Revisão: Função Geradora vs. Solução de Equações e inequações

9 de maio de 2024 23:20

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21 \qquad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0)$$

$$\frac{1}{(1-x)^5} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\!\binom{5}{m}\!\right) x^m \quad \text{função geradora}$$

Coeficiente x^{21} — $\left(\!\binom{5}{21}\!\right) = \binom{21+5-1}{5-1} = \binom{25}{4}$

$$x_1 + \underbrace{2x_2}_{} + \underbrace{2x_3}_{\text{múltiplos de 2}} + \underbrace{3x_4}_{\text{múltiplo de 3}} + \overbrace{3x_5}^{\text{múltiplo de 3}} = 37$$

Função Geradora:

$$\underset{x_1}{\frac{1}{1-x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2}}_{x_2 \text{ e } x_3} \cdot \overset{x_4}{\frac{1}{1-x^3}} \cdot \overset{x_5}{\frac{1}{1-x^3}} = \frac{1}{(1-x)^5 (1+x)^2 (1+x+x^2)^2}$$

(após simplificações)

Solução pretendida: Coeficiente x^{37} da função geradora

(pode ser determinado via a decomposição da função geradora como soma de frações parciais) [APENAS IDEIA]

"Função geradora"

$$= \frac{A_5}{(1-x)^5} + \frac{A_4}{(1-x)^4} + \frac{A_3}{(1-x)^3} + \frac{A_2}{(1-x)^2} + \frac{A_1}{1+x} + \frac{B_2}{(1+x)^2} + \frac{B_1}{1+x} + \frac{C_2 x + D_2}{(1+x+x^2)^2} + \frac{C_1 x + D_1}{1+x+x^2}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 < 37 \qquad (\text{o mesmo que} \leq 36)$$

Como Construir função geradora? Considerar variável de folga $x_6 \geq 0$

Neste caso a inequação acima pode ser reformulada como

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 36 - x_6 \qquad (x_i\text{'s} \geq 0)$$

Função geradora (após simplificações) $\rightarrow \dfrac{1}{(1-x)^6 (1+x)^2 (1+x+x^2)^2}$

Revisão: Construção Função Geradora

9 de maio de 2024 23:20

Função Geradora para ERL do Exercício 7, Folha 4

$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6 \,,\; n \geq 2$

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - 6 \,,\; n \geq 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 6 \end{cases}$$

(Exercício 7(a)) ↳ complementar ao que é pedido.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$[a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6 \,,\; n \geq 2]$

$$= 6x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6) x^n$$

$$= 6x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} - 6 \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

$$= 6x + xA + 6x^2 A - 6\frac{x^2}{1-x}$$

$$\therefore A = 6x + (x + 6x^2) A - 6\frac{x^2}{1-x}$$

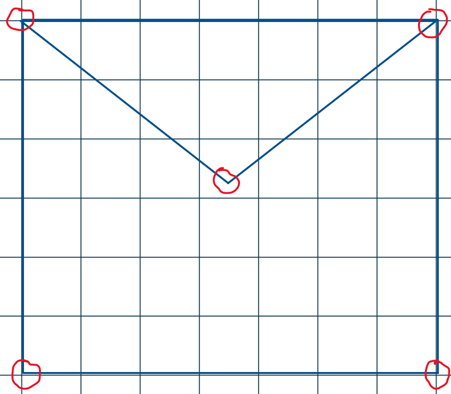
$$\Leftrightarrow (1 - x - 6x^2) A = 6\left(x - \frac{x^2}{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow A = 6\left[\frac{x}{1-x-6x^2} - \frac{x^2}{(1-x)(1-x-6x^2)}\right]$$

Aula 21 - TP8

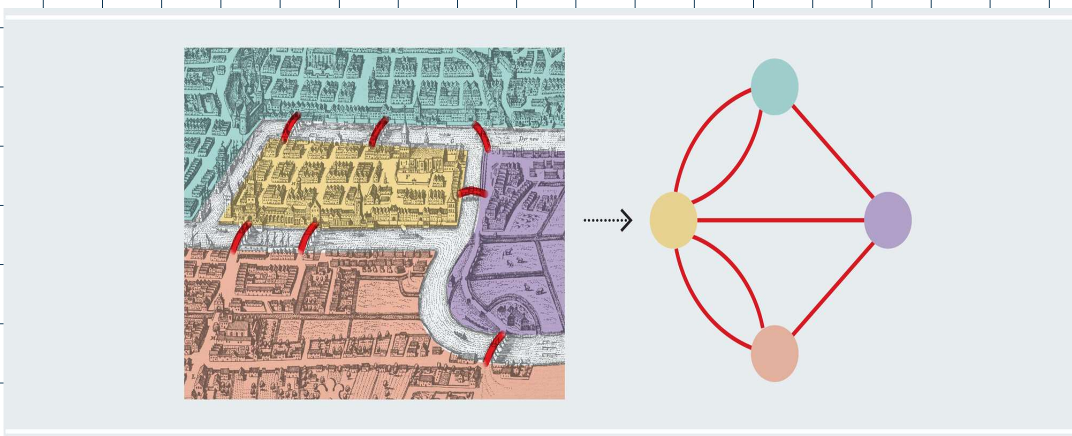
9 de maio de 2024 21:00

Envelope dos Correios: Consegue desenhar o envelope abaixo sem levantar a caneta?



O que a cidade de Aveiro tem em comum com Königsberg (atual Kaliningrado)?

Resposta: Ambas são conhecidas como "Cidade das Pontes".



