Équation de *Helmholtz* $\frac{d^2}{dx^2}u(\mathbf{r})+k^2u(\mathbf{r})=0$

Hossein Rahimzadeh
www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

En coordonnées cartésiennes et en une dimension

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)+k^2X(x)=0$$

Avec les conditions frontières de *Dirichlet*

- $X(0)=0$
- $X(L)=0$

C'est l'équation de *Sturm-Liouville* dans $0\leq x\leq L$ avec :

$$p(x)=1$$

$$q(x)=0$$

$$w(x)=1$$

$$\lambda=k^2$$

On trouve les valeurs propres k_n et les fonctions propres $X_n(x)$

Une solution particulière peut être en forme :

$$X'(x)=A\sin(kx+\alpha)+B\cos(kx+\beta)$$

En appliquant les conditions frontières :

$$X(0)=0 \quad\Rightarrow\quad A\sin(\alpha)+B\cos(\beta)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\alpha=0\\ B=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad X'(x)=A\sin(kx)$$

$X(L)=0\Rightarrow A\sin(kL)=0\Rightarrow kL=n\pi\Rightarrow k=\frac{n\pi}{L}$ donc,

Les valeurs propres : $k_n=\frac{n\pi}{L} \quad , \quad n=1,2,3,\cdots$

Les fonctions propres : $X_n(x) = A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

On trouve le coefficient de *Fourier* A_n :

Les fonctions propres sont orthonormées :

$$\int_0^L X_m^*(x) X_n(x) dx = \delta_{mn}$$

$$\int_0^L A_m \sin(\frac{m\pi}{L}x) A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx = \delta_{mn}$$

Pour $m = n$,

$$\int_0^L A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) A_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx = 1$$

$$A_n^2 \int_0^L \sin^2(\frac{n\pi}{L}x) dx = 1$$

$$A_n^2 \times \frac{L}{2} = 1$$

$A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$ donc,

Les fonctions propres : $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

Solution générale

La solution générale s'écrira comme une superposition linéaire de tous les modes.

Donc,

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

En résumé

Équation de *Helmholtz* en une dimension	$\frac{d^2}{dx^2}X(x)+k^2X(x)=0$ Avec les conditions frontières de *Dirichlet* • $X(0)=0$ • $X(L)=0$
Les valeurs propres	$k_n=\frac{n\pi}{L}$, $n=1,2,3,\cdots$
Les fonctions propres	$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$, $n=1,2,3,\cdots$
La solution générale	$X(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$