Équation de Hermite

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Équation de Hermite

On veut résoudre l'équation de Hermite sous la forme particulière suivante :

$$\frac{d^2}{dx^2}H_n(x) - 2x\frac{d}{dx}H_n(x) + 2nH_n(x) = 0$$

Où n est une constante.

La solution peut être exprimée comme une série de Taylor autour de $x = 0$

On cherche une solution de la forme $H_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ dont les dérivées sont :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}H_n(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1} \\ \dfrac{d^2}{dx^2}H_n(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} \end{cases}$$

En substituant dans l'équation initiale, on obtient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1} + 2n\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - 2m\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m + 2n\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} (2m-2n)a_m x^m = 0$$

On pose $m = p+2$ dans le premier terme et $m = p$ dans le deuxième terme :

$$(p+2)(p+1)a_{p+2}x^p - (2p-2n)a_p x^p = 0$$

$$\left[(p+2)(p+1)a_{p+2} - (2p-2n)a_p\right]x^p = 0$$

Le coefficient de x^p doit être égale à zéro.

$$\boxed{a_{p+2} = \frac{2p-2n}{(p+1)(p+2)} a_p}$$

C'est la relation de recouvrance qui détermine les a_p, à condition de connaître a_0 et a_1.

Conventions :

-Pour les n paires

1- On cherche seulement les solutions paires en commençant par $a_0 = a_0$ et $a_1 = 0$:

$$H_n(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n \quad , \; n \text{ paire}$$

2- On choisi a_0 de telle manière que le coefficient de l'ordre le plus élevé de x soit égal à 2^n.

-Pour les n impaires

1- On cherche seulement les solutions impaires en commençant par $a_0 = 0$ et $a_1 = a_1$:

$$H_n(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots + a_n x^n \quad , \; n \text{ impaire}$$

2- On choisi a_1 de telle manière que le coefficient de l'ordre le plus élevé de x soit égal à 2^n.

Exemple 1

Pour $n = 0$ l'équation de Hermite s'écrit comme,

$$\frac{d^2}{dx^2} H_0(x) - 2x \frac{d}{dx} H_0(x) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$H_0(x) = a_0$$

Par convention,

$$a_1 = 2^0 = 1$$

Donc,

$$\boxed{H_0(x) = 1}$$

Exemple 2

Pour $n = 1$ l'équation de Hermite s'écrit comme,

$$\frac{d^2}{dx^2}H_1(x) - 2x\frac{d}{dx}H_1(x) + 2H_1(x) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$H_1(x) = a_1 x$$

Par convention,

$$a_1 = 2^1 = 2$$

Donc,

$$\boxed{H_1(x) = 2x}$$

Exemple 3

Pour $n = 2$ l'équation de Hermite s'écrit comme,

$$\frac{d^2}{dx^2}H_2(x) - 2x\frac{d}{dx}H_2(x) + 4H_2(x) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$H_2(x) = a_0 + a_2 x^2$$

Par convention,

$$a_2 = 2^2 = 4$$

Mais, selon la relation de recouvrance,

$$a_{p+2} = \frac{2p-4}{(p+1)(p+2)} a_p$$

On à :

$$a_2 = -2a_0$$

$$4 = -2a_0 \Rightarrow a_0 = -2$$

$$\boxed{H_2(x) = 4x^2 - 2}$$

Exemple 3

Pour $n = 3$ l'équation de Hermite s'écrit comme,

$$\frac{d^2}{dx^2} H_3(x) - 2x \frac{d}{dx} H_3(x) + 6H_3(x) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$H_3(x) = a_1 x + a_3 x^3$$

Par convention,

$$a_3 = 2^3 = 8$$

Mais, selon la relation de recouvrance,

$$a_{p+2} = \frac{2p-6}{(p+1)(p+2)} a_p$$

On à :

