Cálculo I

Fórmulas

Trigonometria

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\cdot \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$; $\cdot \cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$; $\cdot \tan x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$
$\Rightarrow$ Para Primitivas:
$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$

Polinómios

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

Limites

Limites Notáveis

$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, (p \in \mathbb{R})$

Limites Gerais

$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
Indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$:
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Indeterminações 1^∞:
Transformar em $\lim_{x\to a}[(1+K_0)^{\frac{1}{K_0}}]^{\text{infinito}}$, K_0 é infinitésimo

Derivadas

Derivadas Básicas

$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$(c\ f)' = c\ f'(x)$
$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$
$(fg)' = f'g + fg'$
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$
$(f^g)' = (e^{g \ln(f)})' = f^g (f' \frac{g}{f} + g' \ln(f))$

Derivadas Logarítmicas e Exponênciais

$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ x > 0$

$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$
$(e^{f(x)})' = f'(x) e^{f(x)}$
$([f(x)]^n)' = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
$(\ln[f(x)])' = \frac{f'(x)}{f(x)},\ f(x) > 0$

Derivadas Trigonométricas

$(\sin x)' = \cos x$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sec x)' = \sec x \tan x$
$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\csc x)' = -\csc x \cot x$
$(\operatorname{arccsc} x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
$(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x$
$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sin[f(x)])' = f'(x) \cos[f(x)]$
$(\cos[f(x)])' = -f'(x) \sin[f(x)]$
$(\tan[f(x)])' = f'(x) \sec^2[f(x)] = \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$

Integrais

Integrais Básicos

$\int c \cdot f(x)\ dx = c \int f(x)\ dx, c \in \mathbb{R}$
$\int f(x) \pm g(x)\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$
$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),\ F(x) = \int f(x)\ dx$
$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$

Integrais Polinomiais

$\int dx = x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int k\ dx = kx + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$ e $C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{ax+b}\ dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ dx = \ln[\varphi(x)] + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \varphi'(x)[\varphi(x)]^a\ dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + C,\ a \neq -1$ e $C \in \mathbb{R}$

Integrais Trigonométricos

$\int \cos x\ dx = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \sin x\ dx = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \sec^2 x\ dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \csc^2 x\ dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\arccos x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = -\operatorname{arccot} x + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\int \varphi'(x) \cos[\varphi(x)]\ dx = \sin \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \varphi'(x) \sin[\varphi(x)]\ dx = -\cos \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)}\ dx = \tan \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)}\ dx = -\cot \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}\ dx = \arcsin \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}\ dx = -\arccos \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\ dx = \arctan \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\ dx = -\operatorname{arccot} \varphi(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Integrais Exponênciais/Logarítmicos

$\int e^x\ dx = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\int \varphi'(x) e^{\varphi(x)}\ dx = e^{\varphi(x)} + C,\ C \in \mathbb{R}$

Primitivação por partes

$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx$
Nota: $d\varphi(x) = \varphi'(x)\ dx$
$\rightarrow \int f(x)g'(x)\ dx = \int v\ du = uv - \int u\ dv$

I

$$\left.\begin{matrix} \int P_k(x)\sin(bx)\ dx \\ \int P_k(x)\cos(bx)\ dx \\ \int P_k(x)\ e^{ax}\ dx \end{matrix}\right\} \quad u = P_k(x) \quad v' = \begin{cases} \cdot \sin(bx) \\ \cdot \cos(bx) \\ \cdot\ e^{ax} \end{cases}$$

II

$$\left.\begin{matrix} \int P_k(x)\ln(bx)\ dx \\ \int P_k(x)\arcsin x\ dx \\ \int P_k(x)\arccos x\ dx \\ \int P_k(x)\arctan x\ dx \\ \int P_k(x)\operatorname{arccot} x\ dx \end{matrix}\right\} \quad u = \begin{cases} \cdot \ln(bx) \\ \cdot \arcsin x \\ \cdot \arccos x \\ \cdot \arctan x \\ \cdot \operatorname{arccot} x \end{cases} \quad v' = P_k(x)$$

III - 2 vezes por partes

$$\left.\begin{matrix} \int e^{ax}\sin(bx)\ dx \\ \int e^{ax}\cos(bx)\ dx \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \text{Hipótese 1} \\ u = e^{ax},\ v' = \begin{cases} \cdot \sin(bx) & (1) \\ \cdot \cos(bx) & (2) \end{cases} \\ \text{Hipótese 2} \\ u = \begin{cases} \cdot \sin(bx) \\ \cdot \cos(bx) \end{cases},\ v' = e^{ax} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \end{matrix}$$

