Programação Linear e Extensões

Ana Paula Tomás

LEIC - Desenho de Algoritmos
Universidade do Porto

Março 2022

Tópicos a abordar

Minimizar moedas num troco

Exemplo 1: Coin Change

Trocar uma quantia Q usando **um número mínimo** de moedas. Existem n tipos de moedas, sendo v_k, com $1 \leq k \leq n$ os seus valores.

- Caso 1: o número de moedas de cada tipo é ilimitado.
- Caso 2: o número de moedas disponíveis de valor v_k é d_k, com $1 \leq k \leq n$.

Minimizar moedas num troco

Exemplo 1: Coin Change

Trocar uma quantia Q usando **um número mínimo** de moedas. Existem n tipos de moedas, sendo v_k, com $1 \leq k \leq n$ os seus valores.

- Caso 1: o número de moedas de cada tipo é ilimitado.
- Caso 2: o número de moedas disponíveis de valor v_k é d_k, com $1 \leq k \leq n$.

minimizar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$

sujeito a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k x_k = Q \\ x_k \in \mathbb{Z}_0^+,\ \text{para } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

x_k: quantas moedas de valor v_k usa

minimizar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$

sujeito a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k x_k = Q \\ x_k \leq d_k,\ \text{para } 1 \leq k \leq n \\ x_k \in \mathbb{Z}_0^+,\ \text{para } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Maximizar número de intervalos sem sobreposição

Exemplo 2: Interval Scheduling

Seja $\mathcal{T}$ um conjunto de n tarefas. A tarefa t_j tem de decorrer no intervalo $[s_j, f_j[$, ou seja, começar no instante s_j e terminar em f_j, para $1 \leq j \leq n$ (notar que $f_j \notin [s_j, f_j[$). Em cada instante, só uma tarefa pode estar a decorrer. Pretendemos **maximizar o número de tarefas realizadas**.

Exemplo 2: Interval Scheduling

Seja $\mathcal{T}$ um conjunto de n tarefas. A tarefa t_j tem de decorrer no intervalo $[s_j, f_j[$, ou seja, começar no instante s_j e terminar em f_j, para $1 \leq j \leq n$ (notar que $f_j \notin [s_j, f_j[$). Em cada instante, só uma tarefa pode estar a decorrer. Pretendemos **maximizar o número de tarefas realizadas**.

Variáveis de decisão: $x_j \in \{0, 1\}$ indica se a tarefa t_j é realizada ou não, para $1 \leq j \leq n$, sendo 1 se for e 0 se não for.

maximizar $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j$

sujeito a

$$\begin{cases} s_{j'}x_{j'} \geq f_j x_j \quad \vee \quad s_j x_j \geq f_{j'}x_{j'}, \text{ para todo } j' \neq j & \text{(não haver sobreposições)} \\ x_j \in \{0,1\}, \text{ para } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Exemplo 3: Scheduling

Um projeto é constituído por um conjunto de tarefas, sendo conhecida a **duração** de cada tarefa e as **restrições de precedência** entre tarefas. Não se pode dar início a uma tarefa sem que as que a precedem estejam concluídas. Pretendemos agendar as tarefas de modo a concluir o projeto o mais cedo possível. Cada tarefa requer um certo número de **trabalhadores**. Cada trabalhador só pode estar a realizar uma tarefa em cada instante. Assuma que:

- Caso 1: não há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.
- Caso 2: há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.

Admita que as habilitações necessárias são idênticas para todas as tarefas.

Exemplo 3: Scheduling

Um projeto é constituído por um conjunto de tarefas, sendo conhecida a **duração** de cada tarefa e as **restrições de precedência** entre tarefas. Não se pode dar início a uma tarefa sem que as que a precedem estejam concluídas. Pretendemos agendar as tarefas de modo a concluir o projeto o mais cedo possível. Cada tarefa requer um certo número de **trabalhadores**. Cada trabalhador só pode estar a realizar uma tarefa em cada instante. Assuma que:

- Caso 1: não há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.
- Caso 2: há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.

Admita que as habilitações necessárias são idênticas para todas as tarefas.

Caso 1: sem partilha de recursos

Caso 2: com partilha de recursos

Exemplo: Tarefas A, B, C, D e E; A precede C; B precede C e D; C precede E.

	A	B	C	D	E
duração	1	3	4	5	2
# trabalhadores	2	3	1	1	2

Escalonamento sem partilha de recursos

Exemplo 3 - Caso 1

Dada a descrição das tarefas do projeto, as suas durações d_i, com $i \in$ Tarefas, e a relação de precedência $\mathcal{R}$, determinar a data de conclusão mais próxima para o projeto e uma data para início de cada tarefa.

Variáveis de decisão:

- z: data de conclusão do projeto
- x_i: data de início da tarefa i, para $i \in$ Tarefas

Modelo de otimização linear:

$$\textbf{minimizar} \quad z$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\begin{cases} x_i + d_i \leq x_j, & \text{para todo } (i,j) \in \mathcal{R} \\ x_i + d_i \leq z, & \text{para todo } i \in \text{Tarefas} \\ z \in \mathbb{R}_0^+, \ \ x_i \in \mathbb{R}_0^+, & \text{para todo } i \in \text{Tarefas} \end{cases}$$

Produção de mesas e cadeiras

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Produção de mesas e cadeiras

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

- **Variáveis de decisão**

  x_M: número de mesas a produzir
  x_C: número de cadeiras a produzir

- **Restrições**
  - Não exceder a quantidade de madeira disponível: $30x_M + 20x_C \leq 300$; nem o número de horas de trabalho disponíveis: $5x_M + 10x_C \leq 110$.
  - Variáveis tomam valores inteiros não negativos: $x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+$

- **Objetivo**

  Maximizar o valor do lucro $6x_M + 8x_C$

Produção de mesas e cadeiras (cont.)

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Modelo matemático

maximizar $6x_M + 8x_C$
sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \text{ inteiros} \end{cases}$$

Produção de mesas e cadeiras (cont.)

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Modelo matemático

$$\textbf{maximizar } 6x_M + 8x_C$$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \text{ inteiros} \end{cases}$$

Análise de dimensões

unidades de medida consistentes?

$$\frac{u.m}{mesa} \times mesa + \frac{u.m}{cadeira} \times cadeira = u.m$$

$$\frac{pes}{mesa} \times mesa + \frac{pes}{cadeira} \times cadeira \leq pes$$

$$\frac{horas}{mesa} \times mesa + \frac{horas}{cadeira} \times cadeira \leq horas$$

Exemplo 5: Knapsack linear (ou fracionário)

Uma empresa produz três tipos de produtos que vende a peso com lucros de 1400, 2100 e 2700 euros/tonelada, respetivamente. Para produzir um kilograma de cada um dos produtos são dispendidos 30', 55' e 1h10', respetivamente. Supondo que não vende mais do que 13, 5 e 3 Kg de cada um dos produtos por dia, que o tempo despendido é proporcional à quantidade produzida e que só dispõe de 8 horas de trabalho, que quantidade de cada produto deve produzir?

maximizar $1.4x_1 + 2.1x_2 + 2.7x_3$
sujeito a

$$\begin{cases} 30x_1 + 55x_2 + 70x_3 \leq 480 \\ x_1 \leq 13 \\ x_2 \leq 5 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_o^+ \end{cases}$$

Exemplo 5: Knapsack linear (ou fracionário)

Uma empresa produz três tipos de produtos que vende a peso com lucros de 1400, 2100 e 2700 euros/tonelada, respetivamente. Para produzir um kilograma de cada um dos produtos são dispendidos 30', 55' e 1h10', respetivamente. Supondo que não vende mais do que 13, 5 e 3 Kg de cada um dos produtos por dia, que o tempo despendido é proporcional à quantidade produzida e que só dispõe de 8 horas de trabalho, que quantidade de cada produto deve produzir?

maximizar $1.4x_1 + 2.1x_2 + 2.7x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_1 + 55x_2 + 70x_3 \leq 480 \\ x_1 \leq 13 \\ x_2 \leq 5 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_o^+ \end{cases}$$

Knapsack linear (fracionário)

maximizar $\sum_{i=1}^{n} l_i x_i$

sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \leq T \\ x_i \leq u_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n \\ x_i \in \mathbb{R}_o^+ \end{cases}$$

Exemplos de *knapsack problems* (booleano e inteiro)

Exemplo de problema de mochila com variáveis booleanas

Suponha que pretende transportar **cinco objetos** mas que, por qualquer razão, tem um limite de carga de 65Kg. Na tabela seguinte são dados o peso de cada objeto e o valor que lhe atribui. Quais os objetos a transportar?

peso	41	32	24	17	15
valor	85	72	61	45	37

Exemplo de problema de mochila com variáveis inteiras

Suponha que pretende transportar **objetos de cinco tipos** mas que, por qualquer razão, tem um limite de carga de 65Kg. O peso e o valor de cada tipo de objeto é dado na tabela seguinte. Quantos objetos de cada tipo deve transportar?

peso	41	32	24	17	15
valor	85	72	61	45	37

Problemas da Mochila (booleano/inteiro)

Knapsack binário (booleano)

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

sujeito a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq L \\ \forall i \quad x_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

Knapsack inteiro

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

sujeito a

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq L \\ \forall i \quad x_i \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

maximizar $85x_1 + 72x_2 + 61x_3 + 45x_4 + 37x_5$
sujeito a

$$\begin{cases} 41x_1 + 32x_2 + 24x_3 + 17x_4 + 15x_5 \leq 65 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\} \end{cases}$$

maximizar $85x_1 + 72x_2 + 61x_3 + 45x_4 + 37x_5$
sujeito a

$$\begin{cases} 41x_1 + 32x_2 + 24x_3 + 17x_4 + 15x_5 \leq 65 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Exemplo 6: Programação Inteira com variáveis booleanas

Seis turmas práticas $P_1, \ldots, P_6$, sem sobreposição de horário, devem ser atribuídas a seis professores $A, \ldots, F$, ficando cada um com uma turma. Os professores ordenaram as turmas por ordem de preferência. Determinar uma atribuição que maximize globalmente as preferências (assumindo aditividade).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A	1	2	3	4	5	6
C	2	1	3	5	4	6
E	3	2	1	4	6	5

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
B	3	1	5	4	6	2
D	6	5	4	1	2	3
F	1	2	3	6	4	5

Problema de Afetação (*Assignment Problem*)

Exemplo 6: Programação Inteira com variáveis booleanas

Seis turmas práticas $P_1, \ldots, P_6$, sem sobreposição de horário, devem ser atribuídas a seis professores $A, \ldots, F$, ficando cada um com uma turma. Os professores ordenaram as turmas por ordem de preferência. Determinar uma atribuição que maximize globalmente as preferências (assumindo aditividade).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A	1	2	3	4	5	6
C	2	1	3	5	4	6
E	3	2	1	4	6	5

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
B	3	1	5	4	6	2
D	6	5	4	1	2	3
F	1	2	3	6	4	5

Variáveis de decisão: x_{ij} indica se o professor j fica com a turma i ou não.
Dados: c_{ij} é o custo da atribuição da turma i ao professor j, n o número de professores e m o número de turmas.

