 1

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

a) $\neg((\forall x\, P(x)) \to (\exists y\, P(y)))$

b) $\neg((\forall x\, P(x)) \to (\exists y\, \forall z\, Q(y,z)))$

c) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

1.4 Unificação

Substituições

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Term} \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] & \mathrm{Term} \\
\mathrm{Vars} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.4.6. Consideremos o termo $t = s(x, f(y, u), h(x, z))$ e a substituição

$$\theta = \{f(x, z)/x, g(y, f(x, y))/y, h(x, y)/z, v/u\}.$$

Exemplo 1.4.7. Vamos considerar as fórmulas $E_1 = F(x, y, g(z))$ e $E_2 = P(h(x), z, f(y))$ e a substituição $\theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}$.

Folha 1

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;

b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

Definição 1.4.8. Consideremos duas substituições $\sigma, \theta\colon \mathrm{Vars} \to \mathrm{Term}$. Então, a **composta** de θ após σ é a função $\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma$.

Exemplo 1.4.10. $\theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}$

$$\sigma = \{a/x, g(x)/y, y/z\}$$

Sumário 6

- Unificação.
- Unificador mais geral.
- As regras da dedução: Resolvente binária e Fator. Exemplos.
- O algoritmo de resolução

Unificadores

Definição 1.4.14. Consideremos $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição $\sigma\colon \mathrm{Vars} \to \mathrm{Term}$ diz-se um **unificador** de $\mathcal{E}$ quando, para todas as expressões $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$, se tiver $E_1\sigma = \cdots = E_n\sigma$.
Adicionalmente, dizemos que o conjunto $\mathcal{E}$ de expressões é **unificável** quando existir um tal unificador.

Exemplo 1.4.15.

- $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(a)\}$ é unificável, com $\sigma = \{a/x\}$;
- $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$ não é unificável;
- $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$ é unificável, com $\sigma = \{f(z)/x\}$;
- $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(x))\}$ não é unificável;
- $\mathcal{E} = \{Q(a, y), Q(x, f(b))\}$ é unificável, com $\sigma = \{a/x, f(b)/y\}$.

Definição 1.4.16. Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões. Um unificador σ de $\mathcal{E}$ é dito **unificador mais geral** (**u.m.g.**) de $\mathcal{E}$ quando, para cada unificador θ de $\mathcal{E}$, existir uma substituição λ tal que

$$\theta = \lambda \vartriangle \sigma,$$

ou seja, que cada unificador de $\mathcal{E}$ se pode descrever como a composição de uma substituição com o unificador mais geral.

Definição 1.4.17. O **conjunto das diferenças**, $\mathcal{D}$, de um conjunto de expressões não vazio, $\mathcal{E}$, obtém-se determinando o primeiro símbolo (a contar da esquerda), no qual nem todas as expressões de $\mathcal{E}$ têm exactamente os mesmos símbolos, extraindo a sub-expressão que começa com o símbolo em causa e ocupa essa posição.

Exemplo 1.4.18. $\mathcal{E} = \{P(a), P(x)\}$ $\quad \mathcal{D} = \{a, x\}$

Algoritmo: Determinação do u.m.g. de um conjunto $\mathcal{E}$ (**Robinson**, 1965).

Entrada: conjunto (finito) de expressões $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$;

Resultado: u.m.g. σ_k de $\mathcal{E}$ (caso exista);

$k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ e $\sigma_0 = \varepsilon$;

repetir até retornar algo

  se $|\mathcal{E}_k| = 1$ **então**

    retorna σ_k;

  fim

  determinar o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das diferenças de $\mathcal{E}_k$;

  se existir $p \in \text{Vars}$ e $t \in \text{Term}$ tal que $\{p, t\} \subseteq \mathcal{D}_k$ e p não ocorra em t **então**

    $\sigma_{k+1} = (t/p) \vartriangle \sigma_k$;

    $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k(t/p)$;

    $k = k + 1$;

  senão

    retorna «$\mathcal{E}$ não é unificável»;

  fim

Exemplo 1.4.19. Vamos considerar $\mathcal{E} = \{P(y,z), P(x,h(y)), P(a,h(a))\}$, onde x, y, z são variáveis, a é um símbolo de constante, h é um símbolo de função unária e P é um símbolo de predicado binário. Apliquemos então o algoritmo de Robinson para encontrar (caso exista) um u.m.g. para $\mathcal{E}$.