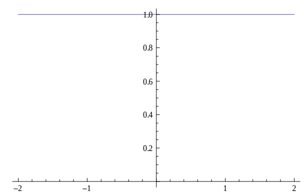
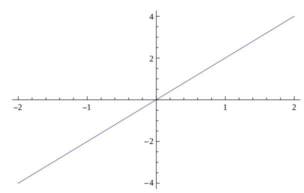
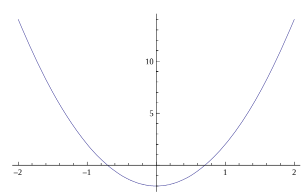
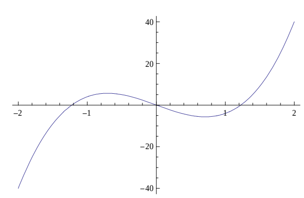
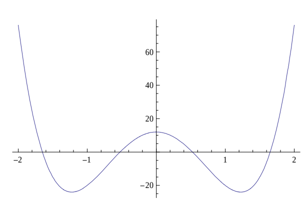
$$a_3 = -\frac{2}{3} a_1$$

$$8 = -\frac{2}{3} a_1 \Rightarrow a_0 = -12$$

$$\boxed{H_3(x) = 8x^3 - 12x}$$

Ainsi :

Les polynômes de Hermite

$H_0(x) = 1$	
$H_1(x) = 2x$	
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$	

Fonction génératrice des polynômes d'Hermite

On peut trouver $H_n(x)$ à l'aide de la fonction génératrice :

$$\boxed{G(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)}$$

Formule de Rodrigues :

Selon la fonction génératrice :

$$G(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$

On peut écrire e^{2xt-t^2} comme $e^{x^2}e^{-(t-x)^2}$:

$$G(x,t)=e^{x^2}e^{-(t-x)^2}=H_0(x)+H_1(x)t+H_2(x)\frac{t^2}{2!}+H_3(x)\frac{t^3}{3!}+\ldots+H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

On dérive :

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)=e^{x^2}\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-x)^2}=H_1(x)+H_2(x)t+H_3(x)\frac{t^2}{2!}+\ldots+H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Mais,

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-x)^2}=-\frac{\partial}{\partial x}e^{-(t-x)^2}$$

Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)=(-1)e^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}e^{-(t-x)^2}=H_1(x)+H_2(x)t+H_3(x)\frac{t^2}{2!}+\ldots+H_n(x)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

La deuxième dérivée :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,t)=(-1)^2e^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}e^{-(t-x)^2}=H_2(x)+H_3(x)t+\ldots+H_n(x)\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

Et la $n$ième dérivée :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x,t) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} e^{-(t-x)^2} = H_n(x)$$

Pour $t = 0$,

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad , \; n = 0,1,2,\ldots}$$

Exemples

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} e^{-x^2} = 1$$

$$H_1(x) = (-1)^1 e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = 2x$$

$$H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = 4x^2 - 2$$

Orthonormalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_m^*(x) H_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$= (-1)^n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}}_{I}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$$\begin{cases} u = H_m(x) & dv = dx\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \\ du = dx\dfrac{d}{dx}H_m(x) & v = \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2} \end{cases}$$

$$I = [uv]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} vdu$$

$$I = \underbrace{\left[H_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\frac{d}{dx}H_m(x)}_{2mH_{m-1}(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}$$

Mais,

$$\frac{d}{dx}H_m(x) = 2mH_{m-1}(x)$$

Donc,

$$I = -2m\int_{-\infty}^{+\infty} dxH_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}$$

Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxH_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = -2m\int_{-\infty}^{+\infty} dxH_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxH_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = -2m\left[-2(m-1)\int_{-\infty}^{+\infty} dxH_{m-2}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-2}}e^{-x^2} \right]$$

Après m fois :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxH_m(x)\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = (-1)^m 2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty} dx\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}e^{-x^2} = (-1)^m 2^m m!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$$

Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = (-1)^n I = (-1)^{m+n} 2^m m! \sqrt{\pi} \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & , \quad m = n \end{cases}$$

Donc,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}}$$

Pour $m = n$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \left[H_n(x) \right]^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}}$$