Problema de Afetação (*Assignment Problem*)

Exemplo 6: Programação Inteira com variáveis booleanas

Seis turmas práticas $P_1, \ldots, P_6$, sem sobreposição de horário, devem ser atribuídas a seis professores $A, \ldots, F$, ficando cada um com uma turma. Os professores ordenaram as turmas por ordem de preferência. Determinar uma atribuição que maximize globalmente as preferências (assumindo aditividade).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A	1	2	3	4	5	6
C	2	1	3	5	4	6
E	3	2	1	4	6	5

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
B	3	1	5	4	6	2
D	6	5	4	1	2	3
F	1	2	3	6	4	5

Variáveis de decisão: x_{ij} indica se o professor j fica com a turma i ou não.
Dados: c_{ij} é o custo da atribuição da turma i ao professor j, n o número de professores e m o número de turmas.

minimizar $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m & \text{(turma } i \text{ é atribuída a um professor)} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \ \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n & \text{(professor } j \text{ fica com uma turma)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \text{ para todo } (i, j) \end{cases}$$

Programação linear, inteira ou mista

Prog. Linear (LP)

$$\textbf{max/min } z = cx \quad \textbf{sujeito a} \quad \begin{cases} Ax \ \# \ b \\ x \in (\mathbb{R}_0^+)^n \end{cases}$$

Prog. Inteira (IP)

$$\textbf{max/min } z = cx \quad \textbf{sujeito a} \quad \begin{cases} Ax \ \# \ b \\ x \in (\mathbb{Z}_0^+)^n \end{cases}$$

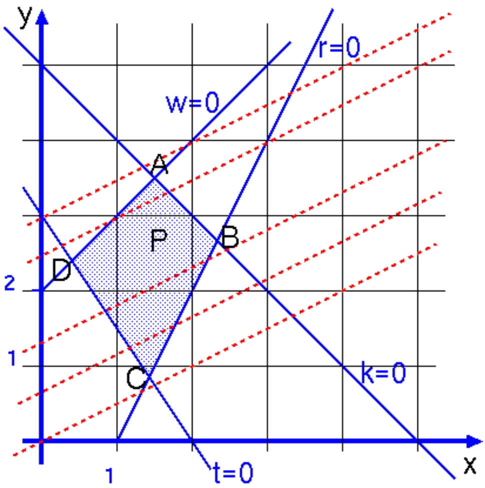
Prog. Mista (MIP)

$$\textbf{max/min } z = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \textbf{sujeito a} \quad \begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 \ \# \ b \\ x_1 \in (\mathbb{R}_0^+)^{n_1} \\ x_2 \in (\mathbb{Z}_0^+)^{n_2} \end{cases}$$

onde $\# \in \{=, \leq, \geq\}^m$. A função objetivo é linear e as restrições são lineares:

- **L**inear **P**rogramming (LP): variáveis reais (contínuas)
- **I**nteger **P**rogramming (IP): variáveis inteiras
  IP puro: também z e as vars. de desvio em $\mathbb{Z}$ (se necessário, multiplicar A, b e c por escalares)
- **M**ixed **I**nteger **P**rogramming (MIP): algumas variáveis inteiras e outras reais

Relaxação linear do problema: assume todas as variáveis com valores em $\mathbb{R}_0^+$.



Como seria se $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$?

minimizar $z = x - 2y$
sujeito a

$$\begin{cases} 2y + 3x \geq 6 \\ y - x \leq 2 \\ y + x \leq 5 \\ -y + 2x \leq 2 \\ x, y \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

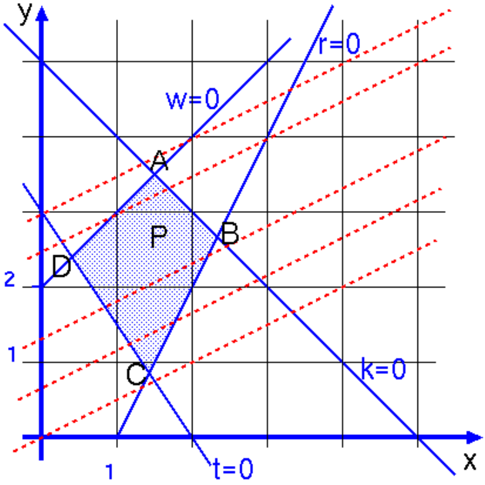
Forma normal do problema:

minimizar $z = x - 2y$
sujeito a

$$\begin{cases} 2y + 3x - t = 6 \\ y - x + w = 2 \\ y + x + k = 5 \\ -y + 2x + r = 2 \\ x, y, t, w, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

t, w, k, r variáveis de desvio

Interpretação Geométrica no Plano



minimizar $z = x - 2y$
sujeito a

$$\begin{cases} 2y + 3x - t = 6 \\ y - x + w = 2 \\ y + x + k = 5 \\ -y + 2x + r = 2 \\ x, y, t, w, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

A tracejado vemos algumas curvas de nível da função objetivo.

z	
0	$x - 2y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \frac{1}{2}x$
-2	$x - 2y = -2 \;\Leftrightarrow\; y = 1 + \frac{1}{2}x$
-4	$x - 2y = -4 \;\Leftrightarrow\; y = 2 + \frac{1}{2}x$
$\ldots$	

Como seria se $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$?

Ótimo IP: $x = 1, y = 3$, com $z = -5$.

Ótimo LP: **vértice** $A \hookrightarrow (3/2, 7/2)$ com $z = -11/2$.

Ótimo de um problema IP e MIP / Ótimo da relaxação linear

O valor ótimo de um problema de IP ou MIP não pode ser melhor do que o valor do ótimo da sua relaxação linear. Sendo $z^\star$ o valor ótimo para o problema e $z^\star_{LP}$ o valor ótimo da sua relaxação linear, tem-se:

- $z^\star \leq z^\star_{LP}$, se for um problema de maximização,
- $z^\star_{LP} \leq z^\star$, se for um problema de minimização.

Se a solução ótima da relaxação linear satisfizer as restrições de integralidade então é solução ótima do problema.

Esta propriedade suporta o método *branch-and-bound* que descrevemos a seguir.

Produção de mesas e cadeiras

Uma firma pode produzir mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. O que produzir para maximizar o lucro?

Produção de mesas e cadeiras

Uma firma pode produzir mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. O que produzir para maximizar o lucro?

Variáveis de decisão

x_M: número de mesas a produzir
x_C: número de cadeiras a produzir

maximizar $6x_M + 8x_C$
sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \textbf{ inteiros} \end{cases}$$

Podemos aplicar o Método Simplex para determinar uma solução ótima, **com** $x_M, x_C \in \mathbb{R}_0^+$. Se essa solução ótima tiver componentes $x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+$, então é solução ótima do problema inicial.

Produção de mesas e cadeiras

Uma firma pode produzir mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. O que produzir para maximizar o lucro?

Variáveis de decisão

x_M: número de mesas a produzir
x_C: número de cadeiras a produzir

maximizar $6x_M + 8x_C$
sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \ \textbf{inteiros} \end{cases}$$

Podemos aplicar o Método Simplex para determinar uma solução ótima, **com** $x_M, x_C \in \mathbb{R}_0^+$. Se essa solução ótima tiver componentes $x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+$, então é solução ótima do problema inicial.

A solução ótima linear é $x_M = 4$ e $x_C = 9$. É inteira.

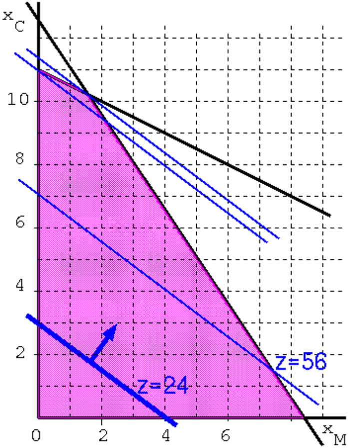
Mas, se só dispusesse de 250 pés de madeira, seria $x_M = 3/2$ e $x_C = 41/4$. O que fazer?

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



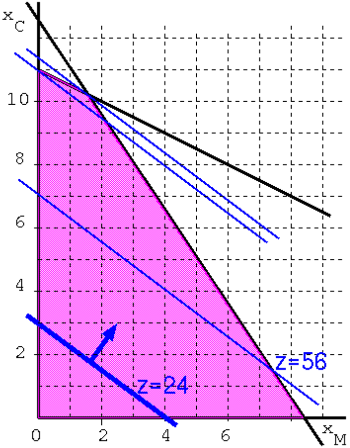
maximizar $z = 6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 250 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



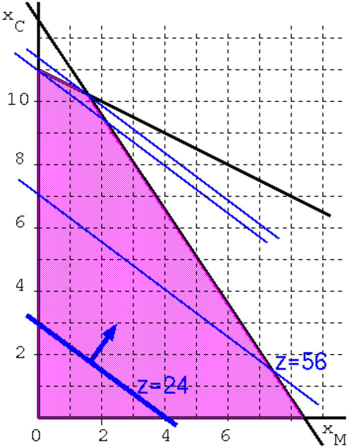
$$\textbf{maximizar } z = 6x_M + 8x_C$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 250 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Ótimo da relaxação linear: $\left(\frac{3}{2}, \frac{41}{4}\right)$

$$\textbf{max } z = 6x_M + 8x_C \quad \textbf{sujeito a} \begin{cases} 3x_M + 2x_C + s_1 = 25 \\ x_M + 2x_C + s_2 = 22 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \Leftrightarrow \textbf{max } z = 91 - s_1 - 3s_2 \quad \textbf{sujeito a} \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_C = \frac{41}{4} + \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{maximizar } z = 6x_M + 8x_C \\ \textbf{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{l} 30x_M + 20x_C \leq 250 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array} \right. \end{array}}$$