Exemplo 1.4.20. Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x),z), P(x,h(y)), P(a,h(a))\}$, onde x, y, z são variáveis, a é um símbolo de constante, h é um símbolo de função unária e P é um símbolo de predicado binário. Vamos aplicar o alg. de Robinson para encontrar (caso exista) um u.m.g. para $\mathcal{E}$.

Folha 1

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que «a» e «b» denotam constantes.

a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;

b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$;

c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;

d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$;

e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$;

f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$;

g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$.

1.5 Método da Resolução de Robinson

Definição 1.5.1. Se literais φ e ψ de uma cláusula $C = \varphi \vee \psi \vee \theta \vee \dots$ admitirem um u.m.g. σ, então $(\psi \vee \theta \vee \dots)\sigma$ será dito um **factor** de C.

Exemplo 1.5.2. $C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x)$

Definição 1.5.3. Sejam $C_1 = \neg\psi \vee \theta \vee \dots$ e $C_2 = \varphi \vee \gamma \vee \dots$ cláusulas sem variáveis em comum. Se ψ e φ admitirem um u.m.g. σ, então a cláusula

$$(\theta \vee \dots \vee \gamma \vee \dots)\sigma$$

é dita uma **resolvente binária** de C_1 e C_2.

Exemplo 1.5.4. $C_1 = P(x) \vee Q(x) \qquad C_2 = \neg P(a) \vee R(x)$

Definição 1.5.5. Uma **resolvente** de duas cláusulas C_1 e C_2 é uma resolvente binária de (um factor de) C_1 e de (um factor de) C_2.

Exemplo 1.5.6.

$$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$$

$$C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$$

Sumário 7

- O algoritmo de resolução: resolução de exercícios.
- Princípio da Gaiola de Pombos e princípio de Dirichlet.
- Generalização do Princípio da Gaiola de Pombos.

Método de Resolução

Recordemos que verificar $\Gamma \models \psi$, é o mesmo que mostrar que $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente.

- transformar todas as fórmulas na FNS
- «ignorar» os quantificadores $\forall$
- renomear as variáveis em cada cláusula por forma a torná-las distintas
- aplicar sucessivamente as duas regras

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \qquad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\ \text{u.m.g.}(\varphi, \psi)}\ \text{(BR)}$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\ \text{u.m.g.}(\varphi, \psi)}\ \text{(Fator)}$$

Exemplo 1.5.8

- Ninguém que realmente aprecia Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar);
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música;
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar);
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam Beethoven.

Folha 1

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

F1: $\forall x\,(G(x) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow L(x,y)))$

F2: $\exists x\, G(x)$

F3: $\exists x\, \forall y\,(P(y) \rightarrow L(x,y))$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

Capítulo 2

Princípios de Enumeração Combinatória

2.2 O Princípio da Gaiola dos Pombos

O princípio da gaiola dos pombos

se tivermos n pombos para distribuir por m gaiolas, com $n > m$, haverá pelo menos uma gaiola com dois pombos.

De uma maneira matematicamente mais formal, podemos traduzir a ideia da seguinte forma: considerando um conjunto A e $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma família de subconjuntos de A (dois-a-dois distinta), com $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, se $|A| > m$, então $|A_i| > 1$, para algum $1 \leq i \leq m$.

Outra formulação possível prende-se com o conceito de injectividade de uma função: considerems A, B dois conjuntos e $f\colon A \to B$ uma função; se $|A| > |B|$, então f não poderá ser injectiva (neste caso, a contraposição é mais óbvia: se $f\colon A \to B$ é injectiva, então $|A| \leq |B|$).

