Dérivée des fonctions élémentaires

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

1-Dérivée de la fonction $y = f(x) = c$

$y = c$

$y + \Delta y = c$

$\Delta y = c - y = c - c = 0$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

En résumé,

$$y = f(x) = c \Rightarrow y' = f'(x) = 0$$

Exemples :

1. $y = 0 \Rightarrow y' = 0$
2. $y = 2 \Rightarrow y' = 0$
3. $y = -5 \Rightarrow y' = 0$

2-Dérivée de la fonction $y = f(x) = ax + b$

$y = ax + b$

$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$

$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - y = ax + a\Delta x + b - ax - b = a\Delta x$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

En résumé,

$$y = f(x) = ax + b \Rightarrow y' = f'(x) = a$$

Exemples :

1. $y = 2x + 5 \Rightarrow y' = 2$
2. $y = -3x + 1 \Rightarrow y' = -3$

3-Dérivée de la fonction $y = f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

$$\Delta y = x^n + n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = n x^{n-1}$$

En résumé,

$$y = f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow y' = f'(x) = n x^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Exemples :

1. $y = x \Rightarrow y' = 1$
2. $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$
3. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$

4-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$

$$y = \frac{1}{x^n}$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^n}$$

$$\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)^n} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n - (x + \Delta x)^n}{x^n (x + \Delta x)^n} =$$

$$= \frac{x^n - \left[x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right]}{x^n (x + \Delta x)^n} =$$

$$= \frac{-\left[n x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right]}{x^n (x + \Delta x)^n}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]}{x^n (x + \Delta x)^n}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\left[n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right]}{x^n (x + \Delta x)^n} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

En résumé,

$$y = f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$$

Exemples :

1. $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{x^2}$

2. $y=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow y'=-\dfrac{2}{x^3}$

3. $y=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow y'=-\dfrac{3}{x^4}$

5-Dérivée de la fonction $y=f(x)=\sqrt[n]{x}, n\in\bullet, n=2k$

$$y=\sqrt[n]{x}$$

$$y+\Delta y=\sqrt[n]{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x}$$

Supposons que $u=\sqrt[n]{x+\Delta x}$ et $v=\sqrt[n]{x}$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+\Delta x}-\sqrt[n]{x}}{\Delta x}=\lim_{u\to v}\frac{u-v}{u^n-v^n}=\lim_{u\to v}\frac{u-v}{(u-v)\left(u^{n-1}+u^{n-2}v+\ldots+uv^{n-2}+v^{n-1}\right)}=$$
$$=\lim_{u\to v}\frac{1}{\left(u^{n-1}+u^{n-2}v+\ldots+uv^{n-2}+v^{n-1}\right)}=\frac{1}{\left(v^{n-1}+v^{n-1}+\ldots+v^{n-1}+v^{n-1}\right)}=\frac{1}{nv^{n-1}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

En résumé,

$$y=f(x)=\sqrt[n]{x}, n\in\bullet, n=2k\Rightarrow y'=f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, n\in\bullet, n=2k$$

Exemples :

1. $y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $y=\sqrt[4]{x}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

6-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \bullet , n = 2k+1$

$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y + \Delta y = \sqrt[n]{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x}$$

Supposons que $u = \sqrt[n]{x + \Delta x}$ et $v = \sqrt[n]{x}$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x} = \lim_{u \to v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \lim_{u \to v} \frac{u - v}{(u - v)\left(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}\right)} =$$
$$= \lim_{u \to v} \frac{1}{\left(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}\right)} = \frac{1}{\left(v^{n-1} + v^{n-1} + \dots + v^{n-1} + v^{n-1}\right)} = \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

En résumé,

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \bullet , n = 2k+1 \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, n \in \bullet , n = 2k+1$$

Exemples :

1. $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2. $y = \sqrt[5]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

7-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \sin x$

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin\left(x + \Delta x\right)$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\times\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\times\cos x=\cos x$$

En résumé,

$$y=f(x)=\sin x\Rightarrow y'=f'(x)=\cos x$$

8-Dérivée de la fonction $y=f(x)=\cos x$

$y=\cos x$

$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}=-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\sin\left[-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right]=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\times\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-1\times\sin x=-\sin x$$