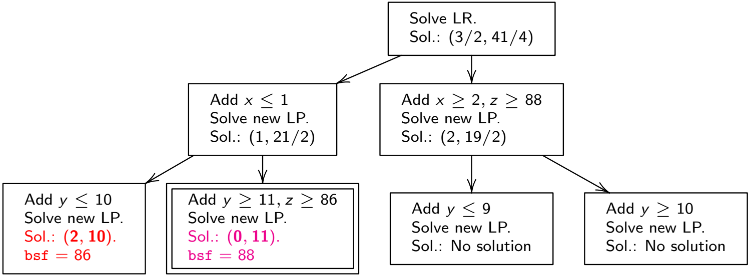
Ótimo da relaxação linear: $\left(\frac{3}{2}, \frac{41}{4}\right)$

$$\begin{array}{l} \textbf{max } z = 6x_M + 8x_C \\ \textbf{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_M + 2x_C + s_1 = 25 \\ x_M + 2x_C + s_2 = 22 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \textbf{max } z = 91 - s_1 - 3s_2 \\ \textbf{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{lcl} x_M & = & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_C & = & \frac{41}{4} + \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 & \in & \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right. \end{array}$$

Arredondamentos? Incorreto. $(2, 10)$ e $(1, 11)$ não são pertencem ao espaço de soluções e $(1, 10)$ não é solução ótima.

Pesquisa por *Branch and Bound*

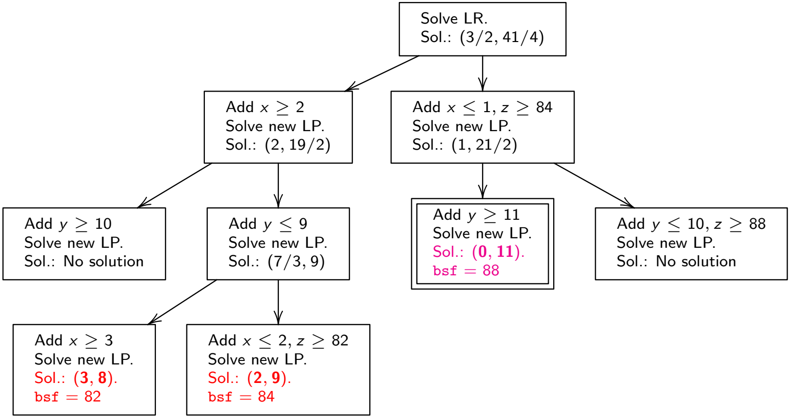
Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



Estratégia: Sendo $\mathbf{x}^\star$ a solução ótima linear, se $\mathbf{x}^\star$ não satisfaz as restrições de integralidade, toma a primeira variável $x_i \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que o valor $x_i^\star \notin \mathbb{Z}_0^+$. Explora primeiro $x_i \leq \lfloor x_i^\star \rfloor$ e depois $x_i \geq \lfloor x_i^\star \rfloor + 1$.

Pesquisa por *Branch and Bound*

Outra estratégia: Sendo $\mathbf{x}^\star$ a solução ótima linear, se $\mathbf{x}^\star$ não satisfaz as restrições de integralidade, toma a primeira variável $x_i \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $x_i^\star \notin \mathbb{Z}_0^+$. Explora primeiro $x_i \geq \lfloor x_i^\star \rfloor + 1$ e depois $x_i \leq \lfloor x_i^\star \rfloor$.

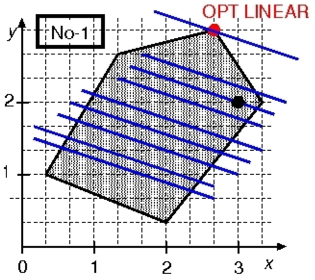


Relaxação linear: problema de programação linear que se obtém *relaxando* a restrição $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$, que se substitui por $x, y \in \mathbb{R}_0^+$. **Método "Branch-and-Bound":** calcula uma solução inteira ótima resolvendo uma sequência de problemas lineares.

Exemplo:

maximizar $z = x + 3y$
subjeito a

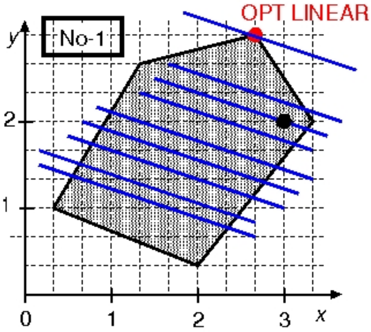
$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{5}x + \frac{17}{5} \\ y \geq \frac{5}{4}x - \frac{13}{6} \\ y \leq -\frac{3}{2}x + 7 \\ y \leq \frac{1}{4}x + \frac{7}{3} \\ y \leq \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} \\ x, y \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

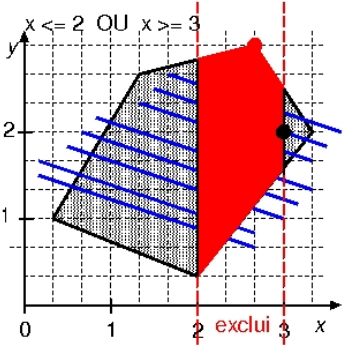


$z = x + 3y \Leftrightarrow y = z/3 - x/3$. A ordenada na origem $z/3$ cresce se z cresce. O ótimo linear é o vértice indicado, mas o ótimo inteiro é $(3, 2)$.

Ideia do Método "Branch-and-Bound"

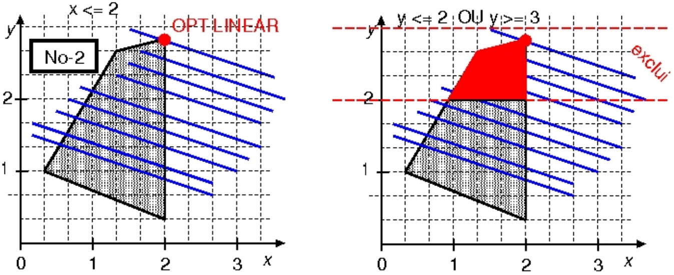
Resolução por "branch-and-bound": A solução ótima da relaxação linear $(8/3, 3)$ tem valor de x não inteiro, sendo $2 < x < 3$. Excluimos essa solução se acrescentarmos a restrição $x \leq 2 \vee x \geq 3$, que retira a faixa a vermelho.





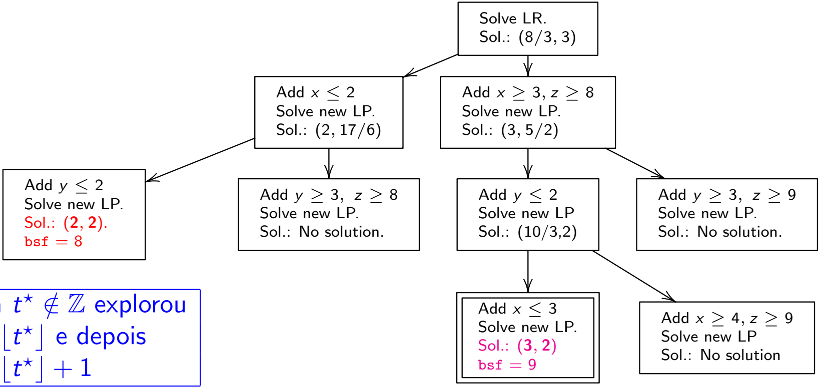
Nenhuma solução inteira é removida, mas partiu-se o espaço de soluções. Os dois subproblemas serão resolvidos separadamente. O valor de z da melhor solução inteira que for encontrando – *best so far (bsf)* – é usado para restringir a procura.

$\boxed{\text{Caso } x \leq 2}$: a solução ótima linear é novamente não inteira, pois $2 < y < 3$.
Exclui-a criando dois novos subproblemas (filhos de $\boxed{\text{No-2}}$): $y \leq 2$ ou $y \geq 3$.



Ideia do Método "Branch-and-Bound"

Trata-se de um **método de pesquisa em árvore**.



Para $t^\star \notin \mathbb{Z}$ explorou
$t \leq \lfloor t^\star \rfloor$ e depois
$t \geq \lfloor t^\star \rfloor + 1$

Árvore de pesquisa criada em **profundidade e da esquerda para a direita**. Em geral, o tamanho da árvore depende da escolha da variável que é usada no desdobramento, bem como da ordem de visita dos nós, que pode ser determinada dinamicamente ao longo do processo, de acordo com heurísticas.

Como resolver algebricamente problemas de LP?

Problema de Mistura

Uma empresa produz três tipos de farinhas que vende com lucros de 27u.m., 21u.m. e 14u.m. por tonelada, respetivamente. As composições das farinhas são:

Farinha	Milho	Centeio	Trigo
I	90%	10%	0%
II	70%	20%	10%
III	50%	30%	20%

A empresa dispõe de 1800 toneladas de milho, 1000 de centeio e 600 de trigo. Toda a produção pode ser vendida e os processos de mistura para as diversas farinhas têm custo igual. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Problema de Mistura

Uma empresa produz três tipos de farinhas que vende com lucros de 27u.m., 21u.m. e 14u.m. por tonelada, respetivamente. As composições das farinhas são:

Farinha	Milho	Centeio	Trigo
I	90%	10%	0%
II	70%	20%	10%
III	50%	30%	20%

A empresa dispõe de 1800 toneladas de milho, 1000 de centeio e 600 de trigo. Toda a produção pode ser vendida e os processos de mistura para as diversas farinhas têm custo igual. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Modelo matemático: x_i é a quantidade de farinha i a produzir (em toneladas).

$$\textbf{maximizar } 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 & \leq & 1800 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 & \leq & 1000 \\ 0.1x_2 + 0.2x_3 & \leq & 600 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Problemas de Programação Linear (LP)

Hipóteses subjacentes ao modelo de programação linear:

Proporcionalidade (contribuições proporcionais), **divisibilidade** (variáveis de decisão em $\mathbb{R}_0^+$ ou $\mathbb{Q}_0^+$), **certeza** (parâmetros são constantes conhecidas), **aditividade** e **linearidade** das restrições e da função objetivo. Restrições lineares **fechadas** (operadores $=$, $\geq$, $\leq$).

