



## Ficha de Exercícios 2

*Integrais indefinidos*

1. Determine os seguintes integrais indefinidos:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (a) $\int (3x^2 + 5x + 7) dx$                        | (b) $\int \sqrt[3]{x} dx$                        | (c) $\int (x^3 + 1)^2 dx$                |
| (d) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$ | (e) $\int \frac{3x^2}{1 + x^3} dx$               | (f) $\int \frac{1}{x^7} dx$              |
| (g) $\int \frac{x + 1}{2 + 4x^2} dx$                 | (h) $\int 4x^3 \cos x^4 dx$                      | (i) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$   |
| (j) $\int \sin x \cos^5 x dx$                        | (k) $\int \operatorname{tg} x dx$                | (l) $\int \frac{\ln x}{x} dx$            |
| (m) $\int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx$       | (n) $\int x 7^{x^2} dx$                          | (o) $\int \sin(\sqrt{2}x) dx$            |
| (p) $\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$                      | (q) $\int \frac{x}{(7 + 5x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ | (r) $\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx$        |
| (s) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$            | (t) $\int \frac{1}{x^2 + 7} dx$                  | (u) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$     |
| (v) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$                      | (w) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$           | (x) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ |

2. Determine os seguintes integrais indefinidos:

- |  |  |   |
|--|--|---|
| (a) $\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | (b) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$                | (c) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$     |
| (d) $\int \frac{6}{x \ln^3(4x)} dx$                              | (e) $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x} - 2)^6} dx$        | (f) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$       |
| (g) $\int \frac{1}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} dx$                     | (h) $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$                   | (i) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$           |
| (j) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$                    | (k) $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx$        | (l) $\int \frac{e^{2x+1}}{e^{2x} + 3} dx$ |
| (m) $\int x^5 \sin(x^6) dx$                                      | (n) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ | (o) $\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{x} dx$    |

3. Considere a função  $g$  definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ .

- Determine a família de todas as primitivas de  $g$ .
- Indique a primitiva da função  $g$  que se anula para  $x = e$ .

**Resolução:**

(a)  $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

(b) Para cada  $c \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$  é uma primitiva de  $g$ .  
Pretendemos então determinar  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $G(e) = 0$ .

$$G(e) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$

Assim,  $G(x) = \frac{(\ln x)^3}{3} - \frac{1}{3}$  é a primitiva de  $g$  que se anula para  $x = e$ .

4. Determine a primitiva  $F$  para a função  $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$  tal que  $F(-1) = 1$ .

5. Sabendo que a função  $f$  satisfaz a igualdade  $\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , determinar  $f(\frac{\pi}{4})$ .

6. Determine a primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$  que se anula no ponto  $x = 2$ .

7. Determine a primitiva da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{3 \cos(\ln x)}{x}$  que toma o valor 2 em  $x = 1$ .

8. Determine a função  $g$  que verifica as seguintes condições:

$$g'(x) = \frac{1}{(1 + \operatorname{arctg}^2(x))(1 + x^2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

9. Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a)  $\int (x+1) \sin x dx$

**Resolução:** Fazendo

$$\begin{aligned} f'(x) = \sin x & \quad \text{temos} \quad f(x) = -\cos x \\ g(x) = x+1 & \quad \text{temos} \quad g'(x) = 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int (x+1) \sin x dx &= -(x+1) \cos x + \int \cos x dx \\ &= -(x+1) \cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b)  $\int x \cos x dx$       (c)  $\int x^2 \cos x dx$       (d)  $\int e^{-3x}(2x+3) dx$       (e)  $\int \ln^2 x dx$

(f)  $\int \ln x dx$       (g)  $\int \ln(x^2+1) dx$       (h)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$       (i)  $\int \cos(\ln x) dx$

(j)  $\int e^{2x} \sin(x) dx$       (k)  $\int \sin(\ln x) dx$       (l)  $\int \operatorname{arcsen} x dx$       (m)  $\int x \operatorname{arcsen} x^2 dx$

(n)  $\int x^3 e^{x^2} dx$       (o)  $\int \operatorname{arctg} x dx$       (p)  $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$       (q)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

(r)  $\int \sin x \cos(3x) dx$       (s)  $\int \cos^2 x dx$       (t)  $\int \sec^3 x dx$       (u)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

10. Determine, usando a técnica de integração por substituição, os seguintes integrais indefinidos:

(a)  $\int x\sqrt{x+1} dx$

**Resolução:**

Consideremos a substituição  $x+1 = t^2$ , com  $t \geq 0$ . Definindo  $\varphi(t) = t^2 - 1$ ,  $t \geq 0$ , temos que  $\varphi$  é invertível, diferenciável e  $\varphi'(t) = 2t$ . Então

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt \\ &= \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + c.\end{aligned}$$

Atendendo a que  $x+1 = t^2$ , com  $t \geq 0$ , vem que  $t = \sqrt{x+1}$ . Assim,