Primitivação de Funções Racionais (por decomposição)

Função Racional: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, P e Q polinómios de coeficientes reais.
·Função Racional **Própria** $\rightarrow \text{gr}(P(x)) < \text{gr}(Q(x))$
·Função Racional **Imprópria** $\rightarrow \text{gr}(P(x)) \geq \text{gr}(Q(x))$

0. Função Racional Imprópria → Polinómio+F. R. Própria
1. Resolver $Q(x) = 0$, decompondo-se $Q(x)$ em :
   - Constantes (a)
   - $(x-R)^l,\ l \in \mathbb{N} \rightarrow l-$ Mult. de Raizes Reais
   - $(x^2+px+q)^k,\ k \in \mathbb{N} \rightarrow k-$Mult. de Raizes $\alpha \pm i\beta$

   $Q(x) = a(x-R_1)^{l_1} \cdot (x-R_2)^{l_2} \cdot ... \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{k_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{k_2} \cdot ...$
2. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x-R_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{k_1} \cdot ...}$
   - Determinar:
     $\frac{A_1}{x-R_1} + \frac{A_2}{(x-R_1)^2} + \frac{A_3}{(x-R_1)^3} + ... + \frac{A_{l_1}}{(x-R_1)^{l_1}}$
     n° de parcelas $= l_1$ (multiplicidade)
   - Determinar:
     $\frac{E_1+D_1x}{x^2+p_1x+q} + \frac{E_2+D_2x}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{E_{k_1}+D_{k_1}x}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}$
     n° de parcelas $= k_1$ (multiplicidade)

   $\Longrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} =$ soma de todas as parcelas
3. Calcular valores $A_1, ..., A_{l_1}$ e $E_1, D_1, ..., E_{k_1}, D_{k_1}$ através do método dos coeficientes indeterminados.

Primitivas de Funções Racionais

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{(x\pm b)^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x\pm b}{a}) + C,\ C \in \mathbb{R}$
Se $\exists \int f(x)\ dx = F(x) + C$
$\Rightarrow \int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ C \in \mathbb{R}$

$\int \frac{1}{[\varphi(x)]^2-a^2}\varphi'(x)\ dx = \frac{1}{2}\ln|\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}| + C,\ C \in \mathbb{R}$

Primitivação por Mudança de Variável

Seja f uma função contínuma em $[a,b]$ e $x = \varphi(t)$ uma aplicação com derivada contínua e que não anula:
$P_x(f(x)) = P_t(f(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)}$
$\rightarrow \int f(x)\ dx = \int f(\varphi(t))\ d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}$

Substituições

Primitivas	Substituição
$\int f(e^x)\ dx$	$t = e^x \Rightarrow x = \ln t$
$\int f(\ln x)\ dx$	$t = \ln x \Rightarrow x = e^t$
$\int f(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}, ...)\ dx$	$t = x^{\frac{1}{m}} \Rightarrow x = t^m$, com $m = m.m.c.(q, s, ...)$
$\int f(x, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, ...)\ dx$	$t = (ax+b)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow ax+b = t^m$, com $m = m.m.c.(q, s, ...)$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, $b^2-4ac > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, α é raíz de ax^2+bx+c

Primitivação de Funções Trigonométricas

1. $\int f(\sin^k x, \cos^m x)\ dx$
   (a) $k-$ par, $m-$ ímpar
   substituição $t = \sin x$
   (b) $k-$ ímpar, $m-$ par
   substituição $t = \cos x$
   (c) $k,\ m-$ ímpares
   substituição $t = \sin x$ ou $t = \cos x$
   + fórm.: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
   (d) $k,\ m-$ pares
   "baixar" ordem de $\sin x$ e $\cos x$:
   $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$
   $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$
2. $\int f(\tan^k x)\ dx$ ou $\int f(\cot^k x)\ dx$
   Fórmulas:
   - $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
   - $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
3. $\int f(\sin x,\ \cos x)\ dx,\ \int f(\tan x)\ dx,\ \int f(\cot x)\ dx$
   Substituição "Universal":
   $t = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$