Exemplo 2.2.2. Consideremos uma sala com 13 pessoas. Então existirão, pelo menos, duas pessoas a fazer anos no mesmo mês.

Exemplo 2.2.3. Consideremos 50 pessoas numa sala de $7m \times 7m$. Então, haverá duas pessoas que estão a uma distância inferior a $1.5m$.

Folha 2

2. Mostre que num conjunto de cinco números inteiros positivos (arbitrários), existem pelo menos dois com o mesmo valor para o resto da divisão por 4.

princípio de Dirichlet

Teorema 2.2.4. *Para todos os* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, *existem números inteiros* p *e* q *com* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$.

Exemplo 2.2.5. Vamos agora mostrar que, dado um subconjunto de $\{1, \ldots, 2n\}$ com $n+1$ elementos, existirão pelo menos dois elementos distintos x, y nesse subconjunto tais que $x \mid y$ («x divide y») ou $y \mid x$ («y divide x»).

Exemplo 2.2.6. Num torneio em que participam $n \geq 2$ equipas de futebol, todas as equipas jogam uma vez umas com as outras. Vamos mostrar que em cada jornada, pelo menos duas equipas realizaram o mesmo número de jogos até esta jornada.

Sumário 8

- Generalização do Princípio da Gaiola de Pombos.
- O princípio da bijecção.
- O príncipio da adição e o princípio da multiplicação.
- O príncipio da multiplicação generalizada.

Generalização

se temos mais do que mk pombos e m gaiolas, então haverá uma gaiola a ter, no mínimo, $k+1$ pombos

De uma maneira matematicamente mais formal, podemos traduzir a ideia da seguinte forma: considerando um conjunto A e $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ uma famĺia de subconjuntos de A (dois-a-dois disjuntos), com $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$; se $km < |A|$, então $|A_i| > k$, para algum $1 \leq i \leq m$.

Folha 2

1. A familia Ferreira tem 13 filhos, para além de dois progenitores. Recorrendo ao princípio da gaiola dos pombos responda às seguintes questões:

   a) Quantas pessoas desta família pode garantir que:

      i. Nasceram no mesmo mês?

      ii. Nasceram no mesmo dia da semana?

   b) No próximo sábado, os Ferreira vão dar uma festa para a qual os filhos podem convidar os seus amigos mais próximos. Quantos amigos vão ser convidados por forma a garantir que pelo menos 3 dos convidados são amigos do mesmo filho dos Ferreira?

3. Mostre que escolhendo cinco números inteiros (distintos) entre 1 e 8, dois deles têm soma igual a 9.

7. Durante o mês de Janeiro, o João bebeu 42 cafés. Dado que o João bebe pelo menos um café por dia, mostre que num certo número de dias consecutivos o João bebeu exatamente 17 cafés.

2.3 O Princípio da Bijecção

O **princípio da bijecção** é outra das importantes ferramentas da combinatória que nos auxilia na contagem de elementos. Este diz-nos basicamente que se A e B são conjuntos finitos e se existe uma função bijectiva $f\colon A \to B$, então $|A| = |B|$. Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo 2.3.1. Existe uma bijecção entre o conjunto C dos números naturais com 4 algarismos em $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ e o conjunto A^4. De facto, se pensarmos na função $f\colon A^4 \to C$ que a cada quádruplo (a_1, a_2, a_3, a_4) faz corresponder $a_1 10^3 + a_2 10^2 + a_3 10 + a_4$, obtemos a bijecção pretendida.

Exemplo 2.3.2. Vamos determinar o número de subconjuntos de $X = \{1, \ldots, n\}$. Se considerarmos $\mathcal{P}(X)$ como o conjunto dos subconjuntos de X e $\mathbb{B}^n$ como o conjunto das sequências binárias de comprimento n, conseguimos ver que a função

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathbb{B}^n \\ A &\longmapsto f(A) = x_1 \ldots x_n, \quad \text{onde} \quad x_i = \begin{cases} 1, & i \in A, \\ 0, & i \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

é uma bijecção.

