Exercícios de
Séries Numéricas e Funcionais

Adelaide Valente Freitas
Tatiana Tchemisova
Vera Kharlamova

Departamento de Matemática
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Prefácio

O presente texto corresponde à nossa publicação do ano 2003 CM03/D-05 "Exercícios de Séries Numéricas e Funcionais"e tem como objectivo a sua divulgação na net através do novo sistema de publicações dos Cadernos de Matemática para abranger um maior número de utilizadores.

Aveiro, 17 de Maio de 2007

Adelaide Freitas
Tatiana Tchemisova
Vera Kharlamova

Conteúdo

Parte I

Séries Numéricas

Capítulo 1

Sucessões de números reais

Noções básicas

Uma função real a definida em $\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & a_n \end{array},$$

designa-se por **sucessão** de números reais ou **sucessão numérica**, sendo usualmente denotada por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ou por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou ainda simplesmente por (a_n).

Diz-se que

- os números reais a_i, com $i \in \mathbb{N}$, são os **termos** da sucessão;
- i é a **ordem do termo** a_i;
- a_n é a expressão do **termo geral** da sucessão ou a_n é o n**-ésimo termo** da sucessão.

Uma sucessão (a_n) diz-se

- **crescente** , se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **estritamente crescente** , se $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente** , se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- **estritamente decrescente** , se $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se **monótona** e uma sucessão estritamente crescente ou estritamente decrescente diz-se **estritamente monótona**.

Uma sucessão (a_n) diz-se **limitada superiormente** se existir um número real M tal que $a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão (a_n) diz-se **limitada inferiormente** se existir um número real m tal que $a_n \geq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão (a_n) diz-se **limitada** se for limitada inferiormente e superiormente, isto é, se existirem constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tais que

$$m \leq a_n \leq M,$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Progressão aritmética e progressão geométrica

Uma sucessão de números reais (a_n) é uma **progressão aritmética** se existir um número real r tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Nestas circunstâncias,

- r é a *razão* da progressão aritmética;
- $a_n = a_1 + r(n-1)$ é a expressão do *termo geral* da progressão aritmética;
- $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ é a fórmula de cálculo da *soma dos n primeiros termos* da progressão aritmética.

Uma sucessão de números reais não nulos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma **progressão geométrica** se existir um número real $q \neq 0$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso,

- q é a *razão* da progressão geométrica;
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é a expressão do *termo geral* da progressão geométrica;
- a *soma dos n primeiros termos* da progressão geométrica calcula-se através da fórmula:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & , se \quad q \neq 1 \\ n a_1 & , se \quad q = 1. \end{cases}$$

Limite de uma sucessão

Diz-se que um número real l é o valor do **limite da sucessão** (a_n) se para cada $\varepsilon > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada termo a_n, com $n > p$, $n \in \mathbb{N}$, se tem $|a_n - l| < \varepsilon$. Nesse caso, escreve-se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

e diz-se que o limite da sucessão existe e é finito ou que a sucessão (a_n) é **convergente**.

Diz-se que o limite da sucessão (a_n) existe e é infinito, igual a $+\infty$ [igual a $-\infty$], se para todo $M \in \mathbb{R}$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada termo a_n, com $n > p$, se tem $a_n > M$ [$a_n < M$, resp.]. Nesse caso, escreve-se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad [\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \text{ , resp.}]$$

e diz-se que a sucessão (a_n) é **divergente**.
No caso de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ não existir diz-se também que a sucessão (a_n) é divergente.

Nota: Se f é uma função real de variável real tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, então o limite da sucessão numérica de termo geral $a_n = f(n)$ é igual a L (*i.e.*, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$).

Exercícios

1. Escreva os cinco primeiros termos da sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

   (a) $a_n = 1 - (0.2)^n$
   (b) $a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$
   (c) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$
   (d) $a_n = 2n$
   (e) $a_n = (2n)!$
   (f) $a_n = sen(\frac{n\pi}{2})$
   (g) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n \in \mathbb{N}$
   (h) $a_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i$
   (i) $a_n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^n$
   (j) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}\,\sqrt{n-k+1}}$

2. Escreva os 10 primeiros termos da sucessão de Fibonacci definida por:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n > 2.$$

3. Encontre a expressão do termo a_n de cada uma das seguintes sucessões, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

   (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
   (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$
   (c) $2, 7, 12, 17, \ldots$
   (d) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots$
   (e) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots$
   (f) $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

4. Averigúe se cada uma das sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com a_n dado, é convergente ou divergente, indicando o limite da sucessão em caso de convergência.

   (a) $a_n = n(n-1)$
   (b) $a_n = \frac{3+5n^2}{n+n^2}$
   (c) $a_n = \frac{n+1}{3n^4-1}$
   (d) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$
   (e) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$
   (f) $a_n = \frac{n}{1+\sqrt{n}}$
   (g) $a_n = sen(\frac{n\pi}{2})$

(h) $a_n = sen(n\pi)$

(i) $a_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n^2+1}$

(j) $a_n = \frac{3+(-1)^n}{n^2}$

(k) $a_n = \frac{ln(n^2)}{n}$

(l) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

(m) $a_n = ln(n+1) - ln(n)$

(n) $a_n = (1+3n)^{\frac{1}{n}}$

(o) $a_n = \frac{cos^2 n}{2^n}$

(p) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

(q) $a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$

(r) $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$

(s) $a_n = \sqrt[n]{n}$

5. Seja (a_n) uma sucessão de números reais convergente.

(a) Mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

(b) Se

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad n \geq 1 \ ,$$

determine o limite da sucessão.

6. Para cada uma das seguintes sucessões (a_n), dadas pelo seu termo geral, estude a sua monotonia e verifique se é limitada.

(a) $a_n = \frac{1}{5^n}$

(b) $a_n = \frac{1}{2n+3}$

(c) $a_n = \frac{n-1}{n}$

(d) $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$

(e) $a_n = cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

(f) $a_n = 1 - (\frac{3}{2})^n$

(g) $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$

(h) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$

(i) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2}$, $n \geq 2$

7. Calcule o limite da sucessão

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...$$

8. Sejam $a \in]-1,1[$ e $b \in \mathbb{R}$. Considere a sucessão (s_n) de termo geral
$$s_n = b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}).$$
Mostre que
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{b}{1-a}.$$

Soluções

1. (a) $a_1 = 0,8$, $a_2 = 0,96$, $a_3 = 0,992$, $a_4 = 0,9984$, $a_5 = 0,99968$
   (b) $a_1 = -3$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, $a_5 = -\frac{1}{40}$
   (c) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{5}{11}$, $a_5 = \frac{3}{7}$
   (d) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, $a_5 = 10$
   (e) $a_1 = 2$, $a_2 = 4!$, $a_3 = 6!$, $a_4 = 8!$, $a_5 = 10!$
   (f) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $a_5 = 1$
   (g) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{5}{8}$
   (h) $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$, $a_5 = -1$
   (i) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$, $a_3 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3$, $a_4 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4$,

   $a_5 = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^5$
   (j) $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}$

2. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$, $a_8 = 21$, $a_9 = 34$, $a_{10} = 55$

3. (a) $a_n = \frac{1}{2^n}$
   (b) $a_n = \frac{1}{2n}$
   (c) $a_n = 5n - 3$
   (d) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
   (e) $a_n = (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2}$
   (f) $a_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ ímpar} \\ 2 & , \quad n \text{ par} \end{cases}$

4. (a) divergente
   (b) convergente, 5
   (c) convergente, 0
   (d) convergente, 1
   (e) convergente, 0

(f) divergente

(g) divergente

(h) convergente, 0

(i) convergente, 0

(j) convergente, 0

(k) convergente, 0

(l) convergente, 0

(m) convergente, 0

(n) convergente, 1

(o) convergente, 0

(p) divergente

(q) convergente, 0

(r) convergente, 0

(s) convergente, 1

5. (a)

   (b) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

6. (a) monótona decrescente, limitada, $0 < a_n \leq \frac{1}{5}$

   (b) monótona decrescente, limitada, $0 < a_n \leq \frac{1}{5}$

   (c) monótona crescente, limitada, $0 \leq a_n < 1$

   (d) monótona crescente, limitada, $-\frac{1}{7} \leq a_n < \frac{2}{3}$

   (e) não é monótona, limitada, $-1 \leq a_n \leq 1$

   (f) monótona decrescente, não é limitada, $-\infty < a_n \leq -\frac{1}{2}$

   (g) não é monótona, limitada, $2 \leq a_n \leq \frac{7}{2}$

   (h) monótona crescente, não é limitada, $2 \leq a_n < +\infty$

   (i) monótona decrescente, limitada, $0 < a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

7. 2

8.

Capítulo 2

Séries de números reais

Noções básicas

Seja (u_n) uma sucessão numérica.
Uma expressão da forma:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{2.1}$$

é chamada **série numérica**, ou simplesmente **série**. Os números reais $u_1, u_2, ...$ são chamados **termos** da série. O número u_n é chamado **n-ésimo termo** ou **termo geral** da série.

Dado $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos da série (2.1),

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \ ,$$

define a **soma parcial de ordem** n da série (2.1). É evidente que:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \cdots, \quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n, \quad \cdots .$$

A sucessão (S_n) é chamada **sucessão das somas parciais** associada à série (2.1).

Diz-se que a série numérica (2.1) é **convergente** se existe e é finito

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S$$

e, nesse caso, o valor S chama-se **soma da série** (2.1).

Se $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \pm\infty$ ou se $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ não existe diz-se que a série (2.1) é **divergente**.

Determinar a natureza de uma série significa identificar se a série é convergente ou divergente.

Teorema 2.1 (Condição necessária de convergência de uma série) *Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente então* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Corolário 2.1 (Condição suficiente de divergência) *Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ *então a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *é divergente.*

Operações com séries

Considerem-se duas séries numéricas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.2}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{2.3}$$

Define-se **série soma** (**série diferença**), das séries (2.2) e (2.3), à série dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n), \quad \text{resp.}\right).$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer. Define-se **série produto por um escalar**, da série (2.2) pelo escalar α, à série dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n) \; .$$

Propriedade 2.1 *Se as séries (2.2) e (2.3) convergem e as suas somas são A e B, respectivamente, então a série soma* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, *a série diferença* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *e a série produto por um escalar* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n)$ *são convergentes e as suas somas são $A + B$, $A - B$ e αA, respectivamente.*

Propriedade 2.2 *Caso uma das séries, (2.2) ou (2.3), seja divergente e a outra convergente, então a série soma e a série diferença das séries (2.2) e (2.3) serão divergentes.*

Propriedade 2.3 *Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge então, para todo o $p \in \mathbb{N}$, a série* $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ *também converge.*

Propriedade 2.4 *A supressão dos termos nulos de uma série não altera a sua natureza (nem a sua soma no caso de convergência).*

Algumas séries numéricas conhecidas

Série geométrica

Uma série numérica da forma

$$\sum_{n=s}^{\infty} a^n, \text{ com } a \text{ constante real e } s \in \mathbb{N},$$

designa-se por **série geométrica**.
Os termos da série geométrica formam uma progressão geométrica de razão a e primeiro termo a^s.
A série geométrica é convergente se $|a| < 1$ sendo a sua soma igual a $S = \frac{a^s}{1-a}$.
Caso $|a| \geq 1$ a série geométrica diverge.

Série harmónica

A série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é conhecida por **série harmónica** ou série de Dirichlet.
A série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ com } p \in \mathbb{R} \;, \tag{2.4}$$

designa-se por **série harmónica de ordem** p.

Se $p > 1$ a série (2.4) é convergente.
Se $p \leq 1$ a série (2.4) é divergente.

Série de Mengoli

Uma série numérica da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+k}) \;, \tag{2.5}$$

para alguma sucessão de números reais (u_n) e para algum $k \in \mathbb{N}$, designa-se por **série de Mengoli** ou **série telescópica**.

A soma parcial de ordem n da série de Mengoli (2.5) é dada por

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+k}).$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+k}) = a$, com $a \in \mathbb{R}$, a série (2.5) será convergente sendo a sua soma igual a $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_k - a$.
Caso o limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+k})$ seja infinito ou não exista, a série (2.5) será divergente.

Exercícios

1. Escreva os quatro primeiros termos da sucessão das somas parciais (S_n) associada a cada uma das seguintes séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ln\ n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}[2+(-2)^n]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

2. Averigúe se a série dada é convergente ou divergente indicando a sua soma em caso em convergência.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-9}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}[1+(-1)^n]$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})^n]$

(m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-1)}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{2^n}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} cos(n\pi)$

(q) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^n}$

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})$

(s) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n})$

(t) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{5^n})$

(u) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ln\ (n+2)}{ln\ n}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} ln\ (1 + \frac{2}{n})$

(w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(x) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{1/(n-1)}} - \frac{1}{3^{1/n}} \right)$

(y) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(z) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{32n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

3. Será a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n-1)!})$ uma série de Mengoli? Justifique.

4. Mostre, por definição, que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, com $A, B \in \mathbb{R}$, então:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha A, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

5. Prove as propriedades 2.3 e 2.4

6. Calcule a soma de série soma das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}.$

Soluções

1. (a) $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$, $S_4 = 4$
   (b) $S_1 = 1$, $S_2 = \frac{4}{3}$, $S_3 = \frac{13}{9}$, $S_4 = \frac{40}{27}$
   (c) $S_1 = \frac{1}{ln\ 2}$, $S_2 = \frac{1}{ln\ 2} + \frac{1}{ln\ 3}$, $S_3 = \frac{1}{ln\ 2} + \frac{1}{ln\ 3} + \frac{1}{ln\ 4}$, $S_4 = \frac{1}{ln\ 2} + \frac{1}{ln\ 3} + \frac{1}{ln\ 4} + \frac{1}{ln\ 5}$
   (d) $S_1 = 0$, $S_2 = 6$, $S_3 = 0$, $S_4 = 18$
   (e) $S_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $S_2 = 1 - \frac{1}{3}$, $S_3 = 1 - \frac{1}{4}$, $S_4 = 1 - \frac{1}{5}$

2. (a) divergente
   (b) divergente
   (c) divergente
   (d) divergente
   (e) convergente, 1
   (f) divergente
   (g) convergente, 2
   (h) convergente, $\frac{2}{3}$
   (i) convergente, $\frac{1}{4}$
   (j) convergente, $\frac{1}{9}$
   (k) divergente
   (l) divergente
   (m) convergente, $\frac{7}{4}$
   (n) divergente
   (o) convergente, $\frac{1}{e-1}$
   (p) divergente
   (q) convergente, 4

(r) convergente, $\frac{3}{2}$

(s) convergente, $-\frac{3}{2}$

(t) divergente

(u) divergente

(v) divergente

(w) divergente

(x) convergente $-\frac{2}{3}$

(y) convergente, 1

(z) convergente, 4

3. Não

4.