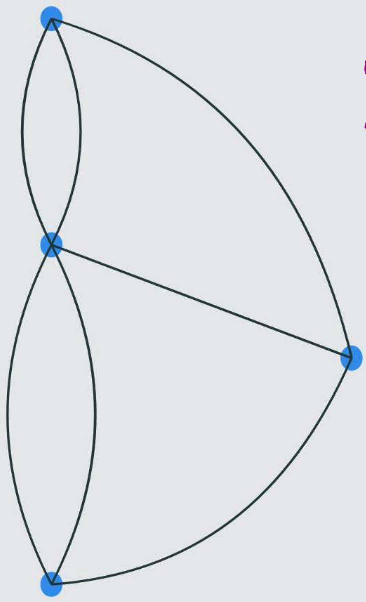
Problema proposto por Leonard Euler em 1736

Será possível cruzar as sete pontes de Königsberg numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas?

(Iremos verificar em breve que NÃO.)

As pontes de Königsberg (5)

Um modelo matemático



Grafo com 4 vértices e 7 arestas.

(as arestas representam as pontes).

No final deste capítulo (e do semestre)

Espera-se que seja tão perspicaz como um Prussiano do Século XVIII e consiga responder à seguinte pergunta:

Será possível cruzar 5 das mais bonitas pontes de Aveiro sem passar duas vezes por uma delas?

[As 5 pontes mais bonitas de Aveiro - Litoral Magazine]

GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS (7)

Definição (grafo não orientado)

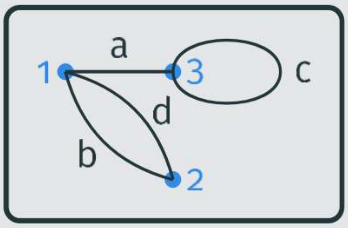
Designa-se por **grafo (não orientado)** um terno $G = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices),
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arestas, tipicamente E é disjunto de V),
- ψ é uma função (a função de incidência do grafo)

$$\psi\colon E \longrightarrow \{A \subseteq V \mid 1 \leq |A| \leq 2\}.$$

Se $\psi(a) = \{u, v\}$, u e v dizem-se os pontos extremos da aresta a.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$

$\psi(a) = \{1, 3\},\ \psi(b) = \{1, 2\},\ \psi(c) = \{3\},$
$\psi(d) = \{1, 2\} = \{2, 1\}.$

Grafos orientados e não orientados (8)

Definição (grafo orientado)

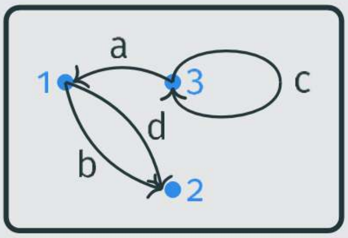
Designa-se por **grafo orientado** (ou **digrafo**) um terno $\vec{G} = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices),
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arcos, tipicamente E é disjunto de V),
- ψ é uma função (a função de incidência do grafo)

$$\psi \colon E \longrightarrow V \times V.$$

Se $\psi(a) = (u, v)$, u diz-se cauda de a e v cabeça de a.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}, \quad E = \{a, b, c, d\},$

$\psi(a) = (3, 1), \ \psi(b) = (1, 2), \ \psi(c) = (3, 3),$
$\psi(d) = (1, 2).$

GRAFOS ORIENTADOS E NÃO ORIENTADOS (9)

Grafos orientados vs. não-orientados

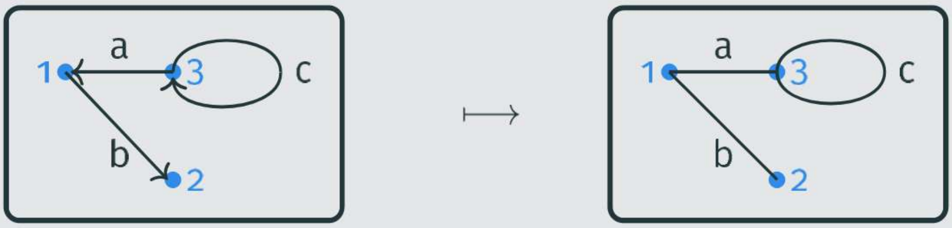
A cada grafo orientado $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ podemos associar um grafo não orientado $G = (V, E, \widehat{\psi})$ onde

$$\widehat{\psi}(a) = \{u, v\} \text{ precisamente quando } \psi(a) = (u, v) \text{ ou } \psi(a) = (v, u)$$

(ou seja, esquecemos a direção dos arcos).

Desde modo, vários conceitos de grafos aplicam-se igualmente aos digrafos.

Exemplo



Conceitos

9 de maio de 2024 21:51

ALGUNS CONCEITOS (10)

Definição

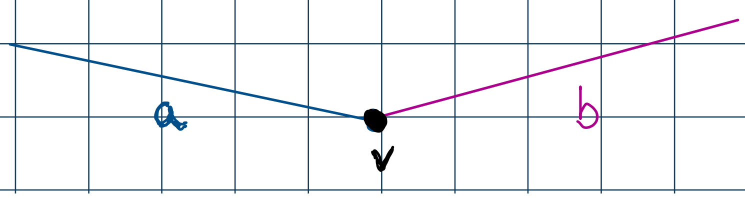
Consideremos um grafo $G = (V, E, \psi)$ respetivamente um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$.

