Les intervalles

Hossein Rahimzadeh
www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Ensembles majoré et minoré

Soit $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ un ensemble de nombres réels.

Ensemble majoré

L'ensemble A est *majoré* si :

$$\exists M > 0, \forall x \in A : x \leq M$$

Exemples :

1. Intervalle fermé : $[a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
2. Intervalle ouvert : $(a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
3. Intervalle semi-ouvert à gauche : $(a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4. Intervalle semi-ouvert à droite : $[a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

Ensemble minoré

L'ensemble A est *minoré* si :

$$\exists m > 0, \forall x \in A : x \geq m$$

Exemples :

1. Intervalle fermé : $[a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
2. Intervalle ouvert : $(a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
3. Intervalle semi-ouvert à gauche : $(a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4. Intervalle semi-ouvert à droite : $[a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

Ensembles borné et non borné

Soit $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ un ensemble de nombres réels.

Ensemble borné

On dit que l'ensemble A est *borné* s'il est à la fois majoré et minoré.

L'ensemble A est *borné* si :

$$\exists M > 0, \forall x \in A : |x| \leq M$$

Exemples :

1. Intervalle fermé : $[a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
2. Intervalle ouvert : $(a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
3. Intervalle semi-ouvert à gauche : $(a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
4. Intervalle semi-ouvert à droite : $[a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$

Ensemble non borné

L'ensemble A est *non borné* si :

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in A : |x_0| > M$$

Exemples :

1. Intervalle fermé illimité à gauche : $(-\infty, b] = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
2. Intervalle fermé illimité à droite : $[a, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$
3. Intervalle ouvert illimité à gauche : $(-\infty, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, x < b\}$
4. Intervalle ouvert illimité à droite : $(a, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x\}$

Le plus grand et le plus petit élément d'un ensemble

Soit $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ un ensemble de nombres réels.

Le plus grand élément d'un ensemble

Désignons par M le plus grand élément d'un ensemble :

$$M = \max A = \max_{x \in A} x$$

Exemples :

1. Dans l'intervalle fermé $[a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \le x \le b\}$:

$$\max[a,b] = \max_{x \in [a,b]} x = b$$

2. Dans l'intervalle ouvert $(a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$:

$$\max(a,b) = \max_{x \in (a,b)} x \text{ n'existe pas}$$

3. Dans l'intervalle semi-ouvert à gauche $(a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \le b\}$:

$$\max(a,b] = \max_{x \in (a,b]} x = b$$

4. Dans l'intervalle semi-ouvert à droite $[a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \le x < b\}$:

$$\max[a,b) = \max_{x \in [a,b)} x \text{ n'existe pas}$$

5. Dans l'intervalle fermé illimité à gauche $(-\infty,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, x \le b\}$:

$$\max(-\infty,b] = \max_{x \in (-\infty,b]} x = b$$

6. Dans l'intervalle fermé illimité à droite $[a,+\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \le x\}$:

$$\max[a,+\infty) = \max_{x \in [a,+\infty)} x \text{ n'existe pas}$$

7. Dans l'intervalle ouvert illimité à gauche $(-\infty,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, x < b\}$:

$$\max(-\infty,b) = \max_{x \in (-\infty,b)} x \text{ n'existe pas}$$

8. Dans l'intervalle ouvert illimité à droite $(a,+\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x\}$:

$\max\left(a,+\infty\right)=\max\limits_{x\in\left(a,+\infty\right)} x$ n'existe pas

Le plus petit élément d'un ensemble

Désignons par m le plus petit élément d'un ensemble :

$$m=\min A=\min_{x\in A} x$$

Exemples :

1. Dans l'intervalle fermé $\left[a,b\right]=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a\leq x\leq b\right\}$:

   $\min\left[a,b\right]=\min\limits_{x\in\left[a,b\right]} x=a$

2. Dans l'intervalle ouvert $\left(a,b\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a<x<b\right\}$:

   $\min\left(a,b\right)=\min\limits_{x\in\left(a,b\right)} x$ n'existe pas

3. Dans l'intervalle semi-ouvert à gauche $\left(a,b\right]=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a<x\leq b\right\}$:

   $\min\left(a,b\right]=\min\limits_{x\in\left(a,b\right]} x$ n'existe pas

4. Dans l'intervalle semi-ouvert à droite $\left[a,b\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a\leq x<b\right\}$:

   $\min\left[a,b\right)=\min\limits_{x\in\left[a,b\right)} x=a$

5. Dans l'intervalle fermé illimité à gauche $\left(-\infty,b\right]=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},x\leq b\right\}$:

   $\min\left(-\infty,b\right]=\max\limits_{x\in\left(-\infty,b\right]} x$ n'existe pas

6. Dans l'intervalle fermé illimité à droite $\left[a,+\infty\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a\leq x\right\}$:

   $\min\left[a,+\infty\right)=\min\limits_{x\in\left[a,+\infty\right)} x=a$

7. Dans l'intervalle ouvert illimité à gauche $\left(-\infty,b\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},x<b\right\}$:

   $\min\left(-\infty,b\right)=\min\limits_{x\in\left(-\infty,b\right)} x$ n'existe pas

8. Dans l'intervalle ouvert illimité à droite $(a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R}, a<x\}$:

$\min(a,+\infty)=\min\limits_{x\in(a,+\infty)} x$ n'existe pas

Suprémum et Infimum d'un ensemble

Soit $A=\{x|x\in\mathbb{R}\}$ un ensemble de nombres réels.

La borne supérieur ou suprémum d'un ensemble

Première définition (pour un ensemble majoré) :

On dit qu'un nombre M fini est La *borne supérieur* ou *suprémum* de A et on écrit :

$$M=\sup A$$

Si :

1. $\forall x\in A, x\leq M$
2. $\forall\varepsilon>0, \exists x_1\in A: M-\varepsilon<x_1\leq M$

Deuxième définition (définition générale) :

Cette définition convient pour tout ensemble (borné ou non borné).

On dit qu'un nombre M fini ou infini est La *borne supérieur* ou *suprémum* de A et on écrit :

$$M=\sup A$$

Si :

1. $\forall x\in A, x\leq M$
2. $\forall M_1<M, \exists x_1\in A: M_1<x_1\leq M$

Dans cette formulation on ne se sert pas de la différence $M-\varepsilon$ qui n'a pas de sens pour $M=+\infty$.

Exemples :

1. Dans l'intervalle fermé $[a,b]=\{x|x\in\mathbb{R}, a\leq x\leq b\}$:

$\sup[a,b]=\sup\limits_{x\in[a,b]} x=b$

2. Dans l'intervalle ouvert $(a,b)=\{x|x\in\mathbb{R},a<x<b\}$:

$$\sup(a,b)=\sup_{x\in(a,b)}x=b$$

3. Dans l'intervalle semi-ouvert à gauche $(a,b]=\{x|x\in\mathbb{R},a<x\leq b\}$:

$$\sup(a,b]=\sup_{x\in(a,b]}x=b$$

4. Dans l'intervalle semi-ouvert à droite $[a,b)=\{x|x\in\mathbb{R},a\leq x<b\}$:

$$\sup[a,b)=\sup_{x\in[a,b)}x=b$$

5. Dans l'intervalle fermé illimité à gauche $(-\infty,b]=\{x|x\in\mathbb{R},x\leq b\}$:

$$\sup(-\infty,b]=\sup_{x\in(-\infty,b]}x=b$$

6. Dans l'intervalle fermé illimité à droite $[a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R},a\leq x\}$:

$$\sup[a,+\infty)=\sup_{x\in[a,+\infty)}x=+\infty$$

7. Dans l'intervalle ouvert illimité à gauche $(-\infty,b)=\{x|x\in\mathbb{R},x<b\}$:

$$\sup(-\infty,b)=\sup_{x\in(-\infty,b)}x=b$$

8. Dans l'intervalle ouvert illimité à droite $(a,+\infty)=\{x|x\in\mathbb{R},a<x\}$:

$$\sup(a,+\infty)=\sup_{x\in(a,+\infty)}x=+\infty$$

Remarque :