5.

6. (a) $\frac{2}{3}$

   (b) $\frac{3}{4}$

Capítulo 3

Séries de termos não negativos

Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma **série de termos não negativos** se $u_n \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1 *Uma série de termos não negativos* ***converge*** *se e só se a sucessão das suas somas parciais é limitada superiormente.*

Critérios da convergência

- **Critério do Integral**

  Se f é uma função positiva, contínua e decrescente[1] no intervalo $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{N}$, então a série $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ converge se e só se o integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

- **Critérios de Comparação**

  Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ duas séries numéricas.

  Critério de Comparação I

  Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n > n_0$, se tem $0 \leq u_n \leq v_n$, então:

  1. a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ implica a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;
  2. a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ implica a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

[1] Uma função $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se decrescente se para cada $x, y \in D_f$ tais que $x < y$ se tem: $f(x) \geq f(y)$.

Critério de Comparação II

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \geq 0$ e $v_n > 0$, para cada $n > n_0$, e se existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = L \ ,$$

finito ou infinito, então:

1. caso $L \in \mathbb{R}^+$, as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ são da mesma natureza;
2. caso $L = 0$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge;
3. caso $L = +\infty$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ também diverge.

- **Critério de D'Alembert (Critério da Razão)**

Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n > 0$, para cada $n > n_0$, e se existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = Q \ ,$$

finito ou infinito, então:

1. caso $Q < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge;
2. caso $Q > 1$ ou $Q = +\infty$, série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge;
3. caso $Q = 1$, este critério nada permite concluir sobre a natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

- **Critério de Cauchy (Critério da Raiz)**

Se existe o limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = P \ ,$$

finito ou infinito, então:

1. caso $P < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge;
2. caso $P > 1$ ou $P = +\infty$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge;
3. caso $P = 1$, este critério nada permite concluir quanto à natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercícios

1. Verifique as condições do Critério de Integral e aplique-o para determinar a natureza das seguintes séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ ln^2 n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n-7)^3}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\ n}{n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-10n)^2}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [n\ 2^{-n^2}]$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\ n}{1+n^2}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ln \frac{n+3}{n}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ (ln\ n)(ln\ ln\ n)^q}$, com $q \in \mathbb{N}$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [n\ e^{-\alpha\ n^2}], \alpha \in \mathbb{R}^+$

2. Estude a natureza das seguintes séries utilizando os Critérios de Comparação.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen \frac{\pi}{n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \ + cos\ n}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8+4n^3+1}{2n^5+n^4+2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{\sqrt{n}}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

3. Use o Critério de D'Alembert para determinar a natureza das seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{8^n\ n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n+1}}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

4. Use o Critério de Cauchy para classificar quanto à sua natureza as seguintes séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(2n+1)^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(2n\ sen\frac{1}{n}\right)^{n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^{n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(3^n)^2}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

Soluções

1. (a) divergente
   (b) convergente
   (c) convergente
   (d) divergente
   (e) convergente
   (f) convergente
   (g) convergente
   (h) divergente
   (i) divergente

(j) convergente , quando $q > 1$; divergente, quando $q = 1$

(k) convergente

2. (a) convergente
   (b) divergente
   (c) divergente
   (d) convergente
   (e) convergente
   (f) convergente
   (g) convergente (*Note que* $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n > 1$)
   (h) divergente
   (i) convergente
   (j) divergente
   (k) convergente
   (l) divergente
   (m) convergente
   (n) convergente
   (o) convergente (*Note que* $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad n > 1$)

3. (a) convergente
   (b) divergente
   (c) convergente
   (d) divergente
   (e) convergente
   (f) convergente
   (g) convergente
   (h) divergente
   (i) divergente
   (j) convergente

4. (a) convergente
   (b) convergente
   (c) divergente
   (d) divergente
   (e) divergente
   (f) divergente
   (g) convergente

Capítulo 4

Séries alternadas

A série

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots \tag{4.1}$$

ou a série

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n + \cdots , \tag{4.2}$$

onde $u_i > 0$ [1], para todo $i \in \mathbb{N}$, é chamada **série alternada**[2].

Critério de Leibniz

A série alternada (4.1) ou (4.2) converge se:

- $u_n \geq u_{n+1}, \quad \forall n > n_0,$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$

Série harmónica alternada

A série numérica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}, \text{ com } p \in \mathbb{R} , \tag{4.3}$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}, \text{ com } p \in \mathbb{R} , \tag{4.4}$$

designa-se por **série harmónica alternada de ordem** p.

Se $p > 0$ a série (4.3) ((4.4)) é convergente.
Se $p \leq 0$ a série (4.3) ((4.4)) é divergente.

---

[1]Se $u_i < 0$, faz-se $u_i' = -u_i$ obtendo-se uma série na forma (4.1) ou (4.2).

[2]Se existir um número finito ou infinito de ordens $i \in \mathbb{N}$ tais que $u_i = 0$, então a série (4.1), ou (4.2), não será uma série alternada de acordo com a definição dada. É evidente que a sua natureza será determinada pela natureza da série obtida por supressão dos termos nulos, de acordo com a Propriedade 2.4 do Capítulo 2.

Exercícios

1. Verifique se as seguintes séries são séries alternadas de acordo com a definição dada.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{n\pi}{2})$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} cos(\frac{\pi}{3} + \frac{(n-1)\pi}{2})$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} tg(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2})$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} cos(\frac{\pi}{6} + \frac{3(n-1)\pi}{4})$

2. Indique o termo geral das seguintes séries alternadas (assumindo que o padrão dos primeiros termos da série continua)

   (a) $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots$

   (b) $2 - \frac{1}{2} + 4 - \frac{1}{4} + 8 - \frac{1}{8} + \cdots$

   (c) $-\frac{1}{2} + (\frac{1}{1\cdot 2^2} + \frac{1}{2\cdot 2}) - (\frac{1}{1\cdot 2^3} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2}) + \cdots$

3. Verifique se as seguintes séries satisfazem o critério de Leibnitz. O que pode concluir quanto à natureza de cada uma das séries dadas com base no critério de Leibnitz?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-1}$

   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{ln\ n}{n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{\sqrt{n}+1}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n arctg \frac{1}{n}$

   (f) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} arcsen(\frac{1}{1-n})$

4. É possível aplicar o Critério de Leibnitz à série alternada:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\ -1} - \frac{1}{\sqrt{2}\ +1} + \frac{1}{\sqrt{3}\ -1} - \frac{1}{\sqrt{3}\ +1} + \cdots \quad ?$$

5. Calcule a soma da série $-\frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 - \frac{1}{2^6} + \cdots$

Soluções

1. (a) não
   (b) não
   (c) sim
   (d) não

2. (a) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}$
   (b) $a_n = \begin{cases} 2^k & \text{, se } n = 2k-1 \\ -\frac{1}{2^k} & \text{, se } n = 2k \end{cases}$
   (c) $a_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot 2^{n-k+1}}$

3. (a) satisfaz; a série converge
   (b) satisfaz; a série converge
   (c) não satisfaz; nada se pode concluir com base no critério de Leibnitz
   (d) não satisfaz; nada se pode concluir com base no critério de Leibnitz
   (e) satisfaz; a série converge
   (f) não satisfaz; nada se pode concluir com base no critério de Leibnitz

4. não; a série não é monótona decrescente. (*Observação*: $u_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k+1}-1} & \text{, se } n = 2k-1 \\ \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} & \text{, se } n = 2k \end{cases}$)

5. $-\frac{1}{5}$

Capítulo 5

Séries de termos quaisquer

Noções básicas

Uma série de termos reais a_n, $n \in \mathbb{N}$, de sinais quaisquer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \tag{5.1}$$

é chamada **série de termos quaisquer**.

A série de termos quaisquer (5.1) diz-se **absolutamente convergente** se a série dos módulos dos seus termos, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, converge.

A série de termos quaisquer (5.1) diz-se **simplesmente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Teorema 5.1 *Toda a série absolutamente convergente é convergente e a sua soma não depende da ordenação dos seus termos.*

Nota. Nem toda a série convergente é absolutamente convergente. Por exemplo, a série harmónica alternada é convergente mas não é absolutamente convergente; ela é simplesmente convergente.

Teorema 5.2 (Teorema de Riemann) [1]*Para qualquer série de termos quaisquer simplesmente convergente e para qualquer constante $C \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação dos termos dessa série tal que a soma da série, após a reordenação, é igual a C e, ainda, existe uma outra reordenação dos termos tal que a série resultante diverge.*

[1] No caso da convergência simples a ordenação dos termos da série é essencial.

Critérios de convergência

Seja a série de termos quaisquer (5.1).

Observações:

1. Para averiguar a natureza da série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ utilizam-se critérios aplicáveis às séries de termos não negativos. No caso da série dos módulos ser divergente, o estudo da natureza (divergente ou simplesmente convergente) da série (5.1) deve ser adequado a sua especificidade.
2. Os Critérios de D'Alembert e de Cauchy para séries de termos não negativos (Capítulo 3) podem ser enunciados numa versão mais geral sendo aplicáveis às séries de termos quaisquer e de acordo com enunciado a seguir.

- **Critério de D'Alembert (para série de termos quaisquer)**

  Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, para todo $n > n_0$, e se existe o limite

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = Q,$$

  finito ou infinito, então:

  1. caso $Q < 1$, a série (5.1) converge absolutamente;
  2. caso $Q > 1$ ou $Q = +\infty$, a série (5.1) diverge;
  3. caso $Q = 1$, este critério nada permite concluir sobre a natureza da série (5.1).

- **Critério de Cauchy (para série de termos quaisquer)**

  Se existe o limite

  $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = P,$$

  finito ou infinito, então:

  1. caso $P < 1$, a série (5.1) converge absolutamente;
  2. caso $P > 1$ ou $P = +\infty$, a série (5.1) diverge;
  3. caso $P = 1$, este critério nada permite concluir sobre a natureza da série (5.1).

Exercícios

A Estude a natureza das seguintes séries alternadas. Em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{3n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}sen(\frac{\pi}{2}-n\pi)\frac{2^{n^2}}{n!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}cos(-n\pi)\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}sen(\frac{\pi}{2}+n\pi)\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+3}{(2n-5)^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}e^{-n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}cos(n\pi)\frac{2n-1}{n+1}$

B Estude a natureza das seguintes séries de termos quaisquer. Em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, com $p\in\mathbb{N}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{cos(2n\pi)}{\sqrt[n]{4}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$, $a\in\mathbb{R}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n arccos\frac{1}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$, com $p>1$

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$
10. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots$
11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n^2]{n}}$
12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{5-(-1)^n}\right)^n$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}$

C Utilizando propriedades e/ou critérios de convergência conhecidos, identifique a natureza das seguintes séries numéricas.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{arccotg\ n}}{n^2+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{3^{n-1}}$
6. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!\ n!\ 3^n}$
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\ ln\ n}{3^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3^2}{n^3 3^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2-4}}$
10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^3}$
11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{e^{-2n}}$

12. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{cos^2 n}{2^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{ln\ n}{n}\right)^4$

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{cotg(\frac{1}{n})}$

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7n^4 - 2n^3 + 3}{n(n-1)^2(n^2+2)}$

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{1+e^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{ln\frac{n+1}{n}}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{5n}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n!)}{n^\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{N}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} sen \frac{1}{n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ln\ n}}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\ arctg(n^2)}{n^4+1}$

25. $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 tg^6 \frac{\pi}{n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ln\ n)^{2n}}{n^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n}}{ln\ n}$

29. $\sum_{n=2}^{\infty} n\ sen(\frac{1}{n})$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n!)^2}$

31. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}ln\ (\frac{n}{n+1})$

32. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{ln\ n}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}\right)$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\sqrt{n}}-e^{-\sqrt{n-1}}\right)$

37. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{ln\ n}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}sen(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

41. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{cos(n\pi)}{n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{1+n^2}$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2}{n^3\ +\ 3n^2\ -\ 1}$

45. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\ cos\frac{(2n-1)\pi}{4}$

47. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln\left((1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right)}{ln(n^n)ln(n+1)^{n+1}}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$

49. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2})$

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n+5^n}$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3+n^5}$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n(2n+1)!}$

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

Soluções

A

1. absolutamente convergente
2. divergente
3. simplesmente convergente
4. divergente
5. absolutamente convergente
6. absolutamente convergente
7. divergente
8. simplesmente convergente
9. absolutamente convergente
10. divergente

B

1. simplesmente convergente, se $p=1$, absolutamente convergente, se $p>1$
2. absolutamente convergente
3. divergente
4. absolutamente convergente, se $a\neq 0$; divergente, se $a=0$
5. absolutamente convergente

