Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = x^3 - 3x$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow D_f = ° \; = (-\infty, +\infty)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy.

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3 - 3x = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \right. \\ x=1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Convexité de f

$$y''=f''(x)=6x$$

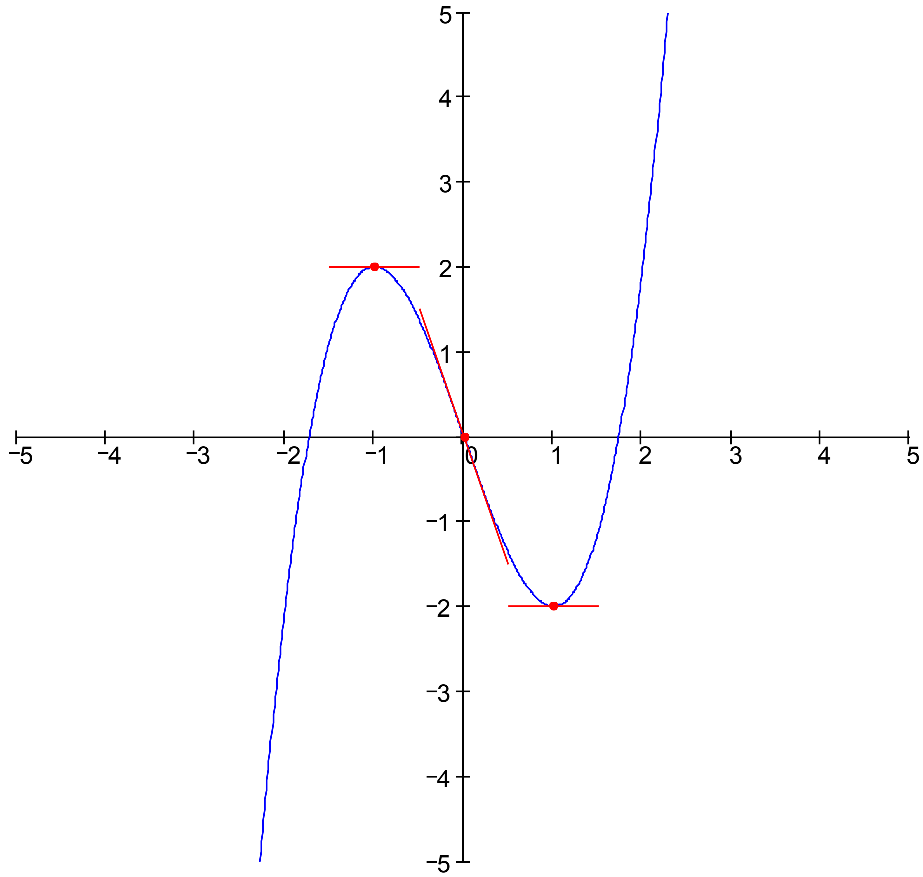
$$6x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$m_{x=0}=f'(0)=-3$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	
y''		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
		$\frown$	Max	$\frown$	Inf	$\smile$	Min	$\smile$	

La courbe


5
4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4
−5