Si ensemble A possède un élément maximum, alors :

$\sup A=\max A$

La borne inférieur ou infimum d'un ensemble

Première définition (pour un ensemble minoré) :

On dit qu'un nombre M fini est La *borne inférieur* ou *infimum* de A et on écrit :

$$m = \inf A$$

Si :

1. $\forall x \in A, m \leq x$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in A : m < x_1 \leq m + \varepsilon$

Deuxième définition (définition générale) :
Cette définition convient pour tout ensemble (borné ou non borné).

On dit qu'un nombre M fini ou infini est La *borne inférieur* ou *infimum* de A et on écrit :

$$m = \inf A$$

Si :

1. $\forall x \in A, m \leq x$
2. $\forall m_1 > m, \exists x_1 \in A : m_1 \leq x_1 < m$

Dans cette formulation on ne se sert pas de la différence $m + \varepsilon$ qui n'a pas de sens pour $m = -\infty$.

Exemples :

1. Dans l'intervalle fermé $\left[a,b\right] = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\right\}$:

   $\inf\left[a,b\right] = \inf\limits_{x \in [a,b]} x = a$

2. Dans l'intervalle ouvert $\left(a,b\right) = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, a < x < b\right\}$:

   $\inf\left(a,b\right) = \inf\limits_{x \in (a,b)} x = a$

3. Dans l'intervalle semi-ouvert à gauche $\left(a,b\right] = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\right\}$:

   $\inf\left(a,b\right] = \inf\limits_{x \in (a,b]} x = a$

4. Dans l'intervalle semi-ouvert à droite $\left[a,b\right) = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\right\}$:

   $\inf\left[a,b\right) = \inf\limits_{x \in [a,b)} x = a$

5. Dans l'intervalle fermé illimité à gauche $\left(-\infty,b\right]=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},x\leq b\right\}$:

$$\inf\left(-\infty,b\right]=\inf_{x\in\left(-\infty,b\right]}x=-\infty$$

6. Dans l'intervalle fermé illimité à droite $\left[a,+\infty\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a\leq x\right\}$:

$$\inf\left[a,+\infty\right)=\inf_{x\in\left[a,+\infty\right)}x=a$$

7. Dans l'intervalle ouvert illimité à gauche $\left(-\infty,b\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},x<b\right\}$:

$$\inf\left(-\infty,b\right)=\inf_{x\in\left(-\infty,b\right)}x=-\infty$$

8. Dans l'intervalle ouvert illimité à droite $\left(a,+\infty\right)=\left\{x\middle|x\in\mathbb{R},a<x\right\}$:

$$\inf\left(a,+\infty\right)=\inf_{x\in\left(a,+\infty\right)}x=a$$

Remarque :

Si ensemble A possède un élément minimum, alors :

$$\inf A=\min A$$

En résumé

Ensemble	Min	Max	inf	sup	minoré	majoré	borné	Non borné
$[a,b]$	a	b	a	b	+	+	+	-
(a,b)	N'existe pas	N'existe pas	a	b	+	+	+	-
$(a,b]$	N'existe pas	b	a	b	+	+	+	-
$[a,b)$	a	N'existe pas	a	b	+	+	+	-
$(-\infty,b]$	N'existe pas	b	$-\infty$	b	-	+	-	+
$[a,+\infty)$	a	N'existe pas	a	$+\infty$	+	-	-	+
$(-\infty,b)$	N'existe pas	N'existe pas	$-\infty$	b	-	+	-	+
$(a,+\infty)$	N'existe pas	N'existe pas	a	$+\infty$	+	-	-	+

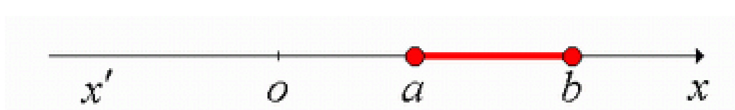
Intervalles

Soient a et b des nombres tels que $a < b$.

