

Matemática Discreta 2023/2024

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Sumário 1

Apresentação da UC.

Capítulo 1: A lógica de primeira ordem e demonstração automática

Proposições, conectivos, formulas;

Valoração; tabelas de verdade; tautologia, contingência, contradição.

Equivalentes lógicos.

Docentes



- António Jorge Monteiro Neves, Gab. 11.3.9, jorgeneves@ua.pt
- Maria Elisa Carrancho Fernandes, Gab. 11.3.44, maria.elisa@ua.pt
- Paula Cristina Roque da Silva Rama, Gab. 11.3.31, prama@ua.pt
- Alexandre Leite de Castro Madeira, Gab. 11.3.17, madeira@ua.pt
- Nelson José Rodrigues Faustino, Gab. 11.2.14, nfaust@ua.pt

6 Orientação Tutorial (OT)

6.1 Aulas OT

As aulas **OT (Orientação Tutorial)** funcionam nos seguintes horários:

- **OT1/OT2:** Segundas, 18h-19h, Sala 11.1.30;
- **OT3:** Terças, 19h-20h, Sala 11.1.31;
- **OT4/OT5:** Quintas, 18h-19h, Sala 11.1.28;

Nota importante:

Os alunos devem **aviser o respetivo docente (por email)** se tencionam frequentar a aula **OT**, até às 14h do mesmo dia.

9 Avaliação

9.1 Avaliação Discreta (AD)

Inicialmente, no PACO todos os alunos estão associados à **AD**, a qual inclui quatro elementos de avaliação, **MiniTeste 1 (MT1)**, **Teste 1 (T1)**, **MiniTeste 2 (MT2)**, **Teste 2 (T2)**, tendo como objetivo motivar a aprendizagem dos estudantes de forma faseada por tópicos da matéria, avaliando-a de acordo com a seguinte calendarização:

- **MT1 (10%)**: nas aulas **de 11 a 15 de março**, avaliando tópicos de **1LPO**;
- **T1 (40%)**: **12 de abril** (sexta-feira, 16h30m), sobre **1LPO, 2PEC, 3AIC**;
- **MT2 (10%)**: nas aulas **de 13 a 17 de maio**, sobre **4RFG**;
- **T2 (40%)**: na data da **época normal** de exames (11 a 24 de junho) a fixar pelo Conselho Pedagógico, avaliando tópicos de **4RFG e 5ETG**;

Classificação Final de AD (NAD)

A nota **NAD** será o arredondamento às unidades do valor calculado pela fórmula:

$$\mathbf{NAD} = \max(\mathbf{NCMT}, \mathbf{NSMT}),$$

onde

$$\mathbf{NCMT} = 0.1 \mathbf{MT1} + 0.4 \mathbf{T1} + 0.1 \mathbf{MT2} + 0.4 \mathbf{T2}$$

$$\mathbf{NSMT} = 0.5 \mathbf{T1} + 0.5 \mathbf{T2}$$

Programa

1. Lógica de primeira ordem e demonstração automática
2. Princípios de enumeração combinatória
3. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
4. Recorrência e Funções Geradoras
5. Elementos de Teoria dos Grafos

Capítulo 1

Lógica de Primeira Ordem e Demonstração Automática

1.1 Elementos da Lógica Proposicional

Fórmulas

Na lógica proposicional, uma **proposição** é uma afirmação que apenas toma o valor verdadeiro ou falso, mas não os dois ao mesmo tempo. Temos então alguns exemplos de proposições:

- Um número primo ímpar p é soma de dois quadrados se e só se p tem o resto 1 na divisão por 4.
- $\sqrt{2}$ é um número racional.
- $1 + 1 = 3$ e 11 é um número primo.

A partir deste momento, podemos fazer a distinção entre dois tipos de proposições:

- **atómicas**: proposições onde o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente.
- **compostas**: proposições compostas por outras proposições, ligadas pelos conectivos, onde o valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

- \wedge representará a **conjunção** (« ... e ... »);
- \vee representará a **disjunção** (« ... ou ... »);
- \neg representará a **negação** (« não ... »);
- \rightarrow representará a **implicação** ou **condicional** (« Se ... então ... »);
- \leftrightarrow representará a **dupla implicação** ou **equivalência** (« ... se e só se ... »).

