Plan d’étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt{x^2+1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow D_f = °$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(|x| + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x + x\right) = 0$$

Alors la droite d’équation $Y = -x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(|x| - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - x\right) = 0$$

Alors la droite d’équation $Y = x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

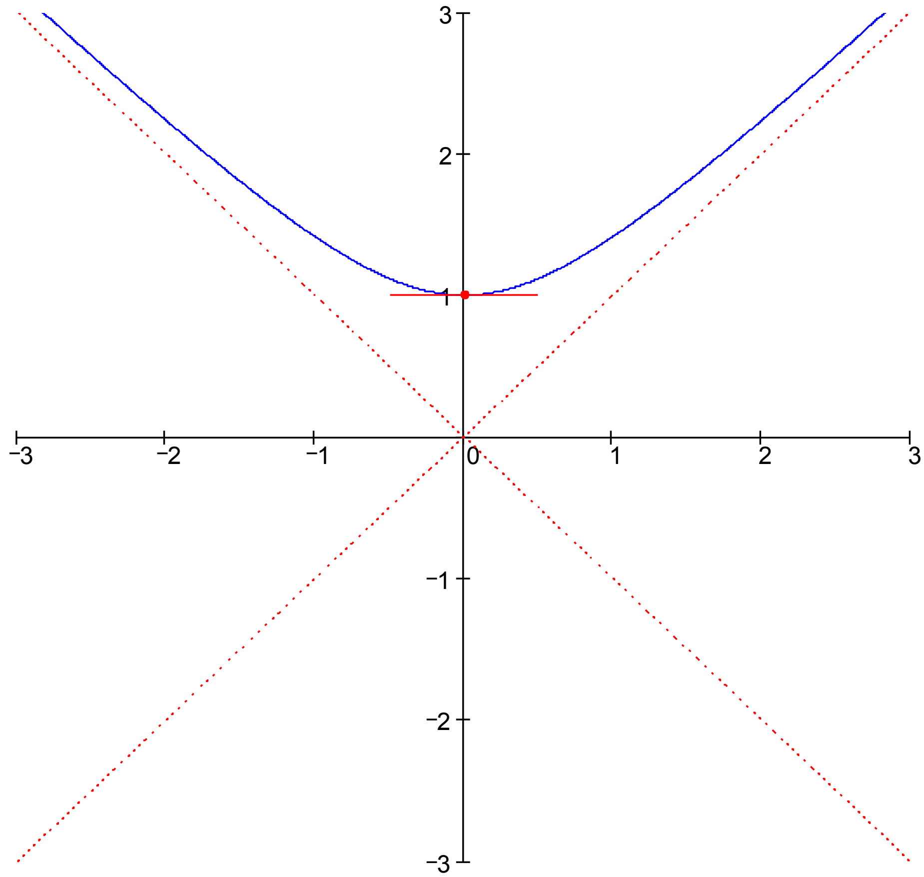
Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y''		$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1 Min	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe


3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3