Exemplo 2.3.3. Consideremos $k, n \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$. Vamos tentar determinar quantos são os números inferiores a 10^n de tal forma que a soma dos seus algarismos seja igual a k.

2.4 Os Princípios da Adição e Multiplicação

O **princípio da adição** diz-nos que, para $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos dois-a-dois disjuntos (i.e., tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, quando $i \neq j$), temos

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Por outro lado, o **princípio da multiplicação** diz-nos que, para $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos, a cadinalidade do produto entre estes é igual ao produto das cardinalidades de todos, i.e.,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

Exemplo 2.4.2.

- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?

- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se podem escrever com os dígitos $0, \ldots, 9$ e que são divisíveis por 5?

Exemplo 2.4.4. Vamos calcular quantos números existem com 4 algarismos distintos.

Exemplo 2.4.5. Vamos calcular quantos números existem com 4 algarismos distintos em 1, ..., 9, um deles igual a 5.

23. São conhecidos os seguintes factos:

- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;

Folha 1

- Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
- Para todos e quaisquer x, y e z, se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z, então x é mais rápido do que z.
- Roger é um coelho;
- Harry é um cavalo.

a) Usando os predicados

- Cavalo(x) representa «x é um cavalo»;
- Galgo(x) representa «x é um galgo»;
- Coelho(x) representa «x é um coelho»;
- MaisRápido(x, y) representa «x é mais rápido do que y»;

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

Sumário 9

- O príncipio da adição e o princípio da multiplicação.
- O príncipio da multiplicação generalizada.
- O princípio de inclusão-exclusão

- MT1

Folha 2

8. Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = 2$ e $|B| = 3$.

   a) Quantas funções podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B? Se $|A|=3$ e $|B| = 2$, qual seria a resposta à pergunta anterior? Indique o princípio combinatório utilizado.

   a) Quantas funções injectivas podemos definir com conjunto de partida A e conjunto de chegada B?

13. Qual é o número de palavras com k carateres que se podem formar considerando um alfabeto de n letras,

a) sem qualquer restrição.

b) não podendo existir duas letras consecutivas repetidas.

c) e que sejam palíndromos (i.e., palavras cujos elementos equidistantes dos extremos são iguais; por exemplo: ana, rever, ertutre).

14. Quantos números entre 1000 e 9999 se podem formar:

a) contendo o dígito 1.

b) com todos os dígitos distintos e contendo os dígitos 1 e 2 em posições adjacentes com o 1 a preceder o 2.

c) com dígitos ímpares a ocupar as posições ímpares (onde a primeira posição corresponde às unidades) e dígitos pares a ocupar posições pares.

o princípio da inclusão-exclusão

Teorema 2.4.6 (Inclusão-Exclusão)**.** *Dados conjuntos finitos arbitrários* $A_1, \ldots, A_n$ *(não necessariamente dois-a-dois disjuntos) temos que*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_k\leq n} |A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|\right).$$

Exemplo 2.4.7. Vamos determinar o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Folha 2

10. Qual o número de números naturais não superiores a 1000 que não são divisíveis por 4, nem por 6, nem por 9?

12. Num universo de 200 estudantes, 50 estudam Matemática, 140 estudam Economia e 24 estudam ambos os cursos. Dos 200 estudantes, 60 são mulheres, das quais 20 estudam Matemática, 45 estudam Economia e 16 delas estudam ambos os cursos. Determine, para o universo de estudantes considerado, quantos homens é que não estudam nem Matemática nem Economia.

Sumário 10

Agrupamentos e Identidades Combinatórias (Capítulo 3)

- Arranjos com repetição
- Arranjos sem repetição
- Combinações sem repetição
- Algumas propriedades do binomial

Capítulo 3

Agrupamentos e Identidades Combinatórias

3.1 Permutações e Arranjos

Definição 3.1.1. Um **arranjo com repetição** de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem, ou seja, uma função do tipo

$$f\colon \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}.$$

É usual denotarmos o número de arranjos com repetição de n elementos k a k por $A^r(n, k)$.

$$\boxed{A^r(n, k) = \underbrace{n \times \cdots \times n}_{k\text{vezes}} = n^k.}$$

Exemplo 3.1.3. Suponhamos que fazemos a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário» a 6 pessoas. O número de respostas possível, de acordo com o conceito que acabámos de definir, é dado por $\cdots$

Exemplo 3.1.4. Suponhamos que se encontra ao nosso dispor um número ilimitado de bolas vermelhas, azuis e verdes. Sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, de qual será o número de sequências que podemos formar com 5?