En résumé,

$$y=f(x)=\cos x\Rightarrow y'=f'(x)=-\sin x$$

9-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \tan x$

$y = \tan x$

$y + \Delta y = \tan\left(x + \Delta x\right)$

$\Delta y = \tan\left(x + \Delta x\right) - \tan x$

$\Delta y = \dfrac{\sin \Delta x}{\cos\left(x + \Delta x\right)\cos x}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \dfrac{1}{\cos\left(x + \Delta x\right)\cos x}$

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \dfrac{1}{\cos\left(x + \Delta x\right)\cos x}\right] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} \times \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\cos\left(x + \Delta x\right)\cos x} =$

$= 1 \times \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

En résumé,

$$y = f(x) = \tan x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

10-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \cot x$

$y = \cot x$

$y + \Delta y = \cot\left(x + \Delta x\right)$

$\Delta y = \cot\left(x + \Delta x\right) - \cot x$

$\Delta y = \dfrac{\sin\left(-\Delta x\right)}{\sin\left(x + \Delta x\right)\sin x}$

$\Delta y = -\dfrac{\sin \Delta x}{\sin\left(x + \Delta x\right)\sin x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\times\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\times\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x}\right]=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sin(x+\Delta x)\sin x}=$$

$$=-1\times\frac{1}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x=-\left(1+\cot^2 x\right)$$

En résumé,

$$y=f(x)=\cot x\Rightarrow y'=f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x=-\left(1+\cot^2 x\right)$$

11-Dérivée de la fonction $y=f(x)=\sec x$

$y=\sec x$

$y+\Delta y=\sec(x+\Delta x)$

$$\Delta y=\sec(x+\Delta x)-\sec x=\frac{1}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x-\cos(x+\Delta x)}{\cos x\cos(x+\Delta x)}=\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\cos x\cos(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\times\frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos x\cos(x+\Delta x)}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\times\frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos x\cos(x+\Delta x)}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos x\cos(x+\Delta x)}=1\times\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x.\sec x$$

En résumé,

$$y = f(x) = \sec x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x.\sec x$$

12-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \csc x$

$y = \csc x$

$y + \Delta y = \csc(x + \Delta x)$

$$\Delta y = \csc(x+\Delta x) - \csc x = \frac{1}{\sin(x+\Delta x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - \sin(x+\Delta x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)}\right] =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \times \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} = 1 \times \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x.\csc x$$

En résumé,

$$y = f(x) = \csc x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x.\csc x$$

13-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

$y = \log_a x$

$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$

$$\Delta y = \log_a\left(x+\Delta x\right) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\times\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

En résumé,

$$y = f(x) = \log_a x, a>0, a\neq 1 \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}, a>0, a\neq 1$$

14-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \ln x$

$$y = \ln x$$

$$y + \Delta y = \ln\left(x+\Delta x\right)$$

$$\Delta y = \ln\left(x+\Delta x\right) - \ln x = \ln\frac{x+\Delta x}{x} = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\times\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

En résumé,

$$y = f(x) = \ln x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{x}$$

15-Dérivée de la fonction $y = u \pm v$

On admet que les fonctions $u = u(x)$ et $v = v(x)$ sont dérivables en tout point x.

$$y = u \pm v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$$

En résumé,

$$y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$$

16-Dérivée de la fonction $y = uv$

On admet que les fonctions $u = u(x)$ et $v = v(x)$ sont dérivables en tout point x.

$$y = uv$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u\Delta v}{\Delta x} + \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = uv' + vu' + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}$$

Les fonction $u = u(x)$ et $v = v(x)$ son dérivables et continues en tout point x.

