Fonction

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Couple ordonné

Définition :

Soit :

1. A et B deux ensembles.
2. $a \in A$
3. $b \in B$

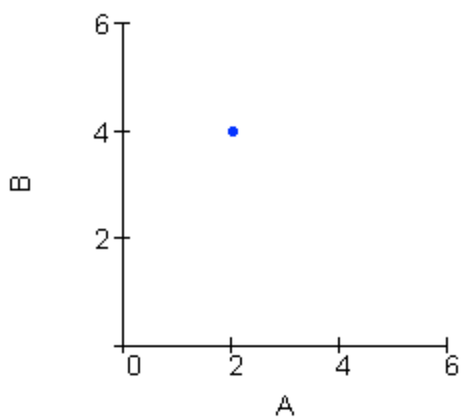
La *couple ordonné* a et b se note par (a,b).

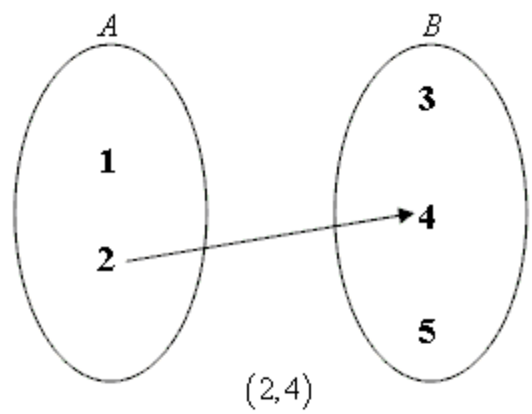
$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Exemple :

Soit $A = \{1,2\}$ et $B = \{3,4,5\}$ deux ensembles.

La couple ordonné 2 et 4 se note par $(2,4)$.





Théorème

$(a,b) \neq (b,a)$

Démonstration

$$a \neq b \Rightarrow \{a\} \neq \{b\} \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} \neq \{\{b\},\{b,a\}\} \Rightarrow (a,b) \neq (b,a)$$

Théorème

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Démonstration

1. $(a,b) = (c,d) \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \begin{cases} \{a\} = \{c\} \\ \{a,b\} = \{c,d\} \end{cases} \Rightarrow a = c \wedge b = d$
2. $a = c \wedge b = d \Rightarrow \begin{cases} \{a\} = \{c\} \\ \{a,b\} = \{c,d\} \end{cases} \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow (a,b) = (c,d)$

Produit cartésien de deux ensembles

Définition :

Soit :

1. A et B deux ensembles.
2. $a \in A$
3. $b \in B$

Le *produit cartésien* de A et B se note $A \times B$.

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Le *produit cartésien* de B et A se note $B \times A$.

$$B \times A = \{(b,a) | b \in B \wedge a \in A\}$$

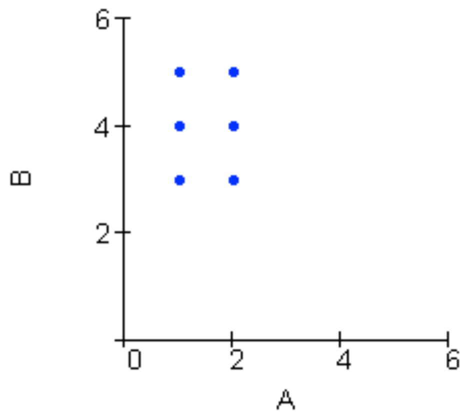
Le *produit cartésien* de A et A se note $A \times A$ ou bien A^2.

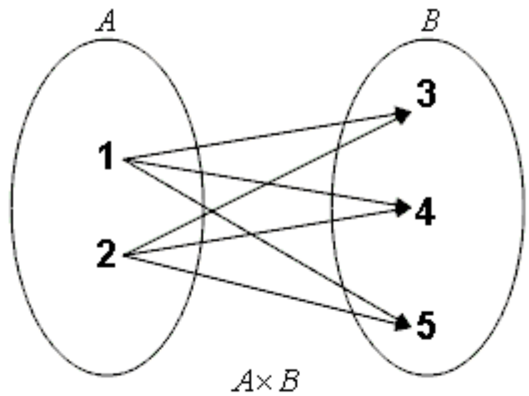
$$A^2 = A \times A = \{(a,a) | a \in A\}$$

Exemples :

Soit $A = \{1,2\}$ et $B = \{3,4,5\}$ deux ensembles.

