



Ficha de Exercícios 2 - Parte II

Sucessões e Série de Funções; Séries de Potências (revisitadas) e Séries de Fourier

1. Considere a série de funções

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$

- (a) Mostre que a série converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .  
(b) Justifique que a função (soma)  $S(x)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

2. Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ para } x \in ]-1, 1[,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

obtenha uma representação em série de potências (de MacLaurin) para cada uma das seguintes funções. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.

- (a)  $e^{-x^2}$   
(b)  $\cosh(x)$   
(c)  $\sinh(3x)$   
(d)  $2 \cos^2 x$   
(e)  $\frac{1}{4+x^2}$

**Nota:** As funções cosseno hiperbólico ( $\cosh$ ) e seno hiperbólico ( $\sinh$ ) são as funções definidas em  $\mathbb{R}$  por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:

(a)  $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$

(b)  $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função  $\ln(x+1)$ .  
(Sugestão: desenvolva primeiro a função  $\frac{1}{x+1}$  em série de MacLaurin).

(b) Calcule a soma da série

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

5. Calcule a soma das séries numéricas indicadas (a soma corresponde a  $f(a)$ , onde  $a$  é um número óbvio e  $f$  é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):

(a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}$

(b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}$

(c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}$

6. (a) Verifique que a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{2^n}$  tem raio de convergência igual a 2.

(b) Seja  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ ,  $-2 < x < 2$ . Explicite  $f(x)$ .

(Sugestão: use a representação em série de potências de  $\frac{1}{1-x}$ ).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

8. Considere a série de potências  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ .

(a) Determine o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  no qual a série é absolutamente convergente.

(b) Calcule  $f'(4)$ , onde  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$  ( $f$  definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

(a) obtenha uma representação em série de potências para a função  $f(x) = xe^{x^3}$  e indique o maior subconjunto de  $\mathbb{R}$  em que esta representação é válida;

(b) obtenha uma representação em série numérica do integral  $\int_0^1 xe^{x^3} dx$ .

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$(e^{x^2})' = 2x e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja  $f(x) = x e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Desenvolva  $f(x)$  em série de MacLaurin.

(b) Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!}$

(Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

(c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro que se comete ao aproximar  $f(x)$  por  $T_0^2 f(x)$  no intervalo  $]0, 0.1]$ .

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

(a)  $f(x) = x + x^2$ ,  $x \in [-\pi, \pi[$ ;

(b)  $g(x) = e^x$ ,  $x \in [-\pi, \pi[$ ;

(c)  $h(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante  $f(x) = 2$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de  $f$  e represente graficamente as respectivas somas no intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

14. Determine a série de Fourier de senos da função  $f$  dada  $f(x) = \cos x$  em  $[0, \pi]$ . Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

15. Considere a função  $f$ ,  $2\pi$ -periódica, definida por  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

(a) Determine a série de Fourier de  $f$ .

(b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(c) Usando a representação de  $f$  em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(d) Verifique que a série de Fourier de  $f$  é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .

(e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \sin(nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

16. Seja  $f$  a função  $2\pi$ -periódica tal que  $f(x) = |\sin(x)|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ .

(a) Mostre que a série de Fourier associada a  $f$  é

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

(b) Justifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$  e identifique a sua soma,  $S(x)$ .

(c) Esboce o gráfico de  $S(x)$ , no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ .

(d) Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$

## Exercícios de revisão

17. Sabendo que  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , determine

(a) a série de MacLaurin de  $\cosh(x)$ .

(b) a soma da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$

### Resolução:

(a) Como  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , para  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n.\end{aligned}$$

Uma vez que,  $1 + (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k + 1 \\ 2 & \text{se } n = 2k \end{cases}$ , com  $k \in \mathbb{N}_0$ , então, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n)!} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}.\end{aligned}$$

(b) Tendo em conta a alínea anterior,  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \cosh(1)$ .

18. Considere a função  $2\pi$ -periódica  $f$  tal  $f(x) = x + |x|$ , se  $x \in [-\pi, \pi]$ .

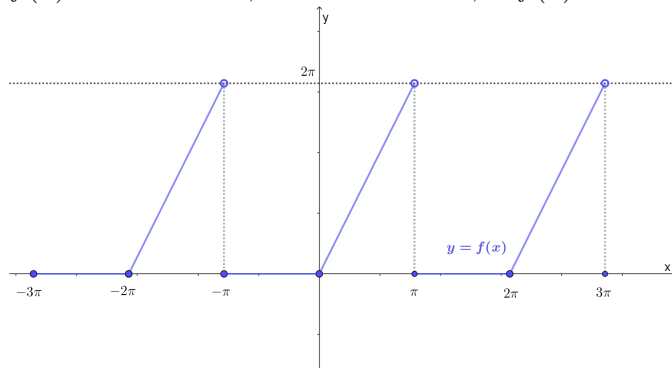
(a) Esboce o gráfico de  $f$  em  $[-3\pi, 3\pi]$ .