Definição 3.1.5. Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependendo da ordem, ou seja, é uma função injectiva do tipo

$$f\colon \{1,\ldots,k\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\}.$$

Aqui, denotaremos o número de arranjos sem repetição de n elementos k a k por $A^s(n,k)$.

$$\boxed{A^s(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

Exemplo 3.1.7. De acordo com o conceito agora introduzido, torna-se extremamente fácil calcular o número de formas distintas de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas num banco corrido. De facto, a resposta será $A^s(n, k)$.

Exemplo 3.1.8. Vamos calcular o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal forma que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro.

Exemplo 3.1.9. Vamos calcular a soma de todos os números obtidos por permutações dos dígitos 23456789.

3.2 Combinações

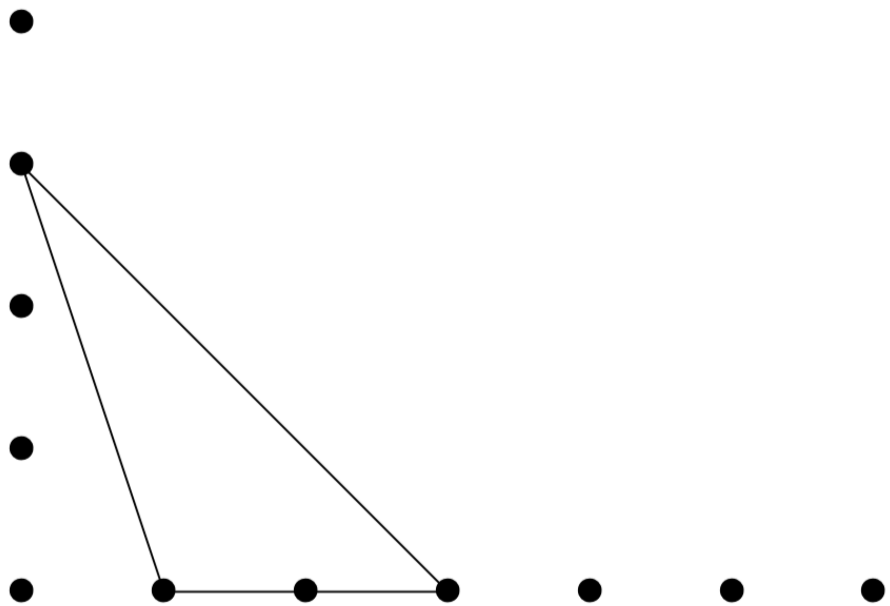
Definição 3.2.1. Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de n elementos k a k é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos. Denotarmos o número de combinações simples de n elementos k a k por $\binom{n}{k}$.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{A^s(n,k)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

Exemplo 3.2.4. Sabendo que existem apenas 6 tipos diferentes de bilhetes da lotaria, podemos pensar em quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes diferentes.

Exemplo 3.2.5. Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas conseguimos formar com, pelo menos, 3 rapazes?

Exemplo 3.2.6. Vamos considerar o conjunto dos triângulos (com ângulos não nulos) cujos vértices são os pontos mostrados na figura abaixo.



Podemos perguntar qual será o tamanho de um tal conjunto de triângulos?

Exemplo 3.2.7. Para um truque de magia, pedimos a um colega que tire três cartas de um baralho clássico com 52 cartas. Como sabemos, o número de maneiras distintas que de obter essas três cartas é dado por $\cdots$

Alterando ligeiramente o truque, pedimos agora que o colega retire 3 cartas, mas que a primeira não seja do naipe ♠

Quantos conjuntos distintos de 3 cartas podemos agora ter?

