CHAPITRE 1

Les Polynômes Orthogonaux

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Hossein Rahimzadeh

CHAPITRE 1

Les Polynômes Orthogonaux

Fonctions de carré sommable

Les fonctions de carré sommable sont des fonctions pour lesquelles,

$$\int_a^b w(x)\left|f(x)\right|^2 dx < \infty \qquad (0.1)$$

$w(x)$ appelée fonction poids, est une fonction à valeurs finies et strictement positive dans $a < x < b$.

Exemples

Espace des fonctions de carré sommable $L_w^2(a,b)$

L'ensemble des fonctions de carré sommable forme l'espace $L_w^2(a,b)$. La structure de $L_w^2(a,b)$ est celle d'un espace de Hilbert. Autrement dit, $L_w^2(a,b)$ est un espace vectoriel munie le produit scalaire :

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx < \infty \quad , \quad a \le x \le b \qquad (0.2)$$

Avec les propriétés suivantes.

Pour tous les fonctions f, g et h de $L_w^2(a,b)$ et tous les nombres complexes c.

$\langle f\,|\,g\rangle = \langle g\,|\,f\rangle^*$

$\langle f + g\,|\,h\rangle = \langle f\,|\,g\rangle + \langle g\,|\,h\rangle$

$\langle f\,|\,cg\rangle = c\langle f\,|\,g\rangle$[1]

$\langle cf\,|\,g\rangle = c^*\langle f\,|\,g\rangle$[2]

$\langle f\,|\,f \ge 0$ et $\langle f\,|\,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

[1] Le produit scalaire est linéaire par rapport à la deuxième fonction de la couple.
[2] Le produit scalaire est anti linéaire par rapport à la première fonction de la couple.
[2] Le produit scalaire est anti linéaire par rapport à la première fonction de la couple.

Carré de la norme de f

Le carré de la norme de f définie par :

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b w(x)|f(x)|^2\,dx \tag{0.3}$$

La norme de f

La norme de f définie par :

$$\sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\int_a^b w(x)|f(x)|^2\,dx} \tag{0.4}$$

Orthogonalité

Les fonctions f et g sont orthogonales si

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx = 0 \tag{0.5}$$

Orthonormalité

Les fonctions f et g sont orthonormale si

$$\begin{aligned}\langle f\mid f\rangle &= 1\\ \langle g\mid g\rangle &= 1\\ \langle f|g\rangle &= 0\end{aligned} \tag{0.6}$$

Exemples

Analogie

	u et v éléments de ° ^{n}	u et v éléments de £ ^{n}	f et g éléments de $L_w^2\left(a,b\right)$
Produit scalaire	$\langle u \vert v\rangle = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$	$\langle u \vert v\rangle = u^\dagger v = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i$ $= (u_1^* \quad u_2^* \quad \ldots \quad u_n^*)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \mathrm{M} \\ v_n \end{pmatrix}$	$\langle f \vert g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx$ Avec, $a \le x \le b$
Carré de la norme	$\langle u \vert u\rangle = u^T u = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i$	$\langle u \vert u\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^* u_i$	$\langle f \vert f\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) f(x) dx$
La norme	$\sqrt{\langle u \vert u\rangle} = \sqrt{u^T u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i u}$	$\sqrt{\langle u \vert u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^* u_i}$	$\sqrt{\langle f \vert f\rangle} = \sqrt{\int_a^b w(x) f^*(x) f(x) dx}$
Normalité	$\langle u \vert u\rangle = 1$ $\langle v \vert v\rangle = 1$	$\langle u \vert u\rangle = 1$ $\langle v \vert v\rangle = 1$	$\langle f \vert f\rangle = 1$ $\langle g \vert g\rangle = 1$
Orthogonalité	$\langle u \vert v\rangle = 0$	$\langle u \vert v\rangle = 0$	$\langle f \vert g\rangle = 0$
Orthonormalité	$\langle u \vert u\rangle = 1$ $\langle v \vert v\rangle = 1$ $\langle u \vert v\rangle = 0$	$\langle u \vert u\rangle = 1$ $\langle v \vert v\rangle = 1$ $\langle u \vert v\rangle = 0$	$\langle f \vert f\rangle = 1$ $\langle g \vert g\rangle = 1$ $\langle f \vert g\rangle = 0$

Tableau 1

Bases orthonormées de l'espace $L_w^2(a,b)$

Soit un ensemble dénombrable de fonction de $L_w^2(a,b)$:

$\{f_i(x)\} = \{f_1(x)\,,\, f_2(x)\,,\, f_3(x)\,, \mathrm{K}\,\}$

Avec $f_1(x)\,,\, f_2(x)\,,\, f_3(x)\,,\, \mathrm{K} \in L_w^2(a,b)$.

