Análise

Folha 4 — 2019/20

Funções definidas em $\mathbb{R}^n$: Planos Tangentes e Retas Normais

1. Para cada uma das superfícies (i. a iv),

   (a) encontre um vetor perpendicular/normal e um vetor tangente (à superfície), no ponto cujas coordenadas se indicam.

   (b) encontre equações que definam o plano tangente e a reta normal (à superfície), no ponto cujas coordenadas se indicam.

   i. $x^2 + xy + y^2 = 3; \quad (-1, -1)$

   ii. $(y - x)^2 = 2x; \quad (2, 4)$

   iii. $xyz^2 = 1; \quad (1, 1, 1)$

   iv. $z = x^2 + 3y^3 + \text{sen}(xy); \quad (1, 0, 1)$

2. Mostre que os gráficos das funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0, 0)$.

3. Considere a função $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$. Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = f(x, y)$ no ponto $(1, 1, 1)$ com o eixo dos zz.

Funções vetoriais

4. Determine a matriz jacobiana das seguintes funções:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x, y)$;

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$;

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (xye^{xy}, x \ \text{sen}\, y, 5xy^2)$;

   (d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$;

   (e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y + e^z, x^2 y)$.

5. Considere as funções f e g tais que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x - y + z, x^2yz, xyz) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = (xy, yz, 2x, xyz) \end{array}$$

   Calcule $df(-1, 0, 1)$ e $dg(-1, 0, 1)$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (2x^2, 3y, 2xy)$

   (a) Calcule a matriz jacobiana de f.

   (b) Justifique que a função f é diferenciável e calcule a diferencial da função f no ponto $(1, 1)$.

   (c) Determine $df(1, 1)(2, 3)$.

7. Considere as funções

$$u: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad v: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y) & \longmapsto & \operatorname{sen}(xy) \end{array} \qquad w: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ (x,y) & \longmapsto & e^x \end{array}$$

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2y+y^2z \end{array} \qquad \text{e} \qquad h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\,. \\ (x,y) & \longmapsto & f(u(x,y),v(x,y),w(x,y)) \end{array}$$

Determine $\nabla h(x,y)$.

8. Considere a função $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x^2y - xz$ e $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $df(1,0,0)(1,2,2)$.

   (b) Usando a regra da cadeia, determine a de modo que a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(t) = f(at^2, at, t^3)$ tenha derivada nula.

9. Calcule:

   (a) $\dfrac{du}{dt}$, onde $u = \ln\left(\operatorname{sen}\frac{x}{y}\right)$ e $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1+t^2}$;

   (b) $\dfrac{\partial w}{\partial p}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial q}$, onde $w = r^2 + s^2$ e $r = pq^2$, $s = p^2 \operatorname{sen} q$;

   (c) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, onde $z = x^2 \operatorname{sen} y$ e $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$.