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se **lacete**.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por **arestas paralelas**, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por **arcos paralelos**.
- G (respetivamente $\overrightarrow{G}$) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se **incidente** nos seus vértices extremos.
- Os vértices u e v dizem-se **adjacentes** se existe uma aresta (um arco) com pontos extremos u e v.
- Arestas (arcos) incidentes num mesmo vértice dizem-se **adjacentes**.

as arrestas a e b são adjacentes.

A aresta a é incidente nos vértices u e v.

Por sua vez, os vértices u e v são adjacentes.



As arestas a e b são adjacentes.

ORDEM E DIMENSÃO DE UM GRAFO (11)

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ diz-se **finito** quando os conjuntos V e E são finitos.

Nota

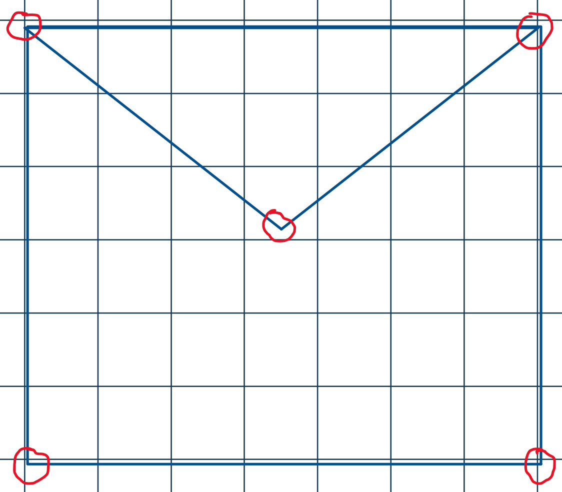
No que se segue, consideremos tipicamente grafos finitos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- **ordem de G:** $\nu(G) = |V|$ (o número de vértices).
- **dimensão de G:** $\epsilon(G) = |E|$ (o número de arestas).

(E da forma igual para digrafos.)



O nosso envelope pode ser modelado como um grafo de ordem 5 e dimensão 6.

Grafos Simples

9 de maio de 2024 22:12

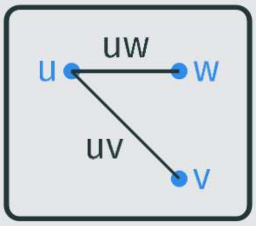
SIMPLIFICAR A NOTAÇÃO (12)

Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se **simples** quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por **multi(di)grafo**.

Nota

Num grafo (respetivamente digrafo) simples, cada aresta (arco) a é completamente determinada(o) pelos vértices extremos u e v (cauda u e cabeça v). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo uv em lugar de a.



Com esta notação, o (di)grafo (V, E, ψ) é completamente determinado por (V, E) (ou seja, podemos «dispensar» ψ).

GRAFOS COMPLEMENTARES (13)

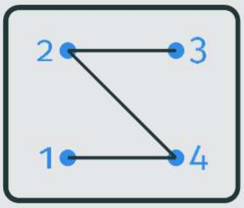
Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O **grafo complementar** de G é o grafo $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ com o mesmo conjunto de vértices e com

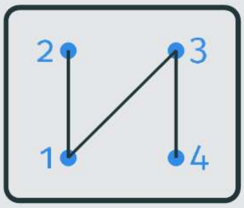
$$uv \in E^{\complement} \iff uv \notin E.$$

Exemplo

G



$G^{\complement}$



Nota

Portanto, $(G^{\complement})^{\complement} = G$.

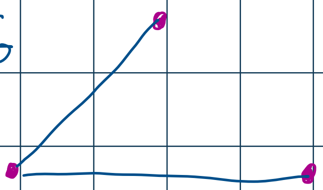
ordem G e ordem G^c coincidem sempre

$\nu(G) = \nu(G^c)$

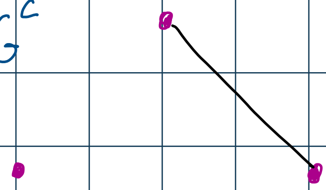
Será que as dimensões de G e G^c coincidem sempre?

Resposta: NÃO!

G



G^c



$\varepsilon(G) = 2$

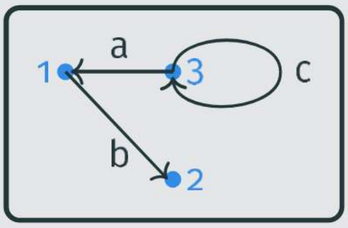
$\varepsilon(G^c) = 1$

O CONCEITO DE VIZINHANÇA (14)

Definição

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$. O conjunto de todos os vértices adjacentes a v designa-se por **vizinhança** de v e denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}(v)$).
- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo e $v \in V$. A **vizinhança de entrada** de v é o conjunto $\mathcal{N}^-(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (u, v)$, e a **vizinhança de saída** de v é o conjunto $\mathcal{N}^+(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (v, u)$.

Exemplo



$$\mathcal{N}^-(1) = \{3\},\ \mathcal{N}^+(1) = \{2\},\ \mathcal{N}(1) = \{2, 3\}$$
$$\mathcal{N}^-(2) = \{1\},\ \mathcal{N}^+(2) = \varnothing,\ \mathcal{N}(2) = \{1\}$$
$$\mathcal{N}^-(3) = \{3\},\ \mathcal{N}^+(3) = \{1, 3\},\ \mathcal{N}(3) = \{1, 3\}$$

GRAU DE UM VÉRTICE (15)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito com $V \neq \varnothing$.

