Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = x + \sqrt{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow D_f = \left[0, +\infty\right)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

Alors le point $\left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ est un point d'arrêt.

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(y - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$m_{x\to 0^+} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}) = 1+\frac{1}{2\sqrt{(0+\varepsilon)}} = 1+\frac{1}{2\sqrt{+\varepsilon}} = +\infty$$

Convexité de f

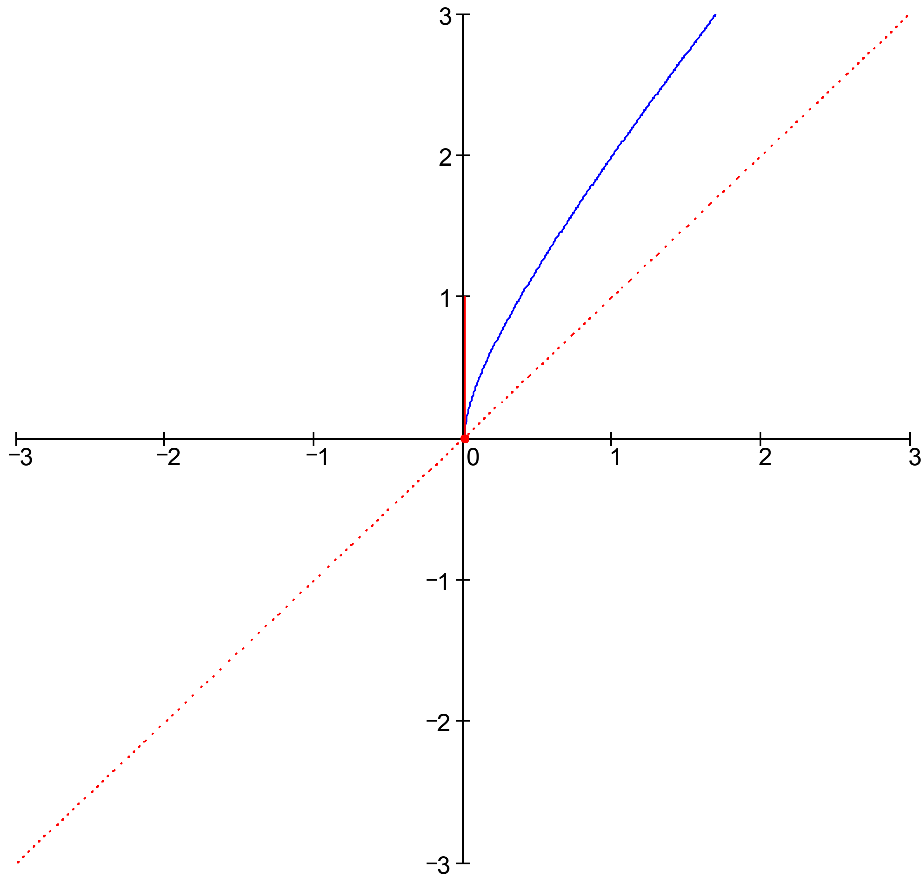
$$y'' = f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$$

$$4x\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le tableau de variation

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y''		$-$	
y	0	$\nearrow$ $\frown$	$+\infty$

La courbe



3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3