- « ... mas ... » pode ser substituído por « ... e ... »;
- « ... só se ... » pode ser substituído por « ... implica ... » ou « Se ... então ... »;
- « ... excepto se ... » pode ser substituído por « ... ou ... ».

A Maria foi à praia mas não foi tomar banho no mar.

A Maria vai à praia só se o tempo melhorar.

A Maria vai à praia excepto se começar a chover.

Uma **fórmula (bem formada)** é uma sequência finita de símbolos de um determinado alfabeto que é parte de uma linguagem formal. No caso da lógica proposicional, as fórmulas (bem formadas) são ditas **fórmulas proposicionais** e o alfabeto a considerar é composto pelos símbolos relativos aos conectivos \wedge , \vee , \rightarrow , \neg , \leftrightarrow , \perp , \top e uma escolha de variáveis proposicionais (diferentes destes símbolos), tipicamente denotados por p, q, r, \dots . As fórmulas proposicionais podem então ser definidas recursivamente de acordo com as regras que abaixo se apresentam:

1. cada variável é uma fórmula e \perp and \top são fórmulas.
2. Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

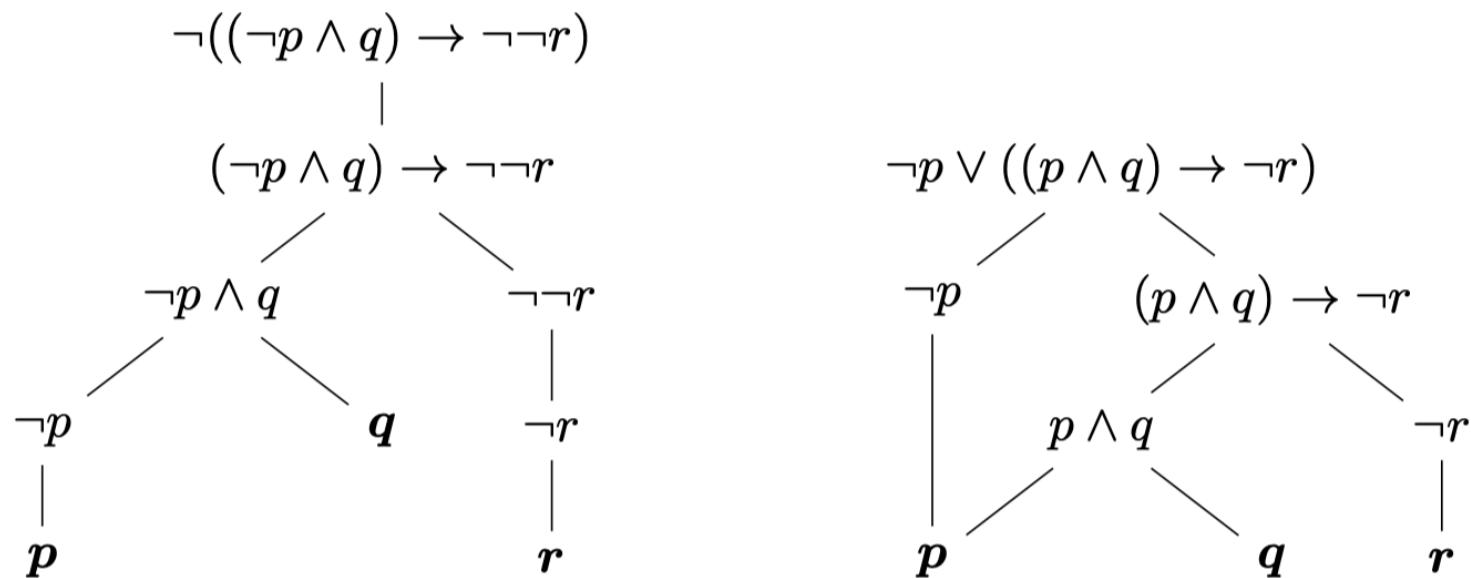
são fórmulas.