Exemplo 3.2.8. Suponhamos um conjunto X de tal forma que $|X| = x$. Se adicionarmos 8 elementos a X, as possibilidades de escolha de 2 elementos de X aumentam em 11 vezes. Quantos elementos tem X?

Folha 3

2. Considere uma grelha $n \times n$ onde A é o ponto $(0,0)$ e B é o ponto (n,n).

   a) Determine o número de caminhos mais curto, sobre a grelha, entre A e B;

   [**Sugestão:** determine uma bijeção entre o conjunto dos caminhos mais curtos entre A e B e as sequências binárias com n zeros e n uns.]

   b) Suponha que $n = 5$ e determine o número de caminhos mais curtos, sobre a grelha, entre A e B, que passam pelo ponto $(3,2)$.

Matemática Discreta

Teste $N^0 1$ de Matemática Discreta 26 de Abril de 2019

Responda de forma cuidada e justificadamente a cada uma das questões.

Tempo para a realização desta prova: 2 horas.

2- Na tribo do Sol, os mais poderosos nascem com um sinal na pele com a forma de um quarto crescente e sabe-se que esta é uma característica hereditária. Considere os seguintes predicados: $Q(x)$- "x tem o sinal em forma de quarto crescente",
$P(x, y)$ - "x é pai de y",

*(1)***a)** Escreva uma formula em linguagem de primeira ordem que descreve a característica de hereditariedade acima referida;

*(2)***b)** Sabendo que o grande chefe Xu tem um sinal de quarto crescente e o feiticeiro Pi é neto do grande chefe Xu, use o principio da resolução para mostrar que o feiticeiro Pi tem um sinal de quarto crescente.

Revisão: Princípio de resolução

Sumário 11

- O triângulo de Pascal
- A fórmula binomial de Newton
- Combinações com repetição

Teorema 3.2.9. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$. Então:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $\qquad$ *(supondo $n, k > 0$);*

3. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Teorema 3.2.11. *Consideremos* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$. *Então,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

De forma mais genérica, para todos os $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Esta última é a conhecida ***fórmula binomial de Newton****. O elemento* $\binom{n}{k}$ *(número de combinações de* n *elementos* k *a* k*) é ainda dito* ***coeficiente binomial****.*

Exemplo 3.2.14. Utilizando o Teorema Binomial, vamos mostrar que, se $n \in \mathbb{N}$, então $6^n - 5n \equiv 1 \pmod{25}$, ou seja, $6^n - 5n = 1 + 25k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

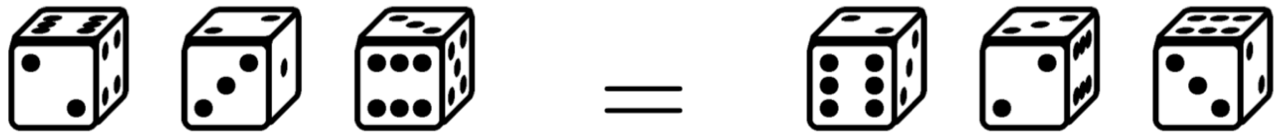
Definição 3.2.22. Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu\colon X \to \mathbb{N}$.

Definição 3.2.24. Uma **combinação com repetição** de n elementos k a k é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos. O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Teorema 3.2.25. *O número de combinações com repetição de $n > 0$ elementos k a k é igual ao número de soluções em $\mathbb{N}$ da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$. Portanto,*

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

Exemplo 3.2.27. Consideremos a contagem de alguns lançamentos de três dados cúbicos (regulares). Aqui, dois resultados serão ditos iguais se, independentemente da ordem, os dados mostrarem as mesmas faces, i.e.,



Quantos resultados diferentes existem?

Exemplo 3.2.28. Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Folha 3

3. Qual o número de possibilidades de se distribuírem 8 presentes por 5 crianças, em cada uma das seguintes condições:

   a) os presentes são todos iguais,

   b) os presentes são todos distintos.