Universidade de Aveiro

Departamento de Matemática

Uma Introdução

às

Séries de Fourier

Adelaide Valente Freitas
Tatiana Tchemisova Cordeiro

Conteúdo

Nota introdutória

A análise de Fourier, em geral, e as séries de Fourier, em particular, fornecem um instrumento matemático com várias aplicações nas Engenharias, na Física e na Física Matemática, sendo utilizados na análise de sistemas físicos, electrónicos ou outros, sujeitos a perturbações periódicas. Em termos físicos, as perturbações que, em muitas situações, afectam esses sistemas não são mais do que combinações de ondas sinusoidais. Para o estudo de tais sistemas, torna-se importante estabelecer representações de funções à custa de senos e co-senos, ou seja, expressar essas funções através das suas *séries de Fourier*.

Nos anos lectivos 2001/02 e 2002/03 elaborámos um texto teórico, para apoio às aulas da disciplina de Cálculo II da Universidade de Aveiro, onde se expunha uma primeira abordagem às séries de Fourier que nos parecia apropriada para um 1º ano dos cursos de Licenciaturas em Ciências e Engenharias: Introduzíamos os conceitos básicos associados às séries de Fourier e enunciávamos uma condição suficiente para a existência de representação de uma função por uma série de Fourier, indicando como determinar essa representação.

Esse texto surge agora renovado e complementado com exemplos, ilustrações gráficas e exercícios (propostos e resolvidos, sendo alguns deles retirados de provas de avaliação). Introduzimos mais definições básicas, a forma exponencial das séries de Fourier, uma referência a aplicações na Física Matemática (Apêndice A) e uma breve resenha histórica das séries de Fourier (Apêndice B).

Comentários ou sugestões ao presente texto são sempre bem-vindos e poderão ser dirigidos, via email, para adelaide@mat.ua.pt ou tatiana@mat.ua.pt.

Outubro de 2005

Adelaide Valente Freitas
Tatiana Tchemisova Cordeiro

1 Introdução

1.1 Sistema trigonométrico

Comecemos por relembrar alguns conceitos importantes associados à paridade e periodicidade de uma função.

Definição 1.1 (função par e função ímpar)**.** *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função real de variável real.*
Diz-se que f *é uma função par se*

$$f(x) = f(-x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diz-se que f *é uma função ímpar se*

$$f(x) = -f(-x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.2 (função periódica)**.** *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função real de variável real. Diz-se que* f *é uma função periódica se existe um número real* $T \neq 0$ *tal que*

$$f(x + T) = f(x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Observação 1.1. *Se um dado número real* T *satisfaz (1) então, qualquer número da forma* kT*, com* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*, também satisfaz (1).*

Definição 1.3 (período)**.** *Ao menor valor positivo de* T*, caso exista, para o qual* $f(x + T) = f(x)$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *, chamamos período da função* f*.*

No caso do domínio de f ser $D \subset \mathbb{R}$, falaremos de paridade ou periodicidade de f dependendo da paridade e periodicidade da função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)\ ,\ \forall x \in D, \qquad \text{e} \qquad h(x) = 0\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash D. \tag{2}$$

Diz-se que h é uma extensão de f.

Definição 1.4 (extensão de uma função)**.** *Diz-se que a função* $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma extensão da função* $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *em* D *se* $D_f \subseteq D$ *e* $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D_f$*.*

Diremos que $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função par (ímpar) em D_f se a extensão h de f em $\mathbb{R}$, dada por (2), é uma função par (ímpar, respectivamente). Na Figura 1 estão representados os gráficos de uma função par e de uma função ímpar em $[-a, a]$. E, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica de período T em D se a extensão h, dada por (2), é uma função periódica de período T. Na Figura 2 está representado o gráfico de uma função periódica de período $T = 2l$.

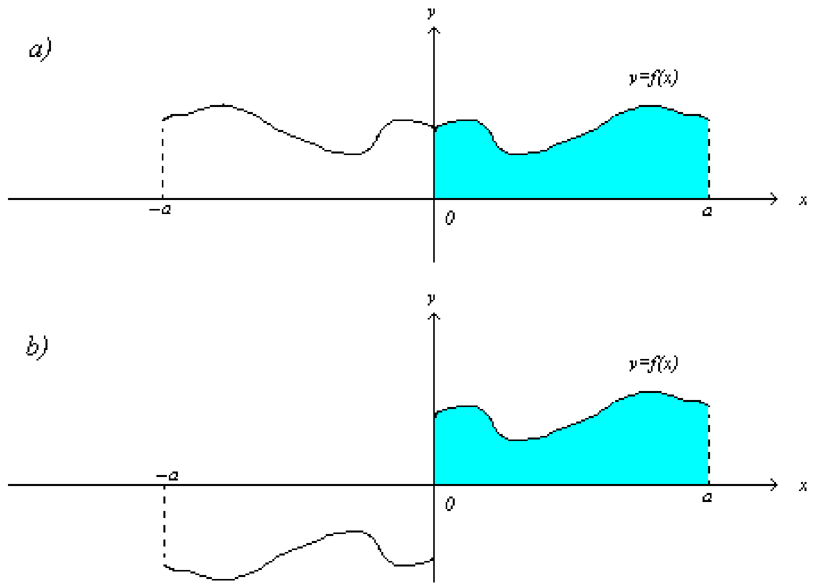

Figura 1: Exemplos de uma função par (gráfico *a)*) e de uma função ímpar (gráfico *b)*) no intervalo $[-a, a]$. A sombreado está a área sob a curva de equação $y = f(x)$, acima do eixo OX e para $x \in [0, a]$, a qual corresponde ao valor de $\int_0^a f(x)dx$.

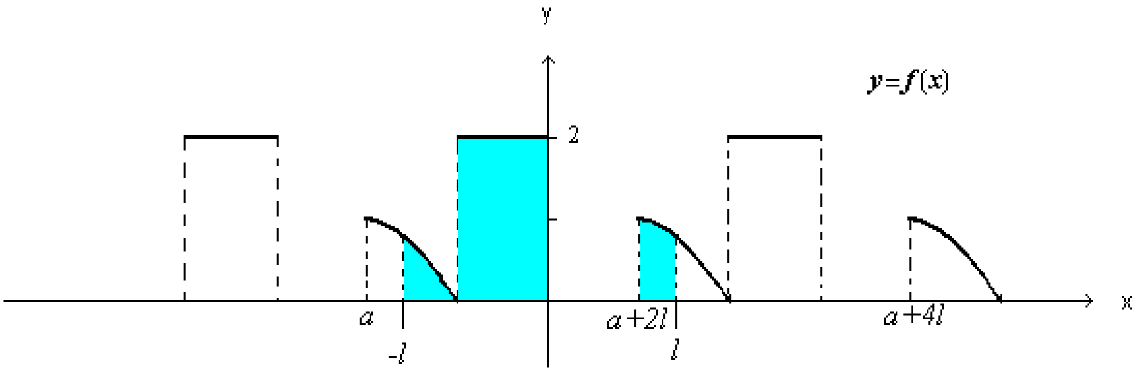

Figura 2: Exemplo de uma função periódica de período $2l$. A sombreado está a área sob a curva de equação $y = f(x)$, acima do eixo OX e para $x \in [-l, l]$. Esta área corresponde ao valor de $\int_{-l}^{l} f(x)dx$. Essa área coincide com a área sob a mesma curva, acima do eixo OX e para $x \in [a, a+2l]$, correspondente ao valor de $\int_a^{a+2l} f(x)dx$.

Exemplo 1.1. *As funções*

$$\begin{array}{rccl} f_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x)=\sin(nx) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccl} g_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g_n(x)=\cos(nx) \end{array},$$

com $n \in \mathbb{N}$, são funções periódicas de período $T = 2\pi$ pois

$$\begin{aligned} f_n(x+2\pi) &= \sin(n(x+2\pi)) = \sin(nx+2\pi n) = \sin(nx) \\ &= f_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g_n(x+2\pi) &= \cos(n(x+2\pi)) = \cos(nx+2\pi n) = \cos(nx) \\ &= g_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n é uma função ímpar e g_n é uma função par (verifique).

■

Exercício 1.1. *Mostre que, para qualquer $l > 0$, as funções*

$$\begin{array}{rccl} p_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & p_n(x)=\sin(\frac{n\pi x}{l}) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccl} q_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & q_n(x)=\cos(\frac{n\pi x}{l}) \end{array},$$

com $n \in \mathbb{N}$, são funções periódicas e indique o seu período.

Definição 1.5 (sistema trigonométrico)**.** *O conjunto infinito de funções*[1]

$$1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x), \cdots, \cos(nx), \sin(nx), \cdots \tag{3}$$

é chamado sistema trigonométrico.

Todas as funções do sistema trigonométrico (3) estão definidas em $\mathbb{R}$ e são periódicas de período 2π.

[1]No presente texto, sempre que tal não implicar ambiguidade, poderemos designar uma dada função f por $f(x)$, designação da imagem de x por f. É o caso das funções indicadas em (3). Correctamente deveríamos escrever:

$$g_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n, \ldots\ ,$$

onde f_n e g_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, designam as funções definidas no Exemplo 1.1.

Definição 1.6 (sistema ortogonal)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$. Um conjunto (finito ou infinito) de funções, $h_1, h_2, h_3, \ldots$, não nulas e integráveis em (a,b)*[2]*, diz-se constituir um sistema ortogonal*[3] *no intervalo (a,b) se*

$$\int_a^b h_i(x)h_j(x)dx = 0 \ , \quad \text{para todo } i,j = 1,2,3,\ldots, \ \text{com } i \neq j. \tag{4}$$

Teorema 1.1 (ortogonalidade do sistema trigonométrico)**.** *O sistema trigonométrico (3) é um sistema ortogonal no intervalo $[-\pi, \pi]$.*

Antes de passarmos à demonstração do Teorema 1.1 relembremos alguns resultados úteis no cálculo de integrais definidos envolvendo funções trigonométricas.

Lema 1.1. *Para todo o inteiro $k \neq 0$, é satisfeito*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = 0 \qquad e \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx = 0.$$

Demonstração. Sendo k um número inteiro qualquer diferente de zero, tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k}\left(\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right) = \frac{1}{k}(0-0) = 0$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)dx = \left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k}\left(\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)\right) = -\frac{1}{k}\left(\cos(k\pi) - \cos(k\pi)\right) = 0.$$

c.q.d.

Das Figuras 1 e 2, através das áreas, resulta intuitivo os dois seguintes lemas.

---

[2] O símbolo (a,b) denota qualquer um dos intervalos $[a,b],]a,b[, \ ]a,b]$ ou $[a,b[$, para qualquer concretização $a, b \in \mathbb{R}$.

[3] O espaço $\mathcal{F}$ das funções integráveis em (a,b), $a < b$, pode ser munido de um produto interno definido por

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx \ , \ \forall f, g \in \mathcal{F}$$

Daí a razão da ortogonalidade das funções h_i, h_j, $i \neq j$ ser definida por (4).

Lema 1.2. *Se f é integrável em $[-a,a]$, com $a \in \mathbb{R}^+$ qualquer, então*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & \text{, se } f \text{ é uma função par} \\ \\ 0 & \text{, se } f \text{ é uma função ímpar} \end{cases}.$$

<u>Demonstração</u>. Sob a hipótese de integrabilidade da função f em $[-a,a]$ tem-se

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Efectuando a mudança de variável $x = -t$ no primeiro integral do segundo membro, vem

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)dx &= -\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_a^0 f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Se f é uma função par, então $f(-x) = f(x), \forall x \in [-a,a]$, pelo que de (5) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)dx &= -\int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= 2\int_0^a f(x)dx. \end{aligned}$$

Se f é uma função ímpar, então $f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a,a]$, e de (5) temos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

c.q.d.

Lema 1.3. *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e periódica de período $2l$, com $l > 0$, então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^{a+2l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

Demonstração. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $l > 0$ quaisquer. É fácil verificar que existe pelo menos um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2kl \in [a, a+2l]$ [4]. Assim, para uma função f integrável em $\mathbb{R}$, podemos escrever

$$\int_a^{a+2l} f(x)dx = \int_a^{2kl} f(x)dx + \int_{2kl}^{a+2l} f(x)dx.$$

Efectuando as mudanças de variável $x = t + (2k-1)l$, no primeiro integral, e $x = t + (2k+1)l$, no segundo integral, obtemos

$$\int_a^{a+2l} f(x)dx \quad = \quad \int_{a-(2k-1)l}^{l} f(t+2kl-l)dt + \int_{-l}^{a-(2k-1)l} f(t+2kl+l)dt.$$

Atendendo a que f é uma função periódica de período $2l$ e utilizando as propriedades dos integrais definidos, vem

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2l} f(x)dx &= \int_{a-(2k-1)l}^{l} f(t-l)dt + \int_{-l}^{a-(2k-1)l} f(t+2kl+l-2l)dt \\
&= \int_{a-(2k-1)l}^{l} f(t-l)dt + \int_{-l}^{a-(2k-1)l} f(t-l)dt \\
&= \int_{-l}^{l} f(t-l)dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2l} f(x)dx &= \int_0^{2l} f(x)dx\ , \quad \text{pela mudança de variável } x = t-l \\
&= \int_0^{l} f(x)dx + \int_l^{2l} f(x)dx \\
&= \int_0^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{0} f(t+2l)dt\ , \quad \text{pela mudança de variável } x = t+2l \text{ no } 2^{\text{o}} \text{ integral} \\
&= \int_0^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{0} f(t)dt\ , \quad \text{atendendo à periodicidade da função } f \\
&= \int_{-l}^{l} f(x)dx.
\end{aligned}$$

c.q.d.

Observação 1.2. *A propriedade enunciada no Lema 1.3 indica que o integral de uma função periódica, sobre um intervalo qualquer de amplitude igual ao período da função integranda, tem sempre o mesmo valor.*

[4] k será tal que $\frac{a}{2l} \leq k \leq \frac{a}{2l} + 1$ e, consoante $\frac{a}{2l}$ seja um número inteiro ou não, existirão 2 ou 1 valores inteiros possíveis para k (verifique).

Exercício 1.2. *Construa, para os valores de $x \in [-2\pi, 3\pi]$, o gráfico da função f, periódica de período π, sendo f, no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \ -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \\ \cos x & , \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

Passemos agora à demonstração do Teorema 1.1.

