Puits de potentiel infini entre -a et a

Mécanique Quantique

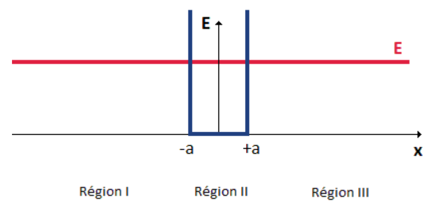
Hossein Rahimzadeh

8/30/2008

Puits de potentiel infini en une dimension entre -a et a

$$V(x)=\begin{cases}\infty & , \quad x<-a \\ 0 & , \quad -a<x<a \\ \infty & , \quad x>a\end{cases}$$

Le cas $E>0$



Région I	Frontière X= -a	**Région** II	Frontière X= a	**Région** III
$\hat{H}u(x)=Eu(x)$		$\hat{H}u(x)=Eu(x)$		$\hat{H}u(x)=Eu(x)$
$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x)$		$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x)$		$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x)$
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)$
$V(x)=\infty$		$V(x)=0$		$V(x)=\infty$
		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)=Eu(x)$		
		$\frac{d^2}{dx^2}u(x)+\frac{2mE}{\hbar^2}u(x)=0$		
		$\frac{d^2}{dx^2}u(x)+k^2u(x)=0$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$		
Pour les états pairs et impairs : $u_I(x)=0$		Pour les états pairs : $u_{II}(x)=B\cos(kx)$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ Pour les états impairs : $u_{II}(x)=A\sin(kx)$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$		Pour les états pairs et impairs : $u_{III}(x)=0$

Première possibilités, les solutions paires :

Puisqu'il y a une symétrie selon l'axe $y = 0$, on aura :

$A = 0$

Donc,

$u_I(x) = 0$

$u_{II}(x) = B\cos(kx)$ où $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$u_{III}(x) = 0$

Les conditions de continuités :

Puisque le potentiel est symétrie on aura besoin aux conditions de continuités à seulement une borne :

À $x = a$:

$$u_{II}(a) = u_{III}(a) \Rightarrow B\cos(ka) = 0 \;\Rightarrow\; \cos(ka) = 0 \;\Rightarrow\; k_n a = \frac{n\pi}{2}, \, n = 1, 3, 5, \cdots \Rightarrow\; k_n = \frac{n\pi}{2a}, \, n = 1, 3, 5, \cdots$$

On trouve E_n :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2}, \, n = 1, 3, 5, \cdots$$

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, \, n = 1, 3, 5, \cdots}$$

On trouve les fonctions propres $u_n(x)$:

$$u_n(x) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a} x\right), \, n = 1, 3, 5, \cdots$$

On trouve B_n :

Les fonctions propres $u_n(x)$ sont orthonormées :

$$\int_{-a}^{a} dx u_m^*(x) u_n(x) = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^{a} dx \left[B_m \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \right]^* B_n \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = \delta_{mn}$$

$$B_m B_n \int_{-a}^{a} dx \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = \delta_{mn}$$

$$B_n^2 \int_{-a}^{a} dx \cos^2\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = 1 \quad , m = n$$

$$B_n^2 a = 1$$

Donc,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \, , n = 1, 2, 3, \cdots$$

Les fonctions propres :

$$\boxed{u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), n = 1, 3, 5, \cdots}$$

Deuxième possibilités, les solutions impaires :

Puisqu'il y a une symétrie selon l'origine, on aura :

$$B = 0$$

Donc,

$$u_I(x) = 0$$

$u_{II}(x) = A\sin(kx)$ où $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$u_{III}(x) = 0$

Les conditions de continuités :

Puisque le potentiel est symétrie on aura besoin aux conditions de continuités à seulement une borne :

À $x = a$:

$$u_{II}(a) = u_{III}(a) \Rightarrow A\sin(ka) = 0 \Rightarrow \sin(ka) = 0 \Rightarrow k_n a = \frac{n\pi}{2}, n = 2,4,6,\cdots \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{2a}, n = 2,4,6,\cdots$$

On trouve E_n :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2}, n = 2,4,6,\cdots$$

$$\boxed{E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, n = 2,4,6,\cdots}$$

On trouve les fonctions propres $u_n(x)$:

$$u_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), n = 2,4,6,\cdots$$

On trouve A_n :