Exemplo 1.1.4. Se considerarmos p, q e r três variáveis, podemos ter os seguintes exemplos de fórmulas:

- $\perp, \top, p, q, r, \dots$
- $p \vee q, p \rightarrow \perp, \neg \perp, \dots$
- $(p \wedge q) \leftrightarrow q, (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q), \dots$
- $(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow q), \dots$

No entanto, se considerarmos o mesmo conjunto de variáveis, as sequências $(\perp \top)$, (pqr) , $p \neg$, $p \leftrightarrow \vee$, $(\top \rightarrow)$, $(p \wedge q) \rightarrow r$ ou $(p \wedge \rightarrow q)$ não são fórmulas.

Exemplo 1.1.5. As expressões $\neg((\neg p \wedge q) \rightarrow \neg\neg r)$ e $\neg p \vee ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$ são fórmulas. Efectivamente, se considerarmos as variáveis p, q, r , podemos seguir as árvores de construção ilustradas abaixo.



Folha 0

1. Sejam p, q, r variáveis que representam as proposições

p : *Sou responsável;*

q : *Passo a Matemática Discreta;*

r : *Vou de férias para as Bermudas.*

Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

- a) Se passar a Matemática Discreta, vou de férias para as Bermudas.
- b) Para ir de férias para as Bermudas é suficiente que eu seja responsável.
- c) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.
- d) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.
- e) Se passar a Matemática Discreta então vou de férias para as Bermudas caso seja responsável.

Semântica, Validade e Equivalência

Definição 1.1.6. Uma **valoração** (ou **interpretação**) de um conjunto V de variáveis proposicionais é uma função $v: V \rightarrow \{0, 1\}$, onde 0 representa o valor lógico «falso» e 1 representa o valor lógico «verdadeiro».

Nota 1.1.8. Como visto anteriormente, os símbolos \perp e \top representam proposições atómicas especiais. Para qualquer valoração v , vamos convencionar $v(\top) = 1$ e $v(\perp) = 0$.

- se tivermos uma valoração $v: V \rightarrow \{0, 1\}$, onde $V = \{p, q, r\}$, tal que $p, r \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$, qual será o valor de verdade da seguinte fórmula?

$$((p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$$

tabela de verdade

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$v(\perp) = 0$$

$$v(\top) = 1$$

$$v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \wedge v(\psi)$$

$$v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \vee v(\psi)$$

$$v(\varphi \rightarrow \psi) = v(\varphi) \rightarrow v(\psi)$$

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = v(\varphi) \leftrightarrow v(\psi)$$

$$v(\neg\varphi) = \neg v(\varphi)$$

Exemplo 1.1.10. Suponhamos que $V = \{p, q\}$ e que temos uma valoração $v: V \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$. Então,

$$v(\neg p \rightarrow (p \vee q)) = ?$$

Definição 1.1.12. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tiver o valor lógico 1 para cada interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação com valor lógico 1;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando tiver valor lógico 0 para cada interpretação.

Exemplo 1.1.13. As fórmulas $(p \wedge q) \rightarrow q$ e $(p \wedge q) \rightarrow p$ são tautologias.

Definição 1.1.14. As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes lógicas** ($\varphi \equiv \psi$) quando φ e ψ tem o mesmo valor lógico, para cada valoração.

| *Nota 1.1.15.* $\varphi \equiv \psi$ se e só se a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo 1.1.16. Temos que $(\neg p \vee q) \equiv (p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$.

Exemplo 1.1.17. Dadas três variáveis proposicionais p, q, r e as fórmulas $\varphi = p \wedge (q \vee r)$ e $\psi = (p \wedge q) \vee r$, verifica-se que $\varphi \not\equiv \psi$.