6. divergente
7. absolutamente convergente
8. absolutamente convergente
9. simplesmente convergente
10. absolutamente convergente
11. divergente
12. absolutamente convergente
13. absolutamente convergente

C
1. convergente
2. convergente
3. divergente
4. divergente
5. convergente
6. convergente
7. convergente
8. convergente
9. convergente
10. convergente
11. divergente
12. convergente
13. convergente
14. divergente
15. divergente
16. convergente
17. convergente (*Note que* $\frac{1}{n+1} \leq ln\ \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$)
18. divergente
19. divergente quando $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, convergente quando $\alpha > 2$
20. convergente
21. convergente
22. convergente
23. divergente
24. convergente
25. convergente
26. convergente
27. divergente
28. divergente
29. divergente

30. convergente
31. divergente
32. convergente
33. convergente ($Note\ que\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$)
34. divergente
35. convergente
36. convergente
37. divergente
38. convergente
39. convergente
40. divergente
41. convergente
42. divergente
43. divergente
44. divergente
45. convergente
46. convergente
47. convergente
48. convergente
49. divergente
50. convergente
51. convergente
52. convergente
53. convergente
54. convergente
55. convergente

Capítulo 6

Série produto

Sejam as séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{6.1}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ . \tag{6.2}$$

Define-se **série produto** das séries (6.1) e (6.2) como sendo a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ de termo geral

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + ... + a_k b_{n-k+1} + ... + a_n b_1.$$

Teorema 6.1 (Teorema de Cauchy) *Se as séries (6.1) e (6.2) são absolutamente convergentes de somas iguais a A e B, respectivamente, então a série produto dessas duas séries é também absolutamente convergente e a sua soma é igual a AB.*

Exercícios

1. Mostre que a série produto das séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ é uma série convergente de soma igual a 1.
2. Mostre que a série quadrado da série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ é uma série divergente.
3. Verifique que a série quadrado da série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$ e calcule a sua soma.
4. Encontre a série produto das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ e calcule a sua soma.

5. Será a série produto das séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e+1)^{n+1}}$ uma série absolutamente convergente? Justifique a sua resposta.

6. Seja $b \in \mathbb{R}$. Determine a série produto das séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b^n$ e estude a sua natureza.

7. Verifique que a série quadrado da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, com $|a| < 1$, é absolutamente convergente e determine a sua soma.

Soluções

1. *Sugestão*: Utilize o binómio de Newton: $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^k b^{n-k}$

2.

3. $\frac{9}{4}$

4. $\frac{3}{7}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\left[(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right]$; $-\dfrac{2}{3}$

5. Sim, porque é a série produto de 2 séries absolutamente convergentes.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}$; convergente se $|b| < 1$, divergente se $|b| \geq 1$

7. $\frac{1}{(1-a)^2}$

Parte II

Séries Funcionais

Capítulo 7

Séries de funções

Noções básicas

Considerem-se as funções reais de variável real

$$\begin{array}{rccc} f_i: & D_f \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_i(x) \end{array} \quad , \; i \in \mathbb{N}.$$

À expressão da forma

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{7.1}$$

designa-se por **série de funções** ou **série funcional**.

Substituindo em (7.1) a variável x por um valor $x_0 \in D_f$, obtém-se a **série numérica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0). \tag{7.2}$$

Se a série numérica (7.2) converge, diz-se que x_0 é **ponto de convergência** da série de funções (7.1) ou que a série de funções (7.1) converge no ponto x_0.

Ao conjunto $X \subseteq D_f$ de todos os pontos de convergência da série de funções (7.1) chama-se **domínio de convergência** da série (7.1) e à função S dada por:

$$S(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \quad x \in X \;, \tag{7.3}$$

chama-se **função soma** da série (7.1).

A soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ em (7.3) chama-se **soma parcial de ordem** n da série (7.1) e designa-se por $S_n(x)$.

A série de funções (7.1) diz-se **absolutamente convergente**, no domínio de convergência X, se a série dos módulos dos seus termos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, converge em X.

Determinação do domínio de convergência

O domínio de convergência de uma série de funções na forma (7.1) pode ser determinado aplicando os critérios de *D'Alembert* ou de *Cauchy* do seguinte modo.

Seja $l : D_l \subseteq D_f \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tal que

$$l(x) = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|, \quad \text{com } f_n(x) \neq 0 \ \ (n \in \mathbb{N}), \qquad \textbf{(critério de D'Alembert)}$$

ou

$$l(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}. \qquad \textbf{(critério de Cauchy)}$$

Para os valores de x tais que

- $l(x) < 1$, a série (7.1) converge absolutamente;
- $l(x) > 1$ ou $l(x) = +\infty$, a série (7.1) diverge;
- $l(x) = 1$, nada se pode concluir quanto à convergência ou divergência da série (7.1) nesses pontos utilizando estes critérios.

A natureza da série (7.1) nos pontos x tais que $l(x) = 1$ é determinada analisando especificamente cada uma das séries numéricas resultantes.

Critério de Weierstrass

A série de funções (7.1) **converge uniformemente** no conjunto $I \subseteq D_f$, para a função S, se para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que, para cada $n > N$ e para cada $x \in I$, é satisfeita a desigualdade:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

onde S_n e S são as funções soma parcial de ordem n e soma da série (7.1).

Teorema 7.1 (Critério de Weierstrass) *Seja (7.1) uma série de funções e seja* $I \subseteq D_f$, $I \neq \emptyset$. *Se*

- *existe uma série numérica convergente* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n > 0$*;*
- *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para todo* $n > n_0$ *e para todo* $x \in I$*, se tem* $|f_n(x)| \leq a_n$*,*

então a série de funções (7.1) converge absoluta e uniformemente em I [1].

[1] A série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nas condições do Teorema 7.1, chama-se **série majorante** e a série funcional $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ chama-se **série majorável**.

Nota. O Critério de Weierstrass estabelece uma condição suficiente de convergência uniforme das séries de funções.

Exemplo. A série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ (nx)}{n^2}$ converge absoluta e uniformemente em $\mathbb{R}$ uma vez que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e cada $n \in \mathbb{N}$, verifica-se $|\frac{cos\ (nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ e a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Propriedades das séries uniformemente convergentes

Propriedade 7.1 *Se (f_n) é uma sucessão de funções contínuas em $I \subseteq D_f$ e se a série (7.1) converge uniformemente em I, então a função soma S, definida por (7.3), é contínua em I.*

Observação 1. Nas condições da Propriedade 7.1, e para cada $x_0 \in I$, tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Propriedade 7.2 *Seja $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e seja (f_n) uma sucessão de funções integráveis em $[a, b]$. Se a série (7.1) converge uniformemente em $[a, b]$ para a função soma S então a função S é integrável em $[a, b]$ e, dado $c \in [a, b]$, a série integranda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f(t)dt$ converge para $\displaystyle\int_c^x S(t)dt$ sendo a convergência uniforme em $[a, b]$.*

Observação 2. Nas condições da Propriedade 7.2, e para $c \in [a,\ b]$, tem-se:

$$\int_c^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Propriedade 7.3 *Seja $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e seja (f_n) uma sucessão de funções com derivadas f_n', $n = 1, 2, \ldots$, contínuas em $[a, b]$. Se a série (7.1) converge para a função soma S em $[a, b]$ e se a série das derivadas converge uniformemente em $[a, b]$ então:*

- *a função soma S é diferenciável em $[a, b]$;*
- *a série das derivadas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge para $S'(x)$ sendo a convergência uniforme em $[a, b]$.*

Observação 3. Nas condições da Propriedade 7.3 tem-se:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Exercícios

1. Considere as seguintes séries de funções reais de variável real. Identifique os valores reais que tornam cada série simplesmente convergente e absolutamente convergente.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(nx)}{n\sqrt{n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n(x-5)}{n^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+3)^n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^x$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{e^{nx}}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\frac{x}{2^n}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

   (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{n}$

2. Para que valores de x as seguintes séries convergem?

   (a) $1+\frac{100x}{1\cdot3}+\frac{10000x^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1000000x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots$

   (b) $x+\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\cdots$

   (c) $senx+2sen\frac{x}{3}+4sen\frac{x}{9}+\cdots+2^n sen\frac{x}{3^n}+\cdots$

   (d) $2x+2^4x^4+2^9x^9+\cdots+2^{n^2}x^{n^2}+\cdots$

3. Mostre que as seguintes séries satisfazem o critério de Weierstrass. O que pode então concluir quanto à convergência dessas séries?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $(0 \leq x \leq 1)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^3}$, $(0 \leq x \leq 2\pi)$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^4}$, $(-\infty < x < +\infty)$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$, $(-2 < x < +\infty)$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$, $(0 \leq x < +\infty)$

4. Mostre que as seguintes séries não satisfazem o critério de Weierstrass quando considera a série majorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $(0 \leq x \leq 1)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$, $(0 \leq x < +\infty)$

5. Determine a função soma da série $x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots$, para os valores de $x \in]-1, 1[$.

6. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

7. Mostre que a função soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3 + x^2 n}$ é uma função contínua no intervalo $[0, +\infty[$.

8. Mostre que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ (nx)}{n^3}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ (nx)}{n^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

9. É válida a integração termo a termo da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(\frac{nx}{2}) + e^{-nx}}{n^2\sqrt{n}}$ no intervalo $[0,\ 1]$?

10. Considere a função S dada por $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\ (nx)}{n^3}$.
    (a) Mostre a continuidade da função S em $\mathbb{R}$.
    (b) Mostre que existe e é contínua em $\mathbb{R}$ a derivada da função S.

11. Considere a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.
    (a) Mostre que a série dada é uniformemente convergente no intervalo $[1, +\infty[$.
    (b) Calcule a derivada da função soma da série dada.

12. Mostre que a função soma S, dada por $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$, é contínua no intervalo $[1, +\infty[$.

13. Calcule $\int_{ln\ 3}^{ln\ 4} \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nt} dt$.

14. Encontre, caso possível, a derivada da função soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} sen\left(\frac{x}{n}\right)$ sob a forma de uma série de funções.

15. Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1} sen\ (x^n)}{2^n}$.
    (a) Mostre que a série dada é integrável no intervalo $[0, 1]$.
    (b) Calcule o integral da função soma da série dada no intervalo $[0, 1]$.

Soluções

1. (a) converge absolutamente quando $x > 1$, converge simplesmente quando $0 < x \leq 1$
    (b) converge absolutamente em $\mathbb{R}$
    (c) diverge em $\mathbb{R}$
    (d) converge absolutamente em $]5, +\infty[$
    (e) converge absolutamente em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
    (f) converge absolutamente em $]-\infty, -1[$
    (g) converge absolutamente em $[0, +\infty[\cup \{-k\pi, k \in \mathbb{N}\}$
    (h) converge absolutamente em $]-2, 2[$
    (i) converge absolutamente em $]\frac{1}{e}, e[$, converge simplesmente quando $x = \frac{1}{e}$
    (j) converge absolutamente em $]0, +\infty[$
    (k) converge absolutamente em $]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{3}, +\infty[$
    (l) converge absolutamente em $]-1, 1[$
    (m) converge absolutamente em $]-3, -1[$; converge simplesmente quando $x = -3$ e $x = -1$

2. (a) $-\infty < x < +\infty$
   (b) $-1 \leq x < 1$
   (c) $-\infty < x < +\infty$
   (d) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
3. As séries consideradas convergem absoluta e uniformemente nos intervalos dados
4.
5. $\frac{x}{(1-x)^2}$
6. 1
7.
8.
9. Sim
10. (a)
    (b) $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ (nx)}{n^2}$
11. (a)
    (b) $S'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$
12.
13. $\frac{1}{6}$
14. $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} cos\left(\frac{x}{n}\right)$
15. (a)
    (b) $1 - cos(1)$

Capítulo 8

Séries de potências

Noções básicas

Chama-se **série de potências** centrada em $c \in \mathbb{R}$ a toda a série de funções na forma

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n, \tag{8.1}$$

onde a_n é o termo geral de uma sucessão de números reais (a_n).

Teorema 8.1 *Dada uma série de potências na forma (8.1), com domínio de convergência X, verifica-se uma e uma só das seguintes condições:*

1. *a série (8.1) é absolutamente convergente apenas no ponto $x = c$; consequentemente, $X = \{c\}$;*
2. *a série (8.1) é absolutamente convergente em todo o $\mathbb{R}$; consequentemente, $X = \mathbb{R}$;*
3. *existe um número real $R > 0$ tal que a série (8.1) converge absolutamente em todo ponto $x \in]c-R, c+R[$ e diverge em todo ponto $x \in]-\infty, c-R[\cup]c+R, +\infty[$.*

Nota. Nas condições *3.* do Teorema 8.1, o teorema nada refere quanto à natureza da série de potências (8.1) nos pontos $x = c-R$ e $x = c+R$; assim, nesses pontos a série (8.1) poderá convergir (absolutamente ou simplesmente) ou divergir dependendo da natureza das séries numéricas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$; consequentemente, se terá: $X = [c-R, c+R]$ ou $X = [c-R, c+R[$ ou $X =]c-R, c+R]$ ou $X =]c-R, c+R[$.

Ao valor $R > 0$ mencionado no Teorema 8.1 chama-se **raio de convergência** da série de potências (8.1).

Caso $X = \{c\}$, diz-se que a série (8.1) tem raio de convergência nulo ($R = 0$).
Caso $X = \mathbb{R}$, diz-se que a série (8.1) tem raio de convergência infinito ($R = +\infty$).