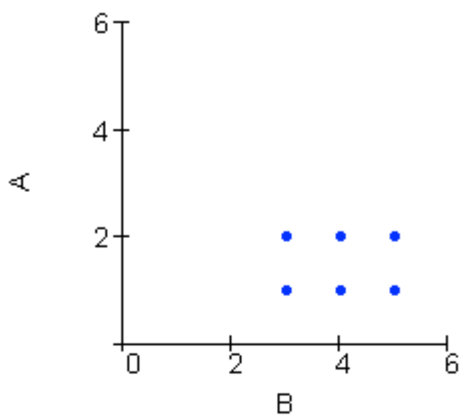
1. $A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

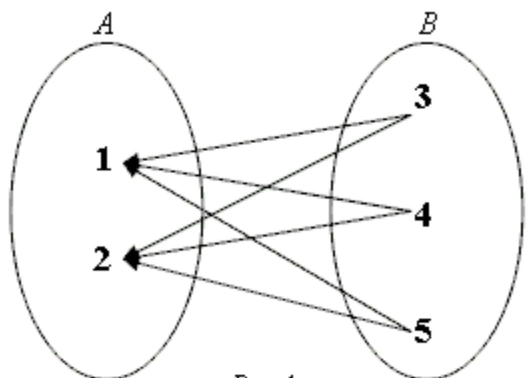




$A \times B$

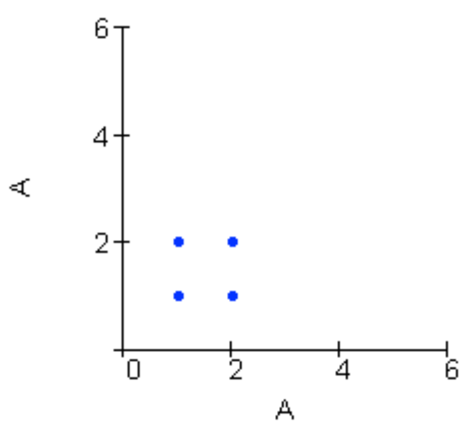
2. $B \times A = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$

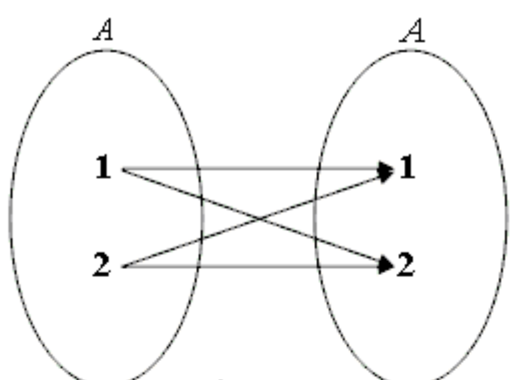




$B \times A$

3. $A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$





$A^2 = A \times A$

D’après les exemples précédents en général :

$$A \times B \neq B \times A$$

Théorème

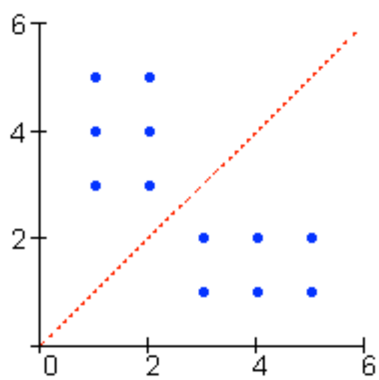
$A \times B \neq B \times A$

Démonstration

$(a,b) \neq (b,a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$

Note :

Le graphe de $A \times B$ et $B \times A$ sont symétrique par rapport à la première bissectrice ($y = x$).



Relation binaire

Définition :

Soit A et B deux ensembles, chaque sous ensemble de $A \times B$ s'appelle une *relation binaire* de A sur B.

On symbolise une relation binaire par $\Re$.

$$\Re \subset A \times B$$

Exemples :

Soit $A = \{1,2\}$ et $B = \{3,4,5\}$.

$A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

L'ensemble $A \times B$ à 6 éléments alors elle à $2^6 = 64$ sous ensembles.

On peut écrire 64 relation binaire de A sur B .Par exemple :

$\Re = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,5)\}$

Dans cette exemple :

1. $(1,4) \in \Re \Rightarrow 1 \Re 4$
2. $(2,4) \notin \Re \Rightarrow 1 \not\Re 4$

Le domaine d'une relation binaire

Soit :

4. A et B deux ensembles.
5. $\Re$ une relation binaire de A sur B .

On symbolise le domaine d'une relation binaire par $D_{\Re}$:

$D_{\Re} = \{x | x \in A \wedge (x,y) \in \Re\}$

Exemples :

$\Re = \{(1,3),(2,3),(2,5)\}$

$D_{\Re} = \{1,2\}$

L'image d'une relation binaire

Soit :