<u>Demonstração</u> [Teorema 1.1]. Pretende-se provar que, para qualquer par de funções distintas, h_i e h_j, do sistema trigonométrico (3), se tem (4) com $a = -\pi$ e $b = \pi$.
Do Lema 1.1, para qualquer natural $n \neq 0$, tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = 0$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = 0.$$

Para quaisquer m e n naturais, com $m \neq n$, é evidente que $m \pm n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Recorrendo às seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\cos\alpha \ \cos\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \ ,$$

$$\sin\alpha \ \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \ ,$$

$$\sin\alpha \ \cos\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}$$

e, pelo Lema 1.1, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)dx\right) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x)dx\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)]\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin((m-n)x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin((m+n)x)dx\right) \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

Resta verificar (4) quando h_i e h_j são funções do sistema trigonométrico, distintas mas com o mesmo argumento (*i.e.*, $h_i(x) = \sin(nx)$ e $h_j(x) = \cos(nx)$). Ora, para n natural, recorrendo à fórmula trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2nx)}{2} dx \\
&= 0\ , \quad \text{atendendo ao Lema 1.2.}
\end{aligned}$$

Do exposto concluímos que o sistema trigonométrico (3) é ortogonal.

c.q.d.

1.2 Séries trigonométricas

Definição 1.7 (série trigonométrica)**.** *Uma série de funções da forma*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{6}$$

é chamada série trigonométrica sendo as constantes a_0, a_n, b_n, com $n = 1, 2, \cdots$, os seus coeficientes.

Observação 1.3. *Uma série de funções na forma*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \sin(nx)\right)$$

é também uma série trigonométrica. A opção de designar o primeiro termo da série (6) por $\frac{a_0}{2}$ e não por a_0 tem a ver com a obtenção de uma fórmula geral para os coeficientes a_n, válida para qualquer $n \geq 0$, como se verá na Secção 2.

Por definição, a convergência da série trigonométrica (6) em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ é determinada pela convergência da sucessão numérica das somas parciais $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$, onde

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2} \ , \tag{7}$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \ , \quad \text{para} \ \ n \geq 1 \ . \tag{8}$$

Ao conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série trigonométrica (6) converge chamamos *domínio de convergência*.
Diremos que a série (6) converge em $D \subseteq \mathbb{R}$ para a função S, chamada *função soma*, se

$$\begin{aligned} S(x) &= \lim_{n\to+\infty} S_n(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \right) \ , \quad \forall x \in D \ , \end{aligned} \tag{9}$$

e escrevemos

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \ .$$

Se, além disso,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = 0 \ , \tag{10}$$

então diremos que a série (6) *converge uniformemente* em D para a função S.

Exemplo 1.2 (termos da sucessão das somas parciais)**.** *Determinemos os três primeiros termos da sucessão das somas parciais da série trigonométrica*

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) \ .$$

O termo geral da sucessão das somas parciais da série dada é igual a

$$S_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) \ , \quad \textit{para } n \geq 1 \ .$$

Os três primeiros termos obtêm-se tomando $n = 0$ e fazendo $n = 1$ e $n = 2$ no termo geral. Concretamente, temos $S_0(x) = 0$, $S_1(x) = \frac{4}{\pi}\cos x$ e $S_2(x) = \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos(3x)$.

■

Exercício 1.3. *Encontre os três primeiros termos da sucessão das somas parciais da série trigonométrica*

$$\frac{\pi+1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\left(\frac{2}{n}\cos(nx)-\sin(nx)\right) .$$

A convergência uniforme é de suma importância para o estabelecimento de algumas propriedades das séries de funções (veja-se, por exemplo, em [6]). Assumindo que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções reais de variável real, definidas no intervalo real $[a,b]$, salientamos as seguintes propriedades das séries de funções uniformemente convergentes.

Propriedade 1. *Se todos os termos de uma série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$*, uniformemente convergente em* $[a,b]$ *para a função* S*, são multiplicados por uma mesma função* g *limitada em* $[a,b]$*, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} g\cdot f_n$ *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para* $g\cdot S$*.*

Propriedade 2. *Se uma série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para a função* f *e se todos os seus termos são funções contínuas em* $[a,b]$*, então a função* f *é também contínua em* $[a,b]$*.*

Propriedade 3. *Se uma série de funções* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para a função* f *e se todos os seus termos são funções contínuas em* $[a,b]$*, então, para todo* $x_0, x\in[a,b]$*, esta série pode ser integrada termo a termo de* x_0 *a* x*; i.e.,*

$$\int_{x_0}^{x}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right]dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\ , \quad \forall x_0, x\in[a,b]\ .$$

Além disso, a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ *será uniformemente convergente em* $[a,b]$*.*

Exemplo 1.3 (séries trigonométricas uniformemente convergentes)**.** *Assumindo que a série (6) converge uniformemente para uma função* f*, expressemos a função*

$$g(x)=\sqrt{\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}{2\pi}}$$

em termos dos coeficientes da série (6).
Por hipótese, f é a função soma de uma série trigonométrica; portanto,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \ . \tag{11}$$

Logo,

$$f^2(x) = \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\Big)\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)\Big) \ ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= \frac{{a_0}^2}{4} + a_0\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + a_0\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2 \cos^2(nx) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1,k\neq n}^{+\infty} a_n a_k \cos(nx)\ \cos(kx) \\
&+ 2\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \cos(nx)\sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1,k\neq n}^{+\infty} a_k b_n \cos(kx)\ \sin(nx)\Big) \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2 \sin^2(nx) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1,k\neq n}^{+\infty} b_n b_k \sin(nx)\ \sin(kx) \ .
\end{aligned}$$

Consequentemente, tendo em conta a propriedade 3 das séries uniformemente convergentes e Lemas 1.1 e 1.2 (à semelhança do que se fez para a demonstração do Teorema 1.1), podemos verificar (verifique!) que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{{a_0}^2}{4}dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Big({a_n}^2\cos^2(nx) + {b_n}^2\sin^2(nx)\Big)dx \\
&= \frac{{a_0}^2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)\pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $g(x) = \sqrt{\frac{{a_0}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2)} \quad .$

■

A série trigonométrica (6) pode ser considerada como uma combinação linear infinita[5] de funções do sistema trigonométrico (3). Notemos que todas as funções deste sistema são periódicas de período 2π. Consequentemente, se a série (6) converge para uma função S, esta função S será também uma função periódica de período 2π. De facto, para todo o ponto x do domínio de convergência da série trigonométrica (6), se tem

$$\begin{aligned} S(x+2\pi) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(k(x+2\pi))+b_k\sin(k(x+2\pi))\Big)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\Big)\right)\\ &= S(x)\,. \end{aligned}$$

Definição 1.8 (desenvolvimento em série trigonométrica)**.** *Diz-se que uma função f admite um desenvolvimento em série trigonométrica em $D\subseteq\mathbb{R}$ se essa série trigonométrica é convergente em D e se a sua soma é igual a $f(x)$, para todo o $x\in D$.*

A Definição 1.8 é análoga à definição de desenvolvimento de uma função em série de potências (série de Taylor[6] ou de Maclaurin[7]) pois em ambas se define a representação de uma função à custa de componentes mais simples: no caso das séries de potências utiliza-se a representação em termos de funções polinomiais, no caso das séries trigonométricas utiliza-se a representação em termos de funções do sistema trigonométrico. Como veremos nas secções seguintes, as séries trigonométricas têm a vantagem de poderem representar funções descontínuas, ao contrário das séries de potências que representam somente funções que admitem derivadas finitas de todas

[5]Sendo E um conjunto constituído por um número infinito de elementos $e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots$, chama-se *combinação linear infinita* dos elementos do conjunto E a toda a expressão da forma $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n+\cdots$, com $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i\in\mathbb{N}$.

[6]**Brook Taylor**(1685-1731)– matemático e físico inglês. Introduziu o cálculo das diferenças finitas, descobriu as séries chamadas hoje em dia pelo seu nome, desenvolveu o teoria da "perspectiva linear"que é o fundamento da geometria projectiva e descritiva, efectuou vários estudos na área das probabilidades, magnetismo e termodinânica, melhorou os métodos de aproximação de raízes de equações algébricas inventando o método de cálculo dos logaritmos.

[7]**Colin Maclaurin**(1698-1746)– matemático escocês. Deixou trabalhos notáveis em álgebra, geometria, cálculo integral e na teoria dos extremos. Dedicou muito do seu tempo à introdução dos fundamentos rigorosos em cálculo. Nos seus trabalhos usou um caso especial das séries de Taylor, que hoje tem o seu nome (série de Maclaurin). O critério do integral relativo à convergência de séries numéricas foi descoberto pelo Maclaurin.

as ordens.

O seguinte resultado garante que se uma função admite um desenvolvimento em série trigonométrica, então essa representação é única.

Teorema 1.2. *Se duas séries trigonométricas convergem uniformemente para a mesma função soma, então os correspondentes coeficientes são iguais.*

Demonstração: A sua demonstração poderá ser encontrada, por exemplo, em [6] (pág. 438).

■

Observação 1.4. *Duas funções são iguais se tiverem a mesma expressão analítica e o mesmo domínio. Se a série trigonométrica (6) converge e tem soma igual a* $S(x)$*, para todo o* $x \in D$*, mas* D *não coincide com o domínio* D_S *de convergência da série (*$D \subset D_S$*), então a representação de* f *em série trigonométrica, pode não ser única. Basta que exista outra série trigonométrica convergente, com outra função soma* S^* *tal que* $S^*(x) = f(x), \forall x \in D$ *(veja-se o Exemplo 2.9).*

2 Séries de Fourier - intervalo principal $[-\pi, \pi[$

2.1 Definição

Dada uma série trigonométrica convergente, o Teorema 1.2 garante a unicidade de representação da sua função soma em série trigonométrica.
Dada uma função qualquer, interessará saber se ela admite desenvolvimento em série trigonométrica e, em caso afirmativo, identificar essa série (nomeadamente, os seus coeficientes). O seguinte resultado estabelece as fórmulas para o cálculo dos coeficientes de uma série trigonométrica assumindo que esta converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ para uma dada função. Essas fórmulas são conhecidas por **fórmulas de Euler-Fourier**[8].

[8]**Leonhard Euler**(1707-1783)– matemático. Nasceu em Basel (Suiça), mas passou a maior parte do tempo da sua carreira em St. Petersburg (Rússia) e em Berlim (Prússia, naquela altura). Publicou cerca de 900 artigos e livros de diferentes áreas (matemática, mecânica física astronomia, filosofia e outras). Ainda hoje a trigonometria e os logaritmos são estudados do mesmo modo que Euler os introduziu. As monografias de Euler são exemplos clássicos de manuais de análise matemática.
Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830)– matemático e físico francês. Na sua obra mais notável,

Teorema 2.1. *Se a série trigonométrica (6),*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ *para uma função* f*, então*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{12}$$

Demonstração. Todos os termos da série trigonométrica (6) são funções contínuas em $[-\pi, \pi]$ e (6) converge uniformemente para uma função f naquele intervalo. Assim, pela Propriedade 2 das séries de funções uniformemente convergentes, a função f é contínua em $[-\pi, \pi]$, logo integrável em $[-\pi, \pi]$. Por outro lado, pela Propriedade 3 das séries de funções uniformemente convergentes, a série (6) pode ser integrada termo a termo em $[-\pi, \pi]$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)\right)dx \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx\right) \\ &= \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + 0\ , \quad \text{atendendo ao Lema 1.1,} \\ &= a_0\pi. \end{aligned}$$

Logo, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, como se pretendia verificar.

Para determinar os coeficientes a_m, $m = 1, 2, \ldots$, multiplicamos todos os termos da série (6) por $\cos(mx)$, onde m é um número natural qualquer. Tome-se $h(x) = \cos(mx)$. Como h é uma função limitada em $[-\pi, \pi]$, a Propriedade 1 das séries de funções uniformemente convergentes garante que a série

$$\frac{a_0}{2}\cos(mx) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(mx)\cos(nx) + b_n \cos(mx)\sin(nx)\right) \tag{13}$$

"Thérie Analytique de la Chaleur"(Teoria Analitica de Calor), demonstrou que a condução do calor em corpos sólidos pode ser expressa utilizando séries e estudou o desenvolvimento de funções em série de senos e co-senos de arcos múltiplos. A generalização de tal procedimento conduziu às chamadas séries de Fourier.

converge uniformemente em $[-\pi,\pi]$ para a função produto $f(x)h(x)$. Logo, pela Propriedade 3 das séries uniformemente convergentes, a série (13) pode ser integrada termo a termo no intervalo $[-\pi,\pi]$, tendo-se

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx &= \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx}_{=0,\text{ pelo Lema 1.1}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx}_{\substack{=0 \text{ para todo o } n\neq m\\ \text{pelo Teorema 1.1,}\\ \text{excepto quando } n=m}} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx}_{=0\text{ , pelo Teorema 1.1}} \right)\\
&= a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(mx)dx\\
&= a_m\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2mx)}{2}dx\ , \quad \text{atendendo à fórmula } \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ,\\
&= \frac{a_m}{2}\left[x+\frac{\sin(2mx)}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}\ , \quad m\neq 0\ ,\\
&= a_m\pi\ ,
\end{aligned}
$$

donde se deduz a fórmula (12) para a_m, com $m = 1, 2, \cdots$.

Para determinar a fórmula para os coeficientes b_m, procedemos de modo semelhante, multiplicando agora todos os termos da série (6) por $\sin(mx)$. Na realidade, para qualquer m natural, por aplicação da Propriedade 3 das séries de funções uniformemente convergentes, podemos deduzir o seguinte

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx\right)\\
&= b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(mx)dx\ , \quad \text{atendendo ao Lema 1.1 e ao Teorema 1.1}\\
&= b_m\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(2mx)}{2}dx\ , \quad \text{atendendo à fórmula } \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\\
&= \frac{b_m}{2}\left[x-\frac{\sin(2mx)}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}\ , \quad m\neq 0\\
&= b_m\pi.
\end{aligned}
$$

Deste modo ficam determinados os coeficientes b_m, $m = 1, 2, \ldots$, estando de acordo com a fórmula dada em (12).

c.q.d.

Definição 2.1 (série de Fourier). *Seja f uma função real integrável em $[-\pi,\pi]$. A série trigonométrica cujos coeficientes são determinados pelas fórmulas de Euler-*

Fourier (12) é chamada série de Fourier da função f e os seus coeficientes por coeficientes de Fourier.

Observação 2.1.

1. *Da Definição 2.1 é evidente que nem toda a série trigonométrica é uma série de Fourier.*

2. *Da Definição 2.1 e do Teorema 2.1 resulta claro que se uma série trigonométrica converge uniformemente para alguma função f, então essa série é necessariamente a série de Fourier da função f.*

3. *Se uma série trigonométrica converge em algum conjunto D, mas não converge uniformemente, então pode acontecer que essa série trigonométrica não seja a série de Fourier de nenhuma função f. Por exemplo, prova-se que a série trigonométrica*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\log(n)}$$
é convergente em $\mathbb{R}$ mas não é a série de Fourier de nenhuma função integrável (consulte-se, por exemplo, [2]).

4. *Uma série trigonométrica divergente pode ser uma série de Fourier para alguma função f. O primeiro exemplo conhecido foi apresentado em 1873 por du Bois-Reymond [9] (veja-se [1]).*
Os casos que consideramos no presente texto serão sempre séries de Fourier convergentes.

