Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = x - \sqrt[3]{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$y = f(x) = x - \sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = {}^\circ \ = (-\infty, +\infty)$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} (x - \sqrt[3]{x}) = -\infty$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(y - ax \right) = \lim_{x \to -\infty} (x - \sqrt[3]{x} - x) = \lim_{x \to -\infty} - \sqrt[3]{x} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

A la borne droite

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt[3]{x}) = +\infty$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(y - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt[3]{x} - x) = \lim_{x \to +\infty} - \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3\sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -0.19 \Rightarrow y = 0.38 \Rightarrow \begin{vmatrix} -0.19 \\ 0.38 \end{vmatrix} \\ x = 0.19 \Rightarrow y = -0.38 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0.19 \\ -0.38 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2} - 1}{3\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2} - 1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = -\infty$$

$$m_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2} - 1}{3\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon^2} - 1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = -\infty$$

Convexité de f

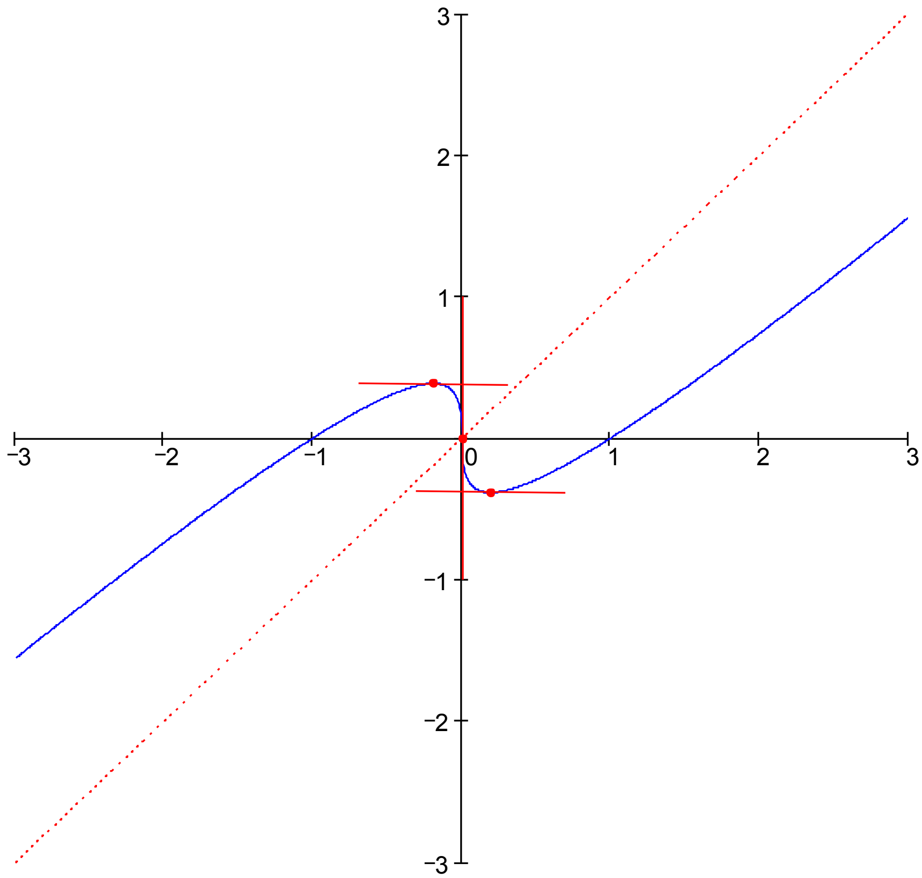
$$y'' = f''(x) = \frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$9x\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-0.19		0		0.19		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗ $\frown$	0.38 Max	↘ $\frown$	0 Inf	↘ $\smile$	-0.38 Min	↗ $\smile$	$+\infty$

La courbe



3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3