Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 4}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2,2\} = \underbrace{(-\infty,-2)}_{I_1} \cup \underbrace{(-2,2)}_{I_2} \cup \underbrace{(2,+\infty)}_{I_3}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = 1$$

Alors la droite d'équation $Y = 1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to-2^-} y = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = \frac{(-2-\varepsilon)^2 - 3(-2-\varepsilon)}{(-2-\varepsilon)^2 - 4} = \frac{10 + 7\varepsilon + \varepsilon^2}{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4} = \frac{10}{+4\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{10}{+4\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-2^+} y = \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} = \frac{(-2+\varepsilon)^2 - 3(-2+\varepsilon)}{(-2+\varepsilon)^2 - 4} = \frac{10 - 7\varepsilon + \varepsilon^2}{4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4} = \frac{10}{-4\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{10}{-4\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x}{x^2-4} = \frac{(2-\varepsilon)^2-3(2-\varepsilon)}{(2-\varepsilon)^2-4} = \frac{-2-\varepsilon+\varepsilon^2}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{-2}{-4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{-2}{-4\varepsilon} = \frac{2}{+4\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_3

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x}{x^2-4} = \frac{(2+\varepsilon)^2-3(2+\varepsilon)}{(2+\varepsilon)^2-4} = \frac{-2+\varepsilon+\varepsilon^2}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{-2}{+4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{-2}{+4\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x}{x^2-4} = 1$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x^2-8x+12}{(x^2-4)^2}$$

$$(x^2-4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin D_f \\ x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-2(3x^3-12x^2+36x-16)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

$$2(3x^3-12x^2+36x-16) \Rightarrow x = 0.52 \Rightarrow y = 0.35 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0.52 \\ 0.35 \end{matrix} \right.$$

$$(x^2-4)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin D_f \\ x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

$m_{x=0.52} = f'(0.52) = 0.62$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0.52		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0.62	$+$	||	$+$	
y''		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	0.35 Inf	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

La courbe