Exemplo 2.1 (Série de Fourier da função identidade)**.** *Encontremos a série de Fourier da função $f(x) = x$, para $x \in [-\pi, \pi]$.*
A função f é contínua em $[-\pi, \pi]$, logo, f é integrável em $[-\pi, \pi]$. Para determinar a série de Fourier da função f, calculamos os coeficientes de Fourier utilizando as

[9] **Paul du Bois-Reymond** (1831-1889) – matemático alemão. Autor de trabalhos em cálculo, em particular, em equações diferencias e funções de variável real. Em 1873, após várias tentativas não frutíferas na procura da demonstração da conjectura de Dirichelet, que supunha que cada função contínua com período 2π admite um desenvolvimento em série de Fourier, construiu um exemplo de uma função contínua cuja série de Fourier diverge em cada ponto.

fórmulas (12):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \textit{(porquê?)} \end{aligned}$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{(porquê?).}$$

Assim, a série de Fourier da função f é

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$$

ou, escrita doutro modo,

$$2\left(\sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots\right) .$$

■

Exemplo 2.2 (Série de Fourier da função seno e da função co-seno)**.** *Encontremos a série de Fourier das funções*

$$f(x) = \sin x \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$g(x) = \cos x \ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Começemos pela função f. A função f é integrável em $[-\pi, \pi]$. Das fórmulas de Euler-Fourier (12), do Lema 1.1 e do Teorema 1.1, resultam os seguintes coeficientes da série de Fourier para f:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \ dx = 0 \ , \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos(nx)dx = 0 \ , \quad n \geq 1 \ , \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & , \ se\ n>1 \\ \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx & , \ se\ n=1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \ se\ n>1 \\ \\ \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} & , \ se\ n=1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \ se\ n>1 \\ 1 & , \ se\ n=1 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Consequentemente, a série de Fourier da função f *é*

$$
0 + (0\cdot\cos x + 1\cdot \sin x) + \sum_{n=2}^{+\infty}(0\cdot\cos(nx) + 0\cdot\sin(nx)) \ ,
$$

ou seja, é igual a $\sin x$ *(seria de esperar?).*
Trabalhando, de modo análogo, com a função $g(x) = \cos x$*, observaríamos que a série de Fourier da função* g *é* $\cos x$ *(verifique).*

■

Se

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))
$$

representa a série de Fourier de uma função f, periódica de período 2π, então utilizando as fórmulas de Euler-Fourier (12) e a fórmula trigonométrica

$$
\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) \ ,
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) &= \frac{1}{\pi}\cos(nx)\int_{\pi}^{-\pi} f(t)\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\sin(nx)\int_{\pi}^{-\pi} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(t)\cos(n(t-x))dt \ .
\end{aligned}
$$

Consequentemente, utilizando a fórmula trigonométrica

$$
\frac{1}{2} + \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) + \cdots + \cos(n\alpha) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\alpha)}{2\sin(\frac{\alpha}{2})}, \tag{14}
$$

temos que a soma parcial da série de Fourier da função f pode ser reescrita em termos de um integral na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k(t-x))dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big[\frac{1}{2} + \cos(t-x) + \cos(2(t-x)) + \cdots + \cos(n(t-x))dt \Big] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{2\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt \ .
\end{aligned}$$

Efectuando a substituição $z = t - x$ no último integral, obtemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(z+x) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} dz \ . \tag{15}$$

Notemos que, em todos os integrais das últimas fórmulas, x representa um parâmetro. Tendo em conta a fórmula (14), verifica-se que a função integranda em (15) é uma função periódica de período 2π (*verifique*). Assim, aplicando o Lema 1.3 ao integral em (15), obtemos a seguinte expressão para a soma parcial da série de Fourier da função f (*forma integral da soma parcial*):

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z+x) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} dz. \tag{16}$$

Exemplo 2.3 (Soma parcial das séries de Fourier na forma integral)**.** *Partindo da fórmula (16) para a função $f(x) = 1$ definida em $[-\pi, \pi[$, mostraremos que*

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{\sin\frac{z}{2}} dz = \pi \ .$$

Comecemos por determinar os coeficientes de Fourier da função $f(x) = 1$, utilizando as fórmulas (12):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2 \ ,$$

e, pelo Lema 1.1,

$$a_n = b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Consequentemente, o termo geral da sucessão das somas parciais da série de Fourier da função f dada é

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} = 1 \ .$$

Logo, de (16), conclui-se que

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z}{2\sin\frac{z}{2}} dz \ .$$

Dado que a função integranda é uma função par, pelo Lema 1.2, concluímos o pretendido.

■

2.2 Desenvolvimento

Das secções anteriores, sabemos que a toda função f integrável em $[-\pi, \pi]$ corresponde a sua série de Fourier. Simbolicamente escreveremos essa correspondência na forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \tag{17}$$

(o símbolo $\sim$ lê-se "corresponde a").
Por exemplo, relativamente à função $f(x) = x$, considerada no Exemplo 2.1, temos

$$x \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx) \ , \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \ . \tag{18}$$

Será que existe algum domínio $D \subseteq [-\pi, \pi]$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx) \ , \quad \forall x \in D?$$

Observemos graficamente o que acontece aos termos da sucessão das somas parciais da série dada. Os gráficos esboçados na Figura 3 evidenciam tendência para os termos da sucessão das somas parciais, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin(kx)$, se aproximarem da função $f(x) = x$, em algum domínio contido em $[-\pi, \pi]$, à medida que o n aumenta.

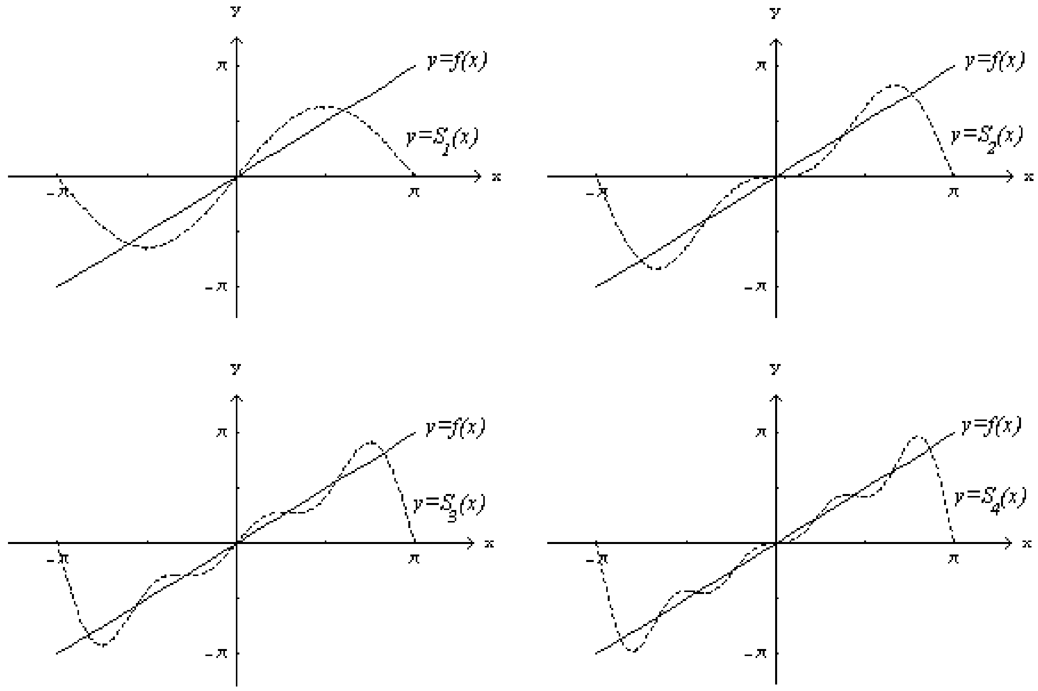

Figura 3: Representação gráfica da função $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, e dos termos S_1,S_2, S_3 e S_4 da sucessão das somas parciais da série de Fourier da função f.

Em termos genéricos, a questão que se coloca é:

Em (17) o símbolo $\sim$ pode ser substituído pelo símbolo de igualdade produzindo uma condição verificada em algum domínio de valores de x?

São conhecidos vários resultados teóricos que estabelecem condições sob as quais as séries de Fourier convergem (pontualmente ou quase em toda a parte ou uniformemente) para as funções que as geram, em algum domínio da função (veja-se, por exemplo, [6],[7],[11],[12]). Mas os problemas relativos à convergência de séries de Fourier são, na sua maioria, nada triviais. No presente texto enunciaremos apenas uma condição suficiente para a existência de representação de funções em série de Fourier, aplicável a funções *seccionalmente monótonas.* Essa condição cobre as funções consideradas de maior interesse nas aplicações práticas.

Definição 2.2 (função seccionalmente monótona)**.** *Diz-se que uma função f é seccionalmente monótona (ou monótona por partes ou monótona por segmentos) no* *intervalo* (a,b)[10] *se esse intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos* $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ *tais que em cada um dos sub-intervalos* $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *a função* f *é monótona.*

Observação 2.2. *Toda a função monótona no seu domínio é seccionalmente monótona, mas o inverso não é verdadeiro.*

Exemplo 2.4. *A função* $f(x) = \cos x$ *é seccionalmente monótona em qualquer intervalo real.*

$\blacksquare$

Exemplo 2.5. *A função* $g(x) = 1/x$ *não é seccionalmente monótona em nenhum intervalo real que contenha o zero como ponto interior desse intervalo. Porém, a função* g *é monótona (logo, seccionalmente monótona) em qualquer intervalo* (a,b) *tal que* $a \times b > 0$ *(porquê?).*

$\blacksquare$

Para efeito de simplificação de escrita, denotaremos os limites laterais $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ por $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$, respectivamente.

Teorema 2.2 (Condição suficiente para o desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica de período 2π)**.** *Se* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função periódica, de período* 2π*, e é limitada e seccionalmente monótona no intervalo* $[-\pi, \pi[$*, então a sua série de Fourier,* $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$*, converge para a função soma* S *sendo*

i) $S(x) = f(x)$, *para todo o* x *ponto de continuidade de* f*;*

ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$*, para todo o* x *ponto de descontinuidade de* f*.*

Demonstração: A sua demonstração poderá ser consultada em [7] e em referências nele contidas.

$\blacksquare$

[10] Aqui (a,b) denota qualquer intervalo da forma $]a,b[, [a,b[,]a,b]$ ou $[a,b]$.

Observação 2.3.

1. *No Teorema 2.2 poderíamos simplificar a expressão da soma da série de Fourier escrevendo*
$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$
Na realidade, se x é ponto de continuidade de f então $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, pelo que em (19) resulta $S(x) = f(x)$ (Teorema 2.2 caso i)).

2. *Uma vez que f é periódica de período 2π, se tem*
$$S(\pi) = \frac{1}{2}\big(f(\pi^+) - f(\pi^-)\big) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi^+) - f(-\pi^-)\big) = S(-\pi).$$
Tal seria de esperar, dado que a função soma da série de Fourier de uma função periódica de período 2π deve ser periódica de período 2π, como foi demonstrado na página 12.

Exemplo 2.6 (Aplicação do Teorema 2.2 - função S contínua)**.** *Seja f uma função periódica de período 2π tal que*
$$f(x) = x^2, \text{ para } x \in [-\pi, \pi[.$$
Encontremos a série de Fourier da função f e determinemos a soma da série.

Das fórmulas de Euler-Fourier (12) e, atendendo ao Lema 1.2, resultam os coeficientes da série de Fourier da função f:
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \ , \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \cdots = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{2\pi}{n^2} \\ &= (-1)^n \frac{4}{n^2} \ , \quad n \geq 1, \end{aligned}$$
e
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0 \ , \quad n \geq 1 \qquad \textit{(porquê?)}.$$

Consequentemente, a série de Fourier da função f é dada por

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \cdots\right) .$$

Sendo f uma função contínua, limitada e seccionalmente monótona em $[-\pi, \pi[$, pelo Teorema 2.2, concluímos que a soma da série de Fourier é igual a $S(x)$, sendo

$$S(x) = x^2 , \quad \textit{para todo o } x \in [-\pi, \pi[.$$

Assim, estabelece-se o seguinte desenvolvimento em série trigonométrica:

$$x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) , \quad \forall x \in [-\pi, \pi] .$$

Para $x \notin [-\pi, \pi[$, o valor de $S(x)$ fica determinado pela condição de periodicidade de período 2π da função S. Assim, para determinar o valor de $S(x_0)$, com $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi[$, retiramos ou adicionamos ao valor x_0 tantos períodos 2π quantos os necessários até obter um número pertencente ao intervalo $[-\pi, \pi[$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
&S(\pi) = S(\pi - 1 \cdot 2\pi) = S(-\pi) = \frac{\pi}{2} , \\
&S(7\pi) = S(7\pi - 3 \cdot 2\pi) = S(\pi) = \frac{\pi}{2} , \\
&S(\frac{3\pi}{2}) = S(\frac{3\pi}{2} - 1 \cdot 2\pi) = S(-\frac{\pi}{2}) = 0 , \\
&S(-\frac{3\pi}{2}) = S(-\frac{3\pi}{2} + 1 \cdot 2\pi) = S(\frac{\pi}{2}) = \pi .
\end{aligned}$$

Na Figura 4 podemos observar o caracter contínuo do gráfico da função S.

■

Exercício 2.1. *Usando o Exemplo 2.6 mostre que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{(\pi)^2}{12} .$$

(Sugestão: Calcule o valor da soma da série de Fourier em $x = 2\pi$.)

