Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^4 - 1}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underbrace{(-\infty, 0)}_{I_1} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy.

A la borne droite

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^4 - 1}{x} = \frac{(0 - \varepsilon)^4 - 1}{0 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 - 1}{-\varepsilon} = \frac{-1}{-\varepsilon} = \frac{1}{+\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 - 1}{x} = \frac{(0 + \varepsilon)^4 - 1}{0 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 - 1}{+\varepsilon} = \frac{-1}{+\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^2}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{2(3x^4 - 1)}{x^3}$$

$$2(3x^4 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0.76 \Rightarrow y = -0.87 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0.76 \\ -0.87 \end{matrix} \right. \\ x = -0.76 \Rightarrow y = 0.87 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -0.76 \\ 0.87 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

$$m_{x=-0.76} = f'(-0.76) = 3.46$$

$$m_{x=0.76} = f'(0.76) = 3.46$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-0.76		0		0.76		$+\infty$
y'		$+$	3.46	$+$	‖	$+$	3.46	$+$	
y''		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗ ∩	0.87 Inf	↗ ∪	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↗ ∩	-0.87 Inf	↗ ∪	$+\infty$

La courbe