Tautologias

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

$$(p \wedge \top) \equiv p$$

$$(p \vee \perp) \equiv p$$

$$(p \wedge \perp) \equiv \perp$$

$$(p \vee \top) \equiv \top$$

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

Leis de De Morgan

$$\neg\neg p \equiv p$$

Exemplo 1.1.18. Consideremos as variáveis proposicionais p, q, r e uma fórmula φ , unicamente dependente destas. Apresentamos abaixo a tabela de verdade relativa a φ .

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\varphi = ?$$

Sumário 2

- Formas normais.
- Conjuntos de fórmulas consistentes.
- Consequência semântica.
- Dedução.
- O método de resolução (lógica proposicional)

Formas Normais

Definição 1.1.19. Uma fórmula φ é dita um **literal** se φ for uma variável ou a negação de uma variável.

Teorema 1.1.20. Para cada $j \in J$ (com J um subconjunto de índices), seja L_j um literal. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

- i) $\bigvee_{j \in J} L_j$ é uma tautologia.
- ii) $\bigwedge_{j \in J} L_j$ é uma contradição.
- iii) Existem índices distintos $j_1, j_2 \in J$ tais que $L_{j_1} = \neg L_{j_2}$.

Definição 1.1.21. Dizemos que a fórmula φ está na **forma normal conjuntiva (FNC)** quando $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ (para algum conjunto de índices I) e onde cada φ_i é da forma $\bigvee_{j \in J} L_j$ (para algum conjunto de índices J), com L_j literais. Nestas circunstâncias, diremos que as componentes φ_i serão **\vee -cláusulas**.

Nota 1.1.22. Muitas das vezes, consideramos ainda a forma normal conjuntiva dual, a **forma normal disjuntiva (FND)**. Neste caso, uma fórmula φ estará nessa forma quando $\varphi = \bigvee_{i \in I} \varphi_i$, onde cada φ_i da forma $\bigwedge_{j \in J} L_j$, com L_j literais.

Exemplo 1.1.23. Consideremos as variáveis proposicionais p, q, r .

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r$ é uma FNC.
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee \neg r$ é uma FND.
- $p \wedge q \wedge r$ é uma FNC e uma FND.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ não é nem FNC, nem FND.

Teorema 1.1.25. *Toda a fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na FNC (FND).*

Teorema 1.1.26. *Uma fórmula na FNC é uma tautologia se e só se cada uma das suas clausulas for uma tautologia. Dualmente, uma fórmula na FND é uma contradição se e só se cada uma das suas clausulas for uma contradição.*

Folha 0

2. Usando tautologias apropriadas, transforme as seguintes fórmulas na forma normal conjuntiva.
- $p \vee (q \wedge (\neg p));$
 - $\neg((\neg p) \wedge (\neg q));$
 - $(p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q)).$
 - $(q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q).$

Definição 1.1.29. Um conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ dir-se-á **consistente** quando existir uma interpretação que é modelo de todas as fórmulas em $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, i.e., se existir uma interpretação de tal forma a que todas as fórmulas do conjunto sejam verdadeiras.

Exemplo 1.1.30. Consideremos as variáveis proposicionais p, q e um conjunto de fórmulas $\Gamma = \{\neg p, p \rightarrow q, q\}$. Rapidamente conseguimos ver que Γ é consistente: basta considerar a valoração tal que $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 1$.

Definição 1.1.32. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a valoração, se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ têm valor 1, então ψ tem valor 1. Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo 1.1.33. Vamos verificar que $q \vee \neg p$ é consequência de $p \vee q$ e $p \rightarrow q$, ou seja, que $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$.

Teorema 1.1.34. *Dadas fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ e ψ , temos que $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ se e só se $((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi)$ for uma tautologia.*

regras de inferência

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge \mathcal{I})$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge \mathcal{E}_1)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge \mathcal{E}_2)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee \mathcal{I}_1)$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee \mathcal{I}_2)$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \theta \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \theta \end{array}}}{\theta} (\vee \mathcal{E})$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow \mathcal{I})$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow \mathcal{E})$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp \mathcal{E})$$

$$\frac{\varphi \vee \neg \varphi}{\text{EM}} (\text{EM})$$

Definição 1.1.36. Uma fórmula ψ diz-se **consequência sintáctica** das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se, a partir destas, existir uma **prova (dedução)** de ψ (por aplicação das regras de inferência anteriormente introduzidas). Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$.