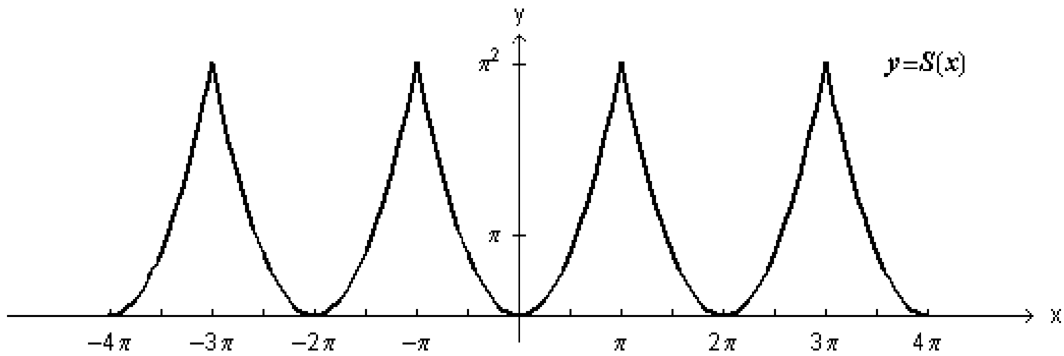

Figura 4: Representação gráfica da função soma da série de Fourier da função $f(x) = x^2,\ x \in [-\pi, \pi[$, (Exemplo 2.6) e restrita ao intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

Exemplo 2.7 (Aplicação do Teorema 2.2 - função S descontínua)**.** *Encontremos a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, periódica de período 2π, definida no intervalo $[-\pi, \pi[$ por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad ,$$

e determinemos a função soma dessa série.
Comecemos por determinar os coeficientes da série de Fourier da função f. Utilizando as fórmulas de Euler-Fourier (12), obtemos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi dx = \pi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(nx)dx \\ &= \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = 0 \ , \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\sin(nx)dx \\ &= \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\left(\cos(n\pi) - 1\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left((-1)^n - 1\right) \ , \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Consequentemente, a série de Fourier da função f é

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}\sin(nx)\ . \tag{20}$$

A função f é periódica, de período 2π, limitada e seccionalmente monótona em $[-\pi,\pi[$. No intervalo $[-\pi,\pi[$, existem dois pontos de descontinuidade de f: $x=-\pi$ e $x=0$. Assim, pelo Teorema 2.2, a soma da série (20) é $S(x)$ sendo

$$S(x)=f(x)\ ,\ \textit{para todo o}\ x\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[\ , \tag{21}$$

e

$$\begin{aligned} S(-\pi) &= \frac{f(-\pi^+)+f(-\pi^-)}{2}=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ ,\\ S(0) &= \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}\ . \end{aligned}$$

De (20) e (21) concluímos que

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}\sin(nx)=\begin{cases} 0 & ,-\pi<x<0\\ \pi & ,0<x<\pi\end{cases}\ .$$

Assim, por exemplo, para $x=\frac{\pi}{2}$ temos

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\ .$$

donde se deduz que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ é convergente e de soma igual a $\frac{\pi}{4}$ (verifique).
Para valores de $x\notin[-\pi,\pi[$, os valores da função soma S ficam determinados pela condição de periodicidade de período 2π da função S.
Na Figura 5 está representado o gráfico da função S restrito ao intervalo $]-4\pi,4\pi[$. O gráfico de S coincide com o gráfico de f excepto nos pontos da forma $x=k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$, que são os pontos de descontinuidade de f.

■

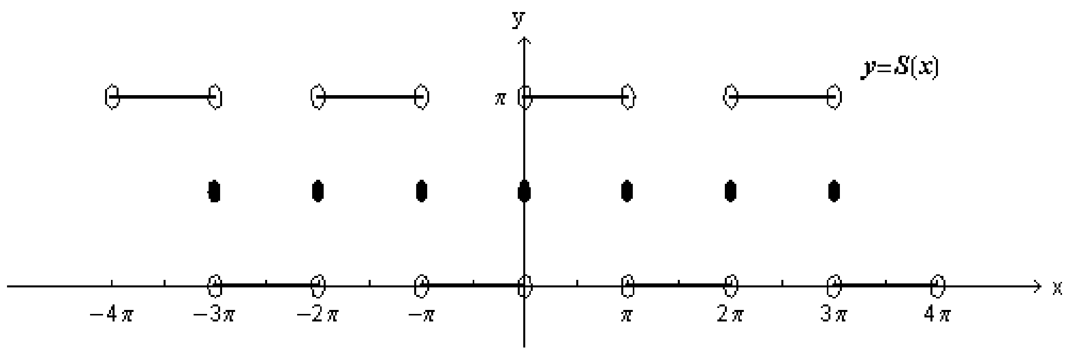

Figura 5: Representação gráfica da função soma da série de Fourier da função f considerada no Exemplo 2.7 e restrita ao intervalo $]-4\pi, 4\pi[$.

Exercício 2.2. *Desenvolva a função* $f(x) = x + x^2$*,* $x \in]-\pi, \pi[$*, em série de Fourier. A seguir, mostre que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Observação 2.4. *Dada uma função* f*, não é necessário determinar os coeficientes da sua série de Fourier para obter a soma da série.*

Exemplo 2.8. *Seja* f *uma função definida no intervalo* $[-\pi, \pi[$ *por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ se \ -\pi \le x \le \pi/2 \\ -1 & , \ se \ \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad .$$

Designando por S *a função soma, de período* 2π*, da série de Fourier correspondente à função* f*, determinemos os valores* $S(3\pi)$*,* $S(\frac{\pi}{2})$ *e* $S(0)$*.*
Uma vez que f *é seccionalmente monótona e limitada em* $[-\pi, \pi[$*, o Teorema 2.2 é aplicável. Assim sendo, podemos garantir que*

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], \quad \forall x \in [-\pi, \pi[\ .$$

Para $x \notin [-\pi, \pi[$*, recorreremos ao facto de* S *e* f *serem funções periódicas de período* 2π*.*

Assim,

$$\begin{aligned} S(3\pi) &= S(3\pi - 2\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi^+) + f(\pi^-)] = \frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)] \\ &= \frac{1}{2}[1 + (-1)] = 0 \ , \end{aligned}$$

$$S(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}[f(\frac{\pi}{2}^+) + f(\frac{\pi}{2}^-)] = \frac{1}{2}[(-1) + 1] = 0$$

e

$$S(0) = \frac{1}{2}[f(0^+) + f(0^-)] = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1 \ .$$

■

Exercício 2.3. *Seja S a função soma da série de Fourier da função f periódica, de período 2π, definida em $]-\pi, \pi[$ por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{se } -\pi < x \leq \pi/4 \\ 0 & , \textit{se } \pi/4 < x < \pi \end{cases} \ .$$

Qual das seguintes afirmações está correcta?

1. $S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ *e* S *não está definida em* $x = \frac{\pi}{4}$;
2. $S(-\frac{\pi}{4}) = 1$ *e* $S(-\pi) = 1$;
3. $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ *e* $S(\frac{3\pi}{2}) = 1$;
4. $S(\frac{\pi}{4}) = 1$ *e* $S(-\pi) = \frac{1}{2}$.

A Definição 2.1 aplica-se a funções f definidas em $[-\pi, \pi]$. Quando uma função f não está definida nos pontos extremos, $x = -\pi$ e/ou $x = \pi$, ou genericamente num número finito de pontos do intervalo $[-\pi, \pi]$, podemos determinar os coeficientes de Fourier dessa função f recorrendo às fórmulas (12). Na realidade, se g é uma extensão integrável de f em $[-\pi, \pi]$, f difere de g em apenas num número finito de pontos e consequentemente, pelas propriedades da integrabilidade, se tem

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} h(x)g(x)dx \ ,$$

qualquer que seja a função h integrável em $[-\pi,\pi]$. Assim, o facto de f não estar definida num número finito de pontos do intervalo $[-\pi,\pi]$ em nada afecta o cálculo dos coeficientes dados pelas fórmulas (12). A série de Fourier da função f é a série de Fourier da função g.

Se uma função f, definida em $D_f \subset \mathbb{R}$, possui uma extensão periódica, que satisfaz as condições do Teorema 2.2, então f admite um desenvolvimento em série trigonométrica em todos os seus pontos de continuidade. É evidente que essa série será a série de Fourier da extensão considerada.

Exemplo 2.9 (desenvolvimento em série de Fourier de uma função definida em $D \subset [-\pi,\pi[$). *Desenvolvamos a função*

$$h(x) = x\,, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]\ ,$$

em série trigonométrica.
Uma vez que h só está definida numa parte do intervalo $[-\pi,\pi[$, consideremos a série de Fourier de qualquer extensão de f, periódica de período 2π, integrável em $[-\pi,\pi[$ e satisfazendo as condições do Teorema 2.2. Por exemplo, a função f considerada no Exemplo 2.1 está nessas condições. Aplicando o Teorema 2.2 à função f concluímos que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx) \qquad (22)\\ &= 2\left(\sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots\right)\ , \quad \forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\ . \end{aligned}$$

Se trabalharmos com uma outra extensão de h, periódica de período 2π, integrável em $[-\pi,\pi[$ e que satisfaz as condições do Teorema 2.2, teríamos uma outra série de Fourier distinta de (22). Por exemplo, consideremos a extensão g de h, periódica de período 2π, tal que

$$g(x) = \begin{cases} x & ,\ se\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & ,\ se\ x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\ . \end{cases}$$

Os coeficientes da série de Fourier da função g são:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} xdx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\ ,\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos(nx)dx = 0\ , \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{n}(-1)^{n+1}, \quad n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

e a sua série de Fourier é dada por

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)\ .$$

Aplicando o Teorema 2.2, estabelecemos o seguinte desenvolvimento da função h no intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx) \qquad (23) \\ &= \frac{\pi}{4}+\left(\sin x-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}-\frac{\sin(4x)}{4}+\cdots\right)\ , \quad \forall x\in]-\pi/2,\pi/2[\ , \end{aligned}$$

o qual é distinto de (22).
Notemos que se igualamos os segundos membros de (22) e (23) concluímos que

$$\sin x-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}-\frac{\sin(4x)}{4}+\cdots=\frac{\pi}{4}\ .$$

Esta igualdade permite-nos identificar o valor da soma da série alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}=\frac{\pi}{4}\ .$$

■

Exercício 2.4. *Considere os seguintes desenvolvimentos em série de Fourier das funções f e g no intervalo $]-\pi,\pi[$:*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

e

$$g(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n\cos(nx)+\beta_n\sin(nx)\right)\ .$$

Mostre que a série de Fourier da função $f+g$ em $]-\pi,\pi[$ é

$$\frac{a_0+\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((a_n+\alpha_n)\cos(nx)+(b_n+\beta_n)\sin(nx)\right).$$

A seguir, utilizando o resultado que demonstrou, determine a série de Fourier da função h, de período 2π, sendo

$$h(x)=\begin{cases} 1+x & , \quad 0<x<\pi \\ -x & , \quad -\pi<x<0 \end{cases} .$$

2.3 Forma Complexa

Consideremos os desenvolvimentos das funções $\sin x$, $\cos x$ e e^x em série de MacLaurin:

$$\sin\ x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\ ,\ x\in\mathbb{R}\ , \tag{24}$$

$$cos\ x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\ ,\ x\in\mathbb{R}\ , \tag{25}$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\ ,\ x\in\mathbb{R}\ .$$

Substituindo, no último desenvolvimento, o argumento x por ix, onde i é a unidade imaginária, obtemos

$$e^{ix}=1+\ ix+\frac{x^2i^2}{2!}+\frac{x^3i^3}{3!}+\frac{x^4i^4}{4!}+\frac{x^5i^5}{5!}+\frac{x^6i^6}{6!}+\frac{x^7i^7}{7!}+\dots\ .$$

Uma vez que $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i,\dots$, podemos escrever

$$e^{ix}=1+\ ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}i+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}i-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}i+\dots\ ,$$

ou ainda, separando os termos reais dos termos imaginários,

$$e^{ix}=(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots)\ +i(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots)\ .$$

Assim, dos desenvolvimentos (25) e (24), tem-se

$$e^{ix}=\cos x+i\ \sin x\ . \tag{26}$$

Substituindo, nesta última fórmula, x por $-x$, obtemos

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\ \sin x\ . \tag{27}$$

De (26) e (27) deduzem-se as seguintes fórmulas conhecidas por **fórmulas de Euler**

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\ . \tag{28}$$

As fórmulas de Euler (28) estabelecem uma ligação entre as funções trigonométricas e a função exponencial. Tal permite expressar as séries trigonométricas (6) em termos da função exponencial do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\ i\ \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}). \end{aligned} \tag{29}$$

Introduzindo as designações

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{e} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{30}$$

podemos reescrever (29) na forma $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-inx}$, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\ .$$

Definição 2.3 (série trigonométrica na forma complexa)**.** *Uma série de funções na forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{31}$$

é chamada série trigonométrica na forma complexa, estando os coeficientes das series (6) e (31) relacionados através das fórmulas (30) .

Observação 2.5.

1. *A forma complexa da soma parcial de ordem n, S_n, da série trigonométrica (31) é dada por*
$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \ .$$

2. *A série (31) converge num ponto $x \in \mathbb{R}$ se existe e é finito o seguinte limite*
$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Se na fórmula (30) os coeficientes a_n e b_n são calculados utilizando as fórmulas de Euler-Fourier (12), para alguma função f, então a série (31) é uma série de Fourier dessa função. Notemos que os coeficientes c_n podem também ser calculados directamente sem recurso às fórmulas (12). De facto, considerando as fórmulas (12) em (30), tem-se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) - i\ \sin(nx))dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(-nx) + i\ \sin(-nx))dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ , \ n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$

E, de modo análogo,

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos(nx) + i\ \sin(nx))dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-n)x}dx \ , \ n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$

Assim, para cada número inteiro $n = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$, temos a fórmula geral

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ . \tag{32}$$

Definição 2.4 (série de Fourier na forma complexa)**.** *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-\pi, \pi]$. A série trigonométrica na forma (31) é chamada série de Fourier da função f na forma complexa se os coeficientes c_n são determinados através das fórmulas (32).*

Às vezes é mais fácil desenvolver uma função em série de Fourier na forma complexa e, a seguir, passá-la para a sua forma real (6), calculando os coeficientes na forma real à custa dos coeficientes na forma complexa.

Exemplo 2.10 (série de Fourier na forma complexa)**.** *Consideremos a função real* $f(x) = e^{3x}$ *definida no intervalo* $[-\pi, \pi]$*. Encontremos a série de Fourier da função* f *na forma complexa e na forma real.*
Primeiro, calculemos os coeficientes da série de Fourier na forma complexa usando a fórmula (32).
Para cada $n \in \mathbb{Z}$*, tem-se*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{3x}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(3-in)x}dx = \left[\frac{1}{2\pi}\frac{1}{3-in}e^{(3-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{3-in}(e^{(3-in)\pi} - e^{-(3-in)\pi})\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Como, para cada inteiro,

$$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\ \sin(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

e

$$e^{-in\pi} = (-1)^n \text{ (verifique)}\ ,$$

então, de (33), temos

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(3-in)}(e^{3\pi} - e^{-3\pi}) = \frac{(-1)^n \sinh(3\pi)}{(3-in)\pi},$$

onde sinh *designa a função seno hiperbólico, i.e.,* $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , x \in \mathbb{R}$.
Assim, a série de Fourier da função f *na forma complexa é:*

$$\frac{\sinh(3\pi)}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{3-in}\ .$$

Desta última expressão podemos obter a série de Fourier da função f *na forma real. De (30) resulta* $a_0 = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ *e* $b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{i}$*, pelo que, neste caso, teremos*

$$a_0 = 2\frac{\sinh(3\pi)}{3\pi}, \quad a_n = \frac{6(-1)^n}{\pi(9+n^2)}\sinh(3\pi), \quad b_n = \frac{2n(-1)^n}{\pi(9+n^2)}\sinh(3\pi) \quad \text{(verifique)}\ .$$

Finalmente, a série de Fourier da função f *na forma real é*

$$\frac{\sinh(3\pi)}{3\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi(9+n^2)}\sinh(3\pi)\big(3\cos(nx) + n\sin(nx)\big)\ .$$

■

2.4 Série de senos e série de co-senos

A condição de paridade da função f conduz às simplificações nas fórmulas (12) para os coeficientes de Euler-Fourier. Na realidade, do Lema 1.2, resulta

i) Se f é uma função *par*, tem-se que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{par}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \ , \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{par}\underbrace{\cos(nx)}_{par}}_{par}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n\in\mathbb{N} \ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{par}\underbrace{\sin(nx)}_{ímpar}}_{ímpar}\, dx = 0 \ , \quad n\in\mathbb{N} \ . \end{aligned} \tag{34}$$

ii) Se f é uma função *ímpar*, tem-se que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{ímpar}\, dx = 0 \ , \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{ímpar}\underbrace{\cos(nx)}_{par}}_{ímpar}\, dx = 0 \ , \quad n\in\mathbb{N} \ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{ímpar}\underbrace{\sin(nx)}_{ímpar}}_{par}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n\in\mathbb{N} \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Estas simplificações no cálculo dos coeficientes de Fourier conduzem à seguinte definição.

