Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{-3x+4}{x^2-4}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{-3x+4}{x^2-4} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2,2\} = \underbrace{(-\infty,-2)}_{I_1} \cup \underbrace{(-2,2)}_{I_2} \cup \underbrace{(2,+\infty)}_{I_3}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+4}{x^2-4} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f.

A la borne droite

$$\lim_{x\to-2^-} y = \lim_{x\to-2^-} \frac{-3x+4}{x^2-4} = \frac{-3(-2-\varepsilon)+5}{(-2-\varepsilon)^2-4} = \frac{11+3\varepsilon}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{11}{+4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{11}{+4\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-2^+} y = \lim_{x\to-2^+} \frac{-3x+4}{x^2-4} = \frac{-3(-2+\varepsilon)+5}{(-2+\varepsilon)^2-4} = \frac{11-3\varepsilon}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{11}{-4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{11}{-4\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

A la borne droite

$$\lim_{x\to2^-} y = \lim_{x\to2^-} \frac{-3x+4}{x^2-4} = \frac{-3(2-\varepsilon)+5}{(2-\varepsilon)^2-4} = \frac{-1+3\varepsilon}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{-1}{-4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{-1}{-4\varepsilon} = \frac{1}{+4\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_3

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \frac{-3x+4}{x^2-4} = \frac{-3(2+\varepsilon)+5}{(2+\varepsilon)^2-4} = \frac{-1-3\varepsilon}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{-1}{+4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{-1}{+4\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x+4}{x^2-4} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$$

$$\left(x^2-4\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin D_f \\ x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-2(3x^3-12x^2+36x-16)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

$$2(3x^3-12x^2+36x-16) \Rightarrow x = 0.52 \Rightarrow y = -0.65 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0.52 \\ -0.65 \end{matrix} \right.$$

$$\left(x^2-4\right)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin D_f \\ x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

$$m_{x=0.52} = f'(0.52) = 0.62$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0.52		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0.62	$+$	‖	$+$	
y''		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-0.65 Inf	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

La courbe