Teorema 1.1.39 (Correção). *Toda a consequência sintática do cálculo proposicional é também uma consequência semântica.*

Teorema 1.1.40 (Completude). *Toda a consequência semântica do cálculo proposicional é também uma consequência sintática.*

Teorema 1.1.42. Seja ψ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Então $\Gamma \models \psi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ é inconsistente.

regra de resolução:

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi} \text{ (Res)}$$

Em particular, se tivermos $\theta = \perp$ e $\theta = \varphi = \perp$, conseguimos derivar, respectivamente

$$\frac{\neg\psi \quad \psi \vee \varphi}{\varphi}$$

e

$$\frac{\neg\psi \quad \psi}{\perp}$$

Teorema 1.1.43. Para cláusulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, o conjunto $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é inconsistente se e só se $\Gamma \vdash \perp$.

Nota 1.1.45. Para verificar se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ devemos:

1. converter as fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ na FNC.
2. negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na FNC.
3. aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até:
 - obter \perp ;
 - não conseguirmos aplicar a regra de resolução (sem obter \perp).

Exemplo 1.1.46. Vamos verificar $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Exemplo 1.1.47. Será que $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Sumário 3

- Resolução de exercícios de aplicação do método de resolução.
- Alfabeto de 1^a ordem: variáveis, símbolos, quantificares, predicados e funções.
- Termos.
- Alcance de um quantificado; variáveis livres e ligadas.
- Tradução de formulas para a linguagem corrente e vice-versa.

Folha 0

3. Utilizando o método de resolução, justifique que

- a) $p, p \rightarrow q \models q;$
- b) $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \models r.$

4. Utilizando o método de resolução, verifique a correção de cada uma das seguintes deduções:

- a) Chove se e só se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.
- b) Chove se levo guarda-chuva. Hoje não levo guarda-chuva. Logo, hoje não chove.
- c) Se o mordomo cometeu o crime, então ele vai estar nervoso quando interrogado. O mordomo estava nervoso quando interrogado. Logo, o mordomo cometeu o crime.
- d) r é uma condição suficiente para q . Além disso, verifica-se r ou a negação de p . Logo, se q não for verdadeiro, não se verifica p .
- e) De $\neg(p \vee q)$ deduz-se $\neg p$.

1.2 Sintaxe e Semântica de lógica de primeira ordem

$$\forall x \forall y ((\text{par}(x) \wedge \text{par}(y)) \rightarrow \text{par}(x + y))$$

$$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$$

Definição 1.2.1. Um **alfabeto de 1^a ordem** consiste:

1. numa colecção de **variáveis**;
2. nos **símbolos** « \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , \neg , \top , \perp » da lógica proposicional;
3. nos **quantificadores**: os símbolos « \exists » (existe) e « \forall » (para todos);
4. no símbolo de **igualdade** «=».

Além dos pontos expostos acima, e dependendo do contexto, podemos ainda ter:

- uma coleção de **símbolos de constantes**;
- uma coleção de **símbolos de função** (cada símbolo de função tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos);
- uma coleção de **símbolos de predicado** (ou **relação**) (cada símbolo de predicado tem uma **aridade** $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos);

Definição 1.2.3. Vamos introduzir o conceito de **termo** de forma recursiva:

- cada variável e cada símbolo de constante são termos;
- se f é um símbolo de função de aridade n e se t_1, \dots, t_n são termos, então $f(t_1, \dots, t_n)$ também é um termo.