(b) Determine a série de Fourier de  $f$ .

(c) Justifique que essa série é convergente pontualmente em  $\mathbb{R}$  e esboce o gráfico da sua soma, no intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

**Resolução:**

(a)  $f(x) = x - x = 0$ , se  $-\pi \leq x < 0$ , e  $f(x) = x + x = 2x$ , se  $0 \leq x < \pi$ .



(b)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) , \quad \text{onde}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x dx \\ &= \frac{1}{\pi} [x^2]_0^{\pi} = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \sin(nx) x \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) x dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} [\cos(nx) x]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} (\cos(n\pi) \pi + \frac{2}{\pi n} \left[ -\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi}) \\ &= -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Assim,

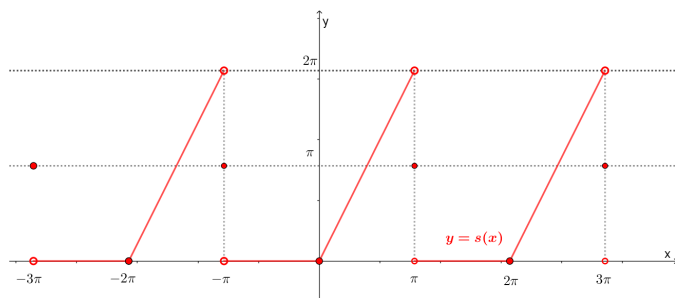
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-2}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right).$$

(c) A derivada de  $f$  é a função  $2\pi$ -periódica, não definida em  $-\pi, 0$  e  $\pi$ , tal que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

que é seccionalmente contínua. Assim,  $f$  é seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$  e, portanto, pelo Teorema de Dirichlet,  $f$  converge pontualmente em  $\mathbb{R}$ . A sua soma  $S(x)$  é  $2\pi$ -periódica e, tendo em conta esse teorema,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(-\pi^+) + f(-\pi^-)}{2} & \text{se } x = -\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases} = \begin{cases} \pi & \text{se } x = -\pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



19. Prove que a série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4n^2}$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ .

(*Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022*)

20. Seja  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Determine a série de MacLaurin da função  $xf'(x)$ , indicando

o respetivo intervalo de convergência. (Nota:  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, |x| < 1$ ).

(*Exame de Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022*)

21. Seja  $f$  a função  $2\pi$ -periódica, definida em  $[-\pi, \pi[$  por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases}.$$

Determine a série de Fourier de  $f$  e esboce o gráfico da sua soma no intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ .

(*Exame de Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022*)

22. Seja  $f$  a função  $2\pi$ -periódica, definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = |x|(3\pi - |x|)$ .

(a) Justifique que a série de Fourier associada a  $f$  é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

e determine o valor de  $a_0$ .

(b) Calcule, justificando, a soma da série de Fourier de  $f$  no ponto  $x = 3\pi$ .

(*Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022*)

**Questões de escolha múltipla:**

23. Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para } x \in ]-1, 1[$$

podemos concluir que a série numérica  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$  tem soma igual a:

- (a) 1                      (b) -1                      (c) 4                      (d) -4

*(Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)*

24. Sabendo que  $\frac{1}{4+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^n$ ,  $-4 < x < 4$ , qual das seguintes séries é a série de MacLaurin da função  $f(x) = \ln(4+x)$ ?

(a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

(b)  $\ln(4) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}n} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

(c)  $\ln(4) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^n, \quad -4 < x < 4$

*(Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)*

25. Seja  $f$  uma função  $2\pi$ -periódica tal que  $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$  para  $x \in [-\pi, \pi]$ . Qual o valor do coeficiente  $a_0$  da série de Fourier de  $f$ ?

- (a)  $\frac{2\pi^2}{3}$                       (b)  $\frac{\pi^2}{3}$                       (c)  $\frac{5\pi^2}{6}$                       (d)  $\frac{5\pi^2}{12}$

*(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)*

26. Sabendo que a série de Fourier da extensão  $2\pi$ -periódica da função  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x < \pi$ , é

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), \quad x \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que a soma da série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  é

- (a)  $-\frac{4}{\pi}$                       (b)  $\frac{\pi}{2}$                       (c)  $\frac{\pi}{4}$                       (d)  $\frac{\pi^2}{8}$

*(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)*

## Soluções

1. Aplicar o Critério de Weierstrass (alínea (a)) e as propriedades da convergência uniforme (alínea (b)).

2. (a)  $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b)  $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

(c)  $\sinh(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 3x + \frac{3^3}{3!} x^3 + \dots + \frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

(d)  $2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$   
 $= 2 - \frac{4}{2!} x^2 + \frac{2^4}{4!} x^4 + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$

(e)  $\frac{1}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^4}{4^3} - \dots + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n} + \dots, \quad x \in ]-2, 2[.$

3. (a)  $e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$

(b)  $\frac{1}{1+x^3}, \quad x \in ]-1, 1[.$

4. (a)  $\ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{t+1} dt = \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in ]-1, 1[.$

(Observação: a igualdade é também válida no ponto  $x = 1$ ; a justificação pode ser encontrada nos Textos de Apoio).