Primitivação de Funções Irracionais

→ Substituir usando Fórmulas Trigonométricas

1. $\int f(\sqrt{a^2-b^2x^2})\ dx$
   $\sqrt{a^2-b^2x^2} = \sqrt{a^2(1-(\frac{b}{a}x)^2)} = a\sqrt{1-(\frac{b}{a}x)^2}$
   Subst.: $\frac{b}{a}x = \sin t \Rightarrow dx = \frac{a}{b}\cos t\ dt$
   $\int f(\sqrt{a^2-b^2x^2})\ dx = \int f(a\sqrt{1-\sin^2 t}) \cdot \frac{a}{b} \cdot \cos t\ dt$
   $\Longrightarrow \int f(a \cdot \cos t) \cdot \frac{a}{b}\cos t\ dt + C,\ C \in \mathbb{R}$
2. $\int f(\sqrt{a^2+b^2x^2})\ dx$
   $\sqrt{a^2+b^2x^2} = \sqrt{a^2(1+(\frac{b}{a}x)^2)} = a\sqrt{1+(\frac{b}{a}x)^2}$
   Subst.: $\frac{b}{a}x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos^2 t}\ dt$
   $\int f(\sqrt{a^2+b^2x^2})\ dx = \int f(a\sqrt{1+\tan^2 t}) \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\ dt$
   $\Longrightarrow \int f(a \cdot \frac{1}{\cos t}) \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\ dt + C,\ C \in \mathbb{R}$
3. $\int f(\sqrt{a^2x^2-b^2})\ dx$
   $\sqrt{a^2x^2-b^2} = \sqrt{b^2((\frac{a}{b}x)^2-1)} = b\sqrt{(\frac{a}{b}x)^2-1}$
   Subs.: $\frac{a}{b}x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\ dt$
   $\int f(\sqrt{a^2x^2-b^2})\ dx = \int f(b\sqrt{(\frac{1}{\cos t})^2-1}) \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\ dt$
   $\Longrightarrow \int f(b\tan t) \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\ dt + C,\ C \in \mathbb{R}$

Integrais de Riemann

Integral de Riemann é o limite da soma de Riemman.
Soma de Riemann:
$\text{Sf}(P, C) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
$\Longrightarrow$ Integral de Riemann $= \lim_{x\rightarrow\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = I$
$I = \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \text{Sf}(P, C)$

$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

Geometria de integral de Riemann

$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} -$ integrável, $a < b$

1. $f(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$
   $I = \int_a^b f(x)\ dx$
2. $c \in]a,b[: f(c) = 0$
   $I = \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$
3. $f, g : [a,b] - \mathbb{R} -$ integráveis, e $f > g,\ \forall x \in [a,b]$
   $I = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$

Propriedades

$f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} -$ integráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

· $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\ dx = \alpha\int_a^b f(x)\ dx + \beta\int_a^b g(x)\ dx$
· Se $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$
· Se $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$
· Se $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$
· Se $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b]$
  $\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$
· $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

Critérios de Integrabilidade

Condição Necessária

Se $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável (no sentido de Riemann)
$\Longrightarrow f$ é limitada em $[a,b]$
$*Importante* \Rightarrow$ Se f não é limitada em $[a,b] \Rightarrow$
f não é integrável em $[a,b]$ (no sentido de Riemann)

Condições Suficientes

1. Se f é contínua em $[a,b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$
2. Se f é limitada em $[a,b]$ e descontínua apenas num número finito de pontos de $[a,b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$
   Ou:
   Se f é limitada em $[a,b]$ e contínua por partes em $[a,b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$

3. Se f é monótona em $[a,b] \Rightarrow f$ é integrável em $[a,b]$
4. Se f é integrável em $[a,b]$ e g apenas difere de f num número finito de pontos de $[a,b] \Rightarrow g$ é integrável em $[a,b]$ e:
$\int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$

Teorema Fundamental de Cálculo Integral

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, podemos definir uma nova função $F'(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, com $x \in [a,b]$.

Teorema I

Seja f integrável em $[a,b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt,\ x \in [a,b]$
$\Longrightarrow F$ é contínua em $[a,b]$.