Se $a_n \neq 0$, $n > n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, o raio de convergência da série de potências (8.1) pode ser determinado aplicando uma das seguintes fórmulas:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \textbf{(fórmula de D'Alembert)}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \textbf{(fórmula de Cauchy)}$$

caso estes limites existam (finitos ou infinitos).

Teorema 8.2 (Teorema de Abel)

i) Se a série de potências (8.1) converge no ponto $x = c + A$, $A \neq 0$, então ela converge absolutamente em $]c - |A|, c + |A|[$.

ii) Se a série de potências (8.1) diverge no ponto $x = c + B$, $B \neq 0$, então ela diverge em $]-\infty, c - |B|[\,\cup\,]c + |B|, +\infty[$.

Teorema 8.3 *Toda a série de potências na forma (8.1), com raio de convergência R, converge uniformemente em qualquer intervalo fechado contido em $]c - R, c + R[$.*

Operações com as séries de potências

Sejam

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$$

duas séries de potências de somas $S_a(x)$ e $S_b(x)$, respectivamente.

- Para todo x no intervalo de convergência comum dessas duas séries tem-se:
  - **soma**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-c)^n \\ &= S_a(x) + S_b(x);\end{aligned}$$

  - **produto**

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n . \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-c)^n \\ &= S_a(x) \cdot S_b(x),\end{aligned}$$

  onde $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0$.

- Para todo x ponto interior[1] do intervalo de convergência, de raio R, da série de potências (8.1) as seguintes operações são válidas[2]:

  - **derivação termo a termo**

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1} ;$$

  - **integração termo a termo**

$$\int_c^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-c)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} ,$$

  tendo as séries das derivadas e a série integranda o mesmo raio de convergência R.

Nota. A natureza da série das derivadas e da série integranda nos extremos $c-R$ e $c+R$ do intervalo de convergência determina-se analisando a natureza das séries numéricas resultantes em cada caso (para $x = c - R$ e para $x = c + R$).

Propriedade da continuidade [3]

A função soma de qualquer série de potências na forma (8.1), com raio de convergência R, é uma função contínua em qualquer intervalo fechado contido em $]c-R, c+R[$.

Assim, para todo x_0 ponto interior do intervalo de convergência da série de potências (8.1), tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lim_{x\to x_0} x - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0-c)^n .$$

Exercícios

1. Determine o raio de convergência R e o domínio de convergência X das seguintes séries de potências:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

[1] O facto de x ser ponto interior do intervalo de convergência da série de potências (8.1) garante que x pertence a algum intervalo fechado contido em $]c-R, c+R[$.

[2] Consequências imediatas do Teorema 8.3 e das Propriedades 7.3 e 7.2 das séries de funções uniformemente convergentes.

[3] Consequência imediata do Teorema 8.3 e da Propriedade 7.1 das séries de funções uniformemente convergentes.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n\sqrt{2n+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{3n-2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{2n+1} (x-1)^n$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n(x-5)^n}{(3n+1)^{10}}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{ln\ n} x^n$

2. Utilizando derivação ou integração termo a termo, calcule as somas das seguintes séries, nos intervalos de convergência a indicar:

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

   (b) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

   (c) $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$

   (d) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$

Soluções

1. (a) $R = 1; X = [-1, 1[$

   (b) $R = +\infty; X =]-\infty, +\infty[$

   (c) $R = 0; X = \{0\}$

   (d) $R = 2; X = [-1, 3]$

   (e) $R = 2; X = [-3, 1]$

   (f) $R = 3; X = [-3, 3[$

(g) $R=1; X=]-1,1[$

(h) $R=1; X=]-1,1[$

(i) $R=\frac{9}{4}; X=]-\frac{5}{4},\frac{13}{4}[$

(j) $R=0; X=\{5\}$

(k) $R=\frac{1}{2}; X=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

2. (a) $\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}, |x|<1$

(b) $arctgx, |x|<1$ [4]

(c) $\frac{x}{(1-x)^2}, |x|<1$

(d) $\frac{2x}{(1-x)^3}, |x|<1$

[4]A convergência é ainda válida nos pontos $x=-1$ e $x=1$. Veja-se o exercício 7 do Capítulo 10.

Capítulo 9

Séries de Taylor e de Maclaurin

Noções básicas

Seja f uma função real com derivadas finitas de todas as ordens num intervalo $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in]a,b[$.
Chama-se **série de Taylor** da função f em torno do ponto x_0 à série de potências [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{9.1}$$

Os coeficientes

$$f(x_0)\ ,\ \frac{f'(x_0)}{1!}\ ,\ \frac{f''(x_0)}{2!}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ ,\ \cdots$$

são chamados **coeficientes de Taylor**.
No caso particular de $x_0 = 0$, a série (9.1) chama-se **série de Maclaurin** e tem a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\ . \tag{9.2}$$

A soma dos $n+1$ primeiros termos da série (9.1),

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i,$$

chama-se **polinómio de Taylor de grau** n da função f em torno do ponto x_0.

Chama-se **fórmula de Taylor de ordem** n da função f em torno do ponto x_0 à fórmula

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)} + R_n(x),$$

onde $R_n(x)$ é o **resto de ordem** n:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \\ &= f(x) - P_n(x). \end{aligned}$$

[1] Convenciona-se $0! = 1$.

O resto de ordem n da série de Taylor (9.1) pode ser representado na **forma de Lagrange**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \text{para algum } \xi \in Int(x, x_0) \subset]a, b[^2.$$

No caso de $x_0 = 0$, o resto de ordem n da série de Maclaurin (9.2) pode ser representado na forma equivalente:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ \ \text{para algum } \theta \in]0, 1[.$$

Desenvolvimento de uma função em série de potências

Diz-se que uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admite **desenvolvimento em série de potências** centrada em x_0, no intervalo $I \subseteq D_f$, se existe uma série de potências centrada em x_0 converge em I e de soma igual a $f(x)$, para todo o $x \in I$.

Teorema 9.1 *Se uma função f admite desenvolvimento em série de potências centrada em x_0, então essa série é a série de Taylor da função f em torno do ponto x_0.*

Teorema 9.2 *Uma função f admite desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto x_0 no intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$, para algum $R > 0$, se e só se*

i) f admite derivadas finitas de todas as ordens em $]x_0 - R, x_0 + R[$;

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$.

Teorema 9.3 (Condição suficiente) *Se uma função f admite derivadas finitas de todas as ordens no intervalo $[a, b]$ e se essas derivadas, em valor absoluto, podem ser majoradas por uma mesma constante real M, ou seja,*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \ \forall x \in [a, b],$$

então, em todo o intervalo $[a, b]$, a função f admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de $x_0 \in]a, b[$.

Exercícios

1. Escreva o polinómio de Taylor de 3º grau da função f em torno do ponto x_0 indicado.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$

[2] Por $Int(x, x_0)$ designa-se o intervalo aberto entre os pontos x e x_0, sendo então $Int(x, x_0) =]x, x_0[$ caso $x < x_0$ e $Int(x, x_0) =]x_0, x[$ caso $x_0 < x$.

(b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$

2. Encontre o polinómio de Maclaurin de 4^o grau da função f.

   (a) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 10x^3 - x + 2$
   (b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$
   (c) $f(x) = ln(cosx)$

3. Estabeleça a fórmula de Taylor de 4^a ordem da função f em torno do ponto x_0 indicado.

   (a) $f(x) = lnx$, $x_0 = 1$
   (b) $f(x) = sen(x^2)$, $x_0 = 0$
   (c) $f(x) = cosx$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

4. Utilizando o resultado obtido no exercício *1a*, determine um valor aproximado de $\sqrt{1,01}$ e mostre que o erro cometido é inferior a 10^{-7} utilizando o resto de Lagrange.

5. Encontre o polinómio de Maclaurin de menor grau que lhe permite aproximar, no intervalo $[-1, 1]$, o valor de $cosx$ com um erro inferior a $0,01$.

6. Encontre o polinómio de Taylor de 2^o grau, $p_2(x)$, da função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ em torno do ponto $x_0 = 4$. A seguir, mostre que o erro cometido, ao aproximar $f(x)$ por $p_2(x)$, é inferior a $\frac{1}{2^4}$, para todo o $x \in]3, 5[$.

7. Mostre que

   (a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

   (b) $sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

   (c) $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad (-\infty < x < +\infty)$

   (d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$

   (e) $ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$[3]

8. Utilizando os dois primeiros termos da série de Maclaurin, obtenha um valor aproximado de

   (a) $e^{0,1}$
   (b) $sen(1^o)$
   (c) $cos(\frac{\pi}{1000})$
   (d) $\sqrt[3]{30}$

9. Desenvolva a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 7$ em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = -2$.

[3] Para $x = 1$, assuma já provado que $ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

10. Desenvolva a função $f(x) = cos^2(x)$ em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

11. Utilizando desenvolvimentos estabelecidos no exercício 7, mostre que:

    (a) $\dfrac{3x}{9+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}, \quad -3 < x < 3$

    (b) $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n, \quad 0 < x < 2$

12. Tendo em conta os desenvolvimentos considerados no exercício 7, estabeleça a série de Taylor da função f em torno do ponto x_0 indicado e determine o intervalo I de convergência da série obtida.

    (a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = -3$
    (b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x_0 = -1$
    (c) $f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = 1$
    (d) $f(x) = senx, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$
    (e) $f(x) = ln\, x, \quad x_0 = 1$
    (f) $f(x) = ln(3x-2), \quad x_0 = 2$

13. Recorrendo às propriedades operatórias das séries de potências e/ou a substituições convenientes, estabeleça o desenvolvimento da função f em série de Maclaurin e indique o intervalo I de convergência da série obtida.

    (a) $f(x) = arctg\, x \quad \left(\text{obs.} \quad arctg\, x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right)$
    (b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \left(\text{obs.} \quad \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}\right)$
    (c) $f(x) = e^{-x^2}$
    (d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$
    (e) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$
    (f) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$
    (g) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (Trata-se da função seno hiperbólico)
    (h) $f(x) = sen\,(3x)$
    (i) $f(x) = x^2e^x$
    (j) $f(x) = \begin{cases} \frac{sen\, x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$
    (k) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$
    (l) $f(x) = \displaystyle\int_0^x sen(t^2)dt$
    (m) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{sent}{t}dt \quad \left(\text{Nota: para } x = 0, \text{ convenciona-se } \frac{senx}{x} = 1\right)$

(n) $\displaystyle\int_0^x \frac{arctg\, t}{t} dt \quad \big(\text{Nota: para } x = 0, \text{ convenciona-se } \frac{arctg\, x}{x} = 1\big)$

(o) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \log_{10}(1 + t^5) dt$

(p) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t^7}{1 - t}\right)^2 dt$

14. Seja $x \geq 0$. Expresse cada um dos seguintes integrais como uma série de potências centrada na origem.

    (a) $\displaystyle\int_0^x t^{p-1} e^{-t} dt, \; p \geq 1$

    (b) $\displaystyle\int_0^x t^{2p} \cos(t^2) dt, \; p \geq 0$

    Para que valores de x os desenvolvimentos obtidos são válidos ?

Soluções

1. (a) $p_3(x) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!}(x-1) - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{2^3 \cdot 3!}(x-1)^3$

   (b) $p_3(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3$

2. (a) $p_4(x) = 2 - x + 10x^3 - 2x^4$

   (b) $p_4(x) = p_3(x) = 1 - 2x + 3x^2$

   (c) $p_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$

3. (a) $f(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + R_4(x)$

   (b) $f(x) = x^2 + R_4(x)$

   (c) $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{24}(x - \frac{\pi}{4})^4\big) + R_4(x)$

4. $1,004987563$

5. $p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

6. $p_2(x) = \frac{16}{3} + \frac{8}{9}(x-4) + \frac{1}{27}(x-4)^2$

7.

8. (a) $1,1$

   (b) $0,01745$

   (c) $0,999995$

   (d) $3,106995$

9. $f(x) = -29 + 25(x+2) - 9(x+2)^2 + (x+2)^3$

10. $f(x) = \frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n+1)!}(x - \frac{\pi}{4})^{2n+1}$

11.

12. (a) $f(x) = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x+3}{3} + \frac{(x+3)^2}{3^2} + \ldots + \frac{(x+3)^n}{3^n} + \ldots\right), I =]-6, 0[$

(b) $f(x) = -\left(\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{2^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{2^n} + \ldots\right),\ I =]-3, 1[$

(c) $f(x) = \frac{1}{e}\left(1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n!} + \ldots\right),\ I =]-\infty, +\infty[$

(d) $f(x) = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ I =]-\infty, +\infty[$

(e) $f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n} + \ldots,\ I =]0, 2]$

(f) $f(x) = ln\ 4 + \frac{3}{4}(x-2) - \frac{3^2}{4^2 \cdot 2}(x-2)^2 + \frac{3^3}{4^3 \cdot 3}(x-2)^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{3^n}{4^n \cdot n}(x-2)^n + \ldots,$ $I =]\frac{2}{3}, \frac{10}{3}]$

13. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ I = [-1, 1]$

(b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ I =]-1, 1[$

(c) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!},\ I = \mathbb{R}$

(d) $f(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ I =]-1, 1[$

(e) $f(x) = \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n x^n,\ I =]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$

(f) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right),\ I =]-1, 1[$

(g) $f(x) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ I =]-\infty, +\infty[$

(h) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ I =]-\infty, +\infty[$

(i) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!},\ I =]-\infty, +\infty[$

(j) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},\ I =]-\infty, +\infty[$

(k) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\ I =]-\infty, +\infty[$

(l) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!},\ I =]-\infty, +\infty[$

(m) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}, \ I =]-\infty, +\infty[$

(n) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, \ I = [-1, 1]$

(o) $f(x) = \frac{1}{ln\ 10} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{5n+1}}{(5n+1)n}, \ I =]-1, 1]$

(p) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+15}}{n+15}, \ I =]-1, 1[$

14. (a) $\int_0^x t^{p-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{p+n}}{(p+n) \cdot n!}, \ x \in]-\infty, +\infty[$

(b) $\int_0^x t^{2p} cos(t^2) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2p+4n+1}}{(2n)!(2p+4n+1)}, \ x \in]-\infty, +\infty[$

Capítulo 10

Séries de Fourier

Noções básicas

Uma série funcional na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)\right) \tag{10.1}$$

é chamada **série trigonométrica** e as constantes a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \cdots$, são os **coeficientes da série trigonométrica**

Diz-se que uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admite **desenvolvimento em série trigonométrica** em $D \subseteq D_f$ se existe uma série trigonométrica convergente em D tal que a sua soma é igual a $f(x)$ para todo o $x \in D$.