Diz-se que o problema está em **forma normal** se estiver definido por um sistema de equações lineares com termo independente $\mathtt{b} \in (\mathbb{R}_0^+)^m$, isto é não negativo, e variáveis de decisão não negativas:

F.N. para maximização

maximize $\mathtt{cx}$
subject to
$$\begin{cases} \mathtt{Ax} = \mathtt{b} \\ \mathtt{x} \in (\mathbb{R}_0^+)^n \end{cases}$$

F.N. para minimização

minimize $\mathtt{cx}$
subject to
$$\begin{cases} \mathtt{Ax} = \mathtt{b} \\ \mathtt{x} \in (\mathbb{R}_0^+)^n \end{cases}$$

Redução à forma normal

As relações binárias $\leq$ e $\geq$ são definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$\begin{array}{lcl} a \leq b & \Leftrightarrow & \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \ \ a + s = b \\ a \geq b & \Leftrightarrow & \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \ \ a - s = b \end{array}$$

Usando tal definição, podemos transformar inequações em equações:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \ \ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \ \ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

Redução à forma normal

As relações binárias $\leq$ e $\geq$ são definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$\begin{array}{lcl} a \leq b & \Leftrightarrow & \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \;\; a + s = b \\ a \geq b & \Leftrightarrow & \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \;\; a - s = b \end{array}$$

Usando tal definição, podemos transformar inequações em equações:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \;\; \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \;\; \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

---

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$
subjeito a

$$\left\{\begin{array}{r} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leq 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 1000, \\ 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 600, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$
subjeito a

$$\left\{\begin{array}{r} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + s_1 = 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + s_2 = 1000, \\ 0.1x_2 + 0.2x_3 + s_3 = 600, \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Redução à forma normal

As relações binárias $\leq$ e $\geq$ são definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \;\; a + s = b$$
$$a \geq b \;\Leftrightarrow\; \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \;\; a - s = b$$

Usando tal definição, podemos transformar inequações em equações:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\Leftrightarrow\; \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \;\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \;\Leftrightarrow\; \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \;\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

---

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$
subjeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leq 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 1000, \\ \qquad 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 600, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$
subjeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + s_1 = 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + s_2 = 1000, \\ \qquad 0.1x_2 + 0.2x_3 + s_3 = 600, \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

s_1, s_2, s_3 chamam-se variáveis de desvio

Resolução do problema pelo Método Simplex

$$\textbf{maximizar } 27x_1 + 21x_2 + 14x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcccccccl} 0.9x_1 & + & 0.7x_2 & + & 0.5x_3 & + & s_1 & & & & & = & 1800 \\ 0.1x_1 & + & 0.2x_2 & + & 0.3x_3 & & & + & s_2 & & & = & 1000 \\ & & 0.1x_2 & + & 0.2x_3 & & & & & + & s_3 & = & 600 \\ \multicolumn{13}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

Este sistema de equações pode ser colocado trivialmente numa **forma resolvida:**

$$\textbf{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\left\{\begin{array}{rcl} s_1 & = & 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 & = & 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 & = & 600 \qquad\qquad\; - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

Mostra que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $s_1 = 1800$, $s_2 = 1000$ e $s_3 = 600$ é solução do problema. Essa solução, que se obtém se se atribuir às variáveis livres o valor zero, chama-se **solução básica** do sistema de equações. Sendo **não-negativa**, chama-se **solução básica admissível**.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1, x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1, x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3 \\
\textbf{sujeito a} \\
\left\{
\begin{array}{lcl}
s_1 & = & 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\
s_2 & = & 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\
s_3 & = & 600 \qquad\qquad\quad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1, x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1, x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$\textbf{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} s_1 & = & 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 & = & 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 & = & 600 \qquad\qquad\quad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**. Para aumentar z, podemos:

- aumentar o valor da variável livre com indicador mais favorável (x_1 com 27), mantendo as restantes variáveis livres com valor 0.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1, x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1, x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$\textbf{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\begin{cases} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 \quad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**. Para aumentar z, podemos:

- aumentar o valor da variável livre com indicador mais favorável (x_1 com 27), mantendo as restantes variáveis livres com valor 0. A nova solução terá de ser admissível, sendo da forma $(x_1, 0, 0, s_1, s_2, s_3)$ e não negativa, com $s_3 = 600$, $s_1 = 1800 - 0.9x_1 \geq 0$, $s_2 = 1000 - 0.1x_1 \geq 0$. Logo, $x_1 \leq 2000$.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1, x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1, x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$\textbf{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} s_1 & = & 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 & = & 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 & = & 600 \qquad\qquad\quad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}\right.$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**. Para aumentar z, podemos:

- aumentar o valor da variável livre com indicador mais favorável (x_1 com 27), mantendo as restantes variáveis livres com valor 0. A nova solução terá de ser admissível, sendo da forma $(x_1, 0, 0, s_1, s_2, s_3)$ e não negativa, com $s_3 = 600$, $s_1 = 1800 - 0.9x_1 \geq 0$, $s_2 = 1000 - 0.1x_1 \geq 0$. Logo, $x_1 \leq 2000$.
- Se **aumentarmos x_1 o mais possível**, $x_1 = 2000$, então $s_1 = 0$. A nova solução também é uma **solução básica**: x_1 substituirá s_1 na base.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Para trocar s_1 por x_1 na base, aplica-se *eliminação de Gauss sobre a coluna de x_1*, sendo o **pivot o coeficiente de x_1 na linha de s_1**. A equação que define z também é transformada (para que possa indicar como z varia em função das novas variáveis livres).

maximizar $z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$
sujeito a

$$\left\{\begin{array}{l} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 \qquad\qquad\;\; - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

maximizar $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$
sujeito a

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 & = & 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 & = & 600 \qquad\quad - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}\right.$$

Resolução do problema pelo Método Simplex

Para trocar s_1 por x_1 na base, aplica-se *eliminação de Gauss sobre a coluna de x_1*, sendo o **pivot o coeficiente de x_1 na linha de s_1**. A equação que define z também é transformada (para que possa indicar como z varia em função das novas variáveis livres).

maximizar $z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$
sujeito a

$$\begin{cases} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 \qquad\qquad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

maximizar $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$
sujeito a

$$\begin{cases} x_1 = 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 = 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 = 600 \qquad\qquad - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Os novos **indicadores** mostram que a solução básica $(2000, 0, 0, 0, 800, 600)$, com $z = 54000$, obtida nesta iteração é ótima, pois, no conjunto das soluções admissíveis, $s_1, x_2, x_3 \geq 0$, pelo que $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3 \leq 54000$.

O método que descrevemos chama-se Método de Simplex (foi desenvolvido por G. Dantzig).

Resolução do problema pelo Método Simplex

Existem soluções alternativas ótimas?

$$\textbf{maximizar } z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$$
$$\textbf{sujeito a}$$
$$\begin{cases} x_1 = 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 = 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 = 600 \qquad - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Não existem soluções ótimas com $x_3 > 0$ nem com $s_1 > 0$, mas poderão existir **soluções ótimas alternativas** com $x_2 > 0$, pois o **indicador de x_2 é zero**.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Existem soluções alternativas ótimas?

$$\begin{array}{l}
\textbf{maximizar } z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \\
\left\{\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\[1em]
s_2 & = & 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\[1em]
s_3 & = & 600 \qquad\quad - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}$$

Não existem soluções ótimas com $x_3 > 0$ nem com $s_1 > 0$, mas poderão existir **soluções ótimas alternativas** com $x_2 > 0$, pois o **indicador de x_2 é zero**.

- Tomando $s_1 = x_3 = 0$, concluimos que, para todos os valores de $x_2 \in [0, \frac{18000}{7}]$, as soluções $(x_1, x_2, 0, 0, s_2)$, com $x_1 = 2000 - \frac{7}{9}x_2,\ s_2 = 800 - \frac{11}{90}x_2,\ s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2$ têm valor $z = 54000$ (isto é, são ótimos alternativos).

Resolução do problema pelo Método Simplex

Existem soluções alternativas ótimas?

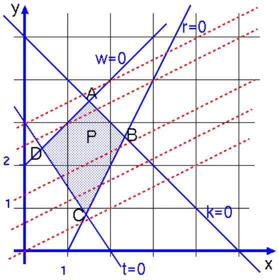
$$
\begin{array}{l}
\textbf{maximizar } z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3 \\
\textbf{sujeito a} \\
\left\{
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\[2ex]
s_2 & = & 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\[2ex]
s_3 & = & 600 \qquad\quad - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\
x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Não existem soluções ótimas com $x_3 > 0$ nem com $s_1 > 0$, mas poderão existir **soluções ótimas alternativas** com $x_2 > 0$, pois o **indicador de x_2 é zero**.

- Tomando $s_1 = x_3 = 0$, concluimos que, para todos os valores de $x_2 \in [0, \frac{18000}{7}]$, as soluções $(x_1, x_2, 0, 0, s_2)$, com $x_1 = 2000 - \frac{7}{9}x_2,\ s_2 = 800 - \frac{11}{90}x_2,\ s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2$ têm valor $z = 54000$ (isto é, são ótimos alternativos).
- "Farinhas": lucro máximo de 54000 u.m. Estratégia: produzir 2000 toneladas do tipo I, ou produzir 18000/7 do tipo II, ou simultaneamente do tipo I e II desde que produza x_2 do tipo II, com $x_2 \in]0, 18000/7[$, e $2000 - 7/9x_2$ do tipo I.

Propriedades dos problemas de LP

- Se o problema admitir solução ótima então **algum dos vértices do espaço de soluções é solução ótima**. Os vértices correspondem a **soluções básicas admissíveis** do sistema de equações.
- **Método Simplex:** restringe a pesquisa a vértices do espaço de soluções; **parte de um vértice**; em cada iteração, **move-se (por uma aresta) para um vértice adjacente** do atual que melhore a função objetivo, se existir.



O sistema tem $\binom{6}{4} = 15$ soluções básicas mas apenas **quatro são soluções básicas admissíveis**.

$$
\begin{array}{llll}
A: & w = 0 \wedge k = 0 & B: & r = 0 \wedge k = 0 \\
C: & r = 0 \wedge t = 0 & D: & w = 0 \wedge t = 0
\end{array}
$$

Se partir de B no método Simplex, efetua apenas uma iteração, deslocando-se para A.