Intervalle fermé

L'ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$ est un intervalle appelé *intervalle fermé* d'origine a et d'extrémité b et noté $[a,b]$.

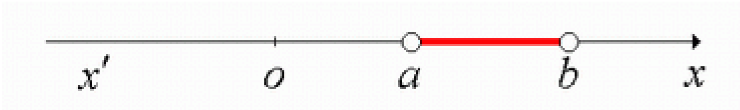
$$[a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$



Intervalle ouvert

L'ensemble des nombres x tels que $a < x < b$ est un intervalle appelé *intervalle ouvert* d'origine a et d'extrémité b et noté (a,b).

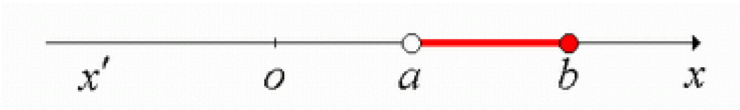
$$(a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$



Intervalle semi-ouvert à gauche

L'ensemble des nombres x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle appelé *intervalle semi-ouvert à gauche* d'origine a et d'extrémité b et noté $(a,b]$.

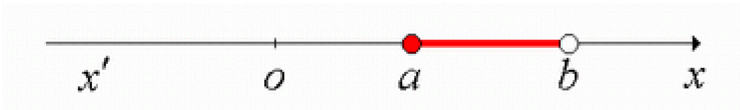
$$(a,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$



Intervalle semi-ouvert à droite

L'ensemble des nombres x tels que $a \leq x < b$ est un intervalle appelé *intervalle semi-ouvert à droite* d'origine a et d'extrémité b et noté $[a,b)$.

$$[a,b) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$



Intervalle fermé illimité à gauche

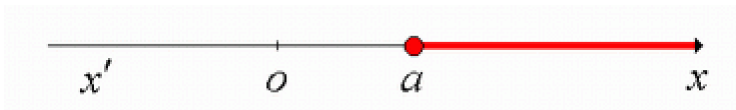
L'ensemble des nombres x tels que $x \leq b$ est un intervalle appelé *intervalle fermé illimité à gauche* d'extrémité b et noté. $(-\infty,b]$.

$$(-\infty,b] = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$$

Intervalle fermé illimité à droite

L'ensemble des nombres x tels que $a \le x$ est un intervalle appelé *intervalle fermé illimité à droite* d'origine a et noté. $[a,+\infty)$.

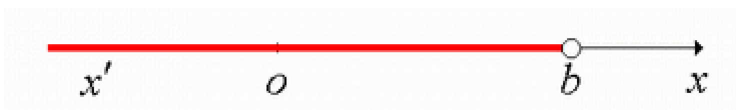
$$[a,+\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, a \le x\}$$



Intervalle ouvert illimité à gauche

L'ensemble des nombres x tels que $x < b$ est un intervalle appelé *intervalle ouvert illimité à gauche* d'extrémité b et noté. $(-\infty, b)$.

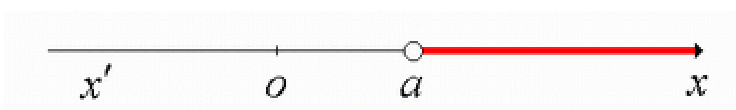
$$(-\infty, b) = \{x | x \in \mathbb{R}, x < b\}$$



Intervalle ouvert illimité à droite

L'ensemble des nombres x tels que $a < x$ est un intervalle appelé *intervalle ouvert illimité à droite* d'origine a et noté. $(a,+\infty)$.

$$(a,+\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}, a < x\}$$



Remarque :

1. Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ représentent les nombres infinis.

2. Le nombre $|b-a|$ s'appelle *longueur* de l'intervalle.