Dada uma função f integrável em $[-\pi, \pi]$, uma série trigonométrica cujos coeficientes são determinados pelas seguintes fórmulas

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{10.2}$$

é chamada **série de Fourier** da função f. As fórmulas (10.2) utilizadas para calcular os **coeficientes da série de Fourier** são habitualmente referidas como **fórmulas de Euler-Fourier**.

Teorema 10.1 (Unicidade da série trigonométrica) *Se duas séries trigonométricas convergem para a mesma função soma, em <u>todos</u> os pontos do seu domínio de convergência comum, então os correspondentes coeficientes dessas séries são iguais.*

Condição suficiente para o desenvolvimento de uma função periódica de período 2π

Teorema 10.2 *Seja f uma função tal que*

- *f está definida, é limitada e é seccionalmente monótona*[1] *no intervalo $[-\pi, \pi[$;*
- *para $x \in \mathbb{R} \backslash [-\pi, \pi[$, f está definida pela condição de periodicidade de período 2π (i.e. $f(x + 2\pi) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$).*

Então, a série de Fourier da função f converge em todo o $\mathbb{R}$ para a função soma S dada por:

i) $S(x) = f(x)$, *para todo x ponto de continuidade de f;*

ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, [2] *para todo x ponto de descontinuidade de f.*

Observações:

1º Caso f seja uma função par no intervalo $]-\pi, \pi[$, mostra-se que os coeficientes b_n, $n = 1, 2, \ldots$, em (10.2) se anulam. Assim obtem-se a chamada **série de Fourier de cosenos**:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \tag{10.3}$$

cujos coeficientes a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ são dados pelas fórmulas:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2º Caso f seja uma função ímpar no intervalo $]-\pi, \pi[$, mostra-se que os coeficientes a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ em (10.2) se anulam. Assim resulta a chamada **série de Fourier de senos**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx), \tag{10.4}$$

cujos coeficientes b_n, $n = 1, 2, \ldots$ são dados pela fórmula:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nota: Se $f\ :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ é uma função limitada, seccionalmente monótona e contínua, então a função f, no intervalo $]0, \pi[$ admite os desenvolvimentos (10.3) e (10.4). Para obter tais desenvolvimentos basta obter as séries de Fourier das extensões [3] par e ímpar de f no intervalo $[-\pi, \pi[$, respectivamente.

[1] Diz-se que uma função f é *seccionalmente monótona* (ou monótona por partes ou monótona por segmentos) no intervalo $[a, b]$ se o intervalo $[a, b]$ pode ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de maneira a que, em cada um dos subintervalos $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, \cdots, n$, a função f seja monótona.

[2] Por simplificação de escrita denotar-se-á $f(x_0^+) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $f(x_0^-) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

[3] Diz-se que $g\ : D \to \mathbb{R}$ é uma extensão de $f\ : D_f \to \mathbb{R}$ ao conjunto D se $D_f \subset D$ e se $f(x) = g(x)$ para todo o $x \in D$.

Condição suficiente para o desenvolvimento de uma função periódica de período <u>arbitrário</u> $2l$, com $l > 0$, em série de Fourier

A série de Fourier de uma função periódica de período <u>arbitrário</u> $2l$, com $l > 0$, é uma série trigonométrica na forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n sen \frac{n\pi x}{l} \right) ,$$

sendo os coeficientes determinados pelas seguintes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)cos(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)sen(\frac{n\pi x}{l})dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10.5}$$

Nota. As fórmulas (10.5) resultam das fórmulas de Euler-Fourier após a mudança de variável $x = \frac{lt}{\pi}$.

Teorema 10.3 *Seja f uma função tal que:*

- *a função f está definida, é limitada e é seccionalmente monótona no intervalo $[-l, l[$, com $l > 0$;*
- *para $x \in \mathbb{R} \backslash [-l, l[$, f está definida pela condição de periodicidade de período $2l$, (i.e. $f(x + 2l) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$).*

Então, a série de Fourier da função f converge em todo o $\mathbb{R}$ para a função soma S dada por:

i) $S(x) = f(x)$, *para todo x ponto de continuidade de f;*

ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, *para todo x ponto de descontinuidade de f.*

Nota. No caso do intervalo de comprimento $2l$, com $l > 0$, ser deslocado de $[-l, l[$ para $[a, a+2l[$, com $a \in \mathbb{R}$, a condição suficiente para o desenvolvimento da função f em série de Fourier em $]a, a + 2l[$ é dada, de modo semelhante ao Teorema 10.3, sendo o intervalo $[-l, l[$ substituído por $[a, a + 2l[$ e os limites de integração $-l$ e l nas fórmulas (10.5) substituídos por a e $a + 2l$, respectivamente.

Exercícios

1. Determine a série de Fourier de período 2π das funções dadas e represente graficamente a sua função soma no intervalo $]-4\pi, 4\pi[$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & , \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = |x|, \qquad x \in]-\pi, \pi[$

   (c) $f(x) = x, \qquad x \in]-\pi, \pi[$

   (d) $f(x) = \pi^2 - x^2, \qquad x \in]-\pi, \pi[$

2. Escreva as séries de Fourier de período 2π de senos e de cosenos das funções dadas. Represente os gráficos das funções soma das séries obtidas no intervalo $]-4\pi, 4\pi[$.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

   (b) $f(x) = senx, \qquad x \in]0, \pi[$

   (c) $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \qquad x \in]0, \pi[$

   (d) $f(x) = e^{ax}, \qquad x \in]0, \pi[$

3. Desenvolva a função $f: \ f(x) = x \ senx$, no intervalo $]0, \pi[$ em séries de Fourier de senos e de cosenos (de período 2π).

4. Escreva as séries de Fourier de senos e de cosenos (de período 2π) da função f definida no intervalo $]0, \pi[\ : \ f(x) = x$.
   Represente os gráficos das funções soma das séries de senos e de cosenos no intervalo $]-4\pi, 4\pi[$. Compare com os resultados obtidos em 1c) e 1b). O que conclui quanto à unicidade de representação da função f por uma série trigonométrica?

5. (a) Desenvolva a função $f(x) = x + x^2$ em série de Fourier de período 2π no intervalo $]-\pi, \pi[$.

   (b) Mostre que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. (a) Desenvolva a função $f(x) = x^2$ em série de Fourier de cosenos (de período 2π) no intervalo $]0, \pi[$.

   (b) Mostre que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

7. Recorrendo ao exercício 1a) mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

8. Indique a correspondência entre os coeficientes de Fourier das funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ se

   (a) $\varphi(-x) = \psi(x)$

   (b) $\varphi(-x) = -\psi(x)$.

9. (a) Sejam

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n cos(nx) + \beta_n sen(nx))$$

   os desenvolvimentos em série de Fourier das funções f e g no intervalo $]-\pi, \pi[$. Mostre que a série de Fourier da função $f+g$ em $]-\pi, \pi[$ é

$$\frac{a_0 + \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + \alpha_n) cos(nx) + (b_n + \beta_n) sen(nx)) \, .$$

   (b) Utilizando a alínea 9a) e os resultados obtidos nos exercícios 1a) e 1b), determine a série de Fourier de período 2π da função h sendo

$$h(x) = \begin{cases} 1+x & , \quad 0 < x < \pi \\ -x & , \quad -\pi < x < 0 \end{cases} .$$

10. Determine a série de Fourier da função f de período 2π tal que $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ no intervalo $]0, 2\pi[$.

11. Escreva a série de Fourier das seguintes funções.

   (a) $f(x) = |x|, \qquad x \in]-1, 1[$

   (b) $f(x) = e^x, \qquad x \in]-5, 5[$

12. Desenvolva a função dada em série de Fourier de cosenos.

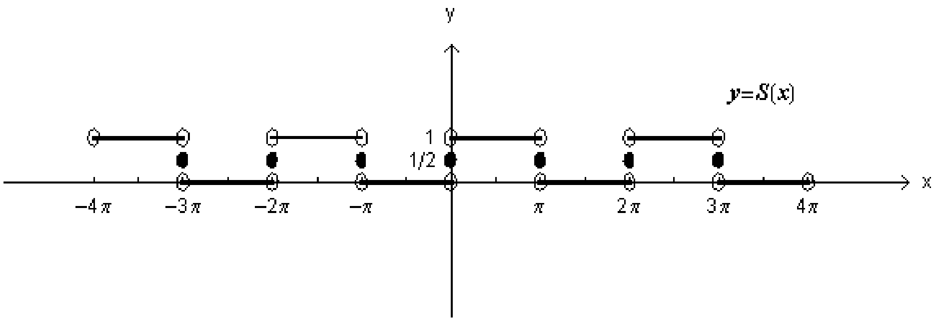
   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ 3-x & , \quad 2 < x < 3 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

Soluções

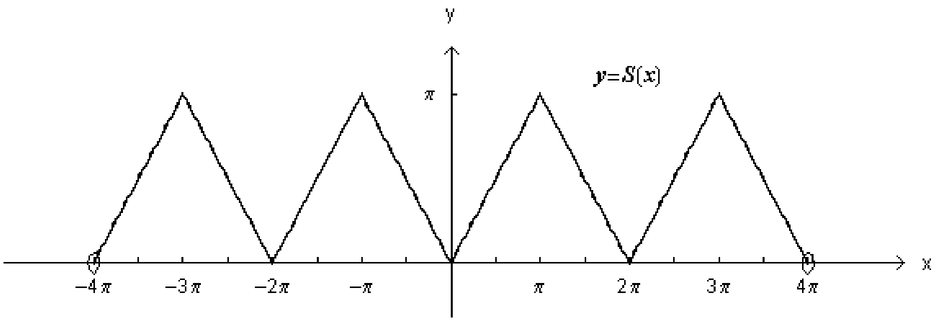
1. (a) $S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}\left(1 + (-1)^{n+1}\right) sen(nx)$ ou, equivalente,

   $S(x) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)} sen((2k+1)x)$

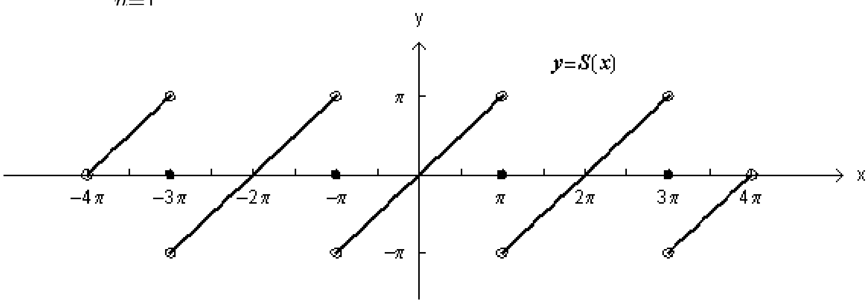


   (b) $S(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} cos(nx)$ ou, de modo equivalente,

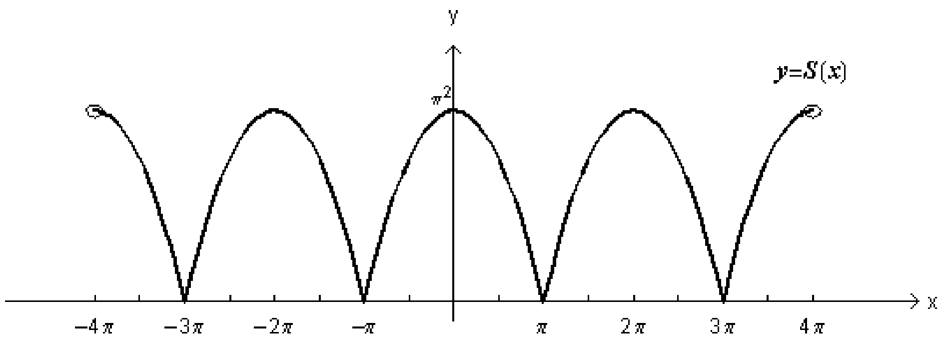
   $S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} cos((2k+1)x)$



   (c) $S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} sen(nx)$

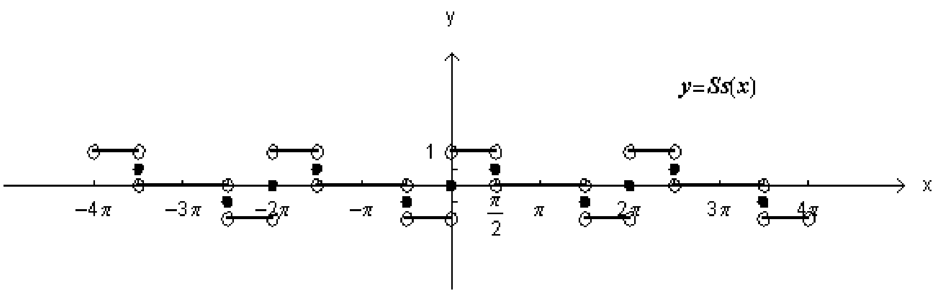


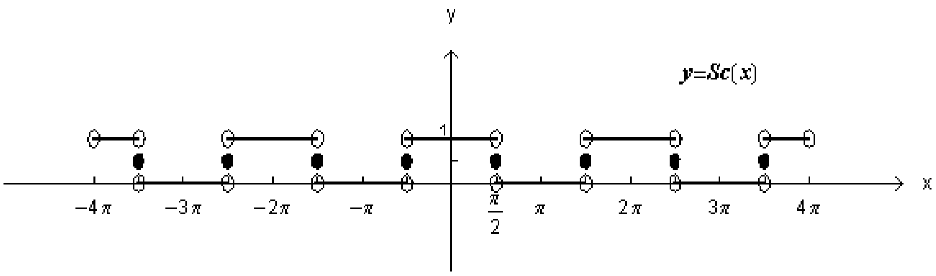
(d) $S(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} cos(nx)$