Aplicação do Método Simplex

Vamos ilustrar a aplicação do método Simplex, partindo do vértice C, que corresponde à solução básica com $r = t = 0$.

$$\begin{array}{l}\text{minimizar } z = x - 2y \\ \text{sujeito a} \\ \left\{\begin{array}{l} 2y + 3x - t = 6 \\ y - x + w = 2 \\ y + x + k = 5 \\ -y + 2x + r = 2 \\ x, y, t, w, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}\right.\end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\textbf{minimizar } z = -\frac{2}{7} - \frac{8}{7}r - \frac{3}{7}t \\ \textbf{sujeito a} \\ \left\{\begin{array}{l} y = \frac{6}{7} + \frac{3}{7}r + \frac{2}{7}t \\ x = \frac{10}{7} - \frac{2}{7}r + \frac{1}{7}t \\ k = \frac{19}{7} - \frac{1}{7}r - \frac{3}{7}t \\ w = \frac{18}{7} - \frac{5}{7}r - \frac{1}{7}t \\ r, t, y, x, k, w \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}\right.\end{array}$$

Aplicámos o **método de Gauss-Jordan** para resolver o sistema.

Aplicação do Método Simplex (cont.)

$$\textbf{min } z = -\frac{2}{7} - \frac{8}{7}r - \frac{3}{7}t$$

sujeito a

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{7} + \dfrac{3}{7}r + \dfrac{2}{7}t \\[2ex] x = \dfrac{10}{7} - \dfrac{2}{7}r + \dfrac{1}{7}t \\[2ex] k = \dfrac{19}{7} - \dfrac{1}{7}r - \dfrac{3}{7}t \\[2ex] w = \dfrac{18}{7} - \dfrac{5}{7}r - \dfrac{1}{7}t \\[2ex] r, t, y, x, k, w \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Conclusão nesta iteração:

- A **solução básica**, com $r = t = 0$, que corresponde ao vértice C, **não é ótima** pois os indicadores de r e t mostram que z pode diminuir.
- O indicador de r é o mais favorável. Aumentará r o mais possível mantendo $t = 0$.
- Para **manter a não negatividade da solução** terá $r \leq 18/5$, e se tomar $r = 18/5$ fica com $w = 0$ pois

$$\begin{aligned} x &= 10/7 - 2/7r \geq 0 \\ k &= 19/7 - 1/7r \geq 0 \\ w &= 18/7 - 5/7r \geq 0 \end{aligned}$$

- Troca w por r fazendo eliminação de Gauss na coluna de r, com pivot na linha de w. Com essa troca, passou para o vértice D.

$$
\textbf{min } z = -\frac{22}{5} + \frac{8}{5}w - \frac{1}{5}t
$$

sujeito a

$$
\begin{cases}
y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}w + \frac{1}{5}t \\
x = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}w + \frac{1}{5}t \\
k = \frac{11}{5} + \frac{1}{5}w - \frac{2}{5}t \\
r = \frac{18}{5} - \frac{7}{5}w - \frac{1}{5}t \\
w, t, y, x, k, r \in \mathbb{R}_0^+
\end{cases}
$$

Conclusão nesta iteração:

- A **solução básica**, com $w = t = 0$, que corresponde ao vértice D, **não é ótima** pois o indicador de t mostra que z pode diminuir.
- Para **manter a não negatividade da solução**, com $w = 0$, terá $t \leq 11/2$, e se tomar $t = 11/2$ fica com $k = 0$ pois

$$
\begin{aligned}
k &= 11/5 - 2/5t \geq 0 \\
r &= 18/5 - 1/5t \geq 0
\end{aligned}
$$

- Troca k por t fazendo eliminação de Gauss na coluna de t, com pivot na linha de k. Com essa troca, passou para o vértice A.

Aplicação do Método Simplex (cont.)

$$\textbf{min } z = -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}w + \frac{1}{2}k$$

sujeito a

$$\begin{cases} y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}k \\ x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}k \\ t = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}w - \frac{5}{2}k \\ r = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}w + \frac{1}{2}k \\ w, t, y, x, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Conclusão:

- A **solução básica**, com $w = k = 0$, que corresponde ao vértice A, é a **solução ótima**, pois os indicadores das variáveis livres (i.e., das não básicas) são positivos.
- Não há outras soluções ótimas. A única solução ótima do problema inicial é $y = 7/2, x = 3/2$, com $z = -11/2$.

Como resolver algebricamente problemas de LP?

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

Sistema de m equações lineares em n variáveis reais

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Na **forma matricial** é representado por $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ é a **matriz de coeficientes** e $\mathbf{b}$ o **termo independente**.

$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ denota a **matriz completa** do sistema. .

A **caraterística da matriz** A, que denotamos por $car(A)$, é o número máximo de linhas de A linearmente independentes.

Recordar que:

- O número de linhas de A linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes;
- Logo, $car(A)$ é a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas linhas de A, que é igual à *dimensão subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *gerado pelas colunas de* A.
- "$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?" $\Leftrightarrow$ "**b** é combinação linear das colunas de **A**?"

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A **caraterística da matriz** A, que denotamos por $car(A)$, é o número máximo de linhas de A linearmente independentes.

Recordar que:

- O número de linhas de A linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes;
- Logo, $car(A)$ é a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas linhas de A, que é igual à *dimensão subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *gerado pelas colunas de* A.
- "$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?" $\Leftrightarrow$ "$\mathbf{b}$ é combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$?"

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\therefore$ O sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução se e só se $car(\mathbf{A}) = car(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

Caraterização da solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, supondo $car(A) = m$

Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e assumindo que $car(\mathbf{A}) = m = car(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ então

- se $m = n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução **única** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- se $m < n$, o sistema tem uma **infinidade** de soluções, podendo ser apresentado numa **forma resolvida** como $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$, onde B é uma sub-matriz $m \times m$ de $\mathbf{A}$ com $det(B) \neq 0$, N é a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas restantes colunas e x_B e x_N são as variáveis correspondentes.

Caraterização da solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, supondo $car(A) = m$

Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e assumindo que $car(\mathbf{A}) = m = car(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ então

- se $m = n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução **única** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- se $m < n$, o sistema tem uma **infinidade** de soluções, podendo ser apresentado numa **forma resolvida** como $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$, onde B é uma sub-matriz $m \times m$ de $\mathbf{A}$ com $det(B) \neq 0$, N é a submatriz $m \times (n-m)$ formada pelas restantes colunas e x_B e x_N são as variáveis correspondentes.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - N\mathbf{x}_N \Leftrightarrow B^{-1}(B\mathbf{x}_B) = B^{-1}(\mathbf{b} - N\mathbf{x}_N)$$

Como $B^{-1}B$ é a matriz identidade, concluimos que : $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - (B^{-1}N)\mathbf{x}_N$

(sistema resolvido em ordem às variáveis em $\mathbf{x_B}$ deixando livres as restantes)

Caraterização da solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, supondo $car(A) = m$

Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ e assumindo que $car(\mathbf{A}) = m = car(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ então

- se $m = n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução **única** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- se $m < n$, o sistema tem uma **infinidade** de soluções, podendo ser apresentado numa **forma resolvida** como $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x_N}$, onde B é uma sub-matriz $m \times m$ de $\mathbf{A}$ com $det(B) \neq 0$, N é a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas restantes colunas e x_B e x_N são as variáveis correspondentes.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow B\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - N\mathbf{x}_N \Leftrightarrow B^{-1}(B\mathbf{x}_B) = B^{-1}(\mathbf{b} - N\mathbf{x}_N)$$

Como $B^{-1}B$ é a matriz identidade, concluimos que : $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - (B^{-1}N)\mathbf{x}_N$

(sistema resolvido em ordem às variáveis em $\mathbf{x_B}$ deixando livres as restantes)

A solução $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ que se obtém se fixarmos $\mathbf{x}_N = 0$ chama-se solução básica determinada pela *base* B. (As colunas de B constituem uma base do subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{A}$)

Quando alguma das variáveis $\mathbf{x}_B$ é 0, a solução diz-se degenerada.

Exemplo: O sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

na forma $\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}$, com $det(\mathbf{B}) \neq 0$, sendo $\mathbf{B}$ formado pelas colunas de x_1, x_2, x_3:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathbf{N}}$$

Exemplo: O sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

na forma $\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}$, com $det(\mathbf{B}) \neq 0$, sendo $\mathbf{B}$ formado pelas colunas de x_1, x_2, x_3:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathbf{N}}$$

Se fixarmos o valor de $\mathbf{x}_\mathbf{N}$, o sistema com termo independente $(\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N})$ tem solução única: $\mathbf{B}\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N} \Leftrightarrow \mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}) \Leftrightarrow \mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 - 4x_4 \\ 2 + 7x_5 \\ 7 - 7x_4 + 4x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_\mathbf{N}} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz **B** pode ser qualquer submatriz $m \times m$ constituída por $car(\mathbf{A}) = m$ colunas de **A** linearmente independentes.

Exemplo (cont.):
A seguinte não seria adequada pois $det(\mathbf{B}) = 0$ e, portanto, não existe $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}}$$

Mas, podia ser, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Tomando $x_2 = x_5 = 0$, iriamos obter a **solução básica** $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ para esta base.

Alguns Métodos para Problemas com Restrições Lineares

- Resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
  - Eliminação de Gauss [1801]
  - Eliminação de Gauss-Jordan (Clasen [1888], Jordan [1904])
- Resolução de $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
  - Eliminação de Fourier–Motzkin ([1827, 1936]) – não polinomial
- **LP:** Resolução de $\max \mathbf{cx}$ com $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (ou $\min \mathbf{cx}$)
  - **Método Simplex** (ideia Fourier [1827], formulação Dantzig [1951]). **Não é polinomial mas comporta-se normalmente bem**.
  - **Existência de métodos polinomiais para LP**

    (não são *fortemente polinomiais* pois a complexidade depende dos coeficientes da matriz além de m e n)
    - Método dos Elipsóides (Khachiyan [1980]) – interesse teórico
    - Métodos de Ponto Interior (Karmarkar [1984]) – relevantes na prática

Existem diversas variantes do método Simplex. Nesta cadeira, é estudada apenas uma versão elementar.