- Seja $v \in V$. O **grau** de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O **maior grau dos vértices** do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

- O **menor grau dos vértices** do grafo G denota-se por $\delta(G)$:

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota

No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideremos ainda

- **o semigrau de entrada**: $d^-(v) = |\{e \mid \exists u \in V\, \psi(e) = (u, v)\}|$.
- **o semigrau de saida**: $d^+(v) = |\{e \mid \exists u \in V\, \psi(e) = (v, u)\}|$.
- **Nota:** $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.

Exemplo (16)

Exemplo

O Sr. e a Sra. Silva convidaram quatro casais para jantar em casa. Alguns são amigos do Sr. Silva e outros amigos da Sra. Silva. Em casa do casal Silva os convidados que já se conheciam cumprimentaram-se com um aperto de mão e os restantes apenas se saudaram.

Depois de todos terem chegado o Sr. Silva observou:

> *se me excluir a mim todos deram um número diferente de apertos de mão.*

Quantos apertos de mão deu o Sr. Silva?

É claro que os membros de um mesmo casal não se cumprimentaram um ao outro, pelo que o número de cumprimentos variou entre 0 e 8.

Por outro lado, uma vez que, excluindo o Sr. Silva, todas as restantes 9 pessoas deram um número diferente de apertos de mão, podemos atribuir a cada uma delas exactamente um índice j entre 0 e 8 que corresponde ao número de apertos de mão que deu.

Exemplo (continuação) (17)

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:

Pergunta: Qual dos vértices corresponde à Sra. Silva?

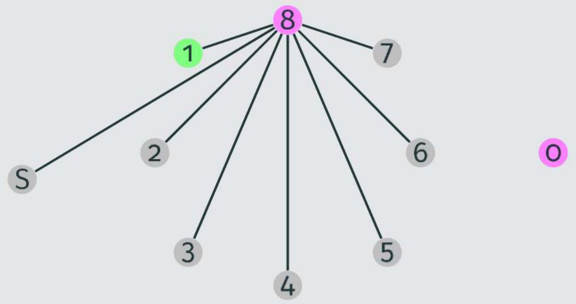
Portanto:

- O vértice n_0 tem grau $d(n_0) = 0$; portanto, nenhuma aresta pode ter um extremo em n_0.

Exemplo (continuação) (17)

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

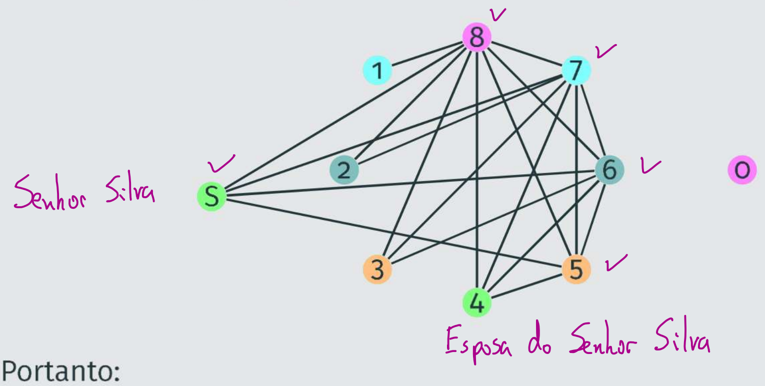
- Uma vez que o n_8 deu 8 apertos de mão, ele apertou a mão a toda a gente, com exceção dele(a) próprio(a) e da mulher/do marido ... logo, n_0 e n_8 são casados.

  Já temos $d(n_0) = 0$, $d(n_8) = 8$ e $d(n_1) = 1$, pelo que não pode haver mais arestas com extremos nestes vértices.

Exemplo (continuação) (17)

Exemplo

Utilizando o seguinte grafo:



Portanto:

- O n_5 apertou a mão de n_8, n_7, n_6, n_4 e ao Sr. Silva e, consequentemente, é casado com n_3.

  Assim, n_4 é a Sra. Silva (que, naturalmente, não deu um aperto de mão ao Sr. Silva) e ficam determinados todos os apertos de mão.

Representação por matrizes (18)

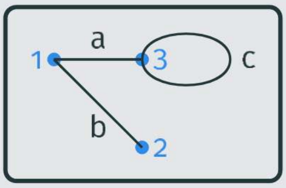
A matriz de incidência

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de G é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

Nota: Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da «coluna a» é 2. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da «linha v» é o grau de v.

Exemplo



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

Linhas : Vértices
Colunas : Arestas

Representação por matrizes (19)

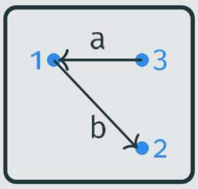
A matriz de incidência

Seja $\vec{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito) sem lacetes. A **matriz de incidência** (aresta-vértice) de $\vec{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(a), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(a), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Nota: Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da «coluna a» é 0. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da «linha v» é igual a $d^+(v) - d^-(v)$.

Exemplo



	a	b
1	-1	1
2	0	-1
3	1	0

Linhas : Vértices.
Colunas : Arestas.

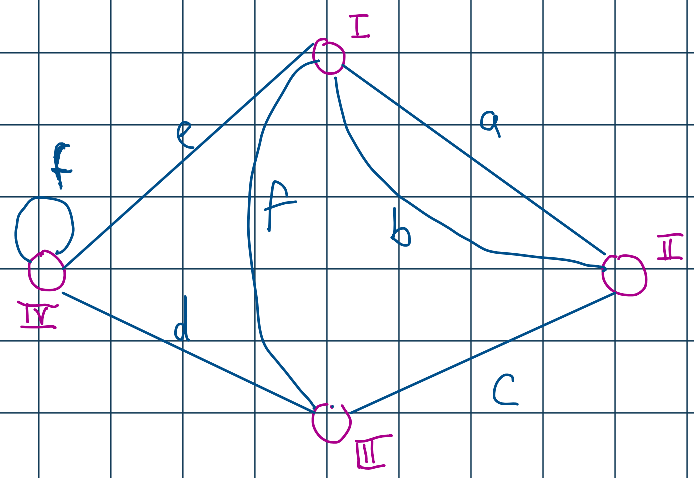
Exercício 2, Folha 5

9 de maio de 2024 22:47

$$M_G = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}$$

Trata-se de uma matriz 4×8.