Exemplo 1.2.4. Consideremos uma linguagem com as variáveis x, y, z , um símbolo constante a , um símbolo de função unária i e um símbolo de função binária m . Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a ;
- $i(a), i(x), m(z, y), m(a, z), \dots$;
- $m(i(x), x), i(m(z, a)), m(m(a, y), i(x)), \dots$

Definição 1.2.5. Da mesma forma que fizemos para os termos, vamos agora introduzir, recursivamente, o conceito de **fórmula**. Comecemos com os **átomos** (ou **fórmulas atómicas**):

- $P(t_1, \dots, t_n)$ é um átomo, onde P é um símbolo de predicado com n argumentos e t_1, \dots, t_n são termos;
- $t_1 = t_2$ é um átomo, onde t_1, t_2 são termos;
- \perp e \top são átomos;

A partir daqui, e considerando os átomos como «elementos primitivos», podemos construir recursivamente as fórmulas a partir dos conectivos lógicos e dos quantificadores apresentados anteriormente:

- se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\neg \varphi), \quad \perp, \quad \top,$$

são fórmulas;

- se φ é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$ são fórmulas.

Exemplo 1.2.6.

$$\forall x, y, z \underbrace{(x < y)}_{\substack{\text{fórmula} \\ \text{termo}}} \rightarrow \underbrace{((x + z) < \underbrace{(y + z)}_{\substack{\text{fórmula} \\ \text{termo}}})}_{\substack{\text{fórmula} \\ \text{fórmula}}}$$

Nota 1.2.7. Nas fórmulas da forma $\forall x\varphi$ (resp. $\exists x\varphi$), dizemos que a fórmula φ é o alcance do quantificador \forall (resp. \exists).

Exemplo 1.2.8. No que se segue, gato e garras são símbolos de função unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$
- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$ o alcance de « \forall » / alcance de « \exists »
- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$

Definição 1.2.9. A ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se esta estiver dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa mesma variável. Por outro lado, a ocorrência de uma variável dir-se-á **livre** se não for ligada.

Nota 1.2.10. Uma variável numa fórmula φ dir-se-á livre quando ocorrer pelo menos uma vez livre em φ . Adicionalmente, diremos que φ é **fechada** quando esta não tiver variáveis livres.

Folha 1

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

- a) $\exists y P(x, y)$
- b) $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\neg(P(x)) \vee Q(y))$
- c) $\exists x (P(y, z) \wedge \forall y (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)));$
- d) $P(a, f(a, b));$
- e) $\exists x (P(x) \rightarrow \neg Q(x));$
- f) $\forall x ((P(x) \wedge C(x)) \rightarrow \exists y L(x, y)).$

NOTA. x, y, z, a, b são variáveis.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

- a) Todas as aves têm penas.
- b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.
- c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.
- d) Nenhum número é menor do que zero.
- e) Zero é menor do que qualquer número.
- f) Alguns números primos não são pares.
- g) Todo o número par é número primo.

3. No que se segue, $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$ representam as afirmações « x é uma explicação clara», « x é satisfatória» e « x é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

- a) $\forall x c(x) \rightarrow s(x);$
- b) $\exists x d(x) \wedge \neg s(x);$
- c) $\exists x d(x) \wedge \neg c(x).$

Sumário 4

- Estrutura, valoração, interpretação e modelo.
- Validade de uma formula
- Formas normais
- Forma normal prenex

O que significa, por exemplo, a fórmula $x = c$?

Definição 1.2.12. Uma **estrutura** \mathcal{M} para um alfabeto de 1^a ordem consiste num conjunto D (domínio) onde:

- a cada símbolo de constante a , associamos um **elemento** $a^{\mathcal{M}} \in D$;
- a cada símbolo de função f (de aridade n), associamos uma **função** $f^{\mathcal{M}}: D^n \rightarrow D$;
- a cada símbolo de predicado P (de aridade n), associamos um **subconjunto** $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Definição 1.2.13. Dada uma estrutura \mathcal{M} , uma **valoração** v em \mathcal{M} associará a cada variável x um elemento $v(x) \in D$. Adicionalmente, designamos o par (\mathcal{M}, v) por **interpretação**.