Definição 2.5 (série de co-senos / série de senos)**.** *Se f é uma função par e integrável em $[-\pi,\pi]$, então a sua série de Fourier é dada por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) \tag{36}$$

e é chamada série de Fourier de co-senos. Os coeficientes $a_n, n \in \mathbb{N}_0$, podem ser determinados através das fórmulas (34).
Se f é uma função ímpar e integrável em $[-\pi, \pi]$, então a sua série de Fourier é dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \ , \tag{37}$$

e é chamada série de Fourier de senos. Os coeficientes $b_n, n \in \mathbb{N}$, podem ser determinados através das fórmulas (35).

Observação 2.6. *Caso a série (36) ((37), respectivamente) convirja, a sua função soma será uma função par (ímpar, respectivamente).*

Notemos que se uma dada função real f, definida em $]0, \pi[$, é limitada e seccionalmente monótona em $]0, \pi[$, podemos aplicar o Teorema 2.2 a uma extensão periódica de f, de período 2π, a qual será par ou ímpar consoante se pretenda estabelecer a série de Fourier de co-senos ou de senos para a função f. Se, além disso, a função f é contínua, podemos obter a sua representação em série de co-senos (36) e em série de senos (37). O mesmo sucederia se a função f estivesse definida, não em todo o intervalo $]0, \pi[$, mas num intervalo (a, b) contido em $]0, \pi[$. Genericamente, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Uma função $f : (a, b) \subset]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, seccionalmente monótona e contínua admite um número infinito de (distintos) desenvolvimentos em série trigonométrica. Em particular, f pode ser desenvolvida em série de co-senos e em série de senos.*

Demonstração. Basta considerar as possíveis extensões periódicas de f que se podem obter nas condições do Teorema 2.2.

c.q.d.

Exemplo 2.11 (série de co-senos). *Vamos construir uma representação da função $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$, em série de co-senos.*
Uma vez que pretendemos desenvolver f em série de co-senos, vamos construir em $\mathbb{R}$ uma sua extensão par e periódica, de período 2π. Essa extensão g é definida em $[-\pi, \pi[$ por

$$g(x) = \begin{cases} -x & , \ se \ x \in [-\pi, 0[\\ x & , \ se \ x \in [0, \pi[\end{cases} .$$

Determinemos os coeficientes da série de Fourier da função g:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi \ , \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \cdots = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}((-1)^n - 1) \\
&= \begin{cases} 0 & , \ se\ n\ par \\ -\frac{4}{\pi n^2} & , \ se\ n\ \acute{\imath}mpar \end{cases} \quad , \quad n \geq 1,
\end{aligned}$$

e

$$b_n \ = \ 0 \ , \quad n \geq 1.$$

Logo, a série de co-senos da função g e da função f é

$$\pi - \frac{4}{\pi n^2}\left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} + \cdots\right).$$

A função g satisfaz as condições do Teorema 2.2, sendo contínua em todo o espaço real. Consequentemente, a série de co-senos acima construída converge em $\mathbb{R}$ *para a função g e , em particular, converge em* $[0,\pi]$ *para a função f, tendo-se*

$$x = \pi - \frac{4}{\pi n^2}\left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} + \cdots\right) \ , \quad \forall x \in [0,\pi] \ .$$

A Figura 6 mostra o traçado contínuo e periódico do gráfico da função soma da série de co-senos da função f.

■

Exemplo 2.12 (série de senos)**.** *Seja* $f(x) = \cos x$*, para* $x \in [0,\pi]$*. Vejamos se é possível estabelecer para a função f um desenvolvimento em série de senos, com base no Teorema 2.2.*
Consideremos a extensão g, periódica, de período 2π*, e ímpar, de f tal que*

$$g(x) = \begin{cases} -\cos x & , x \in [-\pi, 0[\\ \cos x & , x \in [0, \pi[\end{cases} \ .$$

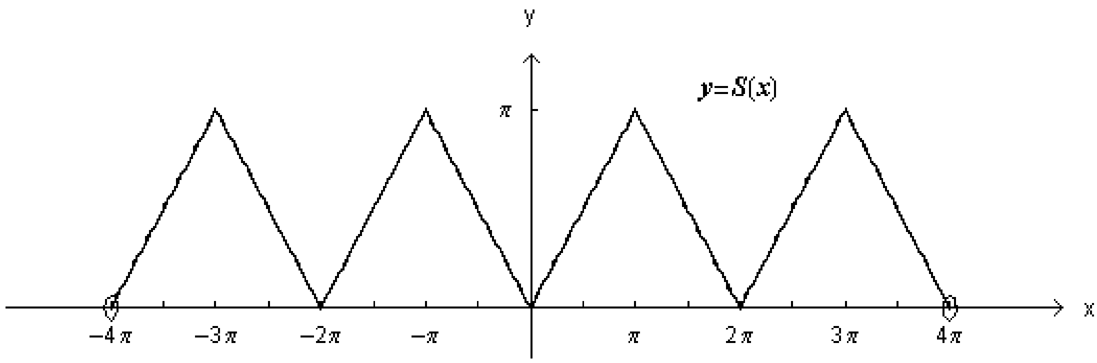

Figura 6: Representação gráfica da função soma da série de co-senos da função f considerada no Exemplo 2.11 e restrita ao intervalo $]-4\pi, 4\pi[$.

Esta extensão satisfaz as condições do Teorema 2.2. Os coeficientes da série de senos da função g são determinados através das fórmulas (34):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx-x)+\sin(nx+x)}{2}dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(x(n+1))}{n+1}\right]_0^{\pi} & , \ se\ n=1 \\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(x(n-1))}{n-1} - \frac{\cos(x(n+1))}{n+1}\right]_0^{\pi} & , \ se\ n>1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \ se\ n\ par \\ \frac{4n}{\pi(n^2-1)} & , \ se\ n\ \text{ímpar} \end{cases} \qquad \textit{(Verifique!)}.
\end{aligned}$$

A função g é descontinua nos pontos da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, à semelhança da função soma da série de senos da função g (veja Figura 7). Do Teorema 2.2 concluímos que

$$\cos x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2-1)}\sin(2kx)\ , \quad \forall x \in]0,\pi[,$$

não sendo possível, com base no Teorema 2.2, construir um desenvolvimento em série de senos para a função f válido em todo o intervalo $[0,\pi]$, mas apenas no seu interior.

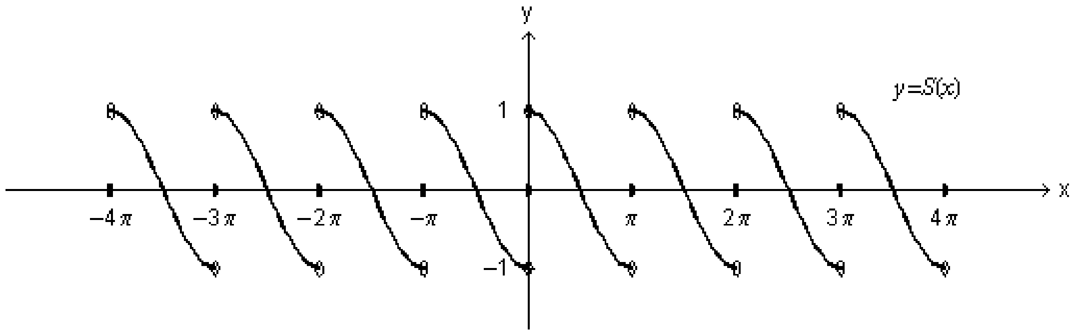

Figura 7: Representação gráfica da função soma da série de senos da função f do Exemplo 2.12 e restrita ao intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

■

Exercício 2.5. *Seja S a função soma, de período 2π, da série de Fourier de co-senos da função* $f(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{se } 0 < x \leq \pi/4 \\ 0 & , \textit{se } \pi/4 < x < \pi \end{cases}$.

Qual das seguintes afirmações está correcta?

a) $S(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ *e* S *não está definida em* $x = \frac{\pi}{4}$;

b) $S(-\frac{\pi}{4}) = -1$ *e* $S(\frac{3\pi}{2}) = -1$;

c) $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ *e* $S(\frac{3\pi}{2}) = 0$;

d) $S(\frac{\pi}{4}) = 1$ *e* $S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

3 Série de Fourier - intervalo principal arbitrário

3.1 Alargamento do intervalo principal

Nas secções anteriores considerámos séries de Fourier de funções periódicas de período 2π, com expressões analíticas conhecidas no intervalo $[-\pi, \pi[$. Vejamos agora como estender a definição de série de Fourier a uma função periódica com período arbitrário. Seja f uma função periódica de período $2l$, com $l > 0$, sendo conhecida a expressão analítica de f no intervalo principal $[-l, l[$. Para determinar a série de Fourier da função f consideremos a função F dada por $F(t) = f(\frac{lt}{\pi})$. Esta função F é periódica de período 2π já que

$$F(t+2\pi) = f(\frac{l(t+2\pi)}{\pi}) = f(\frac{lt}{\pi} + 2l) = f(\frac{lt}{\pi}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, é fácil verificar que a série de Fourier da função f em $[-l, l[$ coincide com a série de Fourier da função F em $[-\pi, \pi[$, ou seja,

$$f(\frac{lt}{\pi}) = F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right), \tag{38}$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin(nt)dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Realmente, efectuando a mudança de variável $x = \frac{lt}{\pi}$ donde

$$t = \frac{\pi x}{l}\ , \quad dt = \frac{\pi}{l}dx\ ,$$

$$t = -\pi \Rightarrow x = -l \qquad \text{e} \qquad t = \pi \Rightarrow x = l\ ,$$

obtemos, em (38),

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l})\right),$$

sendo os coeficientes da série determinados efectuando a mesma mudança de variável $x = \frac{lt}{\pi}$ nos integrais das fórmulas (12).
Concretamente, para uma função integrável e definida num intervalo da forma $[-l, l[$, com $l > 0$, define-se a sua série de Fourier de acordo com a seguinte definição e, para essa série, estabelece-se um resultado semelhante ao Teorema 2.2.

Definição 3.1 (série de Fourier). *Seja f uma função real integrável em $(-l, l)$, com $l > 0$. A série trigonométrica, cujos coeficientes são determinados pelas fórmulas de Euler-Fourier*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{39}$$

é chamada série de Fourier da função f. Os seus coeficientes são chamados coeficientes de Fourier.

Teorema 3.1 (Condição suficiente para o desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica de período $2l$, com $l > 0$). *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $2l$, com $l > 0$, e se f é limitada e seccionalmente monótona no intervalo $[-l, l[$, então a sua série de Fourier é*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \right) , \tag{40}$$

sendo os seus coeficientes dados pelas fórmulas (39).
A série (40) converge para a função S dada por

i) $S(x) = f(x)$, *para todo o x ponto de continuidade de f;*

ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, *para todo o x ponto de descontinuidade de f.*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema 2.2 à função $F(t) = f(\frac{lt}{\pi})$. Notemos que F é periódica, de período 2π, e satisfaz as restantes condições do Teorema 2.2, tendo em conta as condições satisfeitas pela função f.

c.q.d.

Observação 3.1. *É evidente que a função soma S do Teorema 3.1 é periódica de período $2l$.*

Exemplo 3.1 (desenvolvimento em série de Fourier de uma função definida em $[-l, l[$, $l > 0$)**.** *Seja f uma função periódica, de período 4, tal que $f(x) = |x|$, para $x \in [-2, 2[$. Determinemos a série de Fourier da função f e identifiquemos a sua soma.*
Tendo em conta as fórmulas (39), os coeficientes da série de Fourier da função f são

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x| dx = \int_{0}^{2} x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\ ,\\
a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x| \cos(\frac{n\pi x}{2}) dx = \int_{0}^{2} x \cos(\frac{n\pi x}{2}) dx\\
&= \cdots = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin(\frac{n\pi x}{2}) + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\\
&= \left\{\begin{array}{cl} 0 & , n \ par \\ & \\ -\frac{8}{\pi^2 n^2} & , n \ ímpar \end{array}\right. \quad , \quad n \geq 1\ ,\\
b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |x| \sin(\frac{n\pi x}{2}) dx = 0, \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Portanto, a série de Fourier da função f é

$$
2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\cos(\frac{n\pi x}{2})
$$

ou, doutro modo,

$$
2 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos(\frac{\pi x}{2}) + \frac{\cos(\frac{3\pi x}{2})}{3^2} + \frac{\cos(\frac{5\pi x}{2})}{5^2} + \cdots\right).
$$

Do Teorema 3.1 concluímos que a série obtida converge para uma função S contínua e periódica, de período 4, tal que

$$
S(x) = |x|\ , \quad \forall x \in [-2, 2[\ .
$$

■

Exercício 3.1. *Escreva a série de Fourier da função $f(x) = e^x$, $\quad x \in]-5, 5[$.*

Definição 3.2. *[série de co-senos e série de senos] Seja f uma função par e integrável em $[-l, l]$. A série de Fourier da função f é dada por*

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) \tag{41}
$$

e é chamada série de Fourier de co-senos. Os coeficientes $a_n, n \in \mathbb{N}_0$ *podem ser determinados através das fórmulas:*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \ , \\ a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$

Se f *é uma função ímpar e integrável em* $[-l, l]$*, a série de Fourier da função* f *é dada por*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \ , \tag{42}$$

e é chamada série de Fourier de senos. Os coeficientes b_n *podem ser determinados através da fórmula*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Exemplo 3.2 (série de co-senos)**.** *Encontremos a série de co-senos da função* f*, par, periódica de período* 6*, e tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ 2 & , \frac{3}{2} < x < 3 \end{cases} \ .$$

Segundo a Definição 3.2, os coeficientes da série de Fourier de co-senos da função f *são*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^{\frac{3}{2}} 1dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 2dx\right) = 3 \ , \\ a_n &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos(\frac{n\pi x}{3})dx = \frac{2}{3}\left(\int_0^{\frac{3}{2}} \cos(\frac{n\pi x}{3})dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 2\cos(\frac{n\pi x}{3})dx\right) \\ &= \cdots = -\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & , \ se\ n = 2k \\ (-1)^{k+1} & , \ se\ n = 2k-1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \ .$$

Assim, a série de Fourier de co-senos da função f é

$$\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^k}{(2k-1)\pi}\cos(\frac{(2k-1)\pi x}{3}) \ .$$

A função f é periódica de período $T=6$, limitada e seccionalmente monótona e possui, no intervalo $[-3,3]$, dois pontos de descontinuidade: $x=-\frac{3}{2}$ e $x=\frac{3}{2}$. Logo, com base no Teorema 3.1, concluímos que a série de Fourier de co-senos encontrada converge para uma função soma S que satisfaz as seguintes condições:

- *quando $x \in [0,3]$, S é definida por* $S(x)=\begin{cases} 1 & ,0<x<\frac{3}{2} \\ 2 & ,\frac{3}{2}<x<3 \\ \frac{3}{2} & ,x=\frac{3}{2} \end{cases}$;
- *quando $x \in [-3,0]$, S é definida por $S(x)=S(-x)$;*
- *para os restantes valores de $x \in \mathbb{R}$ a função S é definida pela condição de periodicidade, com período $T=6$.*

■

Exercício 3.2. *Desenvolva em série de Fourier de co-senos a função f dada por*

$$f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad 0<x<\pi \\ 0 & , \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases} \ .$$

3.2 Deslocamento do intervalo principal

Tendo em atenção o Lema 1.3, a Definição 3.1 pode, ainda, ser generalizada para funções definidas num intervalo não necessariamente simétrico. Analogamente, podemos generalizar a Definição 2.5 de série de Fourier de senos e de co-senos para funções par e ímpar, cujas expressões analíticas são conhecidas num intervalo não necessariamente simétrico[11].