Revisão: Método de Eliminação Gauss-Jordan

Exemplo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 7x_5 = 2 \\ 4x_2 - x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 7 \\ 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

O método de Gauss-Jordan aplica transformações elementares sobre a matriz completa para colocar o sistema em forma resolvida, garantindo a equivalência dos sistemas.

- Dividir/multiplicar uma linha por um escalar não nulo.
- Subtrair/somar a uma linha uma outra linha multiplicada por um escalar.
- Trocar duas linhas entre si.

Exemplo (cont):

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\text{eliminação na} \\ \text{coluna } x_1}]{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Se **pivot 1 na linha** k **e coluna** j então, para eliminar a_{ij}, faz a substituição

$$\text{(Linha i)} \leftarrow \text{(Linha i)} - a_{ij} \times \text{(Linha k)}$$

Gauss-Jordan: elimina elementos da coluna j para as linhas $i \neq k$.
Gauss: elimina elementos nas linhas $i > k$ (troca linhas se necessário).

Exemplo (cont):

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \text{ com } L_3]{\text{troca}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

Trocou linhas para ter elemento não nulo (i.e., pivot) na segunda coluna e segunda linha.

$$\xrightarrow[\text{por pivot}]{\text{divide } L_2} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1/4 & 7/4 & -1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{col. } 2]{\text{elimina}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 7/4 & -1 & 7/4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 7 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{col. } 3]{\substack{\text{novo pivot} \\ \text{divide e elimina}}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/4 & -15/8 & 11/4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -7/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Conclui-se que $car(\mathbf{A}) = 3$ e a última equação era redundante.

Revisão: Método de Eliminação Gauss-Jordan

Outro exemplo com $car(\mathbf{A}) = 3$ (termo independente $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ omitido)

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo com $car(\mathbf{A}) = 3$ (termo independente $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ omitido)

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sequência de transformações (traduzida por um produto de matrizes)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} (\mathbf{A} \mid \mathbf{0}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

para $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, pois $\mathbf{B}^{-1}$ é a única matriz tal que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ é a matriz identidade.

Método Simplex

- Qualquer problema de programação linear pode ser reduzido à **forma normal**

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } \mathbf{c}\,\mathbf{x} & \qquad \text{minimizar } \mathbf{c}\,\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \qquad \text{sujeito a} \\ \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \qquad \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+ & \qquad \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$. Como "maximizar $f(x)$" equivale a "minimizar $-f(x)$", podemos restringir a análise a uma das formas, sem perda de generalidade.

Método Simplex

- Qualquer problema de programação linear pode ser reduzido à **forma normal**

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } \mathbf{c}\,\mathbf{x} & \qquad \text{minimizar } \mathbf{c}\,\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \qquad \text{sujeito a} \\ \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \qquad \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+ & \qquad \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

  com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$. Como "maximizar $f(x)$" equivale a "minimizar $-f(x)$", podemos restringir a análise a uma das formas, sem perda de generalidade.

- **Método Simplex**
  - Calcula uma *solução básica admissível ótima*, se o problema tiver solução ótima e fornece informações adicionais sobre o espaço de soluções (por exemplo, sobre a unicidade da solução ótima);

Método Simplex

- Qualquer problema de programação linear pode ser reduzido à **forma normal**

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } \mathbf{c}\,\mathbf{x} & \qquad \text{minimizar } \mathbf{c}\,\mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \qquad \text{sujeito a} \\ \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \qquad \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+ & \qquad \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

  com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$. Como "maximizar $f(x)$" equivale a "minimizar $-f(x)$", podemos restringir a análise a uma das formas, sem perda de generalidade.

- **Método Simplex**
  - Calcula uma *solução básica admissível ótima*, se o problema tiver solução ótima e fornece informações adicionais sobre o espaço de soluções (por exemplo, sobre a unicidade da solução ótima);
  - **Estratégia:** parte de uma solução básica admissível e, iterativamente, vai calculando uma solução básica admissível melhor do que a atual, fazendo entrar na base a variável com *indicador mais favorável*, e sair da base a variável que se anula quando a nova toma o valor máximo.

Existem alternativas à regra "indicador mais favorável", mas não as iremos considerar.

Método Simplex – Fundamentos

Seja P o problema maximizar $\mathbf{c}\,\mathbf{x}$ sujeito a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ (ou de *minimizar* $\mathbf{c}\,\mathbf{x}$).

- Se P tem solução ótima então pelo menos uma **solução básica admissível** é ótima. Logo, se tem uma única solução ótima, essa solução é solução básica admissível.
- Se $\mathbf{x}'_{opt}$ e $\mathbf{x}''_{opt}$, com $\mathbf{x}'_{opt} \neq \mathbf{x}''_{opt}$, são soluções (básicas) admissíveis ótimas, P tem uma infinidade de soluções ótimas: $(1-\lambda)\mathbf{x}'_{opt} + \lambda\mathbf{x}''_{opt}$ é solução, para $\lambda \in [0, 1]$.
- As soluções básicas admissíveis são **vértices** do espaço de soluções.

Método Simplex – Fundamentos

Seja P o problema maximizar $\mathbf{c}\,\mathbf{x}$ sujeito a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ (ou de *minimizar* $\mathbf{c}\,\mathbf{x}$).

- Se P tem solução ótima então pelo menos uma **solução básica admissível** é ótima. Logo, se tem uma única solução ótima, essa solução é solução básica admissível.
- Se $\mathbf{x}'_{opt}$ e $\mathbf{x}''_{opt}$, com $\mathbf{x}'_{opt} \neq \mathbf{x}''_{opt}$, são soluções (básicas) admissíveis ótimas, P tem uma infinidade de soluções ótimas: $(1-\lambda)\mathbf{x}'_{opt} + \lambda\mathbf{x}''_{opt}$ é solução, para $\lambda \in [0,1]$.
- As soluções básicas admissíveis são **vértices** do espaço de soluções.

Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, os pontos $(1-\lambda)p_1 + \lambda p_2$, com $\lambda \in [0,1]$, definem o segmento $[p_1 p_2]$.

Método Simplex – Fundamentos

Seja P o problema maximizar $\mathbf{c}\,\mathbf{x}$ sujeito a $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ (ou de *minimizar* $\mathbf{c}\,\mathbf{x}$).

- Se P tem solução ótima então pelo menos uma **solução básica admissível** é ótima. Logo, se tem uma única solução ótima, essa solução é solução básica admissível.
- Se $\mathbf{x}'_{opt}$ e $\mathbf{x}''_{opt}$, com $\mathbf{x}'_{opt} \neq \mathbf{x}''_{opt}$, são soluções (básicas) admissíveis ótimas, P tem uma infinidade de soluções ótimas: $(1-\lambda)\mathbf{x}'_{opt} + \lambda\mathbf{x}''_{opt}$ é solução, para $\lambda \in [0,1]$.
- As soluções básicas admissíveis são **vértices** do espaço de soluções.

Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, os pontos $(1-\lambda)p_1 + \lambda p_2$, com $\lambda \in [0,1]$, definem o segmento $[p_1 p_2]$.

- As soluções de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ constituem um conjunto **convexo poliédrico**. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ são soluções, então $(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'$ é solução, para todo $\lambda \in [0,1]$.
- Um vértice $\mathbf{x}$ é um **ponto extremo** do espaço de soluções S (i.e., não pertence ao interior de nenhum segmento de recta nesse espaço): $\mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}' + \lambda\mathbf{x}''$, para $\mathbf{x}' \in S$, $\mathbf{x}'' \in S$, $\lambda \in [0,1]$, sse $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{x}''$ (ou seja, sse $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$).

$(1-\lambda)x + \lambda x' = x + \lambda(x' - x)$. Se $Ax = b$ e $Ax' = b$ então $A(x + \lambda(x' - x)) = Ax + \lambda(Ax - Ax') = b + \lambda(b - b) = b$.

Método Simplex – Fundamentos

Seja $\mathbf{A} : m \times n$, com $car(\mathbf{A}) = m$, e suponhamos que se **conhece uma solução básica admissível**. Seja $\mathbf{B}$ a submatriz formada pelas colunas de $\mathbf{A}$ na **base** correspondente e $\mathbf{N}$ a matriz formada pelas restantes colunas.

$$\boxed{\begin{array}{lccl} \max & z & = & \mathbf{c}\,\mathbf{x} \\ \text{suj.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{lccl} \max & z & = & \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c_N} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N} \\ \text{suj.} & \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N} \\ & \mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} & \geq & \mathbf{0} \end{array}}$$

- Notar que na forma resolvida $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N}$ pelo que

$$z = \mathbf{c}\mathbf{x} \Leftrightarrow z = \mathbf{c_B}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_N}\mathbf{x_N} \Leftrightarrow z = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c_N} - \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x_N}$$

Método Simplex – Fundamentos

- Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{B}$ os conjuntos dos índices das colunas de **A** em **N** e **B**. Sem esquecer que $\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$, é equivalente escrever:

$$\begin{array}{lcccl} \max \; z & = & \mathbf{c_B B^{-1} b} & + & \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \mathbf{c_B B^{-1}} A_j) x_j \\ \hline \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B^{-1} b} & - & \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j (\mathbf{B^{-1}} A_j) \end{array}$$

Método Simplex – Fundamentos

- Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{B}$ os conjuntos dos índices das colunas de **A** em **N** e **B**. Sem esquecer que $\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$, é equivalente escrever:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & \mathbf{c_B B^{-1} b} + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \mathbf{c_B B^{-1}} A_j) x_j \\
\hline
& \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B^{-1} b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j (\mathbf{B^{-1}} A_j)
\end{array}
$$

- Seja α_j o vetor coluna $(\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{mj})^T$ que representa $\mathbf{B^{-1}} A_j$. Denotando $\mathbf{c_B B^{-1} b}$ por $z_\mathbf{B}$ e o indicador $c_j - \mathbf{c_B B^{-1}} A_j = c_j - \mathbf{c_B} \alpha_j$ por $c_j - z_j$, fica:

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & z_\mathbf{B} + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j \\
\hline
& \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B^{-1} b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j
\end{array}
$$

- Sejam $\mathcal{N}$ e $\mathcal{B}$ os conjuntos dos índices das colunas de **A** em **N** e **B**. Sem esquecer que $\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N} \geq \mathbf{0}$, é equivalente escrever:

$$\begin{array}{lcccl} \max \; z & = & \mathbf{c_B B^{-1} b} & + & \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \mathbf{c_B B^{-1}} A_j) x_j \\ \hline \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B^{-1} b} & - & \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j (\mathbf{B^{-1}} A_j) \end{array}$$

- Seja α_j o vetor coluna $(\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{mj})^T$ que representa $\mathbf{B^{-1}} A_j$. Denotando $\mathbf{c_B B^{-1} b}$ por $z_\mathbf{B}$ e o indicador $c_j - \mathbf{c_B B^{-1}} A_j = c_j - \mathbf{c_B} \alpha_j$ por $c_j - z_j$, fica:

$$\begin{array}{lcccl} \max \; z & = & z_\mathbf{B} & + & \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j \\ \hline \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B^{-1} b} & - & \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

A solução básica admissível $\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1} b}$, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ com $z = z_\mathbf{B}$ é ótima?