Alors :

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$

Alors :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x} = 0$$

En résumé,

$$y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

17-Dérivée de la fonction $y = \frac{u}{v}, v \neq 0$

On admet que les fonctions $u = u(x)$ et $v = v(x)$ sont dérivables en tout point x .

$$y = \frac{u}{v}, v \neq 0$$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\left(u + \Delta u\right) - u\left(v + \Delta v\right)}{v\left(v + \Delta v\right)} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim_{\Delta x \to 0}\left(v^2 + v\Delta v\right)} = \frac{v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} v^2 + \lim_{\Delta x \to 0} v\Delta v} =$$

$$= \frac{vu' - uv'}{v^2 + \lim_{\Delta x \to 0} v\Delta v} = \frac{uv' - vu'}{v^2 + v\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v}$$

La fonction $v = v(x)$ est dérivable et continues en tout point x .

Alors :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$$

En résumé,

$$y = \frac{u}{v}, v \neq 0 \Rightarrow y' = \frac{uv' - vu'}{v^2}$$

Exemples :

1. $y = \frac{1}{x^n} \Rightarrow y' = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^n} = \frac{-n}{x^{n+1}}$

2. $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

3. $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -\left(1 + \cot^2 x\right)$

4. $y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{0 - (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan$

5. $y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{0 - (\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$

18-Dérivée de la fonction $y = cf\left(x\right), c$ est constant

$$y = cf\left(x\right)$$

$$y + \Delta y = cf\left(x + \Delta x\right)$$

$$\Delta y = cf\left(x + \Delta x\right) - cf\left(x\right) = c\left[f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)\right]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[c\frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}\right] = c\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x} = cf'\left(x\right)$$

En résumé,

$$y = cf(x) \Rightarrow y' = cf'(x)$$

19-Dérivée de la réciproque d’une fonction

Soit $y = f(x)$ une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle (a,b).Alors la fonction $x = f^{-1}(y)$ réciproque de $y = f(x)$ est aussi dérivable sur cet intervalle, définie par $x'_y = \left(f^{-1}\right)'(x)$.

On veux trouver la relation entre y'_x et x'_y.

$y = f(x)$

$x = f^{-1}(y)$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

On calcule maintenant $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$:

La fonction $y = f(x)$ est dérivable et continues en tout point x.

Alors :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'_y$$

En effet :

$$y'_x = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'}$$

En résumé,

$$y = f(x) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(x)}$$

Exemples :

1. $y = \sqrt[n]{x}$

$$x = y^n$$

$$x'_y = ny^{n-1} = n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} = n\sqrt[n]{x^{n-1}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

2. $y = a^x$

$$x = log_a y$$

$$x'_y = \frac{1}{y} log_a e = \frac{1}{y \ln a}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = y \ln a = a^x \ln a$$

3. $y = e^x$

$$x = \ln y$$

$$x'_y = \frac{1}{y}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = y = e^x$$

20-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \arcsin x$

$$y = \arcsin x$$

$$x = \sin y$$

$$x'_y = \cos y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

En résumé,

$$y = f(x) = \arcsin x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

21-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \arccos x$

$y = \arccos x$

$x = \cos y$

$x'_y = -\sin y$

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

En résumé,

$$y = f(x) = \arccos x \Rightarrow y' = f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

22-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \arctan x$

$y = \arctan x$

$x = \tan y$

$x'_y = 1 + \tan^2 y$

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

En résumé,

$$y = f(x) = \arctan x \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

23-Dérivée de la fonction $y = f(x) = \operatorname{arccot} x$

$y = \operatorname{arccot} x$

$x = \cot y$

$x'_y = -\left(1 + \cot^2 y\right)$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

En résumé,

$$y = f(x) = \operatorname{arc}\cot x \Rightarrow y' = f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

24-Dérivée d'une fonction composée

Soit $y = fog(x) = f(g(x))$.

On décompose cette fonction en posant :

$$y = f(u), u = g(x)$$

On obtient :

$$y = f(u) \Rightarrow y'_u = \frac{dy}{du}$$

$$u = g(x) \Rightarrow u'_x = \frac{du}{dx}$$

Alors :

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = y'_u u'_x$$

En résumé,

$$y = fog(x) = f(g(x)) \Rightarrow \begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_u u'_x$$

Les formes plus compliquées :

$$y = fogoh(x) = f(g(h(x))) \Rightarrow \begin{cases} y = f(u) \\ u = g(h(x)) \\ v = h(x) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_u u'_v v'_x$$