Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática
Cálculo I

Ficha de Exercícios 1
Funções

1. Calcule:
   (a) $\operatorname{sen}(\arccos(-\frac{1}{2}))$
   (b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
   (c) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2}))$
   (d) $\operatorname{sen}(\arccos(-\frac{1}{2}))$
   (e) $\operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen}(\frac{12}{13}))$
   (f) $\cos(2 \cdot \operatorname{arctg}(\frac{4}{3}))$
   (g) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}))$
   (h) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}))$
   (i) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi))$

2. Caracterize a função inversa das seguintes funções indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que as definem. Considere as restrições principais das funções trigonométricas.
   (a) $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
   (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\operatorname{arcsen}(1-x)}{3}$;
   (c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$;
   (d) $f(x) = e^{\operatorname{arcsen} x}$;
   (e) $f(x) = 2\operatorname{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi$;
   (f) $f(x) = 3\arccos(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2}$;
   (g) $f(x) = \frac{1}{\pi + \arccos(x-2)}$;
   (h) $f(x) = \pi - 3\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$;
   (i) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln(x+1))$.

3. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

4. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

5. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \text{sen } x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:
   (a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$;
   (b) $(g^{-1})'(0)$.

6. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.
   (a) $f(x) = (x-1)(x^2+3x)$;
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;
   (c) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\text{sen } x}$;
   (d) $f(x) = x^2 e^{x^2}$;
   (e) $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{x}$;
   (f) $f(x) = 3^{\text{tg} x}$;
   (g) $f(x) = \log_3(\text{tg } x)$
   (h) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$;
   (i) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;
   (j) $f(x) = (1-x^2)\ln x$;
   (k) $f(x) = (1+x^2)\,\text{arctg } x$;
   (l) $f(x) = x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$.

7. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:
   (a) $f(x) = \text{arccotg}\,(\text{sen}\,(4x^3))$;
   (b) $f(x) = \text{arcsen } \frac{1}{x^2}$;
   (c) $f(x) = \arccos(1-e^x)$;
   (d) $f(x) = \text{arctg}(1+\ln x)$.

8. Para cada uma das funções seguintes calcule $(f^{-1})'$ utilizando o teorema da derivada da função inversa.
   (a) $f(x) = x^3+1$;
   (b) $f(x) = \ln(\text{arcsen } x)$, com $x \in]0,1[$;
   (c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1,0[$;
   (d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1-x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

9. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

10. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de $\mathbb{R}$ cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

11. Verifique que $x = 0$ é raiz da equação $e^x = 1 + x$. Mostre que esta equação não pode ter outra raiz real.

12. Mostre que a função $f(x) = \text{arctg}\,(x-2) + 2x - 5$ tem um único zero no intervalo $]2,3[$.

13. Prove que:

    (a) para todo o $x \in]0,1[$ se tem $\operatorname{arcsen} x > x$;
    (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\operatorname{sen} x \leq x$;
    (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

14. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

    (a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$;
    (b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

15. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a,b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

16. Sejam $b \in \mathbb{R}^+$ e f uma função contínua em $[0,b]$ e diferenciável em $]0,b[$ tal que $f(b) = 0$.
    Considerando a função $g(x) = xf(x)$, mostre que existe $c \in]0,b[$ tal que $f'(c) = -\dfrac{f(c)}{c}$.

17. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$.

    (a) Determine o domínio de f.
    (b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.
    (c) Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m. Determine também esses valores.
    (d) Determine o contradomínio de f.

18. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 4x)$.
    Estude h quanto à existência de extremos e determine os seus intervalos de monotonia.

19. Considere a função g definida por $g(x) = \operatorname{arcsen}\big((x-1)^2\big)$.

    (a) Determine o domínio de g.
    (b) Mostre que a equação $g(x) = \frac{\pi}{6}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,2]$.
    (c) Estude g quanto à existência de extremos locais e determine os seus intervalos de monotonia.
    (d) A função g é invertível? Justifique a sua resposta.

20. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(3x^2+2) - \ln(x^2))$;
    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$;
    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$;
    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{arcsen} x}{3x}$;
    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$;
    (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{cotg} x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;

(h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$;

(p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$;

(q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}$.

21. Mostre que existe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

22. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que g é diferenciável em $x = 0$ e indique o valor de $g'(0)$.

(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{2}{\pi}\right[$ tal que $g'(c) = \frac{2}{\pi}$.

23. Considere a função f definida em $]-\infty, 3[$ por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{12}{\pi} + x\right) \cdot \operatorname{arctg}(1-x) & \text{se } \ x < 0 \\ 3 & \text{se } \ x = 0 \\ \dfrac{2x}{\ln(3+x) - \ln(3-x)} & \text{se } \ 0 < x < 3. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

(b) Mostre que $f'_-(0) = \dfrac{\pi^2 - 24}{4\pi}$.

(c) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\dfrac{12}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \dfrac{\pi}{4}$.

24. Seja g a função definida por $g(x) = \dfrac{e^{1-x} + \operatorname{arcsen} x}{\ln x}$.

(a) Determine o domínio de g.

(b) Averigue se o gráfico de g admite assíntotas verticais.

25. Seja $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida do seguinte modo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{\sin(\ln(x^3))}{x} & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}.$$

(a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.

(b) Seja g uma função real de variável real diferenciável e tal que $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Calcule o valor de $(g \circ f)'(0)$.

26. Considere a função f definida em $]-\infty, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1} & se \quad x < 0 \\ 1 + \operatorname{arcsen} x & se \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em $x = 0$.

(b) Mostre que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, 1[$.

(c) Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

27. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$.

Mostre que as retas $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais ao gráfico de h.

Exercícios de testes de anos anteriores

28. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & se \quad x \leq 0 \\ \ln(1+x) & se \quad x > 0. \end{cases}$.

(a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

(b) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

(c) Estude f quanto à existência de extremos locais.

(d) Mostre que existe pelo menos um $\theta \in]-1, 0[$ tal que $f'(\theta) = -\frac{\pi}{4}$.

(e) Mostre que a equação $f(x) = 1 - x^2$ possui exatamente uma solução em $]-1, 0[$.

(f) Considere a função g definida em $\mathbb{R}_0^-$ por $g(x) = f(x)$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

(Miniteste 1, Cálculo I, 2008/2009)

29. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \alpha & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{1-x}{x^3+x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

onde α é um parâmetro real.

(a) Determine os limites laterais de f na origem.

(b) Pode indicar um valor para $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua em $x = 0$? Justifique a sua resposta.

(c) O gráfico de f admite assíntotas verticais? Justifique a sua resposta.

(Miniteste 1, Cálculo I, 2009/2010)

30. (a) Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) = 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.

(b) Prove que sendo $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x)$, então $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$ (Sugestão: use a alínea anterior).

(1ª prova, Cálculo I, 2013/2014 (semestre extraordinário))

31. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $h(0) = 0$ e $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

(1ª prova, Cálculo I, 2013/2014 (semestre extraordinário))

32. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.

(a) Determine o domínio de h.

(b) Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]-1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α.

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

33. Calcule o limite $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{arcsen}(x^2))^{\frac{1}{x}}$.

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

34. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)