[11]Um intervalo simétrico em $\mathbb{R}$ é um intervalo da forma $(-a,a)$, com $a>0$

Definição 3.3 (série de Fourier)**.** *Sejam $l > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ quaisquer. Se f é uma função real e integrável em $[a, a+2l]$, então a série trigonométrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \right) \ ,$$

cujos coeficientes são determinados pelas seguintes fórmulas de Euler-Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{43}$$

é chamada série de Fourier da função f e os seus coeficientes por coeficientes de Fourier.

Um resultado análogo ao Teorema 2.2 e ao Teorema 3.1 pode ser enunciado considerando um intervalo genérico, não necessariamente simétrico.

Teorema 3.2 (Condição suficiente para o desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica)**.** *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $l > 0$ quaisquer. Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $2l$ ($l > 0$), e se f é limitada e seccionalmente monótona no intervalo $[a, a+2l[$, então a sua série de Fourier é dada por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l}) \right) \ ,$$

sendo os coeficientes a_n e b_n determinados através das fórmulas (43). Esta série converge para a função S tal que

i) $S(x) = f(x)$, *para todo o x ponto de continuidade de f;*

ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, *para todo o x ponto de descontinuidade de f.*

Exemplo 3.3 (série de Fourier)**.** *Encontremos uma representação em série trigonométrica da função f, periódica de período 2π, sendo $f(x) = x$, para $x \in]0, 2\pi[$.*
Os coeficientes da série de Fourier da função f são:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi \ , \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos\frac{n\pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} \\
&= 0, \quad n \geq 1 \ ,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(nx))dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{2}{n}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

A função f é limitada e seccionalmente monótona em $]0, 2\pi[$. Assim, aplicando o Teorema 3.2 a uma extensão de f, a qual é periódica de período 2π, limitada e seccionalmente monótona em $[0, 2\pi[$, concluímos que

$$
\begin{aligned}
x &= \pi - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\sin(nx) \\
&= \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3}\cdots\right) \ , \quad \forall x \in]0, 2\pi[\ .
\end{aligned}
$$

A função S, soma da série, é descontínua nos pontos $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Um esboço do gráfico da função S restrito ao intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ pode ser observado na Figura 8.

■

Exemplo 3.4 (série de Fourier)**.** *Seja a função real de variável real*

$$f(x) = |\cos(\pi x)| \ .$$

Identifiquemos o período de f e determinemos a série de Fourier desta função.

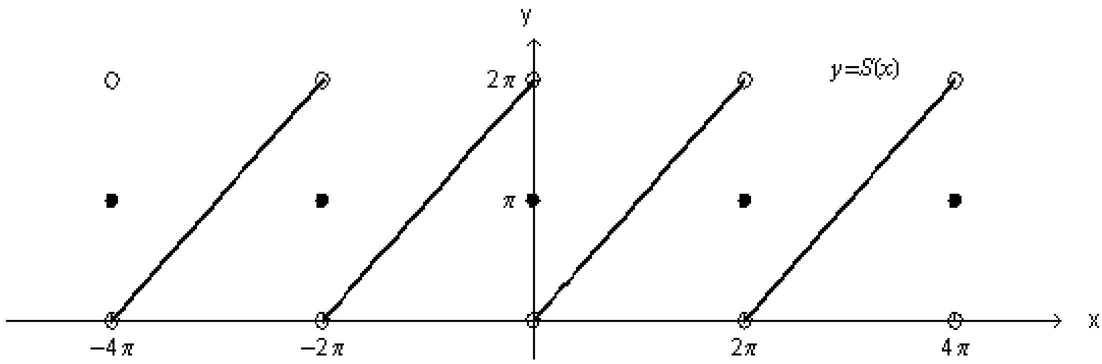

Figura 8: Representação gráfica da função soma da série de Fourier da função f considerada no Exemplo 3.3, e restrita ao intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

Comecemos por analisar a periodicidade da função f. A função $\cos(\pi x)$ tem período $T = 2$, pois

$$\cos(\pi(x+2))) = \cos(\pi x + 2\pi) = \cos(\pi x) \ , \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

sendo $[-1, 1[$ o seu intervalo principal de periodicidade. Ao considerar a função $f(x) = |\cos(\pi x)|$, os valores não positivos de $\cos(\pi x)$, obtidos quando $x \in [-1, -\frac{1}{2}[\cup [\frac{1}{2}, 1[$, passam a ser positivos ou nulos, coincidindo com as imagens dos pontos $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$; logo, o intervalo principal de periodicidade de f é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Portanto, a função f é periódica e o seu período é 1 (verifique, construindo o gráfico da função $|\cos(\pi x)|$).

Vamos agora construir a série de Fourier da função f. Os coeficientes da série de Fourier da função f são dados por

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\cos(\pi x)| dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) dx \ , \quad \textit{porque a função integranda é par} \\
&= \left[\frac{4}{\pi} \sin(\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi} \ , \\
a_n &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\cos(\pi x)| \cos(2n\pi x) dx \\
&= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \cos(2n\pi x) dx \ , \quad \textit{porque a função integranda é par}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \big(\cos((2n-1)\pi x)+\cos((2n+1)\pi x)\big)dx \\
&= 2\Big[\frac{1}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)\pi x)+\frac{1}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)\pi x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\Big(\frac{1}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})+\frac{1}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})\Big) \\
&= 2(-1)^n\Big(\frac{1}{(2n+1)\pi}-\frac{1}{(2n-1)\pi}\Big)=\frac{4(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi}
\end{aligned}$$

e

$$b_n = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\cos(\pi x)|\sin(2n\pi x)dx = 0 \ , \quad \textit{porque a função integranda é ímpar}$$

Deste modo, a série de Fourier da função f é

$$\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi}\cos(2n\pi x).$$

Uma vez que f satisfaz as condições suficientes de desenvolvimento em série de Fourier (verifique), podemos escrever

$$|\cos(\pi x)| = \frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi}\cos(2n\pi x) \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

■

Exercício 3.3. *Determine a forma complexa da série de Fourier da função π-periódica*

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \\ 0 & , x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

e a soma da série obtida no ponto $x = \pi$.

Apêndice A: Aplicações das séries de Fourier: uma breve abordagem.

i) Aproximação de funções periódicas

A representação de uma função por uma série de funções (série de Taylor, série de McLaurin, série de Fourier, etc.) reveste-se de importância prática, uma vez que permite obter aproximações dessa função através de somas parciais da série em causa. Seja f uma função definida em $[a, b]$ e seja φ uma sua aproximação. Para avaliar a qualidade da aproximação utilizam-se medidas que, de algum modo, medem o erro cometido quando se substitui a função f pela função φ no intervalo $[a, b]$. Uma das medidas mais utilizadas é o chamado *desvio quadrático médio*, aqui denotado por δ, cujo quadrado é, por definição,

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx.$$

Dada uma função periódica f de período 2π, podemos considerar aproximações dessa função por meio de polinómios trigonométrico de grau n da forma

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \ , \quad n \geq 0 \ , \tag{44}$$

onde $a_0, \ a_1, b_1, \ldots, a_n, \ b_n$ são constantes reais. Se esses coeficientes são os coeficientes de Fourier, então os polinómios (44) são chamados *polinómios de Fourier.*

Quando tomamos para aproximação de uma função periódica f um polinómio trigonométrico de ordem n, verifica-se que o desvio quadrático médio que se comente em $[-\pi, \pi]$ é dado por:

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))]^2 dx} \ , \tag{45}$$

Teorema 1. *Dada uma função periódica f de período 2π, de entre todos os polinómios trigonométricos de ordem n da forma (44), é o polinómio de Fourier aquele que determina o menor desvio quadrático médio (45).*

Do Teorema 1 podemos concluir que, dada uma função periódica que admite um desenvolvimento em série de Fourier, a melhor aproximação dessa função, em termos de menor desvio quadrático médio, é dada pela soma parcial S_n da sua série de Fourier.

Após alguns cálculos (semelhantes aos efectuados aquando do Exemplo 1.3) verifica-se que

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Uma vez que $\delta_n^2 \geq 0$, então , qualquer que seja n,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Aplicando limites quando $n \longrightarrow +\infty$, a ambos os membros desta ultima desigualdade, obtemos a conhecida *desigualdade de Bessel* [12]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Exemplo 1. *Seja a função f definida no intervalo $[0, \pi]$ e dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & caso \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x \ , & caso \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

A série de Fourier de senos da função f é

$$\frac{4}{\pi}(sinx - \frac{sin3x}{9} + \frac{sin5x}{25} - \dots)$$

(verifique). A função f pode ser aproximada pela soma parcial, por exemplo, de ordem 5 daquela série,

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi}(sinx - \frac{sin3x}{9} + \frac{sin5x}{25}) \ , \quad \forall x \in [0, \pi] \ ,$$

com desvio quadrático médio em $[0, -\pi]$ igual a $\delta_5 \approx 0,02436$ (verifique).

■

[12]**Friedrich Wilhelm Bessel** (1784-1846)– matemático e astrónomo alemão. O nome de Bessel está especialmente associado a uma classe de funções por ele introduzida, as quais constituem uma ferramenta de estudo indispensável na matemática, na física e na engenharia. Bessel contribuiu também na reforma do ensino da matemática, primeiro na Alemanha e, depois, em todo o mundo.

ii) Determinação de soluções periódicas de equações diferenciais ordinárias

1. Equações diferenciais lineares não homogéneas

As séries de Fourier podem ser utilizadas na resolução das equações diferenciais lineares não homogéneas quando estas têm soluções periódicas.
Vamos considerar tal aplicação no exemplo das equações diferenciais da segunda ordem.
Consideremos a equação diferencial linear não homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{46}$$

Admitamos que f é uma função periódica de período 2π e que f admite um desenvolvimento em série de Fourier,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \tag{47}$$

Procuraremos a solução geral y da equação (46) na forma

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n cos(nx) + B_n sin(nx)) \ , \tag{48}$$

com $A_0, A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ constantes a determinar de modo que (48) seja uma solução de (46).
Substituindo, ambas, a solução y na forma (48) e f na forma (47) na equação diferencial (46), e igualando os termos livres e os coeficientes homólogos associados às funções $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$, obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{q} \ , \\ A_n &= \frac{(q-n^2)a_n - pnb_n}{(q-n^2)^2 + pn^2} \ , \ n = 1, 2, \ldots \ , \\ B_n &= \frac{(q-n^2)b_n - pna_n}{(q-n^2)^2 + pn^2} \ , \ n = 1, 2, \ldots \ . \end{aligned} \tag{49}$$

Prova-se que se nas fórmulas (49) os denominadores de todas as fracções são diferentes de zero, então (48) é uma solução periódica da equação diferencial (46). Se, nas fórmulas (49), algum dos denominadores é nulo, então soluções periódicas da forma (48) podem ainda existir, mas, nesses casos, averigua-se se são verificadas condições necessárias de existência de solução periódica, nomeadamente, as Condições Necessárias 1 ou 2 a seguir enunciadas.

Condição Necessária 1. Da primeira das expressões de (49) verifica-se que se a equação diferencial (46) admite a solução na forma (48), então a condição $a_0 \neq 0$ deve implicar $q \neq 0$.
Se $q = 0$ e $a_0 = 0$ simultaneamente, então o coeficiente A_0 é indeterminado na solução (48), o que significa que a equação diferencial admite um número infinito de soluções periódicas, que se distinguem entre si por uma parcela constante.

Condição Necessária 2. Se $p = 0$ e $q = k^2$, para algum $k \in \mathbb{N}$ fixo, então para a existência de uma solução periódica da forma (48) as seguintes condições são necessárias:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0 \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0. \tag{50}$$

Os coeficientes A_n e B_n, para $n \neq k$, daquela solução periódica, determinam-se através das fórmulas (49), e os coeficientes A_k e B_k mantêm-se indeterminados. (Verifica-se que $y_k(x) = A_k\cos(kx) + B_k\sin(kx)$ é a solução geral da equação homogénea associada a (46).)

Nota 1. Caso as Condições Necessárias 1 ou 2 não sejam satisfeitas, a equação (46) não tem soluções periódicas e a solução da equação diferencial não pode ter encontrada na forma (48). Nesse caso, um outro método de resolução da equação diferencial tem de ser utilizado.

Nota 2. Se o segundo membro f da equação (46) é uma função periódica do período $2l \neq 2\pi$, então o desenvolvimento de f em série de Fourier deve ser procurado no intervalo $(-l, l)$. A solução periódica (caso exista) é de período $2l$ e tem a forma

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos(\frac{n\pi x}{l}) + B_n\sin(\frac{n\pi x}{l})).$$

Neste caso, as fórmulas (49) sofrem as alterações correspondentes.