A solução básica admissível $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ com $z = z_\mathbf{B}$ é ótima?

$$\begin{array}{lcclcl} \max & z & = & z_\mathbf{B} & + & \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j \\ \hline & \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & - & \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

A solução básica admissível $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ com $z = z_\mathbf{B}$ é ótima?

$$\begin{array}{lcccl} \max \ z & = & z_\mathbf{B} & + & \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j \\ \hline \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & - & \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução óptima é $(\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{0})$ e $z_\mathbf{B}$ é o valor óptimo para z.

A solução básica admissível $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ com $z = z_\mathbf{B}$ é ótima?

$$\begin{array}{lrcllcl} \max & z & = & z_\mathbf{B} & + & \sum_{j\in\mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j \\ \hline & \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & - & \sum_{j\in\mathcal{N}} x_j\alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução óptima é $(\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{0})$ e $z_\mathbf{B}$ é o valor óptimo para z.
- Se $c_j - z_j > 0$, para algum $j \in \mathcal{N}$, podemos tentar melhorar z, trocando A_j por uma coluna de $\mathbf{B}$.

Método Simplex – Fundamentos

A solução básica admissível $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ com $z = z_\mathbf{B}$ é ótima?

$$\begin{array}{lrcll} \max & z & = & z_\mathbf{B} & + \sum_{j\in\mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j \\ \hline & \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & - \sum_{j\in\mathcal{N}} x_j\alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução óptima é $(\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{0})$ e $z_\mathbf{B}$ é o valor óptimo para z.
- Se $c_j - z_j > 0$, para algum $j \in \mathcal{N}$, podemos tentar melhorar z, trocando A_j por uma coluna de $\mathbf{B}$. **Convenção:** entra para a base $\mathcal{B}$ a variável x_j com o indicador mais favorável (*LP de maximização*, $c_j - z_j > 0$ *máximo*).

A solução básica admissível $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$ com $z = z_\mathbf{B}$ é ótima?

$$
\begin{array}{lcclcl}
\max & z & = & z_\mathbf{B} & + & \sum_{j\in\mathcal{N}} {\color{red}(c_j - z_j)} x_j \\
\hline
& \mathbf{x_B} & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & - & \sum_{j\in\mathcal{N}} x_j \alpha_j
\end{array}
$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \le 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução óptima é $(\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{0})$ e $z_\mathbf{B}$ é o valor óptimo para z.
- Se $c_j - z_j > 0$, para algum $j \in \mathcal{N}$, podemos tentar melhorar z, trocando A_j por uma coluna de $\mathbf{B}$. **Convenção:** entra para a base $\mathcal{B}$ a variável x_j com o indicador mais favorável (*LP de maximização*, $c_j - z_j > 0$ *máximo*).

  Que k sai de $\mathcal{B}$ para entrar j?

Que k sai de $\mathcal{B}$ para entrar j?

- A_j só pode entrar na base se existir $\alpha_{ij} \neq 0$ para algum i tal que $1 \leq i \leq m$.
- Isso terá que ser verdade senão $A_j = \mathbf{0}$ e x_j não estaria restringida pelas restrições do problema.

- Todas as variáveis x_t, com $t \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$, mantêm valor zero. Logo, para preservar a não negatividade da solução, para todas as variáveis x_i na base $\mathcal{B}$ atual, terá de satisfazer

$$x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j \geq 0,$$

para os novos valores de x_i e x_j, sendo x_i^B o valor de x_i em $\mathbf{x_B}$.

Para poder fazer a troca, é necessáro que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$ (justificação à frente)

Método Simplex – Fundamentos

Como $x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j \geq 0$, para os novos valores x_i e x_j, para todo $i \in \mathcal{B}$, então

$$x_j \leq \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}}, \text{para todo } i \in \mathcal{B}, \text{ com } \alpha_{ij} > 0$$

A coluna A_k que sai da base para entrar A_j pode ser qualquer uma tal que

$$\frac{x_k^B}{\alpha_{kj}} = \min\left\{\frac{x_i^B}{\alpha_{ij}} \;\middle|\; \alpha_{ij} > 0\right\}$$

- O valor de x_k passa a ser zero e o valor de x_j passa de zero para x_k^B/α_{kj}. A_j ocupa o lugar de A_k na base B, sendo $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{k\}) \cup \{j\}$.

Como $x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j \geq 0$, para os novos valores x_i e x_j, para todo $i \in \mathcal{B}$, então

$$x_j \leq \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}}, \text{ para todo } i \in \mathcal{B}, \text{ com } \alpha_{ij} > 0$$

A coluna A_k que sai da base para entrar A_j pode ser qualquer uma tal que

$$\frac{x_k^B}{\alpha_{kj}} = \min \left\{ \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}} \ \middle|\ \alpha_{ij} > 0 \right\}$$

- O valor de x_k passa a ser zero e o valor de x_j passa de zero para x_k^B / α_{kj}.
  A_j ocupa o lugar de A_k na base B, sendo $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{k\}) \cup \{j\}$.
- Para voltar a colocar o sistema na forma resolvida podemos aplicar **eliminação de Gauss-Jordan** na coluna de x_j com pivot na linha de x_k, isto é α_{kj}.
  Para a nova solução básica admissível tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_j^{B'} & = & x_k^B / \alpha_{kj} \\ x_i^{B'} & = & x_i^B - \alpha_{ij} (x_k^B / \alpha_{kj}), \text{ com } i \in \mathcal{B}' \setminus \{j\} \\ z_{B'} & = & z_B - (z_j - c_j)(x_k^B / \alpha_{kj}) \end{array} \right.$$

Método Simplex – Fundamentos

Note que se $x_k \neq 0$ então $z_{B'} > z_B$ e terá uma solução melhor. Geometricamente, nesse caso, *a troca de colunas corresponde a um deslocamento ao longo de uma aresta, para um vértice adjacente ao atual.*

Mas, x_k pode ter que entrar para a base com valor zero, ficando $z_{B'} = z_B$.

- Nesse caso, a solução é básica degenerada. Tem mais componentes a zero do que devia, ou seja, mais do que $n - car(\mathbf{A})$ componentes nulas.
- A entrada de x_k na base com valor zero implica **não sair do vértice em que estava**, pois o valor da solução é o mesmo. Como alterou a base, pode conseguir sair do vértice numa iteração seguinte, usando uma aresta.
- Mas iterações com $z_{B'} = z_B$ podem criar problemas de terminação (entrada em ciclo). Existem variantes do método Simplex com regras adicionais para evitar ciclos por exemplo, a *regra de Bland* (consultar bibliografia).

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessáro que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para poder fazer a troca, é necessáro que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i, concluimos que:

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessáro que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i, concluimos que:

- O espaço das soluções admissíveis não é limitado. Existem soluções admissíveis com x_j arbitrariamente grande.

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessáro que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i, concluimos que:

- O espaço das soluções admissíveis não é limitado. Existem soluções admissíveis com x_j arbitrariamente grande.
- E, se, para além disso, $c_j - z_j > 0$, então podemos aumentar z quanto quisermos. Neste caso, não existirá solução ótima.

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessáro que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij} x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i, concluimos que:

- O espaço das soluções admissíveis não é limitado. Existem soluções admissíveis com x_j arbitrariamente grande.
- E, se, para além disso, $c_j - z_j > 0$, então podemos aumentar z quanto quisermos. Neste caso, não existirá solução ótima.
- No caso em que $c_j - z_j \leq 0$, embora x_j possa crescer arbitrariamente no espaço de soluções, pode continuar a ser possível maximizar z.

Espaço de soluções não limitado - o que pode acontecer?

O problema seguinte não tem solução ótima porque z não está limitado superiormente no espaço de soluções.

$$\text{maximizar } z = \frac{89}{17} + \frac{75}{17}x_3 + \frac{11}{17}s_1$$
$$\text{sujeito a}$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{37}{17} + \frac{1}{17}x_3 + \frac{4}{17}s_1 \\ x_2 = \frac{32}{17} + \frac{5}{17}x_3 + \frac{3}{17}s_1 \\ s_2 = \frac{80}{17} + \frac{21}{17}x_3 - \frac{1}{17}s_1 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Para $s_1 = 0$, a variável x_3 pode tomar qualquer valor em $\mathbb{R}_0^+$ e, como $z = \frac{89}{17} + \frac{75}{17}x_3$, então z pode tomar qualquer valor maior ou igual a $\frac{89}{17}$.

Notar que se em vez de maximizar z se pretendesse minimizar z, já existiria solução ótima (como vimos anteriormente)

Redução à forma normal – o que pode acontecer?

$$\text{maximizar } z = 2x - 5y$$
sujeito a
$$\begin{cases} 4y - 3x \leq 8 \\ y - 2x \leq -4 \\ 3y + 2x \geq 20 \\ 4y - x \geq 1 \\ -y + x \leq 11 \\ 3y + 2x \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{maximizar } z = 2x - 5y$$
sujeito a
$$\begin{cases} 4y - 3x + s_1 = 8 \\ -y + 2x - s_2 = 4 \\ 3y + 2x - s_3 = 20 \\ 4y - x - s_4 = 1 \\ -y + x + s_5 = 11 \\ 3y + 2x + s_6 = 40 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \geq 0 \end{cases}$$

Recordar: O termo independente **b** na forma normal é não negativo. Se se tiver $b_i \leq 0$, é necessário multiplicar a restrição i por -1. No exemplo, $y - 2x \leq -4$ é transformada em $-y + 2x \geq 4$ e só depois em $-y + 2x - s_2 = 4$.