Logo G é um grafo com 4 vértices e 8 arestas.



Observação: Numa matriz de incidência de um grafo G, M_G, a soma dos elementos de cada coluna é sempre igual a dois (2).

REPRESENTAÇÃO POR MATRIZES (21)

As matrizes de adjacência

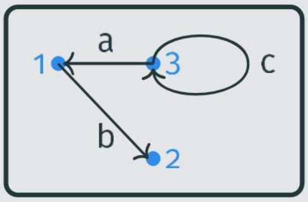
- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A **matriz de adjacência** de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes).

  Nota: Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna u (ou linha u) é igual ao grau de u.

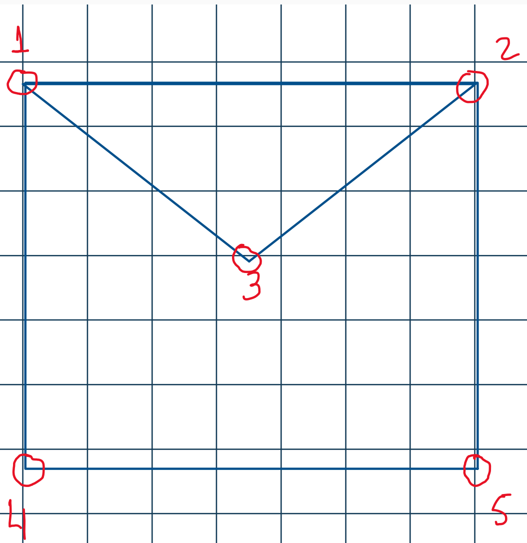
- Seja $\vec{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito). A **matriz de adjacência** de $\vec{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ definida por

$$V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto |\{a \in E \mid \psi(a) = (u, v)\}|.$$

Exemplo



	1	2	3
1	0	1	0
2	0	0	0
3	1	0	1



$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

nº de 1's acima/abaixo da diagonal principal coincide com o número de arestas

TPC: Construir matriz de incidência da matriz do envelope dos Correios (Matriz 5 × 6)

	12	13	23	14	25	45
1						
2						
3						
4						
5						

(5 vértices e 6 arestas)

Aula 22 - TP8

10 de maio de 2024 19:28

Retirado da Internet

Pergunta: Qual a ordem e a dimensão de cada um dos grafos da figura do lado?

Para Treinar: Construir a matriz de adjacência e de incidência para cada um dos exemplos acima.

INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS (20)

Teorema

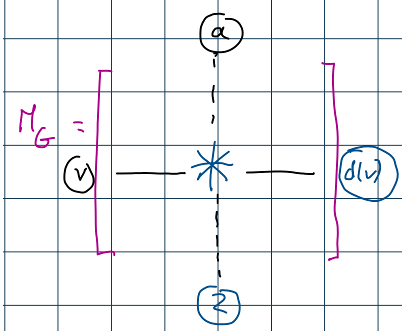
Para todo o grafo não orientado $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

- Para cada «linha v», a soma das entradas desta linha é igual ao $d(v)$. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $\sum_{v \in V} d(v)$.
- Para cada «coluna a», a soma das entradas desta coluna é igual à 2. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $2|E|$. □



Linhas : Vértices
Colunas : Arestas

INTERMEZZO: ALGUNS RESULTADOS BÁSICOS (20)

Teorema

Para todo o grafo não orientado $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

Teorema

Para todo o digrafo $\vec{G} = (V, E, \psi)$ finito, $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|.$$

Lembrar (Menor e Maior grau vértices)

$\delta(G) = \min\{ d(v) : v \in V \}$

$\Delta(G) = \max\{ d(v) : v \in V \}$

Desigualdades (Apenas Grafos)

Usando o facto de $\delta(G)$ nos dar o menor grau dos vértices, segue que

$d(v) \geq \delta(G)$, $\forall v \in V$ ordem do grafo V.

Logo $\sum_{v \in V} d(v) \geq \underbrace{\sum_{v \in V} \delta(v)}_{\text{Constante somada } |V| \text{ vezes}} = |V|\, \delta(V)$

$V = \{1, 2, \ldots, p\}$
$\Downarrow$
$\sum_{v \in V} (\ldots) = \sum_{j=1}^{p} (\ldots)$

De modo análogo, usando o facto de $\Delta(G)$ nos dar o maior grau dos vértices de G, segue que

$$\sum_{v \in V} d(v) \leq \sum_{v \in V} \Delta(G) = |V|\, \Delta(G)$$

Portanto,

$$\nu(G)\, \delta(G) \leq \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{= 2\, \varepsilon(G)} \leq \nu(G)\, \Delta(G)$$

$\nu(G) = |V|$ - ordem do grafo.

$\varepsilon(G) = |E|$ - dimensão do grafo.