L'ensemble $\{f_i(x)\}$ forment une base orthonormale de l'espace $L_w^2(a,b)$, si

1. Les éléments de $\{f_i(x)\}$ soient orthogonale.

   (Tous ses éléments soient perpendiculaire l'un à l'autre.

   $$\langle f_i | f_j \rangle = \int_a^b w(x) f_i^*(x) f_j(x) dx = 0 \quad , \quad i \neq j \tag{0.7}$$

2. Les éléments de $\{f_i(x)\}$ soient normale.

   (La norme de tous ses éléments soit l'unité.)

   $$\langle f_i | f_j \rangle = \int_a^b w(x) f_i^*(x) f_j(x) dx = 1 \quad , \quad i = j \tag{0.8}$$

Relation orthonormalité

De (0.7) et (0.8) on peut dériver la relation orthonormalité :

$$\langle f_i | f_j \rangle = \int_a^b w(x) f_i^*(x) f_j(x) dx = \delta_{ij} \tag{0.9}$$

Exemple

Développement d'une fonction sur la base $\{f_i(x)\}$

Les éléments de la base $\{f_i(x)\}$ sont linéairement indépendants et forment un ensemble complet.

Alors toute fonction $F(x)$ de $L_w^2(a,b)$ peut se développer d'une façon unique sur cette base.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) \tag{0.10}$$

Les coefficients C_n

Pour trouver le C_n, on à,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x)$$

On multiplie par $w(x) f_m^*(x)$,

$$w(x)f_m^*(x)F(x) = w(x)f_m^*(x)\sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x)$$

On intègre selon x,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxw(x)f_m^*(x)F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dxw(x)f_m^*(x)\sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dxw(x)f_m^*(x)f_n(x)}_{\delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_{mn}$$

Pour $m = n$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxw(x)f_n^*(x)F(x) = C_n$$

Donc,

$$C_n = \langle f_n | F \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dxw(x)f_n^*(x)F(x) \qquad (0.11)$$

Exemple

Analogie

	Espace $\mathbb{R}^3$	Espace $L_w^2(a,b)$
Base	$\{e_i\} = \{e_1, e_2, e_3\}$	$\{f_i(x)\}$
Normalité de la base	$e_i.e_j = 1 \quad , \quad i = j$	$\int_a^b w(x)f_i^*(x)f_j(x)dx = 1 \quad , \quad i = j$
Orthogonalité de la base	$e_i.e_j = 0 \quad , \quad i \neq j$	$\int_a^b w(x)f_i^*(x)f_j(x)dx = 0 \quad , \quad i \neq j$
Orthonormalité de la base	$e_i.e_j = \delta_{ij}$	$\int_a^b w(x)f_i^*(x)f_j(x)dx = \delta_{ij}$
Développement sur la base	$u = \sum_{n=1}^{3} a_n e_n$	$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x)$
Les composantes	$a_n = e_n.u$	$C_n = \langle f_n \| F \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)f_n^*(x)F(x)dx$

Tableau 2

Analogie

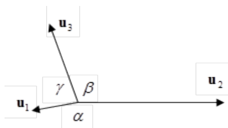
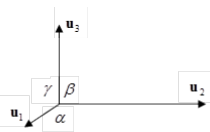
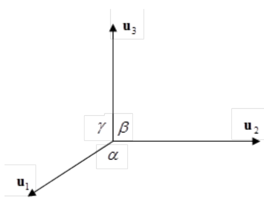
Base de $\circ^{3}$			Base de $L_w^2(a,b)$	
Vecteurs			$1, x, x^2, K$	**Fonctions**
Vecteurs orthogonaux	 $\alpha = \beta = \gamma = 90^{o}$		$1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1), K$	**Fonctions orthogonaux**
Vecteurs orthonormaux	 $\alpha = \beta = \gamma = 90^{o}$ $\lvert \mathbf{u}_1 \rvert = \lvert \mathbf{u}_2 \rvert = \lvert \mathbf{u}_3 \rvert$		$\frac{1}{\sqrt{2}}, x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1), K$	**Fonctions orthonormaux**
Exemple de Développement D'un vecteur sur la base	$\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$		$F(x) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}, 5x, -3\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1), K$	**Exemple de Développement D'une fonction sur la base**

Tableau 3

Théorème de Stone-Weierstrass

Toute fonction $F(x)$ continue, sur $[a,b]$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales.

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

Exemple

Procédé de Gram-Schmidt

Procédé de Gram-Schmidt est un algorithme pour construire une base orthonormée à partir d'un ensemble dénombrable de fonction de $L_w^2\left(a,b\right)$.

On le montre par un exemple.

Soit un ensemble dénombrable de fonction de $L_w^2\left(a,b\right)$:

$$\left\{1,x,x^2,x^3,\ldots\right\}$$

On veut construire une base orthonormale $\left\{p_k(x)\right\}$, à partir de cet ensemble.