Redução à forma normal – o que pode acontecer?

$$\text{maximizar } z = 2x - 5y \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} 4y - 3x \leq 8 \\ y - 2x \leq -4 \\ 3y + 2x \geq 20 \\ 4y - x \geq 1 \\ -y + x \leq 11 \\ 3y + 2x \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{maximizar } z = 2x - 5y \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} 4y - 3x + s_1 = 8 \\ -y + 2x - s_2 = 4 \\ 3y + 2x - s_3 = 20 \\ 4y - x - s_4 = 1 \\ -y + x + s_5 = 11 \\ 3y + 2x + s_6 = 40 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \geq 0 \end{cases}$$

Recordar: O termo independente **b** na forma normal é não negativo. Se se tiver $b_i \leq 0$, é necessário multiplicar a restrição i por -1. No exemplo, $y - 2x \leq -4$ é transformada em $-y + 2x \geq 4$ e só depois em $-y + 2x - s_2 = 4$.

Como calcular uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex?

Não bastaria resolver o sistema relativamente às variáveis de desvio, pois a solução básica correspondente tem $s_2, s_3, s_4 < 0$. O que fazer?

Método das duas fases

Como calcular uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex?

- Introduzir variáveis artificiais para ter uma matriz identidade.
- **Fase 1**: Minimizar a soma das variáveis artificiais (Método Simplex).
  - Se o valor minímo não for zero, o sistema inicial é inconsistente.
  - Se for zero, a solução básica encontrada, projetada nas variáveis iniciais, é solução admissível do problema inicial. Será usada para otimização da função objetivo inicial na **Fase 2**.

minimizar $z' = v_1 + v_2 + v_3$
sujeito a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
4y & - & 3x & + & s_1 & = & 8 & & \\
-y & + & 2x & - & s_2 & + & v_1 & = & 4 \\
3y & + & 2x & - & s_3 & + & v_2 & = & 20 \\
4y & - & x & - & s_4 & + & v_3 & = & 1 \\
-y & + & x & + & s_5 & = & 11 & & \\
3y & + & 2x & + & s_6 & = & 40 & & \\
\multicolumn{7}{l}{x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, v_1, v_2, v_3 \geq 0}
\end{array}\right.$$

Como calcular uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex?

- Introduzir variáveis artificiais para ter uma matriz identidade.
- **Fase 1**: Minimizar a soma das variáveis artificiais (Método Simplex).
  - Se o valor minímo não for zero, o sistema inicial é inconsistente.
  - Se for zero, a solução básica encontrada, projetada nas variáveis iniciais, é solução admissível do problema inicial. Será usada para otimização da função objetivo inicial na **Fase 2**.

minimizar $z' = v_1 + v_2 + v_3$
sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3x + s_1 = 8 \\ -y + 2x - s_2 + v_1 = 4 \\ 3y + 2x - s_3 + v_2 = 20 \\ 4y - x - s_4 + v_3 = 1 \\ -y + x + s_5 = 11 \\ 3y + 2x + s_6 = 40 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, v_1, v_2, v_3 \geq 0 \end{cases}$$

- As variáveis v_1, v_2 e v_3 são **artificiais**. Não têm interpretação no problema inicial. Se alguma for positiva, a restrição correspondente é violada.

- Estas variáveis são inseridas para ter trivialmente uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex (na Fase 1).

Método das duas fases - Fase 1

Fase 1:

$z' = v_1 + v_2 + v_3 = (4 + y - 2x + s_2) + (20 - 3y - 2x + s_3) + (1 - 4y + x + s_4)$

minimizar $z' = 25 - 6y - 3x + s_2 + s_3 + s_4$
sujeito a

$$\begin{cases} s_1 = 8 - 4y + 3x \\ v_1 = 4 + y - 2x + s_2 \\ v_2 = 20 - 3y - 2x + s_3 \\ v_3 = 1 - 4y + x + s_4 \\ s_5 = 11 + y - x \\ s_6 = 40 - 3y - 2x \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, v_1, v_2, v_3 \geq 0 \end{cases}$$

Na primeira iteração, y tem o indicador mais favorável e entra para a base por troca com v_3 pois, se aumentarmos y o mais possível, v_3 fica 0. Notar que $y \leq \min(8/4, 20/3, 1/4, 40/3) = 1/4$. Se $y = 1/4$ então $v_3 = 0$.

Após algumas iterações, chega-se à solução básica ótima procurada:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\textbf{minimizar} & z' & = & 0 & + & v_3 & + & v_1 & + & v_2 & & & & \\
\hline
& s_1 & = & 21 & + & 17/11\, v_3 & & & - & 8/11\, v_2 & + & 8/11\, s_3 & - & 17/11\, s_4 \\
& x & = & 7 & + & 3/11\, v_3 & & & - & 4/11\, v_2 & + & 4/11\, s_3 & - & 3/11\, s_4 \\
& s_2 & = & 8 & + & 8/11\, v_3 & + & v_1 & - & 7/11\, v_2 & + & 7/11\, s_3 & - & 8/11\, s_4 \\
& y & = & 2 & - & 2/11\, v_3 & & & - & 1/11\, v_2 & + & 1/11\, s_3 & + & 2/11 s_4 \\
& s_5 & = & 6 & - & 5/11\, v_3 & & & + & 3/11\, v_2 & - & 3/11\, s_3 & + & 5/11\, s_4 \\
& s_6 & = & 20 & & & & & + & v_2 & - & s_3 & &
\end{array}$$

Método das duas fases - Fase 2

Fase 2: Partindo dessa forma resolvida, retiramos v_1, v_2 e v_3, substituimos a função objetivo $z = 2x - 5y = 2\left(7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4\right) - 5\left(2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4\right) = 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4$, e prosseguimos.

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{max} & z & = & 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4 \\
\hline
& s_1 & = & 21 + \frac{8}{11}s_3 - \frac{17}{11}s_4 \\
& x & = & 7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4 \\
& s_2 & = & 8 + \frac{7}{11}s_3 - \frac{8}{11}s_4 \\
& y & = & 2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4 \\
& s_5 & = & 6 - \frac{3}{11}s_3 + \frac{5}{11}s_4 \\
& s_6 & = & 20 - s_3
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{llll}
\textbf{max} & z & = & \frac{104}{11} - \frac{3}{11}s_6 - \frac{16}{11}s_4 \\
\hline
& s_1 & = & \frac{391}{11} - \frac{8}{11}s_6 - \frac{17}{11}s_4 \\
& x & = & \frac{157}{11} - \frac{4}{11}s_6 - \frac{3}{11}s_4 \\
& s_2 & = & \frac{228}{11} - \frac{7}{11}s_6 - \frac{8}{11}s_4 \\
& y & = & \frac{42}{11} - \frac{1}{11}s_6 - \frac{2}{11}s_4 \\
& s_5 & = & \frac{6}{11} + \frac{3}{11}s_6 + \frac{5}{11}s_4 \\
& s_3 & = & 20 - s_6
\end{array}
$$

s_3 entrou para a base por troca com s_6 pois, para preservar a não negatividade da solução $s_3 \leq \min(66/3, 20) = 20$, e se $s_3 = 20$ então $s_6 = 0$. A nova solução é ótima.

$\boxed{\textbf{Fase 2:}}$ Partindo dessa forma resolvida, retiramos v_1, v_2 e v_3, substituimos a função objetivo $z = 2x - 5y = 2\left(7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4\right) - 5\left(2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4\right) = 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4$, e prosseguimos.

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{max} & z & = & 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4 \\
\hline
& s_1 & = & 21 + \frac{8}{11}s_3 - \frac{17}{11}s_4 \\
& x & = & 7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4 \\
& s_2 & = & 8 + \frac{7}{11}s_3 - \frac{8}{11}s_4 \\
& y & = & 2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4 \\
& s_5 & = & 6 - \frac{3}{11}s_3 + \frac{5}{11}s_4 \\
& s_6 & = & 20 - s_3
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{lrcl}
\textbf{max} & z & = & \frac{104}{11} - \frac{3}{11}s_6 - \frac{16}{11}s_4 \\
\hline
& s_1 & = & \frac{391}{11} - \frac{8}{11}s_6 - \frac{17}{11}s_4 \\
& x & = & \frac{157}{11} - \frac{4}{11}s_6 - \frac{3}{11}s_4 \\
& s_2 & = & \frac{228}{11} - \frac{7}{11}s_6 - \frac{8}{11}s_4 \\
& y & = & \frac{42}{11} - \frac{1}{11}s_6 - \frac{2}{11}s_4 \\
& s_5 & = & \frac{6}{11} + \frac{3}{11}s_6 + \frac{5}{11}s_4 \\
& s_3 & = & 20 - s_6
\end{array}$$

s_3 entrou para a base por troca com s_6 pois, para preservar a não negatividade da solução $s_3 \leq \min(66/3, 20) = 20$, e se $s_3 = 20$ então $s_6 = 0$. A nova solução é ótima.
Conclusão: o problema inicial tem solução ótima única, $x = 157/11$ e $y = 42/11$.

Variáveis de Decisão Negativas ou com Domínio $\mathbb{R}$

- Na prática, pode interessar ter variáveis com domínio $\mathbb{R}$ (que traduzam "lucros ou perdas", "crescimento ou redução", etc).
- Para reformular e reduzir à forma normal (ou *padrão*), se $x_j \in \mathbb{R}$ (em vez de $x_j \in \mathbb{R}_0^+$), para algum j, basta substituir cada ocorrência de x_j por $(x_j' - x_j'')$, sendo $x_j', x_j'' \in \mathbb{R}_0^+$ novas variáveis. Se for $x_j \in \mathbb{R}_0^-$, basta substituir por $-x_j''$.

Exemplo

$$\text{maximizar } z = 2x - 5y \\ \text{sujeito a} \\ \begin{cases} 4y - 3x & \leq & 8 \\ y - 2x & \leq & -4 \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{maximizar } z = 2(x' - x'') - 5y \\ \text{sujeito a} \\ \begin{cases} 4y - 3(x' - x'') + s_1 & = & 8 \\ -y + 2(x' - x'') - s_2 & = & 4 \\ x', x'', y, s_1, s_2 & \in & \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

e recordar que $x = x' - x''$

Propriedade: As soluções básicas não têm simultaneamente $x_j' > 0$ e $x_j'' > 0$. As colunas de x_j e x_j' na matriz são dependentes. Se uma está na base, a outra está fora.