2. (a) Série de senos: $Ss(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen^2(\frac{n\pi}{4}) sen(nx)$

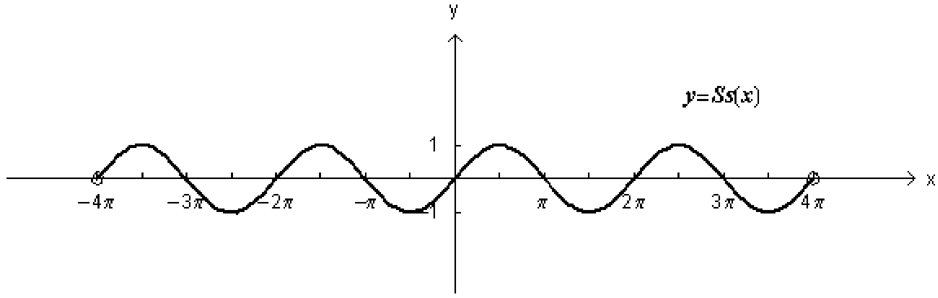
   Série de cosenos: $Sc(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen(\frac{n\pi}{2}) cos(nx)$

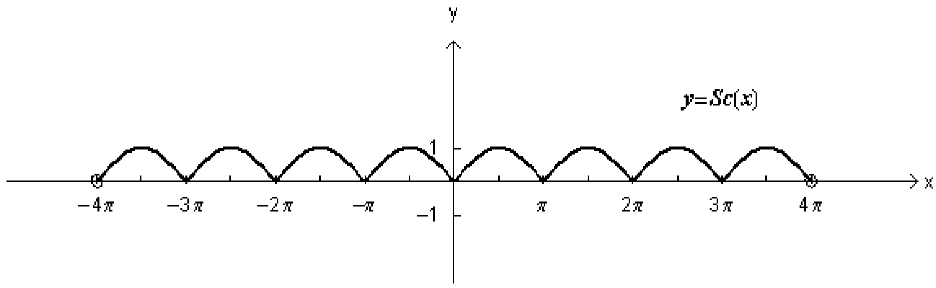




(b) Série de senos: $Ss(x) = senx$, para todo o $x \in \mathbb{R}$

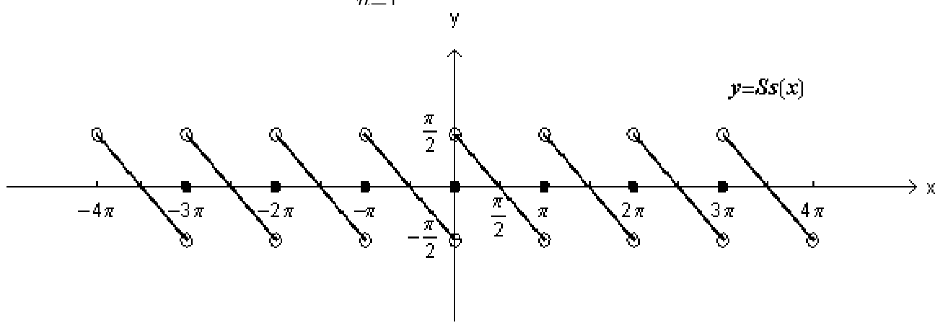
Série de cosenos: $Sc(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1} cos(2nx)$

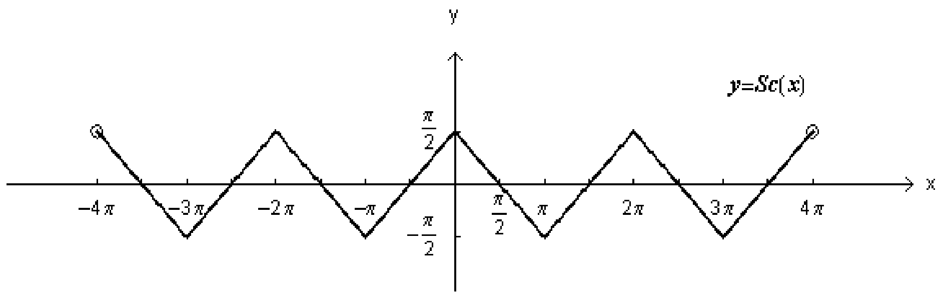




(c) Série de senos: $Ss(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen(2nx)$

Série de cosenos: $Sc(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} cos((2n-1)x)$

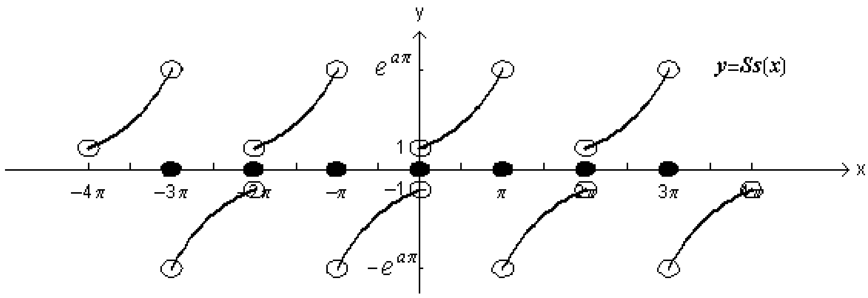


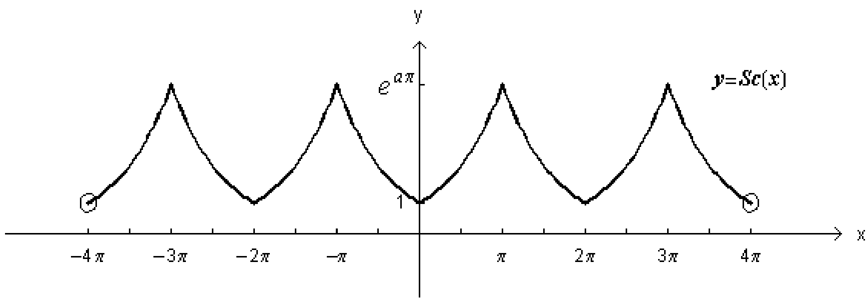


(d) Série de senos: $Ss(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+a^2}\left(1-(-1)^n e^{a\pi}\right)sen(nx)$

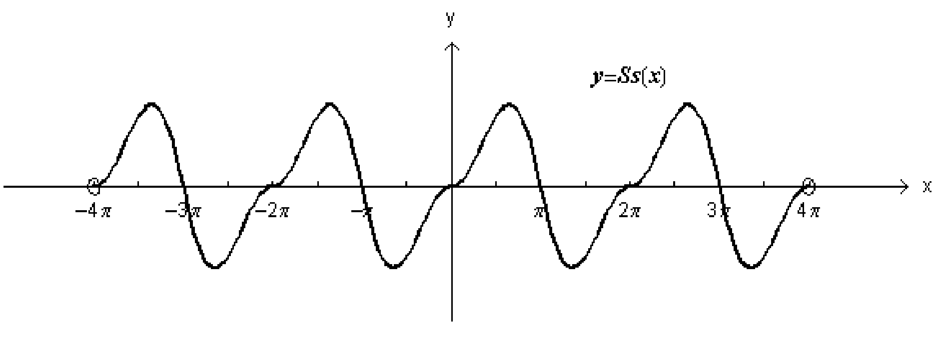
Série de cosenos: $Sc(x) = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+a^2}\left((-1)^n e^{a\pi}-1\right)cos(nx)$

Gráficos para $a > 0$:

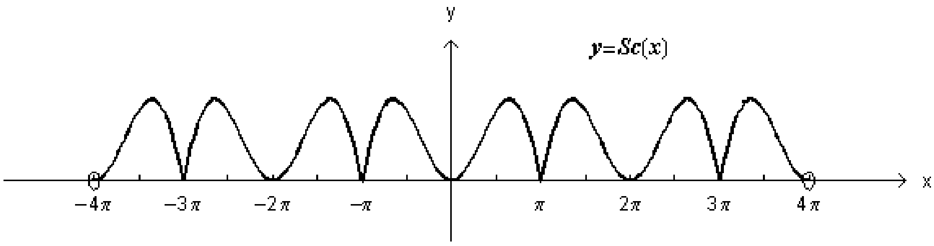




3. Série de senos: $Ss(x) = \frac{\pi}{2}senx + \frac{4}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}((-1)^{n+1}-1)\dfrac{n}{(1-n^2)^2}sen(nx)$



Série de cosenos: $Sc(x) = 1 - \frac{1}{2}cosx + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-n^2}cos(nx)$



4. Série de senos: idem a 1c)
   Série de cosenos: idem a 1b)
   A representação de f em série trigonométrica não é única

5. (a) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2}{n}cos(nx) - sen(nx)\right)$

   (b) *Sugestão*: Calcule $S(\pi)$

6. (a) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}cos(nx)$

   (b)

7.

8. (a) $a_0 = \alpha_0, a_n = \alpha_n$ e $b_n = -\beta_n,\ n \in \mathbb{N}$, onde $a_n,\ b_n$ são os coeficientes da série de Fourier da função $\varphi(x)$ e $\alpha_n,\ \beta_n$ são os coeficientes da série de Fourier da função $\psi(x)$

   (b) $a_0 = -\alpha_0, a_n = -\alpha_n$ e $b_n = \beta_n,\ n \in \mathbb{N}$

9. (a)

   (b) $\frac{\pi+1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n}\left(\frac{2}{n}cos(nx) - sen(nx)\right)$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}sen(nx)$

11. (a) Série de Fourier de período $T = 2$ é:
    $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2}cos(n\pi x)$,

ou, de modo equivalente,

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} cos((2k-1)\pi x)$$

(b) Série de Fourier de período $T = 10$ é:

$$(e^5 - e^{-5})\left(\tfrac{1}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2 + 5^2}\left(5cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right) - n\pi sen\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\right)$$

12. (a) Desenvolvimento em série de cosenos de período $T = 3$ é:

$$f(x) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - 1\right) cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right),\ x \in]\frac{3}{2}, 3[$$

(b) Desenvolvimento em série de cosenos de período 4π é:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) cos\left(\frac{nx}{2}\right), x \in]0, 2\pi[$$

Parte III

Revisões

Exercícios de revisão

Grupo I

Para cada uma das seguintes questões assinale a resposta correcta.

1. O terceiro termo da sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ é:

   (a) $|\frac{1}{3}|$ ☐

   (b) $|-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}|$ ☐

   (c) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ ☐

   (d) nenhum dos anteriores ☐

2. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica tal que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})=1$. Então:

   (a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_2+\cdots+a_{n+1})=1$ ☐

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ ☐

   (c) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e de soma igual a 1 ☐

   (d) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente ☐

3. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente de soma $S>0$. Então:

   (a) a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ é convergente e de soma $S+a_1+a_2$ ☐

   (b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$ ☐

   (c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$ ☐

   (d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})=\lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ ☐

4. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série cuja sucessão das somas parciais tem termo geral igual a $S_n=\frac{n}{n+2}$.
   Qual das seguintes afirmações é falsa?:

(a) a série é convergente □

(b) a soma da série é igual a 1 □

(c) $a_1 = \frac{1}{3}$ □

(d) $a_2 = \frac{1}{2}$ □

5. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica simplesmente convergente. Então:

(a) a sucessão (S_n) com $S_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ é convergente □

(b) a sucessão (S_n) com $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é divergente □

(c) $a_n > 0$, a partir de uma certa ordem $n > n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ □

(d) a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ é divergente □

6. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Se a série $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$ é divergente então, sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(a) podemos afirmar que é divergente □

(b) nada se pode afirmar, podendo ser convergente ou divergente □

(c) podemos afirmar que é convergente e a sua soma é igual a $a_1 + a_2 + a_3$ □

(d) podemos afirmar que é simplesmente convergente □

7. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Se a série $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$ é convergente de soma igual a S, então, sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

(a) podemos afirmar que é convergente de soma igual a $a_1 + a_2 + a_3 + S$ □

(b) nada se pode afirmar, podendo ser convergente ou divergente □

(c) podemos afirmar que é convergente de soma igual a $S - (a_1 + a_2 + a_3)$ □

(d) podemos afirmar que é absolutamente convergente □

8. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica simplesmente convergente. Então:

(a) a sucessão (S_n) com $S_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ é convergente □

(b) a sucessão (S_n) com $S_n = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$ é divergente □

(c) $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$ □

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ □

9. Seja a uma constante real e considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ de soma igual 2. Então, o valor da constante a é:

(a) $\frac{1}{2}$ ☐
(b) $\frac{2}{3}$ ☐
(c) -2 ☐
(d) $-\frac{1}{2}$ ☐

10. Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série de termos positivos convergente e de soma igual a S, então

(a) a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$ é convergente e de soma igual a S ☐
(b) a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 2^n)$ é convergente e de soma igual a S ☐
(c) a série produto das séries $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente e de soma igual a $-S^2$ ☐
(d) a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n + \frac{1}{2^n}\right)$ é convergente e de soma igual a $S + \frac{1}{2}$ ☐

11. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos positivos. Então, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(a_n)^n$ é uma

(a) série alternada absolutamente convergente ☐
(b) série alternada divergente ☐
(c) série alternada simplesmente convergente ☐
(d) é uma série de termos não negativos divergente ☐

12. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de termos positivos e de soma igual a S. Então, sobre a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$

(a) podemos concluir que é uma série convergente de soma igual a $1/S$ ☐
(b) podemos concluir que é uma série divergente ☐
(c) nada podemos concluir quanto à sua natureza ☐
(d) é uma série convergente mas nada podemos afirmar quanto ao valor da sua soma ☐

13. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente e de soma igual a S. Então, a série soma das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

(a) é uma série divergente ☐
(b) é uma série convergente de soma igual a S ☐
(c) é uma série convergente de soma igual a $S+3$ ☐
(d) é uma série convergente de soma igual a $S+6$ ☐

14. A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{1-n}$

(a) é uma série alternada divergente ☐
(b) é uma série alternada absolutamente convergente sendo a sua soma igual a $-\frac{4}{3}$ ☐
(c) é uma série alternada absolutamente convergente sendo a sua soma igual a $-\frac{2}{3}$ ☐
(d) é uma série alternada convergente sendo a sua soma igual a (-4). ☐

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas simplesmente convergentes. Qual das seguintes afirmações é falsa?