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} + c, \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

(b)  $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$  (c)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$  (d)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} dx$  (e)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-5}} dx$   
(f)  $\int x^2\sqrt{1-x} dx$  (g)  $\int x^2\sqrt{4-x^2} dx$  (h)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$  (i)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx$   
(j)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}} dx$  (k)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$  (l)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}} dx$  (m)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$   
(n)  $\int x(2x+5)^{10} dx$  (o)  $\int (1+x)^{-2} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}} dx$   
(p)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$  (q)  $\int \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}} dx$  (r)  $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} dx$

11. Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a)  $\int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx$

**Resolução:**

A determinação deste integral indefinido passa por decompor em frações simples a fração

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)}.$$

Isto é, passa por escrever a dita fração na seguinte forma

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \quad (*)$$

com  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  constantes reais a determinar.

Temos então que

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{(A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (4A+C-2D)x - 4A+4B+D}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

donde resulta a igualdade de polinómios

$$x+2 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (4A+C-2D)x - 4A+4B+D.$$

Atendendo à condição de igualdade de polinômios resulta que

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -A + B - 2C + D = 0 \\ 4A + C - 2D = 1 \\ -4A + 4B + D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{25} \\ B = \frac{15}{25} \\ C = \frac{1}{25} \\ D = -\frac{14}{25} \end{cases}$$

Voltando a (\*), podemos escrever

$$\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{-\frac{1}{25}}{x-1} + \frac{\frac{15}{25}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{25}x - \frac{14}{25}}{x^2+4}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+4)} dx &= -\frac{1}{25} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{15}{25} \int (x-1)^{-2} dx + \frac{1}{25} \int \frac{x-14}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{25} \int \frac{x}{x^2+4} dx - \frac{14}{25} \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= -\frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{3}{5(x-1)} + \frac{1}{50} \ln(x^2+4) - \frac{7}{25} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx$	(c) $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} dx$	(d) $\int \frac{1}{x^3+8} dx$
(e) $\int \frac{x^8}{1+x^2} dx$	(f) $\int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx$	(g) $\int \frac{8}{x^4+4x^2} dx$
(h) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$	(i) $\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$	(j) $\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx$
(k) $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$	(l) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$	(m) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx$
(n) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$		

12. Determine

(a) $\int \sin^2 \theta d\theta$	(b) $\int \sin^4 x dx$	(c) $\int \sin x \cos^2 x dx$
(d) $\int \sin^3 x dx$	(e) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$	(f) $\int \cos^3 x dx$
(g) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$	(h) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	(i) $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$
(j) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$	(k) $\int x\sqrt{(1+x^2)^3} dx$	(l) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$
(m) $\int x \ln x dx$	(n) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+4} dx$	(o) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$
(p) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$	(q) $\int (2x^2+3)\operatorname{arctg} x dx$	(r) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx$
(s) $\int \sqrt{1+e^x} dx$	(t) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx$	(u) $\int \cos x \cos(5x) dx$
(v) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$	(w) $\int \sin^5 x dx$	(x) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)} dx$

## Exercícios de testes/exames de anos anteriores

13. Determine a primitiva da função  $f(x) = \operatorname{tg} x$  cujo gráfico passa pelo ponto de coordenadas  $(\pi, 3)$ .

(*Teste 1, Cálculo I, 2014/2015*)

14. Determine a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \quad \text{e} \quad f(0) = \ln 4.$$

(*Exame Final, Cálculo I, 2010/2011*)

15. Determine a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  e  $f''(x) = 12x$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

(*Miniteste 2, Cálculo I, 2009/2010*).

16. Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a)  $\int \operatorname{sen}(2x)e^{\cos(2x)} dx$  (*Miniteste 2, Cálculo I, 2008/2009*)

(b)  $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx$  (*Miniteste 2, Cálculo I, 2008/2009*)

(c)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx$  (*Exame de Recurso, Cálculo I, 2008/2009*)

(d)  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$  (*Exame Época Normal, Cálculo I, 2008/2009*)

(e)  $\int \frac{x+2}{x(x^2+4)} dx$  (*Miniteste 2, Cálculo I, 2009/2010*)

(f)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$  (*Miniteste 2, Cálculo I, 2009/2010*)

(g)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$  (*Exame Época Normal, Cálculo I, 2009/2010*)

(h)  $\int \frac{3x-1}{x^3+x} dx$  (*Exame Final, Cálculo I, 2010/2011*)

(i)  $\int \frac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} dx$  (*1º Teste, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

(j)  $\int x \cdot \ln(1+x^2) dx$  (*Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

(k)  $\int \cos x \cdot \ln(\operatorname{sen} x) dx$  (*Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

(l)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$  (*Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018*)

17. Determine a função  $f$  tal que

$$f'(x) = \frac{5x-4}{x(x^2-2x+2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

(*Exame Época Normal, Cálculo I, 2008/2009*)