Nota 3. O método descrito pode ser utilizado na resolução de equação diferencial não homogénea de ordem qualquer, desde que o segundo membro da equação seja uma função periódica e desde que a equação admita soluções periódicas.

Exemplo 2. *Encontremos, caso existam, as soluções periódicas da equação diferencial* $y'' + y = \sin x$.
Aqui, $p = 0,\ q = 1 = 1^2$. *Assim sendo, comecemos por verificar se as condições (50) estão satisfeitas. Temos*

$$a_1 = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \ dx = 0,$$

mas

$$b_1 = \int_0^{2\pi} \sin x \sin x \ dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \ dx = \pi \neq 0.$$

Logo, a Condição Necessária 1 de existência de solução periódica não é satisfeita. A equação dada não tem soluções periódicas. Na realidade, pode ser demonstrado que a solução geral da equação diferencial dada é

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x \ ,$$

que não é uma função periódica, devido à presença do termo $\frac{1}{2} x \cos x$.

■

Exemplo 3. *Determinemos, caso existam, as soluções periódicas da equação diferencial*

$$y'' + 4y' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

Neste caso, $q = 0$ *e* $a_0 = 0$, *o que significa que a Condição Necessária 1 de existência de solução periódica está satisfeita.*
Vamos procurar a solução geral da forma (48). De acordo com (49) temos

$$A_0 = 0,\ A_n = \frac{-n^2 \cdot 0 - 4n\frac{1}{n^3}}{(0 - n^2)^2 + 4^2 n^2} = -\frac{\frac{4}{n^2}}{n^4 + 4^2 n^2} = -\frac{4}{n^4(n^2 + 16)},$$

$$B_n = \frac{(0 - n^2)\frac{1}{n^3} - 4n \cdot 0}{(0 - n^2)^2 + 4^2 n^2} = -\frac{\frac{1}{n}}{n^4 + 16n^2} = -\frac{1}{n^3(n^2 + 16)},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Se existem soluções periódicas da equação diferencial dada, elas são da forma

$$y(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^4(n^2+16)}\cos(nx) + \frac{1}{n^3(n^2+16)}\sin(nx)\right).$$

Por substituição directa verifica-se que a função y encontrada é uma solução da equação diferencial.

$\blacksquare$

Exemplo 4. *Determinemos, caso existam, as soluções periódicas da equação diferencial*

$$y'' - 4y = |\cos(\pi x)|.$$

Utilizemos o desenvolvimento da função $f(x) = |\cos(\pi x)|$ em série de Fourier obtida no Exemplo 3.4. Uma vez que a função $|\cos(\pi x)|$ é periódica de período $T = 2l = 1$, procuremos soluções da equação diferencial que sejam periódicas com período $T = 1$ e, portanto, da forma

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos(2n\pi x) + B_n\sin(2n\pi x)).$$

Calculemos a primeira e a segunda derivadas desta última função:

$$y'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} A_n 2n\pi sin(2n\pi x) + \sum_{n=1}^{+\infty} B_n 2n\pi cos(2n\pi x),$$

$$y''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} A_n 4n^2\pi^2 cos(2n\pi x) - \sum_{n=1}^{+\infty} B_n 4n^2\pi^2 sin(2n\pi x).$$

Substituindo, na equação diferencial, as expressões obtidas para y' e y'' e, substituindo, a função $|\cos(\pi x)|$ pela sua série de Fourier encontrada no Exemplo 3.4, obtemos

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} A_n 4n^2\pi^2\cos(2n\pi x) - \sum_{n=1}^{+\infty} B_n 4n^2\pi^2\sin(2n\pi x) -$$

$$-4\Big(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(A_n\cos(2n\pi x) + B_n\sin(2n\pi x))\Big) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)\pi}\cos(2n\pi x).$$

Igualando, nesta última fórmula, os termos livres e os coeficientes homólogos associados aos termos $\cos(2n\pi x)$ *e* $\sin(2n\pi x)$*, obtemos (verifique)*

$$A_0 = -\frac{1}{\pi},\ A_n = \frac{(-1)^n}{(n^2\pi^2+1)(4n^2-1)\pi},\ B_n = 0.$$

Verifica-se que a função encontrada,

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n\pi x)}{(n^2\pi^2+1)(4n^2-1)\pi} \ ,$$

é a solução geral da equação diferencial $y'' - 4y = |cos\pi x|$.

■

2. Problema de fronteira para equações diferenciais ordinárias

Os sistemas ortogonais (não só os sistemas trigonométricos) podem também ser utilizados na resolução de problema de fronteira para equações diferenciais ordinárias lineares. Na realidade, prova-se que as soluções dessas equações são ortogonais no intervalo onde as condições de fronteira estão definidas. Por tal, procuram-se soluções no conjunto das funções de um sistema ortogonal, em particular, do sistema trigonométrico.

Para ilustrar essa metodologia, consideremos uma equação diferencial ordinária na forma

$$y'' + \lambda\rho(x)y = 0 \ , \tag{51}$$

sujeita às condições de fronteira $y(a) = y(b) = 0$, sendo λ um parâmetro e $\rho(x)$ uma função contínua positiva.

Sejam λ_m e λ_n dois valores distintos do parâmetro λ e $y_m(x)$ e $y_n(x)$ as correspondentes soluções da equação (51). Verifiquemos que as funções $\sqrt{\rho(x)}y_m(x)$ e $\sqrt{\rho(x)}y_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[a, b]$.

Uma vez que

$$y_n''y_m - y_m''y_n = \frac{d}{dx}[y_n'y_m - y_m'y_n] \ ,$$

da equação diferencial (51), temos

$$y_n'' = -\lambda_n\rho(x)y_n, \qquad \text{e} \qquad y_m'' = -\lambda_m\rho(x)y_m.$$

Subtraindo a primeira equação, multiplicada por y_m, à segunda equação, multiplicada por y_n, e integrando no intervalo $[a,b]$, obtemos

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = [y_n'(x) - y_m'(x)y_n(x)]_a^b = 0.$$

Logo, para $\lambda_m \neq \lambda_n$, temos $\displaystyle\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n dx = 0$, donde concluímos que as funções $\sqrt{\rho(x)}y_m(x)$ e $\sqrt{\rho(x)}y_n(x)$ são ortogonais no intervalo $[a,b]$.
A aplicação das séries de Fourier na resolução de equações diferenciais na forma (51) é análoga à das equações diferenciais lineares não homogéneas.

iii) Equações da Física Matemática.

Na Física Matemática as séries trigonométricas são importantes no estudo de processos periódicos tais como o movimento oscilatório, a propagação das ondas, o movimento do mecanismo duma máquina de vapor, a força e a tensão da corrente alternada, etc., os quais são descritos por equações diferenciais parciais da segunda ordem ou de maior ordem.
Vamos referir dois tipos de equações da Física Matemática onde se aplicam as séries de Fourier, as quais são dadas por equações diferenciais parciais de segunda ordem.

1. **Equação de onda**
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ . \tag{52}$$
Equações nesta forma surgem no estudo de processos de vibrações transversais de uma corda, vibrações longitudinais de uma viga horizontal, oscilações da corrente eléctrica num fio, oscilações dos gases, etc. A equação (52) é a mais simples do tipo *hiperbólico.*

2. **Equação de calor**
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ . \tag{53}$$
Esta equação surge em problemas apresentados pelos processos de difusão do calor, da filtração de líquidos ou de gases num meio poroso (por exemplo, a filtração do petróleo e dos gases nos grés sob cobertura). É a equação mais simples do tipo *parabólico.*

Método de separação das variáveis na resolução da equação de onda.[13]
Consideremos a formulação clássica do problema de oscilação livre de uma corda com extremidades fixas nos pontos $(0,0)$ e $(0,l)$. Seja $u(x,t)$ o deslocamento dum ponto de corda cuja abcissa é x no momento de tempo t. Um resultado conhecido da Física Matemática diz que quando as oscilações da corda são "pequenas", a função $u(x,t)$ satisfaz a equação diferencial (52), onde a é uma constante (dependente da própria corda e da sua extensão).
Suponhamos que, num momento inicial $t = 0$, a corda saiu do estado de repouso e tomou a posição descrita pela função $u = \varphi(x)$. Neste caso, a corda vai começar a oscilar sob uma força de tensão.
Para simplificar o modelo, suponhamos que, no momento inicial $t = 0$, os pontos da corda não têm nenhuma velocidade inicial.
O problema, então, reduz-se a procurar uma função $u(x,t)$, que satisfaz a equação (52), e nas *condições iniciais*

$$u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = 0\ .$$

Estas condições iniciais significam que, no momento $t = 0$, a corda tem uma dada forma e que a velocidade inicial dos pontos da corda é igual ao zero. Além disso, temos as *condições de fronteira*

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\ ,$$

que indicam que os limites da corda estão em repouso.
A ideia básica do método de Fourier consiste em procurar uma solução particular, da equação diferencial (52), expressa na forma de produto de duas funções, $X(x)$ e $T(t)$, cada uma de uma só variável, i.e.,

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{54}$$

Substituindo (54) na equação diferencial (52), obtemos

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t),$$

ou, de modo equivalente,

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

[13]Este método é também chamado **Método de Fourier**, embora, para o caso de oscilações de uma corda, tal método tenha sido proposto por D. Bernoulli (ver Apêndice B).

O primeiro membro desta equação não depende de x e o segundo membro da equação não depende de t. Tal significa que ambas as funções não dependem nem de x, nem de t, i.e., são iguais a uma constante. Admitamos que esta constante é negativa (mais a frente vamos ver o significado deste pressuposto) e igual a $-\lambda$, com $\lambda > 0$ fixo. Temos

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \ ,$$

donde

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{55}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{56}$$

Resolvendo estas duas últimas equações diferenciais, obtemos

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \tag{57}$$

$$T(t) = C\cos(a\sqrt{\lambda}t) + D\sin(a\sqrt{\lambda}t), \tag{58}$$

onde A, B, C, D são constantes que vamos determinar, utilizando as condições de fronteira e as condições iniciais.
De (54), (57) e (58) temos :

$$u(x,t) = (A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x))(C\cos(a\sqrt{\lambda}t) + D\sin(a\sqrt{\lambda}t)).$$

O segundo factor do lado direito não pode ser igual ao zero (caso contrário $u \equiv 0$, o que contradiz as condições iniciais do problema). Logo, para satisfazer as condições de fronteira, devemos ter $X(0) = 0$ e $X(l) = 0$.
Supondo em (57) $x = 0$ e $x = l$, obtemos

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0,$$

$$0 = A\cos(\sqrt{\lambda}l) + B\sin(\sqrt{\lambda}l),$$

donde

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \ .$$

Na última fórmula $B \neq 0$ (caso contrário $X(x) \equiv 0$ e, logo, $u \equiv 0$). Por isso, $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$, i.e., para algum n inteiro, $\sqrt{\lambda}l = n\pi$, ou seja, $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$. Note-se que $n \neq 0$, caso contrário teríamos $X \equiv 0$ e, portanto, $u \equiv 0$. Assim,

$$X(x) = B\sin(\sqrt{\lambda}x) = B\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Agora fica claro porquê λ deve ser positivo. Se fosse $\lambda < 0$ a equação (55) podia ser escrita na forma $X''(x) - (-\lambda)X(x) = 0$, pelo que

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

mas a solução, nesta forma, não pode satisfazer simultaneamente às condições de fronteira e às condições iniciais, excepto no caso $A = B = 0$. Realmente, das condições $X(0) = A + B = 0$ e $X(l) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} = 0$, temos $A = B = 0$.
Vamos agora substituir na equação (58) os valores de λ encontrados anteriormente. Para todos os valores das constantes C e D, as funções

$$C\sin(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{an\pi}{l}t), \qquad \text{e} \qquad D\sin(\frac{n\pi}{l}x)\ \cos(\frac{an\pi}{l}t) \tag{59}$$

são soluções de (52) que satisfazem as condições de fronteira. Uma vez que a equação (52) é linear, a soma das funções (59) também é solução de (52) e, logo, deve satisfazer as condições de fronteira.
Consideremos um conjunto infinito de funções definidas por

$$u_n(x,t) = \sin(\frac{n\pi}{l}x)(C_n\cos(a\frac{n\pi}{l}t) + D_n\sin(a\frac{n\pi}{l}t)),$$

onde os valores das constantes C_n e D_n garantem que a soma destas funções satisfazem também as condições iniciais. Procuraremos a solução da equação (52) na forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{l}x)\big(C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t) + D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)\big). \tag{60}$$

Notemos que o segundo membro de (60) é uma série que, só no caso de convergência, pode ser uma solução da equação (52). As séries obtidas derivando (60) duas vezes, em ordem a x e em ordem a t, devem também convergir.
Supondo $t = 0$ em (60), temos

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Se a função f admite um desenvolvimento em série de Forier de senos no intervalo $[0,l]$, então podemos escolher os valores de coeficientes C_n na forma

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx$$

para garantir que a condição inicial $u(x,0)=f(x)$ é verificada.
Derivando (60) em ordem a t, obtemos

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\big(-C_n\frac{an\pi}{l}\sin(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\frac{an\pi}{l}\cos(\frac{an\pi}{l}t)\big),$$

e, supondo na última expressão $t=0$, temos

$$\varphi(x):=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)\frac{an\pi}{l}.$$

Se a função φ, no intervalo $[0,l]$, admite um desenvolvimento em série de Fourier de seno, então podemos escolher os valores $D_n\frac{an\pi}{l}$ iguais aos coeficientes desse desenvolvimento, i.e.,

$$D_n\frac{an\pi}{l}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx,$$

donde

$$D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx.$$

Nota. Para garantir a validade do procedimento efectuado deve estudar-se a convergência da série (60) e das séries obtidas derivando (60) duas vezes, em ordem a x e em ordem a t.

Exemplo 5. *Resolvamos a equação de oscilação da corda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sujeita às condições de fronteira

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \tag{61}$$

e às condições iniciais

$$u(x,0)=f(x)=\sin^3 x \quad , \quad u'_t(x,0)=\varphi(x)=0. \tag{62}$$

De (60) temos

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\big(C_n\cos(\frac{an\pi}{l}t)+D_n\sin(\frac{an\pi}{l}t)\big),$$

onde C_n são os coeficientes do desenvolvimento da função f em série de Fourier de senos e D_n são os coeficientes do desenvolvimento da função φ em série de Fourier de senos.
É fácil de verificar (verifique!) que o desenvolvimento da função f em série de Fourier de seno é

$$f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x),$$

donde $C_1 = \frac{3}{4}$, $C_3 = -\frac{1}{4}$ e os restantes coeficientes de (60) são nulos. De (62) é evidente que os coeficientes D_n devem ser nulos.
Então, neste caso,

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\sin(\frac{\pi x}{l})\cos(\frac{a\pi}{l}t) - \frac{1}{4}\sin(\frac{3\pi x}{l})\cos(\frac{3a\pi}{l}t).$$

A série obtida é uma soma finita, por isso não há necessidade de provar a convergência desta série e a validade da sua derivação termo a termo.