Teorema II

Se:

- f é integrável em $[a,b]$,
- f é contínua em $c \in [a,b]$,
- $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$

$\Longrightarrow F$ é diferenciável em $c \in [a,b]$ e $F'(c) = f(c)$

Na prática:
Se f é integrável e contínua em $[a,b]$ e
$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \Rightarrow F'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$

Nota: $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\ dt$, com $g(x) \in [a,b]$
$u = g(x) \Rightarrow G(u) = \int_a^u f(t)\ dt, u \in [a,b]$

Teorema do Valor Médio

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, então $\exists c \in [a,b]:$
$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)f(b-a)$

Fórmula de Barrow (ou de Newton-Leibniz)

$\int_a^b f(x)\ dx =?$ (integrál definido)

1. Primitivar
$\int f(x)\ dx = F(x)$ (apenas uma)
2. Substituir Limites de Integração
$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Integrais Impróprios

Integrais Impróprios da 1ª Espécie

- $f:[a,+\infty[\to \mathbb{R},\ f$ é integrável em $\forall [a,c] \subset [a,+\infty[,\ c \in \mathbb{R}$
$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\ dx$
- $f:]-\infty,b] \to \mathbb{R},\ f$ é integrável em $\forall [c,b] \subset]-\infty,b],\ c \in \mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\ dx$
- $f:]-\infty,+\infty[\to \mathbb{R},\ f$ é integrável em $\forall [a,b] \subset]-\infty,+\infty[,\ a,\ b \in \mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\ dx$

Se o limite existe (finito e único):
Integrál Impróprio Convergente, caso contrário, **divergente**.
Calcular ex.: $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\ dx$

1. Primitivar (apenas uma primitiva): $\int f(x) = F(x)$
2. Fórmula de Barrow: $F(x)|_a^c = F(c) - F(a)$
3. Calcular: $\lim_{c\to+\infty}[F(c) - F(a)]$

Integrais Impróprios da 2ª Espécie

- $f:[a,b[\to \mathbb{R},\ a,\ b \in \mathbb{R}$ e f ilimitada na vizinhança de b: $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$
$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to b^-} f(x)\ dx$
- $f:]a,b] \to \mathbb{R},\ a,\ b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to a^+} f(c)\ dx$
- $f:[a,b] \to \mathbb{R},\ a,\ b \in \mathbb{R}$ e $\exists c \in]a,b[: \lim_{x\to c^\pm} f(x) = \pm\infty$ (f não está definida em c)
$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{c^-} f(x)\ dx + \int_{c^+}^b f(x)\ dx$
$= \lim_{d\to c^-} \int_a^d f(x)\ dx + \lim_{s\to c^+} \int_s^b f(x)\ dx$

Integrais Impróprios da 3ª Espécie

Integral Impróprio da 1ª Espécie + Integral Impróprio da 2ª Espécie $\Rightarrow$ Separar em intervalos com apenas um dos tipos de Integrais Impróprios (1º ou 2º).

Propriedades dos Integrais Impróprios

1. Se:
   - $f,g:[a,b[\to \mathbb{R}$ com $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$
   - f,g - integráveis em $[\alpha,\beta] \subset [a,b[,\ \beta \in \mathbb{R}$
   - $\int_a^b f(x)\ dx$ e $\int_a^b g(x)\ dx$ - convergentes

   Então:
   $\int_a^b [\gamma f(x) + \eta g(x)]\ dx = \gamma \int_a^b f(x)\ dx + \eta \int_a^b g(x)\ dx$ - convergente
2. Se $\int_a^b |f(x)|\ dx$ - convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx$ - convergente absolutamente

Critério de Comparação

Se:

- $f,g:[a,b[\to \mathbb{R}, (b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty)$
- f,g - integráveis em $\forall [\alpha,\beta] \in [a,b[$
- $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a^*, b[, a \le a^* \le b$

1. Se $\int_a^b g(x)\ dx$ - convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx$ - convergente
2. Se $\int_a^b f(x)\ dx$ - divergente $\Rightarrow \int_a^b g(x)\ dx$ - divergente

Nota (Método II):
Se $f,g:[a,b[\to \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$ e $\lim_{x\to b^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ então:
$\int_a^b g(x)\ dx$ e $\int_a^b f(x)\ dx$ têm a mesma natureza.
$g(x)$ - é uma função primitivável escolhida para comparar com $f(x)$.