Les fonctions propres $u_n(x)$ sont orthonormées :

$$\int_{-a}^{a} dx u_m^*(x) u_n(x) = \delta_{mn}$$

$$\int_{-a}^{a} dx \left[A_m \sin\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \right]^* A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = \delta_{mn}$$

$$A_m A_n \int_{-a}^{a} dx \sin\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = \delta_{mn}$$

$$A_n^2 \int_{-a}^{a} dx \sin^2\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) = 1 \quad , m = n$$

$$A_n^2 a = 1$$

Donc,

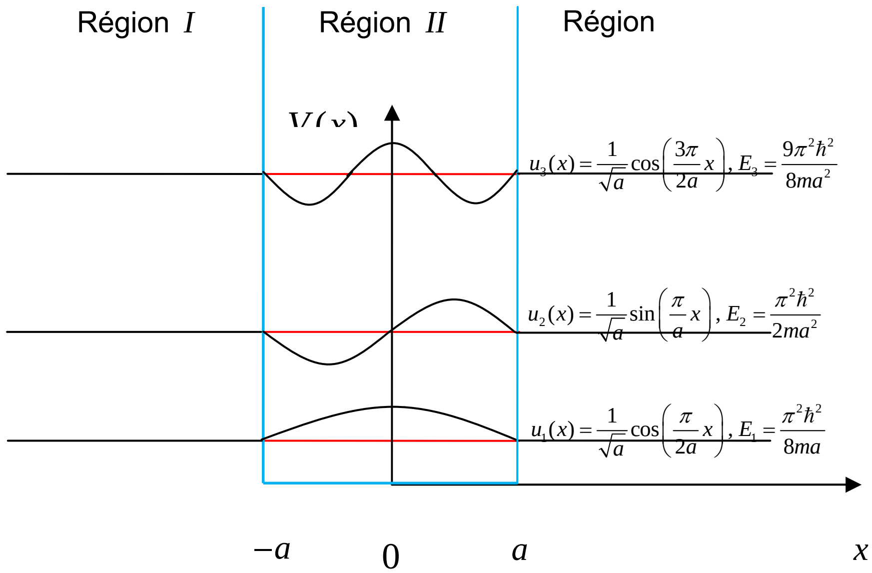
$$A_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \, , n = 2, 4, 6, \cdots$$

Les fonctions propres :

$$\boxed{u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right), n = 2, 4, 6, \cdots}$$

Alors,

$$\boxed{u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\dfrac{n\pi}{2a}x\right), n = 1, 3, 5, \cdots \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2a}x\right), n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases} \quad , \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}, n = 1, 2, 3, \cdots}$$



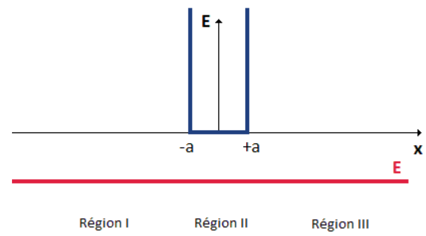
La solution générale :

$$\boxed{\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2a}x\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)+\cdots\right]}$$

Et dans le temps :

$$\boxed{\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2a}x\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)+\cdots\right]e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}, E_n=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}$$

Le cas $E < 0$



Région I	Frontière X= -a	Région II	Frontière X= a	Région III
$\hat{H}u(x) = Eu(x)$		$\hat{H}u(x) = Eu(x)$		$\hat{H}u(x) = Eu(x)$
$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]u(x) = Eu(x)$		$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]u(x) = Eu(x)$		$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]u(x) = Eu(x)$
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x)$
$V(x) = \infty$		$V(x) = 0$		$V(x) = \infty$
		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) = Eu(x)$		
		$\frac{d^2}{dx^2}u(x) - \frac{2m\lvert E\rvert}{\hbar^2}u(x) = 0$		
		$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \kappa^2 u(x) = 0$ où $\kappa^2 = \frac{2m\lvert E\rvert}{\hbar^2}$		
$u_I(x) = 0$		$u_{II}(x) = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}$ où $\kappa^2 = \frac{2m\lvert E\rvert}{\hbar^2}$		$u_{III}(x) = 0$

Les conditions de continuités :

À $x = -a$:

1. $u_I(-a) = u_{II}(-a) \Rightarrow 0 = Ae^{-\kappa a} + Be^{\kappa a}$

À $x = a$:

2. $u_{II}(a) = u_{III}(a) \Rightarrow Ae^{\kappa a} + Be^{-\kappa a} = 0$

$\begin{pmatrix} e^{-\kappa a} & e^{\kappa a} \\ e^{\kappa a} & e^{-\kappa a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors, Il n'y a pas de solution pour $E < 0$