6. A et B deux ensembles.
7. $\Re$ une relation binaire de A sur B .

On symbolise l'image d'une relation binaire par $R_{\Re}$:

$R_{\Re} = \{y | y \in B \wedge (x,y) \in \Re\}$

Exemples :

$\Re = \{(1,3),(2,3),(2,5)\}$

$R_{\Re} = \{3,5\}$

Fonction

Soit :

8. A et B deux ensembles.
9. $A \times B$ produit cartésien de A et B.
10. $\Re$ une relation binaire de A sur B.

La relation binaire $\Re$ est une *fonction* si :

$$(x_1, y_1) \in \Re \wedge (x_1, y_2) \in \Re \Rightarrow y_1 = y_2$$

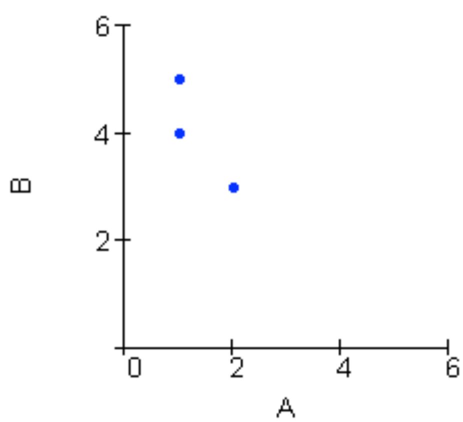
On symbolise la Fonction de A sur B par f.

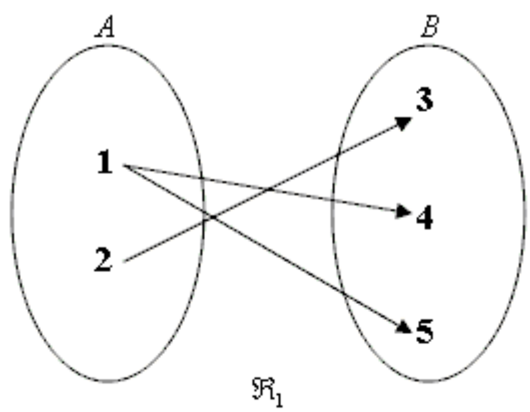
Exemples :

Soit :

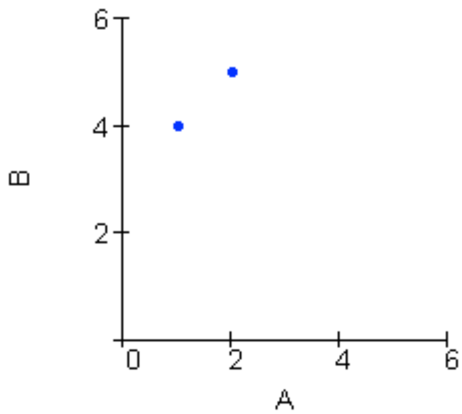
1. $A = \{1,2\}$ et $B = \{3,4,5\}$.
2. $A \times B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

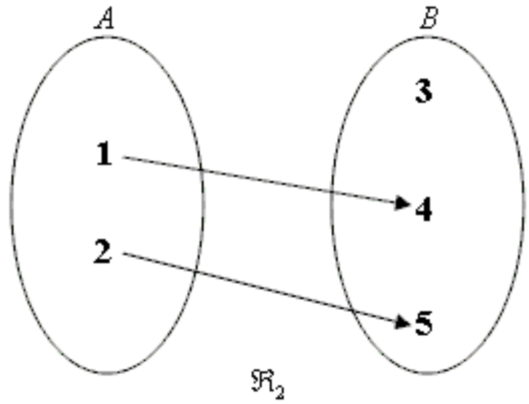
$\Re_1 = \{(1,4),(1,5),(2,3)\}$





$\Re_2 = \{(1,4),(2,5)\}$





Dans les exemples précédentes $\Re_1$ n'est pas une fonction mais $\Re_2$ est une fonction.

Le domaine d'une fonction

Soit :

1. A et B deux ensembles.
2. f une fonction de A sur B.

On symbolise le domaine d'une fonction par D_f :

$$D_f = \{x | x \in A \wedge (x, y) \in f\}$$

Exemples :

$$f = \{(1,4),(2,5)\}$$

$$D_f = \{1,2\}$$

L'image d'une fonction

Soit :

1. A et B deux ensembles.
2. f une fonction de A sur B.

On symbolise le domaine d'une fonction par R_f :

$$R_f = \{ y | y \in B \wedge (x, y) \in f \}$$

Exemples :

$$f = \{(1,4),(2,5)\}$$

$$R_f = \{4,5\}$$