15. (a) $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ☐
(b) a série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é divergente ☐
(c) a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$ é convergente ☐
(d) a série soma $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente ☐

16. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas. Considere as seguintes afirmações:

(A) "Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ são convergentes então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente"

(B) "Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente".

Relativamente às afirmações(A) e (B) dadas tem-se que

(a) ambas as afirmações são verdadeiras ☐
(b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐
(c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐
(d) ambas são falsas ☐

17. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas simplesmente convergentes. Considere as seguintes afirmações:

(A) "A série soma $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é uma série convergente"

(B) "A série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ é convergente".

Relativamente às afirmações (A) e (B) dadas tem-se que

(a) ambas as afirmações são verdadeiras ☐

(b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐

(c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐

(d) ambas são falsas ☐

18. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série numérica tal que $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$, então

(a) a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{1}{n}\right)$ é divergente ☐

(b) a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}a_n\right)$ é divergente ☐

(c) a série $\sum_{n=1}^{\infty}(3\ a_n)$ é divergente ☐

(d) a série quadrado $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2$ é divergente ☐

19. A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é uma

(a) série harmónica de ordem 2, logo convergente ☐

(b) série harmónica de ordem -2, logo divergente ☐

(c) série geométrica convergente ☐

(d) série geométrica de razão 2, logo divergente ☐

20. Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série de termos positivos convergente e de soma igual a S, então

(a) a série produto das séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ é convergente e de soma igual a S ☐

(b) a série $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + 2^n)$ é convergente e de soma igual a S ☐

(c) a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$ é convergente e de soma igual a $|S|$ ☐

(d) a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n+\frac{n+3}{n+4}\right)$ é convergente e de soma igual a $S+1$ ☐

21. A série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(a) satisfaz o critério de Leibnitz e é simplesmente convergente ☐

(b) satisfaz o critério de Leibnitz e é absolutamente convergente ☐

(c) não satisfaz o critério de Leibnitz e é simplesmente convergente ☐

(d) não satisfaz o critério de Leibnitz e é divergente ☐

22. A série numérica

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{3^n}\right)$ é uma série alternada absolutamente convergente ☐

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}-3^n\right)$ é simplesmente convergente ☐

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$ satisfaz o critério de Leibnitz e é absolutamente convergente ☐

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$ não satisfaz o critério de Leibnitz e é divergente ☐

23. A série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+ln\ n}$

(a) não satisfaz o critério de Leibnitz e é simplesmente convergente ☐

(b) não satisfaz o critério de Leibnitz e é divergente ☐

(c) satisfaz o critério de Leibnitz e é absolutamente convergente ☐

(d) satisfaz o critério de Leibnitz e é simplesmente convergente ☐

24. A série $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ é uma

(a) série harmónica de ordem $p=2/3$, divergente ☐

(b) série harmónica de ordem $p=3/2$, convergente ☐

(c) série geométrica de razão $r=2/3$, convergente ☐

(d) série geométrica de razão $p=3/2$, divergente ☐

25. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função positiva tal que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}=1.$$

Então, relativamente à série $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}f(n)$ o critério de D'Alembert

(a) não é aplicável ☐
(b) permite concluir que a série é convergente ☐
(c) permite concluir que a série é divergente ☐
(d) nada permite concluir ☐

26. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série numérica tal que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=1$, então relativamente à série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n}$ o critério de D'Alembert

(a) permite concluir que a série é absolutamente convergente ☐
(b) permite concluir que a série é divergente ☐
(c) nada permite concluir ☐
(d) não é aplicável ☐

27. Seja f uma função real de variável real. É possível aplicar o critério do integral à série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ desde que

(a) $f(n) \geq 0$, para todo n natural, e f contínua e decrescente em $[1,+\infty[$ ☐
(b) $f(n) \geq 0$, para todo n natural, e f contínua e crescente em $[1,+\infty[$ ☐
(c) $f(n) \geq 0$, para todo n natural, e f decrescente em $[1,+\infty[$ e $\lim_{n\to+\infty} f(n)=0$ ☐
(d) $f(n) \geq 0$, para todo n natural, e f decrescente em $[1,+\infty[$ e $\lim_{n\to+\infty} f(n)=+\infty$ ☐

28. Seja $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, estritamente decrescente tal que:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Então, relativamente à série $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2} f(n)$, o critério do integral

(a) permite concluir que a série é divergente ☐
(b) permite concluir que a série é convergente ☐
(c) nada permite concluir ☐
(d) não é aplicável ☐

29. A série $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{ln\ n}}$

(a) não satisfaz o critério de Leibnitz e é simplesmente convergente ☐
(b) não satisfaz o critério de Leibnitz e é divergente ☐
(c) satisfaz o critério de Leibnitz e é absolutamente convergente ☐
(d) satisfaz o critério de Leibnitz e é simplesmente convergente ☐

30. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ uma série de funções contínuas que converge uniformemente para a função soma S no intervalo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Então:

    (a) para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ e para todo $x \in [a,b]$ se tem: $\mid \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - S(x) \mid < \varepsilon$ ☐

    (b) existe uma série numérica convergente de termos não-negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que para cada $n > n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in [a,b]$ verifica-se: $\mid f_n(x) \mid \leq a_n$ ☐

    (c) a função S é derivável em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = S'(x)$ ☐

    (d) nenhuma das afirmações a), b), c) é verdadeira ☐

31. O domínio de convergência da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2x}{n-1})^n$ é

    (a) $]0, +\infty[$ ☐
    (b) o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$ ☐
    (c) $[0, 1[$ ☐
    (d) o conjunto $\{0\}$ ☐

32. O domínio de convergência da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} (ln\ x)^n$ é

    (a) $]\frac{1}{e}, e[$ ☐
    (b) $]-e, e[$ ☐
    (c) $]0, e[$ ☐
    (d) $]e, +\infty[$ ☐

33. O domínio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} n^3(x-5)^n$ é

    (a) o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$ ☐
    (b) $]-1, 1[$ ☐
    (c) $]4, 6[$ ☐
    (d) $\{5\}$ ☐

34. O domínio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (arctg\ x)^n$ é

    (a) $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ ☐
    (b) $]tg(1), +\infty[$ ☐

(c) $]-1,1[$ ☐
(d) $]-tg(1),tg(1)[$ ☐

35. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ de funções contínuas em $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função soma S no intervalo $[a,b]$, se

(a) existe uma série numérica convergente de termos não-negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que para cada $n > n_0$, com $n_0 \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in [a,b]$ se tem: $| f_n(x) | \leq a_n$ ☐
(b) para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $x \in [a,b]$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon, x), n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se tem: $| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - S(x) | < \varepsilon$ ☐
(c) a sucessão de funções $(f_n(x))$ converge uniformemente para uma função f e $f(x) = S(x)$ para cada $x \in [a,b]$ ☐
(d) nenhuma das afirmações a), b) ou c) é verdadeira ☐

36. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais tal que $\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 3$. Considere as seguintes afirmações:

(A) "A série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente"

(B) "A série potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ é absolutamente convergente em]-2,4[".

Relativamente às afirmações (A) e (B) dadas tem-se que

(a) ambas as afirmações são verdadeiras ☐
(b) (A) é verdadeira e (B) é falsa ☐
(c) (A) é falsa e (B) é verdadeira ☐
(d) ambas são falsas ☐

37. A série funcional $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - x^n \right)$

(a) é convergente em $]-1,1[$ ☐
(b) é convergente para todo $x < \frac{1}{n^2}$ ☐
(c) é convergente em $\{-1,1\}$ ☐
(d) é divergente para todo $x \in \mathbb{R}$ ☐

38. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências absolutamente convergente quando $x = 2$.

Então, o que pode afirmar quanto à natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(a) É absolutamente convergente ☐
(b) É simplesmente convergente ☐
(c) É divergente ☐
(d) Nada se pode concluir ☐

39. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências divergente quando $x = 2$. Então, o que pode afirmar quanto à natureza da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^n$?

(a) É absolutamente convergente ☐
(b) É simplesmente convergente ☐
(c) É divergente ☐
(d) Nada se pode concluir ☐

40. Se o raio de convergência de uma série de potências em $(x + 2)$ é igual a zero, então o domínio de convergência da série é:

(a) o conjunto vazio, ☐
(b) todo o espaço real, $\mathbb{R}$ ☐
(c) $\{2\}$ ☐
(d) $\{-2\}$ ☐

41. O domínio de convergência da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{n+3}\right)^n (x-1)^n$ é

(a) $\{1\}$ ☐
(b) $\mathbb{R}$ ☐
(c) $\{-1\}$ ☐
(d) $]-1, 1[$ ☐

42. Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$ com derivadas finitas de todas as ordens, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno do ponto $x_0 \in]a, b[$ se e só se:

(a) todas as derivadas de f são limitadas no intervalo $[a, b]$ ☐
(b) $\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$, para cada $\xi \in Int(x, x_0)$ e cada $x \in [a, b]$ ☐
(c) a série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ converge no intervalo $]a, b[$ e a sua soma é igual a $f(x)$ para cada $x \in]a, b[$ ☐
(d) nenhuma das afirmações a), b), c) é verdadeira ☐

43. O domínio da convergência da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$ é:

(a) $\mathbb{R}^+$; ☐
(b) $\mathbb{R}_0^-$; ☐
(c) $\mathbb{R}^-$; ☐
(d) $\mathbb{R}_0^+$. ☐

44. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{2}$. Então sobre a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ pode-se afirmar que:

(a) o raio de convergência da série é $\frac{1}{2}$ ☐
(b) a série converge absolutamente em $]-2, 2[$ ☐
(c) a série converge para todo o $x \in \mathbb{R}$ ☐
(d) a série converge simplesmente para $x = -2, x = 2$ ☐

45. Uma função $f : [-a, a] \to \mathbb{R},\ a > 0$, contínua em $[-a, a]$ com derivadas finitas de todas as ordens, admite em $[-a, a]$ o desenvolvimento em série de MacLaurin se:

(a) a série de MacLaurin converge no intervalo $[-a, a]$ para a função f e diverge fora deste intervalo ☐
(b) as derivadas de f são limitadas no intervalo $[-a, a]$ ☐
(c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$, para cada $x \in [-a, a]$ ☐
(d) nenhuma das afirmações a), b), c) é verdadeira ☐

46. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ em que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$. O domínio de convergência desta série é:

(a) $]-1, 1[$ ☐
(b) $]-1, 1]$ ☐
(c) $]0, 2[$ ☐
(d) $[0, 2]$ ☐

47. Seja f a função definida em $[-\pi, \pi[$: $f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad -\pi \leq x < 0, \\ x, & se \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$ A soma da série de Fourier de f em $x = \pi$ é:

(a) $\frac{\pi}{2}$ ☐
(b) π ☐
(c) $-\frac{\pi}{2}$ ☐
(d) 0 ☐

48. Seja S a função soma da série de Fourier sobre o intervalo $]-\pi, \pi[$ da função $f(x) = x + \pi$, $x \in]-\pi, \pi[$. Então, $S(\pi)$ é igual a:

(a) π ☐

(b) $-\pi$ ☐

(c) 2π ☐

(d) 0 ☐

49. Seja S a função soma de período 2π da série de Fourier de senos da função $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & , \text{se } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$. Assim sendo,

(a) $S(-\frac{5\pi}{4}) = -1$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ ☐

(b) $S(-\frac{5\pi}{4}) = 0$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = 0$ ☐

(c) $S(-\frac{5\pi}{4}) = 0$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ ☐

(d) $S(-\frac{5\pi}{4}) = -1$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ ☐

50. Seja S a função soma de período 2π da série de Fourier de cosenos da função $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } 0 < x < \pi/4 \\ 0 & , \text{se } \pi/4 < x < \pi \end{cases}$. Assim sendo,

(a) $S(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = 0$ ☐

(b) $S(\frac{\pi}{4}) = 1$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ ☐

(c) S não está definida em $x = \frac{\pi}{4}$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ ☐

(d) $S(-\frac{\pi}{4}) = -1$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = -1$ ☐

51. Seja S a função soma de período 2π da série de Fourier da função $f(x) = x$, $x \in]-\pi, \pi[$. Então, $S(\pi)$ é igual a:

(a) π ☐

(b) $-\pi$ ☐

(c) 2π ☐

(d) 0 ☐

52. Seja S a função soma de período 2π da série de Fourier de senos da função

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \\ 0 & , \text{se } \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \\ \\ 1 & , \text{se } \frac{3\pi}{4} < x < \pi \end{cases}$$

. Assim sendo,

(a) $S(\pi) + S(-\frac{\pi}{4}) > 0$ ☐

(b) $S(\pi) + S(0) = 0$ ☐

(c) $S(\frac{\pi}{4}) - S(\frac{3\pi}{4}) > 0$ ☐

(d) $S(-\pi) \neq S(\frac{\pi}{2})$ ☐

53. Seja S a função soma da série de Fourier de cosenos sobre o intervalo $]-\pi, \pi[$ da função $f(x) = 2x$, $x \in]0, \pi[$. Então,

(a) $S(\pi) = 2\pi$ e $S(-\frac{\pi}{2}) = \pi$ ☐

(b) $S(\pi) = 2\pi$ e $S(-\frac{\pi}{2}) = -\pi$ ☐

(c) $S(\pi) = 0$ e $S(-\frac{\pi}{2}) = \pi$ ☐

(d) $S(\pi) = 0$ e $S(-\frac{\pi}{2}) = -\pi$ ☐

54. Seja S a função soma da série de Fourier sobre o intervalo $]-\pi,\pi[$ da função $f(x) = \begin{cases} \pi & ,-\pi < x \leq 0 \\ x & ,0 < x < \pi \end{cases}$. Então,

(a) $S(0) = \pi$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$ ☐

(b) $S(0) = \pi$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = \pi$ ☐

(c) $S(0) = \frac{\pi}{2}$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = \pi$ ☐

(d) $S(0) = \frac{\pi}{2}$ e $S(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$ ☐

55. Considere a função $f(x) = x^2$, $x \in]-\pi,\pi[$. Se S é a função soma da série de Fourier sobre o intervalo $]-\pi,\pi[$ da função f, então:

(a) $S(3\pi) = 0$ ☐

(b) $S(3\pi) = \pi^2$ ☐

(c) $S(3\pi) = -\pi^2$ ☐

(d) $S(3\pi) = 9\pi^2$ ☐

56. Seja S a função soma da série de Fourier de período 2π da função $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } 0 < x < \pi/2 \\ -1 & , \text{ se } \pi/2 < x \leq 2\pi \end{cases}$. Assim sendo,

(a) $S(0) = 0$ e $S(3\pi) = 0$ ☐

(b) $S(0) = 1$ e $S(3\pi) = -1$ ☐

(c) $S(0) = 0$ e S não está definida no ponto $x = \frac{\pi}{2}$ ☐

(d) $S(3\pi) = -1$ e $S(\frac{\pi}{2}) = 0$ ☐

Grupo II

Resolva as seguintes questões justificando convenientemente os passos fundamentais.

1. Verifique se as seguintes séries numéricas são convergentes indicando o valor da sua soma S em caso de convergência.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(sen(\frac{n\pi}{4}) - sen(\frac{(n+1)\pi}{4}) \right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(ln\frac{1}{2n-1} - ln\frac{1}{2n+1} \right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n-1}}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-\sqrt{n}}-e^{-\sqrt{n+2}}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[n]{e}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{4^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2}{3^n}\right)$

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ln(\frac{n+1}{n})}{ln\ n\cdot ln\ (n+1)}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}+2e^{-n}\right)$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n-1}-arctg\frac{1}{2n+1}\right)$

2. Classifique as seguintes séries numéricas quanto à sua natureza (divergente, simplesmente convergente ou absolutamente convergente)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen(\frac{1}{\sqrt{n}})$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+ln\ n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}sen(\frac{n\pi}{2})$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(n\pi)}{\sqrt{n^3+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-cos(\frac{1}{n})\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{ln\ n}{n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-ln\ n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^n}{(n-1)!}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^{2n}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 2^{-n}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\ n}{1+n^2}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+(\frac{1}{2})^n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^3+2}}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+cos\ n}{n^3}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{ln\ (n+1)}{n+1}$

3. Mostre que se, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ e se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ é uma série numérica convergente, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ é divergente.

4. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de funções.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nx}}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n+1}}{x^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(ln\ x)^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{4^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|x| + \frac{1}{2}\right)^n$

5. (a) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(2nx)}{(2n-1)^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

   (b) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cos(2nx)}{(2n-1)^2}\ dx = 0.$

6. (a) Mostre que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(2^n \pi x)}{2^n}$ converge absoluta e uniformemente em qualquer intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
   Sugestão: Utilize o Critério de Weirstrass.

   (b) Indique um intervalo para o qual pode afirmar que a série produto das séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos(2^n \pi x)}{2^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{x}{2})^n$ é absolutamente convergente.

7. Determine o raio e o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$.

8. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(x-1)^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n}(x-2)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(x+1)^n$

9. Calcule o raio de convergência e indique os valores de x para os quais série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ é simplesmente convergente e absolutamente convergente.

10. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n\ \sqrt{n}}$ e indique os pontos onde a convergência é simples e onde é absoluta.

11. Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$.

    (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2 da função f em torno do ponto $x_0 = 1$.

    (b) Use a fórmula obtida na alínea anterior para calcular um valor aproximado de $\sqrt{3}$ e determine um majorante para o erro cometido na aproximação.

12. Sabendo que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$, para $-1 < x < 1$,

    (a) determine o desenvolvimento da função $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$ em série de Maclaurin indicando o intervalo onde o desenvolvimento é válido;

    (b) determine o desenvolvimento da função $f(x) = \frac{1}{x-2}$ em série de Maclaurin indicando o intervalo onde o desenvolvimento é válido;

    (c) encontre a função soma S da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}$, para $-1 < x < 1$. (Note que $(x^n)' = nx^{n-1}$).

13. Sabendo que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, para $x \in \mathbb{R}$, é o desenvolvimento em série de Maclaurin da função exponencial $f(x) = e^x$,

    (a) determine o desenvolvimento da função f em série de Taylor em torno do ponto $x = 1$;

    (b) desenvolva a função e^{1-x} em série de potências de x, indicando o intervalo onde esse desenvolvimento é válido;

    (c) desenvolva a função $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$ em série de Maclaurin.

    (d) Indique um intervalo real onde a derivação termo a termo da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é válida. Justifique a sua resposta.

14. Sabendo que:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

    (a) desenvolva a função $f(x) = sen\ x$ em série de Taylor em torno do ponto $x_0 = \frac{\pi}{2}$; (Note que: $sen\ x = cos\ (\frac{\pi}{2} - x)$)

    (b) determine a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n}(2n+1)!}$

15. Sabendo que $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \qquad , (-1 < x \leq 1)$,

    (a) desenvolva a função $f(x) = x^2 ln(3+x)$ em série de MacLaurin, e indique os valores de x onde esse desenvolvimento é válido;

(b) estabeleça o desenvolvimento da função $f(x) = ln(2x)$ em série de Taylor em torno de $x_0 = 1$ e indique o intervalo onde o desenvolvimento é válido.

16. Desenvolva a função $f(x) = \frac{\pi}{4},\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ em série de Fourier de cosenos no intervalo $]-\pi, \pi[$.

17. Seja f uma função definida em $]-\pi, \pi[$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \ \text{outros } x \end{cases}$.
    Determine a série de Fourier sobre o intervalo $]-\pi, \pi[$ da função f.

18. Determine a série de Fourier de senos, de período 2π, da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{se } 0 < x < \pi/4 \\ 0 & , \text{se } \pi/4 < x < \pi \end{cases}.$$

19. Seja f a função dada por $f(x) = -\pi$, definida para $x \in [-\pi, 0[$. Escreva a série de Fourier dos senos da função f.

20. Seja f a função dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ -2, & se \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi. \end{cases}$. Escreva a série de Fourier de cosenos para função f.

Soluções

Grupo I. As respostas correctas são:

1. (c)
2. (c)
3. (d)
4. (d)
5. (d)
6. (a)
7. (a)
8. (c)
9. (a)
10. (c)
11. (a)
12. (b)
13. (a)
14. (c)

15. (a)
16. (b)
17. (b)
18. (a)
19. (a)
20. (a)
21. (b)
22. (a)
23. (c)
24. (c)
25. (c)
26. (b)
27. (a)
28. (b)
29. (d)
30. (a)
31. (b)
32. (a)
33. (c)
34. (d)
35. (a)
36. (b)
37. (a)
38. (a)
39. (c)
40. (d)
41. (b)
42. (c)
43. (a)

44. (b)
45. (b)
46. (c)
47. (a)
48. (a)
49. (c)
50. (a)
51. (d)
52. (b)
53. (b)
54. (c)
55. (b)
56. (d)

Grupo II

1. (a) divergente
   (b) divergente
   (c) divergente
   (d) convergente; $S = \frac{1}{3}$
   (e) convergente; $S = 1 + \frac{1}{e}$
   (f) divergente
   (g) convergente; $S = \frac{3}{2}$
   (h) convergente; $S = \frac{9}{7}$
   (i) divergente
   (j) convergente; $S = \frac{2}{3}$
   (k) convergente; $S = \frac{1}{ln2}$
   (l) convergente; $S = \frac{3}{4} + \frac{2}{e(e-1)}$
   (m) convergente; $S = \frac{\pi}{4}$
2. (a) divergente
   (b) simplesmente convergente
   (c) simplesmente convergente
   (d) absolutamente convergente
   (e) absolutamente convergente
   (f) absolutamente convergente

(g) divergente
(h) simplesmente convergente
(i) divergente
(j) divergente
(k) divergente
(l) absolutamente convergente
(m) absolutamente convergente
(n) divergente
(o) absolutamente convergente
(p) absolutamente convergente
(q) simplesmente convergente

3.

4. (a) $]-\infty, 0]$
   (b) $]-\infty, -e[\cup]e, +\infty[$
   (c) $]-1, 0[$
   (d) $]0, \frac{1}{e}[\cup]e, +\infty[$
   (e) $]-\infty, ln\ 4[$
   (f) $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

5.

6. (a)
   (b) $]-2, 2[$

7. $R = 3$; $]-5, 1[$

8. (a) $]0, 2]$
   (b) $\{2\}$
   (c) $\mathbb{R}$

9. $R = 2$; convergência absoluta quando $x \in]-2, 2[$, convergência simples quando $x = -2$

10. $[-5, -1[$; convergência absoluta quando $x \in]-5, -1[$, convergência simples quando $x = -5$

11. (a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{16\sqrt{\xi^5}}$, para algum $\xi \in Int(x, 1)$
    (b) $\sqrt{3} \approx 1,5$ com erro não superior a $0,5$.

12. (a) $f(x) = 1 - (3x)^2 + (3x)^4 - \ldots (-1)^n(3x)^{2n} + \ldots, \quad x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$
    (b) $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} - \ldots - \frac{x^n}{2^{n+1}} - \ldots, \quad x \in]-2, 2[$
    (c) $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

13. (a) $f(x) = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2!} + \ldots + e\frac{(x-1)^n}{n!} + \ldots$

(b) $f(x) = e - ex + e\frac{x^2}{2!} + \ldots + e\frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{n!\cdot(2n+1)} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$

(d) em qualquer intervalo real fechado, atendendo às propriedades das séries de potências.

14. (a) $sen\ x = 1 - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

    (b) $2\sqrt{2}$

15. (a) $x^2 ln\ 3 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3^2\cdot 2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+2}}{3^n\cdot n} + \ldots, \quad -3 < x \leq 3$

    (b) $ln(2x) = ln\ 2 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n} + \cdots, \quad 0 < x \leq 2$

16. $f(x) = \frac{\pi}{4}$

17. $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}cos(nx) + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}sen(nx)\right)$

18. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-cos(\frac{n\pi}{4})}{n}sen(nx)$

19. $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen[(2n-1)x]}{2n-1}$

20. $-\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(\frac{n\pi}{2})}{n}cos(nx)$

Bibliografia

1. APOSTOL, Tom M. *Cálculo.* Volume 1. Rio de Janeiro, Editora Reverté Lda, 1985.

2. BUGROV, Ia. S., NIKOLSKI, S.M. *Matemática para engenharia.* Volume 2. Moscovo, Mir, 1986.

3. DEMIDÓVITCH, B.P. *5000 problemas de análisis matemático.* 3ª edição. Madrid, Paraninfo, 1985.

4. EDWARDS, Robert E. *Fourier Series, a modern introduction.* Volume 1. New York, Springer-Verlag, 1979.

5. GUIDORIZZI, Hamilton Luis. *Um curso de cálculo.* Volume 4. Rio de Janeiro, LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora, 1988.

6. KRASNOV, Mikhail, KISELEV, Alexander, MAKARENKO, Grigory *et al. Mathematical Analysis for Engineers.* Volume 2. Moscow, Mir Publishers, 1990.

7. KREYSZIG, Erwin. *Matemática Superior.* Volume 1, 2. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora Lda, 1969.

8. PISKOUNOV, Nikolai S. *Cálculo diferencial e integral.* Volume 1, 2, 11ª edição. Porto, Lopes da Silva Editora, 1986.

9. SANTOS, Virgínia Maria Marques. *Apontamentos manuscritos de apoio à disciplina de Cálculo II.*(não publicado)

10. SARRICO, Carlos. *Análise matemática.* 4ª edição. Lisboa, Gradiva, 2002.

11. SOKOLNIKOFF, I.S., REDHEFFER,R.M. *Mathematics of Physics and Modern Engineering.* Second edition. Tokyo, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd. 1966.

12. STEWART, James. *Cálculo.* Volume 2. São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2001.

13. SWOKOWSKI, Earl W. *Cálculo com geometria analítica.* Volume 2. São Paulo, Mc Graw-Hill, 1994.