(b)  $(x+1) \ln(x+1) - x, \quad x \in ]-1, 1[$

(por integração termo a termo da série da alínea anterior).

5. (a)  $1$ ; (b)  $-3 \ln(2/3)$ ; (c)  $2\sqrt{e}.$

6. (a) —

(b)  $f(x) = \frac{2x}{(2-x)^2}.$

7. —

8. (a)  $]1, 5[.$

(b)  $f'(4) = 1.$

9. (a)  $xe^{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

(b)  $\int_0^1 xe^{x^3} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)n!}.$

10. Sugestão: representar  $e^{x^2}$  em série de MacLaurin e derivar a série termo a termo.

11. (a)  $xe^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$



$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{n!} = -1 - e^{-2}.$$

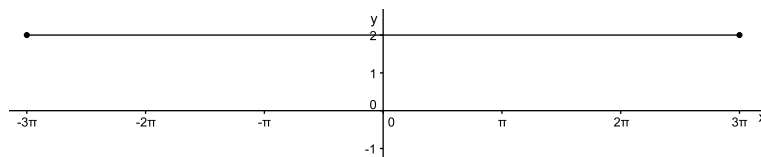
$$(c) |R_0^2 f(x)| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

$$12. (a) f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx) \right];$$

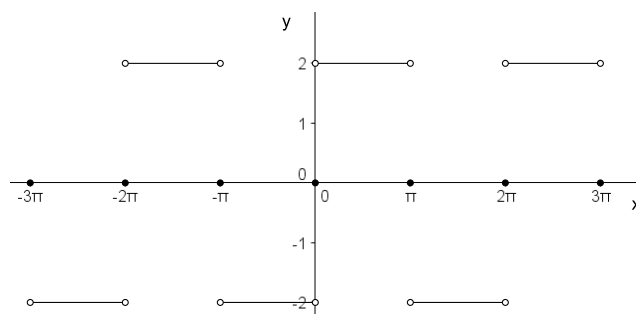
$$(b) g(x) \sim \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left[ \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + 1} \operatorname{sen}(nx) \right];$$

$$(c) h(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}((2n-1)x).$$

13. Soma da série de cossenos:  $S(x) = 2$ ;



$$\text{Soma da série de senos: } S(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in ]-\pi + 2k\pi, 2k\pi[ \\ 0 & , \quad x = k\pi \\ 2 & , \quad x \in ]2k\pi, \pi + 2k\pi[ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



$$14. \text{ Série de Fourier de senos: } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1} \operatorname{sen}(2kx).$$

A série de Fourier de cossenos reduz-se à função  $\cos x$ .

$$15. (a) f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

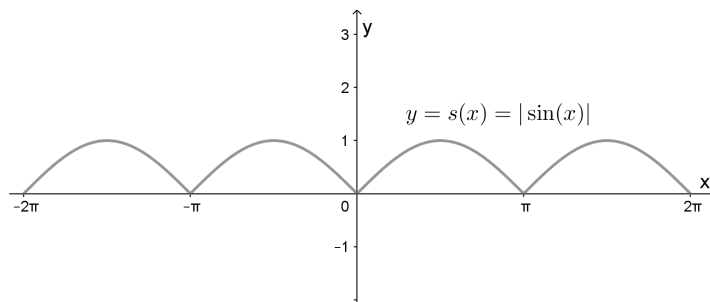
(b) A função  $f$  é contínua e seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Portanto, a soma da série coincide com a própria função  $f$  (em  $\mathbb{R}$ ). Notar que  $f(x) = x^2$  em  $[-\pi, \pi]$ .

(c) Tomar, em particular,  $x = 0$  na representação indicada na alínea (b).

(d) Sugestão: aplique o Critério de Weierstrass.

(e) Integrar ambos os membros da igualdade em (b), tendo em conta o resultado indicado em (d).

16. (a) —  
 (b)  $S(x) = |\sin(x)|, x \in \mathbb{R}$   
 (c)



- (d)  $\frac{2-\pi}{4}$
17. Resolvido.
18. Resolvido.
19. — (Sugestão: Usar o Critério de Weierstrass).
20.  $xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n, x \in ]-1, 1[.$
21.  $\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \sin((2n-1)x), x \in \mathbb{R}.$
22. (a)  $f$  é uma função par, logo a sua série de Fourier é uma série de cossenos.  
 $a_0 = \frac{7\pi^2}{3}.$   
 (b) Como  $f$  é contínua e seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$ , podemos concluir pelo Teorema de Dirichlet que  $S(x) = f(x)$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $S$  denota a soma da série de Fourier. Logo,  $S(3\pi) = 2\pi^2.$
23. -1
24.  $\ln(4) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$
25.  $\frac{2\pi^2}{3}$
26.  $\frac{\pi^2}{8}$