Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\} = \underbrace{(-\infty,-1)}_{I_1} \cup \underbrace{(-1,1)}_{I_2} \cup \underbrace{(1,+\infty)}_{I_3}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f.

A la borne droite

$$\lim_{x \to -1^-} y = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(-1-\varepsilon)^2 - 1} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1} = \frac{1}{+2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{1}{+2\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -1^+} y = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(-1+\varepsilon)^2 - 1} = \frac{1}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1} = \frac{1}{-2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{1}{-2\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

A la borne droite

$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2-1} = \frac{1}{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{-2\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_3

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2-1} = \frac{1}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{+2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{+2\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$\left(x^2-1\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin D_f \\ x = 1 \notin D_f \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$2\left(x^2-1\right)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin D_f \\ x = 1 \notin D_f \end{cases}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y''		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1 Max	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

La courbe