Da desigualdade anterior, conclui-se que

$$\delta(G) \leq 2\, \frac{\varepsilon(G)}{\nu(G)} \leq \Delta(G).$$

[vide Exercício 6]

ou Grafo nulo

Exemplos de Grafos Simples

Grafo Trivial: Grafo com um único vértice

$G = (V, E)$, onde $V = \{v\}$ e $E = \emptyset$

G

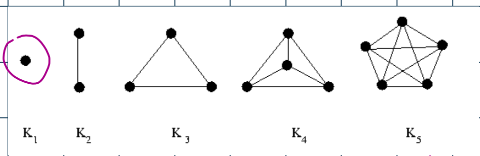
Grafo Completo: Todos os seus pares de vértices são adjacentes $(|V| > 0)$

i.e $\forall_{u,v \in V} \; uv \in E$

Notação: K_m para denotar o grafo completo com m vértices

Observação: $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ é o nº de arestas do grafo completo

grafo trivial



grafos completos

Grafo regular:

$G = (V, E)$ é um grafo k-regular se todos os seus vértices têm grau k.

Lembrar: A equação $\underbrace{d(v)}_{\text{grau do vértice } v} = k$ dá-nos o nº de arestas que incide no vértice v.

Obs: No grafo completo $K_m = (V, E)$ cada aresta tem grau $m-1$.

Neste caso

$$|E| = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

m → nº vértices

$(m-1)$ → grau de cada vértice

2 → estamos a excluir o caso de arestas dirigidas [Combinações sem repetição]

Observação: Todo o grafo simples é um subgrafo de um grafo completo.

i.e. $$\underbrace{\varepsilon(G)}_{\text{dimensão de } G} \leq \underbrace{\varepsilon(K_n)}_{\text{dimensão de } K_n.} \quad , \quad n = \nu(G)$$

Exercício 5(a)

Mostrar que um grafo regular de grau r com p vértices tem $\frac{r \times p}{2}$ arestas

Demonstração:

Sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Ora, como para todo o grafo regular $G = (V, E)$ se tem $d(v) = r$ (constante)

Segue que $\sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v \in V} r}_{\text{estou a somar } |V| = p \text{ vezes a constante } r.} = \sum_{j=1}^{p} r = rp$.

Logo $2|E| = rp$ e, por conseguinte $|E| = \frac{rp}{2}$

Exercício 5(b)

A prova de que K_p tem $\binom{p}{2}$ arestas é uma consequência do exercício anterior

Basta argumentar que:

- K_p é um caso particular de um grafo regular do grau $r = p-1$
- Usar a fórmula conhecida $\frac{p(p-1)}{2} = \binom{p}{2}$

Alternativamente: Poderia chegar na mesma fórmula invocando resultado(s)

Alternativamente: Poderia chegar na mesma fórmula invocando resultado(s) já estudados no Capítulo 3.
(i.e. usando exclusivamente a definição de grafo completo)

Exercício 5(c)

Obs: Ao impormos a condição $0 \leq q \leq \binom{p}{2}$ estamos a assumir que os grafos trivial (ou nulo) e o grafo completo são exemplos de grafos simples que se podem determinar a partir de um conjunto de p vértices $V = \{1, 2, \cdots, p\}$

Mas também estamos a assumir que o grafo simples G é um subgrafo de K_p pelo que este pode ser construído a partir de K_p. Em termos combinatórios, a pergunta pode ser reformulada do seguinte modo:

Quantos subconjuntos de cardinalidade q posso formar a partir de um conjunto de cardinalidade $\binom{p}{2}$?

↪ Neste caso, a resposta ao problema é dada por combinações sem repetição:

$\binom{p}{2}$ combinações q a q : $\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{q}$

Exercício 5(d)

A resposta a este exercício envolve identidades binomiais associada ao triângulo de Pascal.

1 Se identificarmos o nº de arestas

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

de um grafo, $|E|$, como o índice de linha do triângulo de Pascal, segue que $\binom{|E|}{q}$ dá-nos o nº de subconjuntos de cardinalidade q que posso formar a partir de E.

Por conseguinte, a identidade binomial

$$\sum_{q=0}^{|E|} \binom{|E|}{q} = 2^{|E|}$$

dá-nos o nº total de subconjuntos de E, incluindo o próprio E e o conjunto vazio ($\emptyset$)

Em suma, escolhendo $|E| = \binom{p}{2}$ obtemos $2^{\binom{p}{2}}$ como sendo a solução do nosso problema.

Exercício Extra*

13 de maio de 2024 03:32

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples de ordem p.

Mostre que se $0 \leq |E| \leq 2q$ então

$\binom{2q}{q}$ dá-nos o nº de subgrafos simples com q arestas

que posso formar a partir de um grafo com $2q$ arestas

enquanto que

$$\frac{2^{2q} - \binom{2q}{q}}{2}$$

dá-nos o número de subgrafos simples

com menos de q arestas que posso formar

a partir de um grafo com $2q$ arestas

Adicionalmente:

Qual é o número de subgrafos simples com mais de q arestas que posso formar a partir de um grafo com $2q$ arestas?

Exercício 9 $\quad \underbrace{\nu(G)}_{\text{nº vértices } G} = 56$ e $\underbrace{\varepsilon(G^c)}_{\text{nº de arestas de } G^c \text{ (grafo complementar)}} = 80$

Primeira Observação: Comece-se por observar que o grafo simples G e o seu complementar, G^c, são subgrafos de um grafo completo K_{56}, $(56 = \nu(G) = \nu(G^c))$

Daqui segue que $\varepsilon(G) + \varepsilon(G^c) = \varepsilon(K_{56})$

em virtude de G e G^c formarem uma partição de K_{56}.

$$\therefore \quad \varepsilon(G) + 80 = \frac{56 \times 55}{2}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(G) = 1460$$

Exercício 10, Folha 5
13 de maio de 2024 22:43

Grafo Simples e Regular com 24 arestas

Grafo Simples: Sem arestas paralelas e lacetes. Sabemos que é sempre um subgrafo de um grafo completo K_m.

