Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = x + \sqrt[3]{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = x + \sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = {}^\circ = (-\infty, +\infty)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x\to-\infty} (x + \sqrt[3]{x} - x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt[3]{x} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x\to+\infty} (x + \sqrt[3]{x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}+1}{3\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}+1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = +\infty$$

$$m_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}+1}{3\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}+1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = +\infty$$

Convexité de f

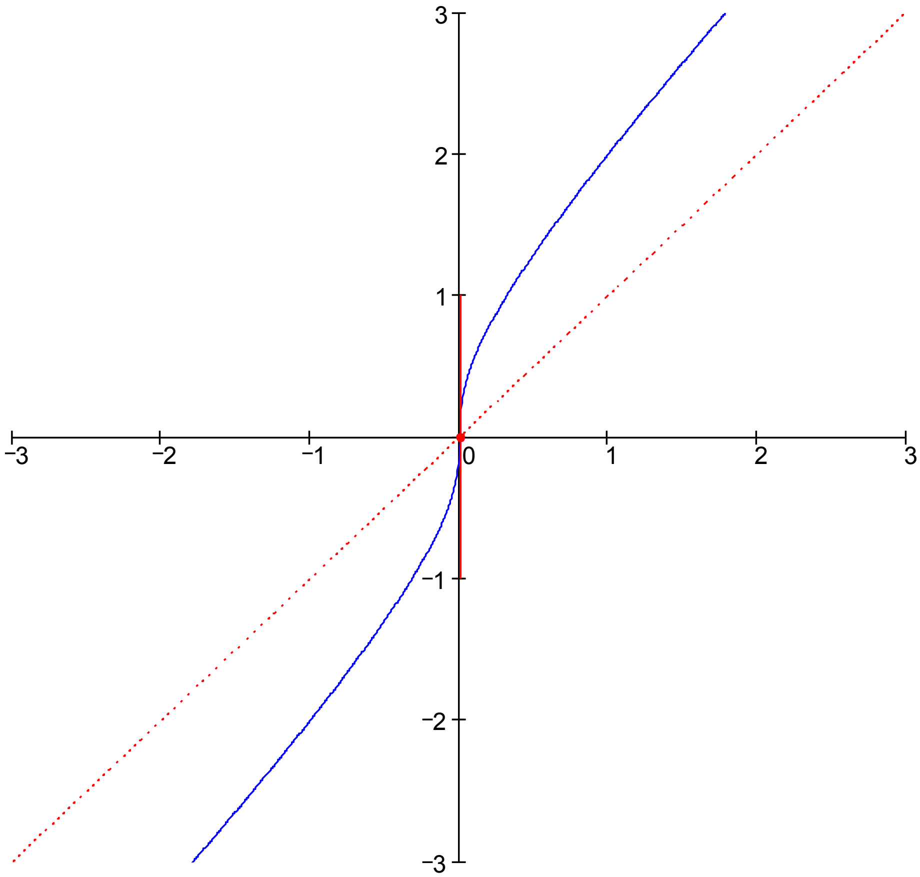
$$y'' = f''(x) = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$9x\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y''		$+$		$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0 Inf	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe



3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3