Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática
Cálculo I

Soluções da Ficha de Exercícios 1

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $\frac{5}{12}$; (f) $-\frac{7}{25}$; (g) $\frac{1}{2}$; (h) $\frac{\pi}{4}$; (i) 0.

2. (a) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}(2y) - \frac{\pi}{2}$;

   (b) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [0, 2]$; $f^{-1}(y) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$;

   (c) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$; $f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\operatorname{arctg} y}$;

   (d) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \left[e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [-1, 1]$; $f^{-1}(y) = \operatorname{sen}(\ln y)$;

   (e) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [0, 1]$; $f^{-1}(y) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$;

   (f) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [-4, -3]$; $f^{-1}(y) = \cos^2\left(\frac{y+\frac{\pi}{2}}{3}\right) - 4$;

   (g) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [1, 3]$; $f^{-1}(y) = 2 + \cos\left(\frac{1}{y} - \pi\right)$;

   (h) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - y}{3}\right) + 1$;

   (i) $\mathcal{D}_{f^{-1}} =]0, \pi[$ $\mathcal{CD}_{f^{-1}} =]-1, +\infty[$; $f^{-1}(y) = e^{\operatorname{cotg} y} - 1$.

3. $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{54}$.

4. $(f^{-1})'(2) = 1$.

5. (a) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

   (b) 1.

6. (a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; (b) $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
   (c) $f'(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (d) $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(1 + x^2)$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
   (e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$, $D_{f'} =]0, 1[$;
   (f) $f'(x) = 3^{\operatorname{tg} x} \ln 3 \sec^2 x$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   (g) $f'(x) = \frac{1}{\ln 3} \sec x \operatorname{cosec} x$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   (h) $f'(x) = \frac{6x^2(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x^5}}{2(\sqrt{x}-1)^2} \mathrm{e}^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; (i) $f'(x) = \frac{-2\operatorname{sen}(\log_2(x^2))}{x \ln 2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
   (j) $f'(x) = \frac{1 - x^2(2\ln x + 1)}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; (k) $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + 1$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
   (l) $f'(x) = \frac{2x^3 - 2 + \ln(x^2)}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. (a) $\frac{-12x^2\cos(4x^3)}{1 + \operatorname{sen}^2(4x^3)}$;

   (b) $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{-2\sqrt{x^4-1}}{x^5 - x}$;

   (c) $\frac{e^x}{\sqrt{2e^x - e^{2x}}}$;

   (d) $\frac{1}{x(2 + \ln^2 x + \ln(x^2))}$.

8. (a) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$;
   (b) $(f^{-1})'(y) = e^y \cos(e^y)$;
   (c) $(f^{-1})'(y) = \frac{-\sqrt{y+1}}{2\sqrt{y}(1+y)^2}$;
   (d) $(f^{-1})'(y) = \begin{cases} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}} & \text{se } y > 1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-y}} & \text{se } y < 0 \end{cases}$.

9. —

10. f tem um zero em $]0,1[$, um em $]1,2[$ e outro em $]-1,0[$.

11. —

12. —

13. (a) Sugestão: Considere a função $f(x) = \text{arcsen} x - x$ e prove que é positiva no intervalo considerado analisando o comportamento da primeira derivada;
    (b) —
    (c) —

14. —

15. —

16. —

17. (a) $D_f = [0,2]$.
    (b) —
    (c) Para justificar a existência de máximo e mínimo globais usar o Teorema de Weierstrass. Observar que $f'(x) < 0$, para todo $x \in]0,2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \frac{-\pi}{2}$. Então o mínimo global é $\frac{-\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.
    (d) $CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. h é estritamente decrescente em $]-\infty, 2[$ e estritamente crescente em $]2,+\infty[$. A função h tem um mínimo em $x = 2$ cujo valor é $\text{arctg}\,(-4)$.

19. (a) $\mathcal{D}_g = [0,2]$
    (b) —
    (c) g é estr. decrescente em $]0,1[$ e estr. crescente e $]1,2[$
    g tem um mínimo em $x = 1$ cujo valor é 0
    (d) Não, pois não é injetiva

20. (a) $\ln 3$; (b) $1/9$; (c) não existe; (d) $2/3$; (e) $-1/2$; (f) -1; (g) 0; (h) 1; (i) 1; (j) 1; (k) 1; (l) e; (m) e^{-2}; (n) 0; (o) 1; (p) e^4; (q)$1/2$.

21. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \text{sen}\, x}{x + \text{sen}\, x} = 1$.

22. (a) $g'(0) = 0$
    (b) —

23. —

24. (a) $\mathcal{D}_g =]0,1[$.
    (b) $x = 1$ é a única assíntota vertical.

25. (a) A função f não é contínua em $x = 1$.
    (b) -2

26. (a) f é contínua em $x = 0$
    (b) —
    (c) e

27. —

28. (a) f é contínua em $x = 0$.
    (b) f não é diferenciável em $x = 0$.
    (c) f tem mínimo local em $x = 0$.
    (d) —
    (e) —
    (f) $g^{-1} : [0, \pi/2[\to \mathbb{R} \quad g^{-1}(x) = -\sqrt{\operatorname{tg} x}$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$.

29. (a) O limite lateral à esquerda de f na origem é igual a $-\infty$. O limite lateral à direita de f na origem é zero.
    (b) Não, porque não existe o limite de f na origem.
    (c) Assíntota vertical: $x = 0$. Não há mais assíntotas verticais porque a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

30. —

31. —

32. (a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$;
    (b) —

33. 1

34. f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. A função f não tem extremos locais.