Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underbrace{(-\infty, 0)}_{I_1} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2} = 1$$

Alors la droite d'équation $Y = 1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(0 - \varepsilon)^2 - 4}{(0 - \varepsilon)^2} = \frac{+\varepsilon^2 - 4}{+\varepsilon^2} = \frac{-4}{+\varepsilon^2} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(0 + \varepsilon)^2 - 4}{(0 + \varepsilon)^2} = \frac{+\varepsilon^2 - 4}{+\varepsilon^2} = \frac{-4}{+\varepsilon^2} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2} = 1$$

Alors la droite d'équation $Y = 1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{8}{x^3}$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

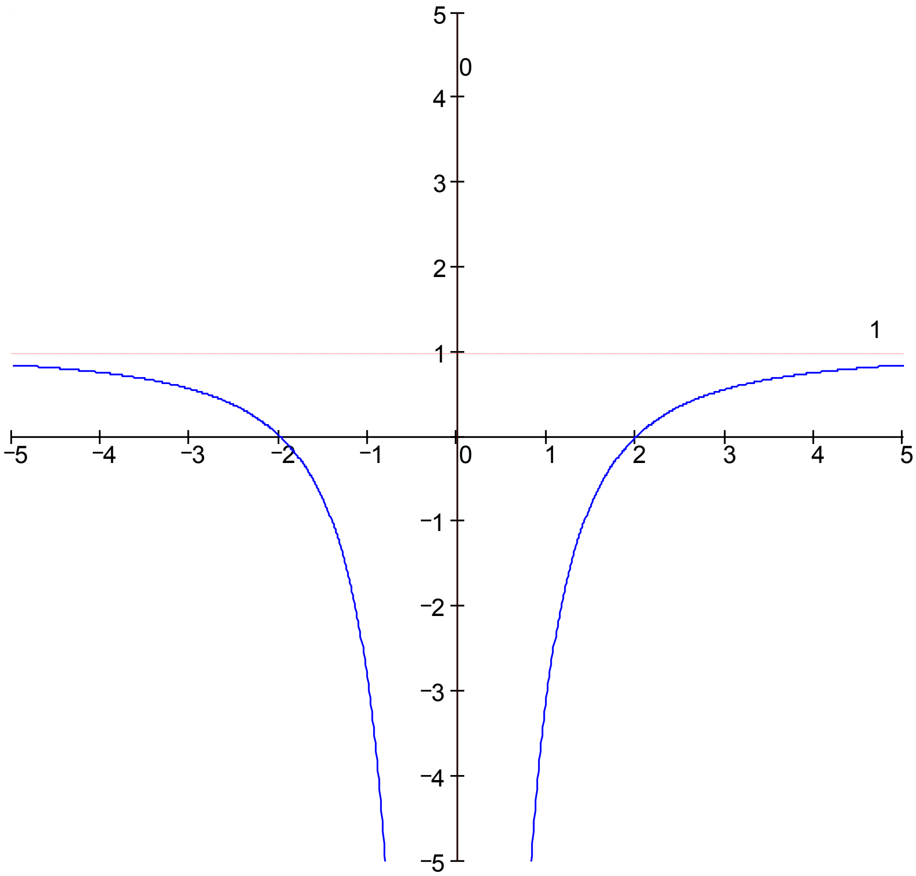
$$y'' = \frac{-24}{x^4}$$

$$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y''		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

La courbe


5
0
4
3
2
1
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4
−5