Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} = \left(-\infty, +\infty\right)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Ox .

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Ox .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{0-\varepsilon}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{-\varepsilon}} = -\infty$$

$$m_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{0+\varepsilon}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{+\varepsilon}} = +\infty$$

Convexité de f

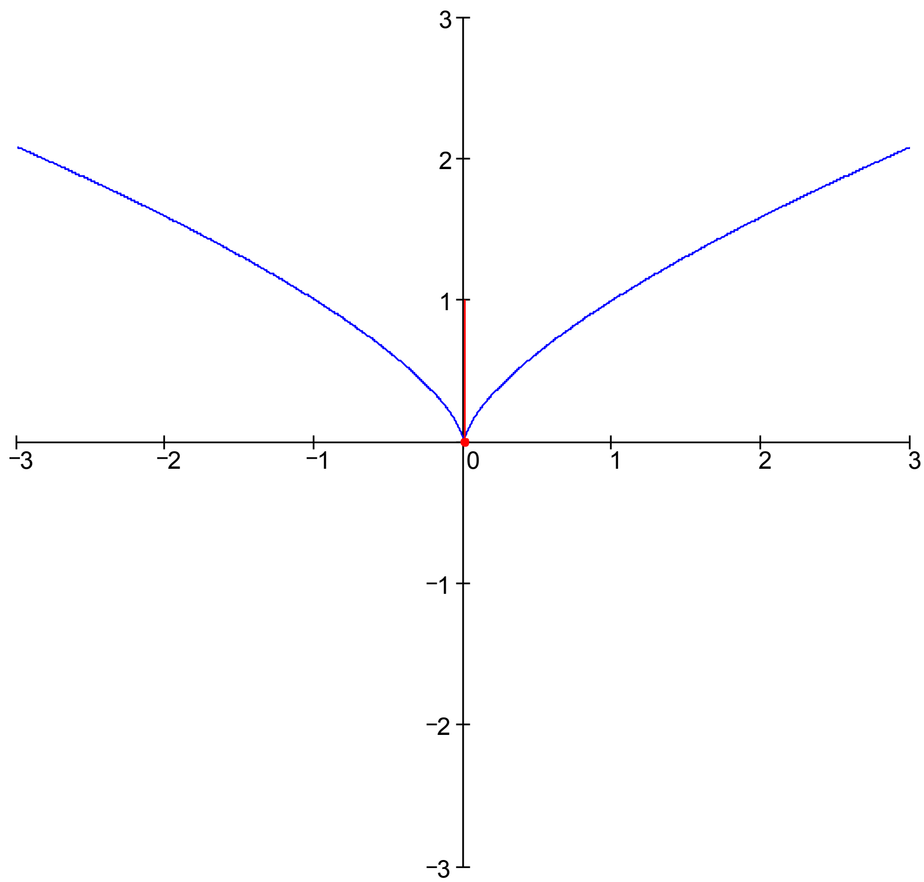
$$y'' = f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$9x\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y''		$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$ $\frown$	0	$\nearrow$ $\frown$	$+\infty$

La courbe


3
2
1
−1
−2
−3
−3 −2 −1 0 1 2 3