Notas Pessoais:

Extra - Fórmulas de Primitivação

Funções Racionais

$\int \frac{1}{(x+a)^2}\ dx = -\frac{1}{x+a} + C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int (x+a)^n\ dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C, n\neq -1,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x(x+a)^n\ dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} + C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \tan^{-1}x + C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{x}{a^2+x^2}\ dx = \frac12 \ln|a^2+x^2|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}\ dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{x^3}{a^2+x^2}\ dx = \frac12 x^2 - \frac12 a^2\ln|a^2+x^2|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\ dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\ dx = \frac{1}{b-a}\ln(\frac{a+x}{b+x})+C,\ a\neq b \text{ e } C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{x}{(x+a)^2}\ dx = \frac{a}{a+x}+\ln|a+x|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\ dx =$

$\frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C,\ C\in\mathbb{R}$

Raízes

$\int\sqrt{x-a}\ dx = \frac23(x-a)^{3/2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}\ dx = 2\sqrt{x\pm a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}\ dx = -2\sqrt{a-x}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sqrt{ax+b}\ dx = \left(\frac{2b}{3a}+\frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int (ax+b)^{3/2}\ dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{x}{\sqrt{x\pm a}}\ dx = \frac23(x\mp 2a)\sqrt{x\pm a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}\ dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\arctan(\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a})+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sqrt{\frac{x}{a+x}}\ dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right]+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\sqrt{ax+b}\ dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\ dx =$

$\frac12 x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac12 a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\ dx = \frac12 x\sqrt{a^2-x^2}+\frac12 a^2\arctan\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\ dx = \frac13\left(x^2\pm a^2\right)^{3/2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = \arcsin(\frac{x}{a})+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ dx = \sqrt{x^2\pm a^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = -\sqrt{a^2-x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\ dx =$

$\frac12 x\sqrt{x^2\pm a^2}\mp\frac12 a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+$

$\frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx^+c)}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx =$

$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx = \frac1a\sqrt{ax^2+bx+c}-$

$\frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C,\ C\in\mathbb{R}$

Logarítmos

$\int\ln ax\ dx = x\ln ax - x + C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\ln x\ dx = \frac12x^2\ln x - \frac{x^2}{4}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2\ln x\ dx = \frac13x^3\ln x-\frac{x^3}{9}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^n\ln x\ dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+C,\quad n\neq-1,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{\ln ax}{x}\ dx = \frac12(\ln ax)^2+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\frac{\ln x}{x^2}\ dx = -\frac1x-\frac{\ln x}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\ln(ax+b)\ dx = \left(x+\frac ba\right)\ln(ax+b)-x+C, a\neq0,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\ln(x^2+a^2)\ dx = x\ln(x^2+a^2)+2a\arctan\frac xa-2x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\ln(x^2-a^2)\ dx = x\ln(x^2-a^2)+a\ln\frac{x+a}{x-a}-2x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\ln\left(ax^2+bx+c\right)\ dx = \frac1a\sqrt{4ac-b^2}\arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}})-2x+$

$\left(\frac{b}{2a}+x\right)\ln\left(ax^2+bx+c\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\ln(ax+b)\ dx = \frac{bx}{2a}-\frac14x^2+\frac12\left(x^2-\frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b)+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\ln\left(a^2-b^2x^2\right)\ dx =$

$-\frac12x^2+\frac12\left(x^2-\frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2-b^2x^2\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int(\ln x)^2\ dx = 2x-2x\ln x+x(\ln x)^2+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int(\ln x)^3\ dx = -6x+x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6x\ln x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x(\ln x)^2\ dx = \frac{x^2}{4}+\frac12x^2(\ln x)^2-\frac12x^2\ln x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2(\ln x)^2\ dx = \frac{2x^3}{27}+\frac13x^3(\ln x)^2-\frac29x^3\ln x+C,\ C\in\mathbb{R}$

Exponênciais

$\int e^{ax}\ dx = \frac1ae^{ax}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int xe^x\ dx = (x-1)e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int xe^{ax}\ dx = \left(\frac xa-\frac1{a^2}\right)e^{ax}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2e^x\ dx = \left(x^2-2x+2\right)e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2e^{ax}\ dx = \left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac2{a^3}\right)e^{ax}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^3e^x\ dx = \left(x^3-3x^2+6x-6\right)e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^ne^{ax}\ dx = \frac{x^ne^{ax}}{a}-\frac na\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int xe^{-ax^2}\ dx = -\frac1{2a}e^{-ax^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