Dada agora uma interpretação (\mathcal{M}, v) de uma linguagem, é comum definirmos (de forma recursiva - à semelhança da lógica proposicional) a interpretação dos termos:

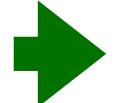
$$v(f(t_1, \dots, t_n)) = f(v(t_1), \dots, v(t_n)) \in D.$$

Exemplo 1.2.14. Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária f e um símbolo de constante a . Para a interpretação (\mathcal{M}, v) , com $D = \mathbb{Z}$ e

$$f^{\mathcal{M}}: D^2 \rightarrow D \quad \text{tal que} \quad (n, m) \mapsto |n| - |m|, \quad a^{\mathcal{M}} = 0, \quad v(x) = -2 \quad \text{e} \quad v(y) = 1,$$

temos:

- $v(f(f(x, a), f(y, f(x, a)))) = ?$



O que significa, por exemplo, a fórmula $x = c$?

Nota 1.2.17. Dizer que uma dada fórmula φ é válida numa interpretação (\mathcal{M}, v) é o mesmo que dizer que (\mathcal{M}, v) é um modelo para φ . Usualmente, denotamos esta relação por $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$.

O que significa, por exemplo, a fórmula $\exists x x = c$?

$$v^{\frac{x}{a}}(y) = \begin{cases} v(y), & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a, & \text{se } y \text{ é igual a } x. \end{cases}$$

Definição 1.2.16. Dada uma interpretação (\mathcal{M}, v) de um alfabeto de 1^a ordem, definimos recursivamente o conceito de **validade** de uma fórmula em (\mathcal{M}, v) da seguinte forma:

- $(\mathcal{M}, v) \models t_1 = t_2$ quando $v(t_1) = v(t_2)$;
- $(\mathcal{M}, v) \models P(t_1, \dots, t_n)$ quando $(v(t_1), \dots, v(t_n)) \in P$;
- $(\mathcal{M}, v) \models \top$ e **não** $(\mathcal{M}, v) \models \perp$;
- $(\mathcal{M}, v) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, v) \models \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, v) \models \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \models (\varphi \rightarrow \psi)$ quando $(\mathcal{M}, v) \models \varphi$ implicar $(\mathcal{M}, v) \models \psi$;
- $(\mathcal{M}, v) \models \exists x \varphi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, v^{\frac{x}{a}}) \models \varphi$;
- $(\mathcal{M}, v) \models \forall x \varphi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, v^{\frac{x}{a}}) \models \varphi$.

Exercício: Sejam \mathcal{M} uma estrutura com

- $D = \{1, 2, 3\}$; $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (3,2)\}$; $S = \{1, 3\}$ e v uma valorarão com $v(x) = 3$ e $v(y) = 2$.

Verifique a validade das seguintes fórmulas:

- (a) $R(x, y)$
- (b) $S(y)$
- (c) $\forall y (S(x) \wedge R(x, y))$
- (d) $\exists x \forall y (S(x) \wedge R(x, y))$

Folha 1

9. Considere um universo X com os objetos A , B e C (isto é, $X=\{A, B, C\}$) e uma linguagem onde α , β e γ são símbolos de constante, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

símbolos de constante: $\alpha \mapsto A$, $\beta \mapsto A$ e $\gamma \mapsto B$;

símbolo de função f : $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

símbolo de predicado R : $\{(B, A), (C, B), (C, C)\}$.

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

- a) $R(\alpha, \beta);$
- b) $\exists x f(x) = \beta;$
- c) $\forall w R(f(w), w).$

Definição 1.2.22. Uma fórmula diz-se:

- uma **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando for válida para qualquer interpretação;
- uma **contingência** (ou **fórmula consistente**) se existir uma interpretação para a qual seja válida;
- uma **contradição** (ou **inconsistência**) quando não for uma consistência, ou seja, quando for inválida para qualquer interpretação.

Definição 1.2.24. Duas fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** ($\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Definição 1.2.25. Uma fórmula ψ diz-se **consequência semântica** (ou **consequência lógica**) das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação (\mathcal{M}, v) , se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são válidas em (\mathcal{M}, v) , então ψ é válida em (\mathcal{M}, v) . Neste caso, escrevemos $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.