Nota. A aplicação das series de Fourier na resolução da equação de condução de calor também é baseada na separação de variáveis, mas utiliza a noção de integral de Fourier. A descrição do método de resolução dessa equação pode ser encontrada, por exemplo, em [3].

Apêndice B: As origens das séries de Fourier

(Adaptado de [12], [4])

A história das séries de Fourier começou muitos anos antes do nascimento de Jean Baptiste Joseph Fourier e continuou muitos anos após a sua morte, envolvendo vários matemáticos ilustres.
Em 1713, Taylor analisava a vibração da corda de comprimento L pressa nas suas extremidades e averiguava o período das suas oscilações. Com base nas suas experiências, ele deduziu a equação da corda, de forma implícita, obtendo uma equação que se assemelhava bastante à equação (52). Taylor chegou à conclusão que se se considerasse o movimento da corda inteira, em cada instante de tempo a corda desenharia um arco sinusoidal, sendo esta apenas uma das formas possíveis. A seguir, tendo dividido a mesma corda em n (≥ 2) partes iguais, e aplicando o mesmo raciocínio à cada uma destas partes, Taylor concluiu que afinal, a posição da corda pode ser representada pelos n sucessivos arcos sinusoidais.
Em 1747 D'Alembert[14] e, independente dele, em 1748 Euler, pela primeira vez, formularam a equação da corda na forma (52), tendo representado a sua solução na forma

$$y(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at)\ , \tag{63}$$

com funções arbitrárias φ e ψ. Estudando as propriedades dessas funções, baseadas nas condições da fronteira e nas condições iniciais para a equação (52), Euler concluiu que a equação da corda pode ser reescrita na forma

$$y(x,t) = \varphi(x+at) + \varphi(x-at)\ ,$$

com φ função par, duas vezes diferenciável e periódica de período 2π. Euler caracterizou esta função desconhecida como "serpentina".
Notemos que, embora as soluções formais da equação diferencial (52) encontradas por Euler e por D'Alembert tenham coincidido, existia um desacordo entre os dois cientistas sobre quais as funções que deveriam ser consideradas em (63).
Depois da publicação dos estudos de Euler e D'Alembert sobre as oscilações da corda,

[14]**Jean de Rond D'Alembert** (1717-1783) – matemático, físico e filósofo frances. Autor do teorema fundamental da álgebra, descobriu e provou o ilustre princípio de dinâmica chamado princípio de D'Alembert que aplicou no estudo de vários problemas relacionados com o movimento e equilíbrio dos fluídos, no estudo do movimento da Terra em torno do Sol entre outros. D'Alembert contribuiu na teoria das equações e dos sistemas de equações diferenciais, definiu a noção do limite e estabeleceu um critério de convergência de séries.

em 1753 Daniel Bernoulli[15] apresentou o seu trabalho sobre o mesma tema. Lembrando que Taylor já tinha falado sobre a existência de um número infinito de formas de oscilação de uma corda e baseando nas suas observações físicas, Bernoulli afirmou que todas estas oscilações se efectuavam em simultâneo e que, de facto, a função que representa a posição da corda é uma mistura (ou sobreposição) de diferentes oscilações. Assim, Bernoulli concluiu que todas as soluções daquela equação são da forma

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x)\cos(\frac{ck\pi}{L}t), \tag{64}$$

e que satisfazem a condição inicial

$$f(x) = y(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x),$$

onde

- $y(x,t)$ representa o deslocamento vertical da corda na posição vertical x, no instante t para $0 \leq x \leq L$;
- c é uma constante determinada pela densidade da tensão da corda ($c^2 = \frac{\text{tensão}}{densidade}$);
- $f(x)$ representa a posição inicial vertical da corda com $f(0) = f(L) = 0$;
- k é um inteiro positivo.

Notemos que o próprio Bernoulli não sabia se a solução que ele encontrou era a solução geral ou não. O argumento principal que ele usava para não aceitar as soluções de Euler e de D'Alembert era que ele não podia imaginar o significado físico daquelas soluções. Euler contestou a afirmação de Bernoulli e apontou que a existência da solução na forma geral (64) implicaria que uma função arbitrária f, definida em $0 \leq x \leq L$, com $f(0) = f(L) = 0$, poderia também ser representada por uma série de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \; . \tag{65}$$

[15]**Daniel Bernoulli**(1700-1782) – matemático, mecânico e fisiólogo suíço. Nascido na Holanda, membro de uma família de famosos cientistas (ele era filho de Johann Bernoulli e sobrinho do Jacob Bernoulli), Daniel Bernoulli passou a maior parte da sua vida em Basel (Suíça). Na área da matemática, Daniel Bernoulli é autor de um método de resolução numérica de equações algébricas, por meio de séries recorrentes, de vários trabalhos na teoria das séries e das equações diferenciais ordinárias, de estudos sobre a dinâmica de líquidos e gases, de estudos nas áreas de probabilidade e estatística com aplicações em astronomia, entre outros.

Euler pensou que tal seria absurdo porque, primeiro, a curva inicial, que descrevia a posição da corda, em princípio podia não admitir nenhuma representação analítica e, portanto, a equação (52) também não admitiria; segundo, por causa das propriedades especiais das funções envolvidas na série de senos (65), tais como serem funções ímpar em x e periódicas de período $2L$. Euler deu o exemplo da função $f(x) = x(L - x)$ é solução da equação (52) e não possui as propriedades mencionadas. O argumento de Euler é válido se se considerar a função f em todo o $\mathbb{R}$ mas, no caso do problema da corda, esta função f é definida somente no intervalo $[0, L]$ onde aquelas propriedades podem não aparecer ainda. Notemos que, na época de Euler, era natural pensar que se duas expressões analíticas têm os mesmos valores num intervalo, então elas são idênticas. Euler afirmava que a solução de Bernoulli era um caso especial da solução por ele encontrada. Bernoulli não foi capaz de responder a Euler, não conseguindo produzir uma fórmula para os coeficientes b_n em termos de f, mas insistia que a equação (65) descreve todas as possíveis curvas: tendo um número infinito de coeficientes, é possível "obrigar"o gráfico dessa equação a passar por um número qualquer de pontos dados. Mais paradoxal é o facto que, nesse tempo (1754), as fórmulas para os coeficientes já tinham sido descobertas pelo próprio Euler, no decurso de uma investigação não relacionada com este assunto. Euler, como estava predisposto a rejeitar a solução encontrada por Bernoulli, nunca se apercebeu da possível revelação dos seus resultados então alcançados com os resultados de Bernoulli (Euler estava a trabalhar com co-senos em vez de senos).
D'Alembert também não aceitava a solução de Bernoulli e insistia na sua solução. Ele afirmava que mesmo se a função f está definida por uma expressão analítica, ela não deve, necessariamente, satisfazer a lei indicada pelo Bernoulli. Assim, D'Alembert chegou a contradizer-se a si mesmo, recusando também uma solução que satisfazia uma condição que ele próprio introduziu: todas as posições diferentes da corda devem ser incluídas na mesma equação.
Assim, o desacordo não resolvido entre Bernoulli, por um lado, e Euler e D'Alembert, por outro, impediu o desenvolvimento das série de Fourier meio século antes de Fourier.
Os estudos de Fourier foram dedicados à teoria matemática de condução de calor, tendo considerado a representação de funções periódicas por meio de séries trigonométricas. No seu livro *Théorie Analutique de la Chaleur*, publicado em 1822, Fourier apresentou vários exemplos de representações de funções em séries trigonométricas. Fourier estabeleceu as fórmulas integrais para os coeficientes do desenvolvimento trigonométrico de uma função tendo-o feito da mesma forma como, no seu tempo, Euler o fez utilizando a integração termo a termo. Fourier aplicou essas fórmulas a diferentes tipos de funções, incluindo funções descontínuas e definidas pelos ramos.

Fourier ficou convencido que o desenvolvimento era possível para todas as funções, mas não conseguiu (embora estivesse muito perto) provar a convergência das séries trigonométricas para as funções correspondentes. Embora os métodos aplicados por Fourier tinham encontrado muitas aplicações na Física Matemática, elas inicialmente não foram muito populares. Durante o período de 1823-1827, Poisson[16] e Cauchy[17] demonstraram condições suficientes para a representação em série de Fourier de certas classes de funções, mas as tentativas de construir condições de convergência mais gerais não tinham muito sucesso. Mais tarde, veio a observar-se que eles tinham imposto condições desnecessariamente fortes.
Dirichlet[18] foi o primeiro matemático a dar, em 1829, uma demonstração correcta da convergência das séries de Fourier. Essa demonstração tem por base uma ideia do próprio Fourier. Poucos anos depois (1834-1835) Lobatchevski[19] apresentou um outro resultado sobre o desenvolvimento em séries de Fourier de funções que satisfazem outras condições que não as condições de Dirichlet. As condições obtidas por Dirichlet e Lobatchevski são aplicáveis a diferentes classes de funções, por isso uma não pode substituir a outra.
Mais tarde foram estabelecidas várias outras condições suficientes mais gerais de con-

[16]**Simeon Denis Poisson** (1781-1840) – matemático frances, aluno de Lagrange. O nome de Poisson está ligado a várias áreas da matemática: distribuição de Poisson em probabilidades, integral de Poisson, equação de Poisson na teoria de potenciais, parêntesis de Poisson em equações diferenciais; raio de Poisson na teoria da elasticidade; constante de Poisson em electricidade, etc.. Embora a importância do seu contribuição para a matemática não tenha sido suficientemente reconhecida na França, nem durante a sua vida, nem após a sua morte, regista-se que grandes matemáticos do mundo continuaram os estudos começados por Poisson e desenvolveram as suas ideias, não deixando que o nome de Poisson fosse esquecido.

[17]**Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) – matemático e mecânico francês. Autor de cerca de 800 trabalhos importantes em análise real e complexa, física matemática e mecânica teórica. Os seus estudos em teoria da elasticidade e teoria da luz levaram-o a desenvolver novas técnicas matemáticas, tais como a transformadas de Fourier, a diagonalização de matrizes e o cálculo de resíduos. Cauchy foi o primeiro a apresentar um estudo rigoroso sobre as condições de convergência das séries; foi ele quem, pela primeira vez, definiu função complexa de variável complexa.

[18]**Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) – matemático alemão de origem belga. Deixou contributos valorosos em teoria de números, análise e mecânica. Sendo autor dos primeiros estudos rigorosos sobre as séries trigonométricos e as séries de Fourier, foi o primeiro matemático quem encontrou e provou as condições suficientes da convergência destas séries e usou as séries de Fourier para representar funções. É considerado o fundador da análise de Fourier.

[19]**Nikolai Ivanovitch Lobachevski** (1792-1856) – matemático e astrónomo russo. Autor de estudos importantes em várias áreas da matemática (estudos de diferentes tipos de continuidade, diferenciabilidade, planimetria e estereometria). É um dos fundadores do novo sistema geométrico, a geometria não-euclidiana. A maioria das suas teorias matemáticas inovadoras não foram devidamente reconhecidos durante a sua vida.

vergência das séries de Fourier. Entre trabalhos dedicados ao desenvolvimento do teoria das séries trigonométricos, são também de referir os resultados de Riemann[20], Heine[21] e Cantor[22]. O último provou, em 1870, o teorema sobre a unicidade do desenvolvimento de uma função em série trigonométrica. Cantor provou também que o teorema sobre a unicidade é válido mesmo no caso do intervalo dado conter os pontos para os quais não se sabe nada, nem sobre a soma da série, nem sobre a convergência da série.

Mais tarde, foi demonstrado também que os coeficientes de tal desenvolvimento único são os coeficientes determinados pelos fórmulas de Euler-Fourier (caso os integrais nestas fórmulas existam). Assim, foi fundamentado o papel especial das séries de Fourier na família das séries trigonométricas.

[20]**Georg Friedrich Bernard Riemann** (1826-1866) – matemático alemão. Introduziu os métodos da topologia na teoria das funções complexas. Nos seus estudos relacionados com a representação de funções em séries trigonométricas, Riemann definiu as condições de integrabilidade e introduziu o que, hoje em dia, chamamos o integral de Riemann. Na sua ilustre apresentação sobre os fundamentos da geometria riemanniana, introduziu uma série das novas noções, algumas das quais só foram totalmente percebidas dezenas de anos mais tarde. Einstein utilizou as técnicas matemáticas e geométricas inventadas por Riemann para estabelecer, formalmente, as suas ideias físicas.

[21]**Henrich Eduard Heine** (1821-1881) – matemático alemão. Completou a formulação da noção de continuidade uniforme e provou o teorema clássico sobre a continuidade uniforme das funções. A sua área de interesse especial foi a teoria das funções esféricas.

[22]**Georg Cantor** (1845-1918) – matemático alemão. Começando os seus estudos das séries trigonométricas, ele definiu os números irracionais em termos de sucessões convergentes de números racionais. Mostrou que o conjunto dos números racionais é numerável, chegou à definição de infinito e transfinito (conjunto continuum) e mostrou que entre infinito existem os conjuntos numeráveis e os conjuntos continuum. Cantor construiu e fundamentou a teoria dos conjuntos infinitos que é uma base da análise matemática moderna.

Referências

[1] Bois-Reumond, P. (1873). *Ueber die Fourierschen Reihen*, Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen 21, 571-582.

[2] Edwards, R.E. (1979). *Fourier Series. A Modern Introduction*, 2ª Ed., Vol. 1, Springer-Verlag. NY.

[3] Figueiredo, D.G. (1987). *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* Projeto euclides.

[4] Firkhtengol'ts G. (1965) *The fundamentals of Mathematical Analysis*, Vol 2, Pergamon. Oxford.

[5] Guidorizzi, H. L. (1988). *Um curso de Cálculo*, Vol. 4, Livros Técnicos e científicos Editora. Rio de Janeiro.

[6] Kaplan, W.(1972).*Cálculo Avançado.* Vol. 2. Editora Edgard Blücher. São Paulo.

[7] Krasnov, M. Kiselev, A. Makarenko, G., Shikin, E. (1990). *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. 2.Mir Publishers. Moscow.

[8] Krasnov, M. Kiselev, A. Makarenko, G. (1994). *Equações Diferenciais Ordinárias*, McGraw-Hill.

[9] Piscounov N. (1992). *Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. 2. Edições Lopes da Silva. Porto.

[10] Ray Wylie,C. (1975). *Advanced Engineering Mathematics*, McGraw-Hill. Kogakusha.

[11] Sokolnikoff, I. S., Redheffer, R. M. (1966). *Mathematics of Phisics and Modern Engineering*, McGraw-Hill. Kogakusha.

[12] Strichartz,R. (1995). *The Way of Analysis*, Jones and Bartlett Publishers. London.

Índice