Grafo Regular: Todos os vértices têm o mesmo grau

$$\boxed{\text{Igualdade}: \quad 2|E| = \sum_{v \in V} d(v)}$$

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e regular de ordem

$\nu(G) = m$ [nº de vértices] e dimensão $\varepsilon(G) = 24$

Logo a desigualdade $24 \leq \binom{m}{2}$ segue do facto de ser um grafo regular

i.e. $24 \leq \binom{m}{2}$ → posição 3 na linha m do triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

$\binom{7}{2}$ não serve

→ linha 8

$= \binom{8}{2}$ → já serve!

Portanto para valores de $n \geq 8$ a desigualdade $\binom{n}{2} \geq 24$ verifica-se sempre.

Por outro lado, temos [vide exercício 5 (a)]

$$\underbrace{2\,\varepsilon(G)}_{\text{dimensão do grafo}} = n\underbrace{d}_{\text{grau de todas as arestas do grafo regular}} \Rightarrow n\,d = 48$$

$$n \geq 8 \Rightarrow d < 8$$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$2^3 = 8$

$2 \times 3 = 6$

$48 = \underbrace{2^4}_{=16} \cdot 3$

$$\begin{aligned} 48 &= 48 \times 1 \\ &= 24 \times 2 \\ &= 16 \times 3 \\ &= 12 \times 4 \\ &= \times \times 5 \quad \times \\ &= 8 \times 6 \\ &= \times \times 7 \quad \times \end{aligned}$$

Portanto:

$n \in \{8, 12, 16, 24, 48\}$

Observação: Se, ao invés, fosse perguntado o seguinte:

"Quais os possíveis graus de um grafo simples e regular com 48 arestas?"

a resposta seria $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

ISOMORFISMOS DE GRAFOS (22)

Definição

Sejam os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$. Um **isomorfismo** de G em H é um par $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ e $h\colon E_G \longrightarrow E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\}).$$

No caso de digrafos, escreve-se (u, v) e $(f(u), f(v))$ em vez de $\{u, v\}$ e de $\{f(u), f(v)\}$, respetivamente.

Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma «uv», a função h acima é completamente determinada por f:

$$h(uv) = f(u)f(v).$$

Portanto, um isomorfismo entre grafos simples (V_G, E_G) e (V_H, E_H) é dado por uma função bijetiva $f\colon V_G \longrightarrow V_H$ tal que, para todos os $u, v \in V_G$:

$$uv \in E_G \implies f(u)f(v) \in E_H.$$

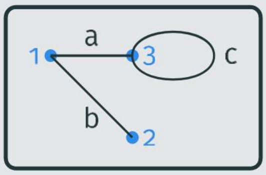
GRAFOS ISOMORFOS (23)

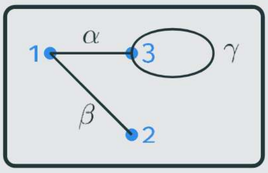
Definição

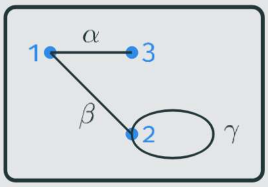
(Di)grafos G e H dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles, e escreve-se $G \simeq H$ neste caso.

Nota

Intuitivamente, grafos isomorfos são «iguais a menos da etiquetação dos vértices e aresta».







GRAFOS ISOMORFOS (23)

Definição

(Di)grafos G e H dizem-se **isomorfos** quando existe um isomorfismo entre eles, e escreve-se $G \simeq H$ neste caso.

Nota

entre eles, e escreve-se $G \simeq H$ neste caso.

Nota [Só se ...]

Grafos isomorfos têm «as mesmas propriedades».

Mais concretamente, sendo o par $f: V_G \longrightarrow V_H$ e $h: E_G \longrightarrow E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

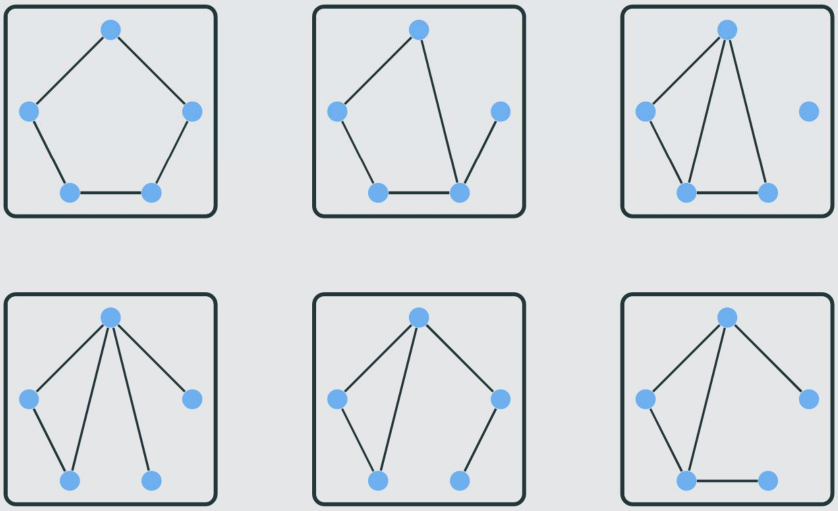
- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão:
$$\nu(G) = \nu(H) \quad \text{e} \quad \epsilon(G) = \epsilon(H).$$
- G é simples se e só se H é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau:
$$\text{para cada } v \in V_G,\ d_G(v) = d_H(\varphi(v)).$$
- Portanto: $\Delta(G) = \Delta(H)$ e $\delta(G) = \delta(H)$.