On considère,

$$p_0(x)=1$$

$$p_1(x)=ax+b$$

Donc, on doit trouver a et b .On suppose que la base doit être orthogonale pondérée par $w(x)=1$ dans $-1\le x\le 1$:

$$\int_{-1}^{+1}dx\,w(x)p_0(x)p_1(x)=0\Rightarrow\int_{-1}^{+1}(ax+b)dx=0\Rightarrow\frac{1}{2}ax^2+bx+C\Big|_{-1}^{1}=0\Rightarrow b=0$$

Pout trouver a on a besoin d'un standard, soit $p_k(1)=1$ pour tout k , donc,

$$p_1(1)=1\Rightarrow a\times 1+0=1\Rightarrow a=1$$

Alors;

$$p_1(x)=x$$

Maintenant on considère,

$$p_2(x)=ax^2+bx+c$$

Donc, on doit trouver a , b et c .

Encore une fois on suppose que la base doit être orthogonale pondérée par $w(x)=1$ dans $-1\le x\le 1$:

$$\int_{-1}^{+1}dx\,w(x)p_0(x)p_2(x)=0\Rightarrow\int_{-1}^{+1}(ax^2+bx+c)dx=0\Rightarrow\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx^2+C\Big|_{-1}^{1}=0\Rightarrow\frac{2}{3}a+2c=0$$

$$\int_{-1}^{+1}dx\,w(x)p_1(x)p_2(x)=0\Rightarrow\int_{-1}^{+1}x(ax^2+bx+c)dx=0\Rightarrow\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{2}cx^2+C\Big|_{-1}^{1}=0\Rightarrow b=0$$

$$p_2(1)=1\Rightarrow a+c=1$$

Donc,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + 2c = 0 \\ a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}, \; c = -\frac{1}{2}$$

Alors,

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

De même ... on peut trouver $p_3(x)$, $p_4(x)$, $\ldots$

Les polynômes orthogonaux suivants qu'on les a trouvé son les polynômes de *Legendre*.

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

...

On peut les normalisés en les divisent chaque un par sa norme.

$$\tilde{p}_0(x) = \frac{p_0(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} \left| p_0(x) \right|^2 \mathrm{dx}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{p}_1(x) = \frac{p_1(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} \left| p_1(x) \right|^2 \mathrm{dx}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$\tilde{p}_2(x) = \frac{p_2(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} \left| p_2(x) \right|^2 \mathrm{dx}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x(5x^2 - 3)$$

...

Et Voilà la base orthonormée qu'on voudrait construire :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x(5x^2 - 3), \ldots \right\}$$

Exemple

Formule de Rodrigues

Les polynômes,

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[w(x)g(x)^n] \qquad (0.12)$$

Avec les conditions suivants,

1. $g(x)$ c'est un polynôme de degrés 0,1 ou 2.
2. $p_1(x)$ c'est un polynôme de degrés 1.
3. $w(x)$ appelée, fonction poids, est une fonction à valeurs finies et strictement positive dans $a < x < b$.
4. Les conditions frontières $w(a)g(a) = w(b)g(b) = 0$.

Forment une base orthogonale de $L_w^2\left(a,b\right)$.

Procédé de Rodrigues

Procédé de Rodrigues est un algorithme pour construire une base orthogonale de $L_w^2\left(a,b\right)$ par le choix de $g(x)$.

On le montre par un exemple.

Soit $s(x) = \alpha \neq 0$, un polynôme de degrés 0. En substituent dans la formule de Rodrigues on à,

$$p_n(x) = \frac{\alpha}{K_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}w(x)$$

Pour $n = 1$ on à,

$$p_1(x) = \frac{\alpha}{K_1}\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}w(x)$$

Mais, $p_1(x)$ c'est un polynôme de degrés 1, soit $p_1(x) = Ax + B$, donc,

$$Ax + B = \frac{\alpha}{K_1}\frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}w(x)$$

Après simplification on arrive à,

$$\frac{dw(x)}{w(x)} = \frac{(Ax+B)K_1}{\alpha}dx$$

On intègre selon x ,

$$\int\frac{dw(x)}{w(x)} = \int\frac{(Ax+B)K_1}{\alpha}dx$$

$$\ln\left|w(x)\right| = \frac{AK_1x^2}{2\alpha} + \frac{BK_1x}{\alpha} + C$$

Mais, $w(x)$ est une fonction strictement positive dans $a < x < b$, donc,

$$\ln w(x) = \frac{AK_1x^2}{2\alpha} + \frac{BK_1x}{\alpha} + C$$

Alors,

$$w(x) = \exp[\frac{AK_1x^2}{2\alpha} + \frac{BK_1x}{\alpha} + C]$$

Pour simplifier on peut choisir,

$A = -\frac{2}{K_1}$, $B = 0$, $C = 0$, donc,

$$w(x) = e^{\frac{x^2}{-\alpha}}$$

Si on applique les conditions frontières,

$$w(a)g(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha e^{\frac{a^2}{-\alpha}} = 0$$

Pour $\alpha > 0$ on peut montrer que $a \to \pm\infty$.

$$w(b)g(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha e^{\frac{b^2}{-\alpha}} = 0$$

Pour $\alpha > 0$ on peut montrer que $b \to \pm\infty$.