Funções Trigonométricas

$\int\sin ax\ dx = -\frac1a\cos ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sin^2ax\ dx = \frac x2-\frac{\sin2ax}{4a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sin^3ax\ dx = -\frac{3\cos ax}{4a}+\frac{\cos3ax}{12a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos ax\ dx = \frac1a\sin ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos^2ax\ dx = \frac x2+\frac{\sin2ax}{4a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos^3ax dx = \frac{3\sin ax}{4a}+\frac{\sin3ax}{12a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos x\sin x\ dx = \frac12\sin^2x+c_1 = -\frac12\cos^2x+c_2 =$

$-\frac14\cos2x+c_3+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos ax\sin bx\ dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)}-\frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a\neq b+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sin^2ax\cos bx\ dx =$

$-\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)}+\frac{\sin bx}{2b}-\frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sin^2x\cos x\ dx = \frac13\sin^3x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos^2ax\sin bx\ dx =$

$\frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)}-\frac{\cos bx}{2b}-\frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\cos^2ax\sin ax\ dx = -\frac1{3a}\cos^3ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sin^2ax\cos^2bx\ dx =$

$\frac x4-\frac{\sin2ax}{8a}-\frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)}+\frac{\sin2bx}{8b}-\frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sin^2ax\cos^2ax\ dx = \frac x8-\frac{\sin4ax}{32a}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\tan ax\ dx = -\frac1a\ln\cos ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\tan^2ax\ dx = -x+\frac1a\tan ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\tan^3ax dx = \frac1a\ln\cos ax+\frac1{2a}\sec^2ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec x\ dx = \ln|\sec x+\tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac x2\right)+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec^2ax\ dx = \frac1a\tan ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec^3x\ dx = \frac12\sec x\tan x+\frac12\ln|\sec x+\tan x|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec x\tan x\ dx = \sec x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec^2x\tan x\ dx = \frac12\sec^2x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec^nx\tan x\ dx = \frac1n\sec^nx+C, n\neq0,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\csc x\ dx = \ln\left|\tan\frac x2\right| = \ln|\csc x-\cot x|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\csc^2ax\ dx = -\frac1a\cot ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\csc^3x\ dx = -\frac12\cot x\csc x+\frac12\ln|\csc x-\cot x|+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\csc^nx\cot x\ dx = -\frac1n\csc^nx+C, n\neq0,\ C\in\mathbb{R}$

$\int\sec x\csc x\ dx = \ln|\tan x|+C,\ C\in\mathbb{R}$

Funções Trigonométricas e Monomiais

$\int x\cos x\ dx = \cos x+x\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\cos ax\ dx = \frac1{a^2}\cos ax+\frac xa\sin ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2\cos x\ dx = 2x\cos x+(x^2-2)\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2\cos ax\ dx = \frac{2x\cos ax}{a^2}+\frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\sin x\ dx = -x\cos x+\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\sin ax\ dx = -\frac{x\cos ax}{a}+\frac{\sin ax}{a^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2\sin x\ dx = (2-x^2)\cos x+2x\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x^2\sin ax\ dx = \frac{2-a^2x^2}{a^3}\cos ax+\frac{2x\sin ax}{a^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\cos^2x\ dx = \frac{x^2}4+\frac18\cos2x+\frac14x\sin2x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\sin^2x\ dx = \frac{x^2}4-\frac18\cos2x-\frac14x\sin2x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\tan^2x\ dx = -\frac{x^2}2+\ln\cos x+x\tan x+C,\ C\in\mathbb{R}$

$\int x\sec^2x\ dx = \ln\cos x+x\tan x+C,\ C\in\mathbb{R}$

Produtos de Funções Trigonométricas e Exponênciais

$\int e^x\sin x\ dx = \frac12e^x(\sin x-\cos x)$

$\int e^{bx}\sin ax\ dx = \frac1{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax-a\cos ax)$

$\int e^x\cos x\ dx = \frac12e^x(\sin x+\cos x)$

$\int e^{bx}\cos ax\ dx = \frac1{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax+b\cos ax)$

$\int xe^x\sin x\ dx = \frac12e^x(\cos x-x\cos x+x\sin x)$

$\int xe^x\cos x\ dx = \frac12e^x(x\cos x-\sin x+x\sin x)$