Isto é, as propriedades mencionadas apenas se verificam só se existir um isomorfismo entre dois grafos

UM EXEMPLO (24)

Exemplo

Representação gráfica de todos os grafos simples não isomorfos, com 5 vértices e 5 arestas:



Pergunta: Qual (Quais) da(s) propriedade(s) mencionadas anteriormente falha(m)?

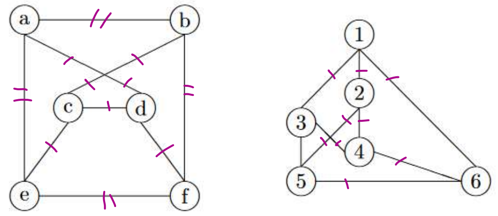
Observação: Se pelo menos uma das propriedades mencionadas anteriormente "falhar", então podemos concluir que dois grafos não são isomorfos.

Exercício 13, Folha 5
13 de maio de 2024 23:34

13. Diga, justificando, se os grafos representados a seguir são isomorfos.

[Primeira Tentativa ↪ intuitiva mas insuficiente]

9 arestas



Matriz adjacência [Entradas não assinaladas assumimos 0]

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a & b & c & d & e & f \\
\hline
a & \ddots & 1 & & 1 & 1 & \\
b & 1 & \ddots & 1 & & & 1 \\
c & & 1 & \ddots & 1 & 1 & \\
d & 1 & & 1 & \ddots & & 1 \\
e & 1 & & 1 & & \ddots & 1 \\
f & & 1 & & 1 & 1 & \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & \ddots & 1 & 1 & & & 1 \\
2 & 1 & \ddots & & 1 & 1 & \\
3 & 1 & & \ddots & 1 & 1 & \\
4 & & 1 & 1 & \ddots & & 1 \\
5 & & 1 & 1 & & \ddots & 1 \\
6 & 1 & & & 1 & 1 & \ddots
\end{array}
$$

Não é claro como mostrar que as duas matrizes são equivalentes

Usando ferramentas de Álgebra Linear, precisaria de construir uma matriz de mudança de base

A matriz de adjacência de ambos os grafos permite-nos concluir que ambos os grafos

(i) São 3 - regulares (soma dos elementos por linha)

(ii) têm 9 arestas (nº de 1's acima/abaixo da diagonal principal)

Todavia, esta não nos permite verificar de modo imediato que ambos os grafos são isomorfos.

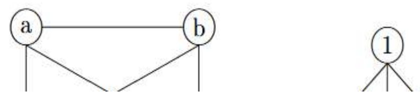
Melhor solução (mais intuitiva embora computacionalmente mais "pesada")

Construir a matriz de adjacência de ambas as matrizes (matrizes de dimensão 6x9)

e verificar que ambas as matrizes são equivalentes (realizar operações sobre linhas)

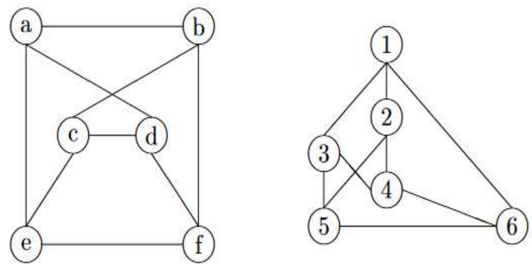
13. Diga, justificando, se os grafos representados a seguir são isomorfos.

[Segunda Tentativa ↪ a Correta]



13. Diga, justificando, se os grafos representados a seguir são isomorfos.

[Segunda Tentativa ↳ a Correta]



	ab	ad	ae	bc	bf	cd	ce	df	ef
a	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	1	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	0	1	1	0	0
d	0	1	0	0	0	1	0	1	0
e	0	0	1	0	0	0	1	0	1
f	0	0	0	0	1	0	0	1	1

	12	13	16	24	25	34	35	46	56
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	1	0	1	0	1
6	0	0	1	0	0	0	0	1	1

A partir daqui, já é mais intuitivo definir o isomorfismo passo a passo:

Passo 1:

$\varphi(a) = 1$

$\varphi(b) = 2$

$\varphi(d) = 3$

$\varphi(e) = 6$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(a)\,\varphi(b) = 12 \\ \varphi(a)\,\varphi(d) = 13 \\ \varphi(a)\,\varphi(e) = 16 \end{array}\right\}$ primeiros 3 1's linha 1

Passo 2:

$\varphi(c) = 4$

$\varphi(f) = 5$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(b)\,\varphi(c) = 24 \\ \varphi(b)\,\varphi(f) = 25 \end{array}\right\}$ Para além de $\varphi(ab) = 12$ que vem do passo 1 dá-nos 1's da linha 2

Passo 3:

Já definimos nos passos anterior o homomorfismo para os seis (6) vértices.

Verificação para as restantes arestas:

$\varphi(c)\,\varphi(d) = 43 = 34$

$\varphi(c)\,\varphi(e) = 46$

$\varphi(d)\,\varphi(f) = 35$

$\varphi(e)\ \varphi(f) = 65 = 56$

Portanto $\varphi: \{a, b, c, d, e, f\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tal como definido anteriormente, é um isomorfismo.