Mais, comme $a < b$ on à,

$a \to -\infty$

$b \to +\infty$

Alors, l'intervalle d'orthogonalité est, $-\infty < x < +\infty$,

Encore une fois pour simplifier on peut choisir, $\alpha = 1$ et donc,

$w(x) = e^{-x^2}$.

Maintenant on est prêt de construire la base orthogonale en utilisent le formule de Rodrigues :

$$p_0(x) = \frac{1}{K_0}$$

$$p_1(x) = \frac{-2x}{K_1}$$

$$p_2(x) = \frac{4x^2 - 2}{K_2}$$

$$p_3(x) = \frac{-8x^3 + 12x}{K_3}$$

...

Historiquement et pour les raisons d'orthogonalité on considère,

$K_n = (-1)^n$ donc,

$p_0(x) = 1$

$p_1(x) = 2x$

$p_2(x) = 4x^2 - 2$

$p_3(x) = 8x^3 - 12x$

...

Ce sont les polynômes de Hermite.

C'est facile à vérifier que les polynômes de Hermite sont orthogonaux dans $-\infty < x < +\infty$.
On peut les normalisés en les divisent chaque un par sa norme.

$$\tilde{p}_0(x) = \frac{p_0(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} |p_0(x)|^2 \,\mathrm{dx}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$$

$$\tilde{p}_1(x) = \frac{p_1(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} |p_1(x)|^2 \,\mathrm{dx}}} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}$$

$$\tilde{p}_2(x) = \frac{p_2(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} |p_2(x)|^2 \,\mathrm{dx}}} = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}$$

$$\tilde{p}_3(x) = \frac{p_3(x)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{w(x)} |p_3(x)|^2 \,\mathrm{dx}}} = \frac{x(2x^2 - 3)}{\sqrt{3}\sqrt[4]{\pi}}$$

....

Et on arrive à une base orthonormale sur laquelle on peut développer les fonctions quelconques.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}, \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{3}\sqrt[4]{\pi}}, \ldots \right\}$$

De façon analogue, on peut dériver les autres polynômes orthogonaux classiques.

Choix de $s(x)$	$g(x) = 1$	$g(x) = x$	$g(x) = x^2$
Fonction poids	$w(x) = e^{-x^2}$	$w(x) = x^\alpha e^x$ Pour, $\alpha > -1$	$w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ Pour, $\alpha, \beta > -1$
Intervalle d'orthogonalité	$-\infty < x < +\infty$	$0 < x < +\infty$	$-1 \le x \le +1$
K_n	$K_n = (-1)^n$	$K_n = n!$	
Polynôme	Hermite $H_n(x)$	Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$	Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

Tableau 4

Selon le choix de α et β les polynômes de Jacobi donnent les polynômes de Legendre, Gegenbauer, Chebyshev I et Chebyshev II.

Choix de α et β	$\alpha=\beta=0$	$\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$	$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$	$\alpha=\beta==\frac{1}{2}$
Fonction poids	$w(x)=1$	$w(x)=(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ Pour, $\lambda>-\frac{1}{2}$	$w(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$	$w(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$
Intervalle d'orthogonalité	$-1\le x\le+1$	$-1\le x\le+1$	$-1\le x\le+1$	$-1\le x\le+1$
K_n	$K_n=(-2)^n n!$			
Polynôme	Legendre $P_n(x)$	Gegenbauer $G_n^{(\lambda)}(x)$	Chebyshev I $T_n(x)$	Chebyshev II $U_n(x)$

Tableau 5

Exemple

Les polynômes orthogonaux classiques
Les polynômes orthogonaux associés classique

Exemple

- Hermite
- Laguerre
- Legendre
- Gegenbauer
- Chebyshev I
- Chebyshev II

Quelques applications des polynômes orthogonaux classiques

En mécanique quantique:

- Les polynômes d'Hermite donnent les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique.
- Les polynômes de Laguerre donnent la dépendance radiale des fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène.
- Les polynômes de Legendre interviennent dans tous les problèmes à symétrie sphérique.

Les polynômes de Chebyshev sont utiles dans les problèmes d'interpolation.