Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \Rightarrow D_f = \left[1, +\infty\right)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors le point $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un point d'arrêt.

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 1} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 (x - \frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| \sqrt{(x - \frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \sqrt{x - \frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 1}}$$

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$$

$$2\sqrt{x^3 - 1} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

$$m_{x\to 1^+} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} = \frac{3(1+\varepsilon)^2}{2\sqrt{(1+\varepsilon)^3-1}} = \frac{3+6\varepsilon+3\varepsilon^2}{2\sqrt{(1+\varepsilon)^3-1}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{1+3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3-1}} = \frac{3}{2\sqrt{+3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3}} = \frac{3}{2\sqrt{+3\varepsilon}} = +\infty$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{3x(x^3-4)}{4(x^3-1)\sqrt{x^3-1}}$$

$$3x(x^3-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin D_f \\ x = 1.59 \Rightarrow y = 1.74 \Rightarrow \left|\begin{matrix}1.59\\1.74\end{matrix}\right. \end{cases}$$

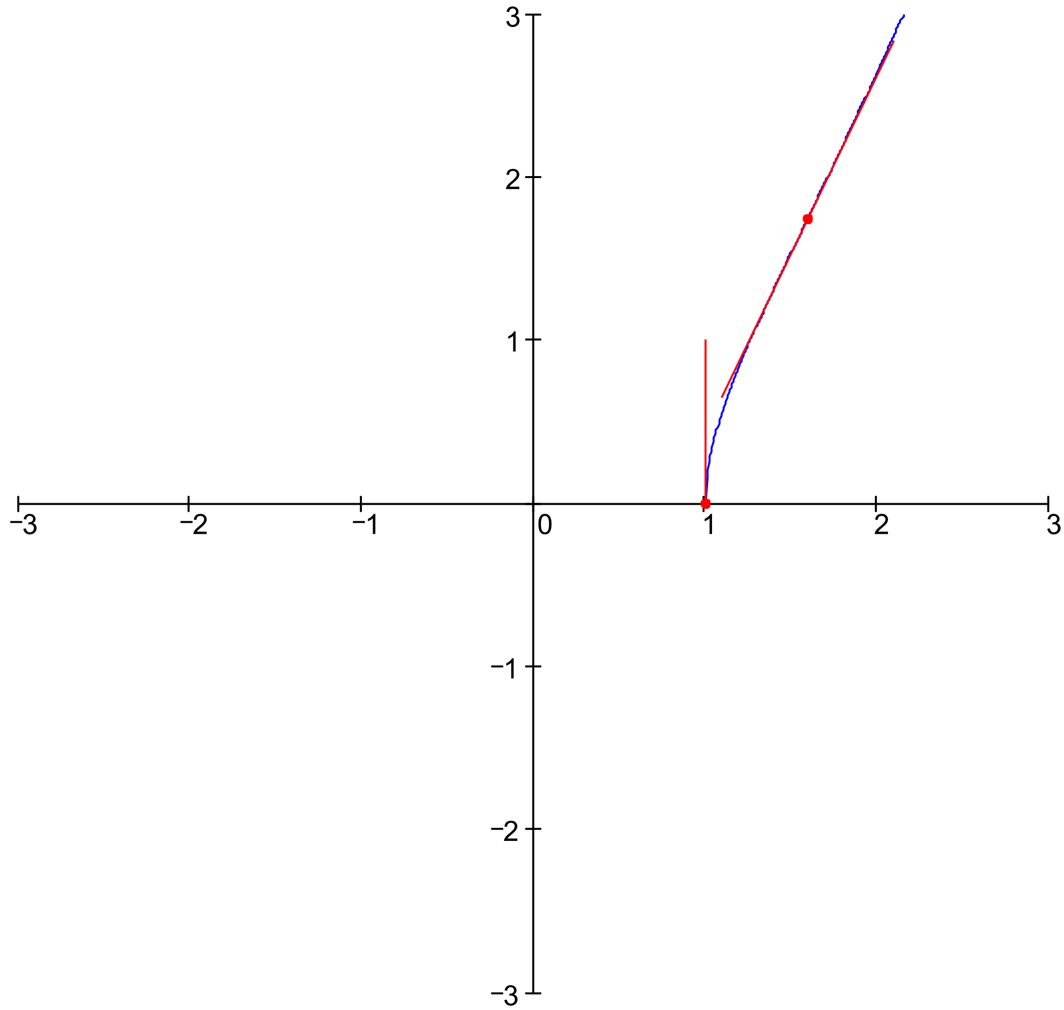
$$4(x^3-1)\sqrt{x^3-1} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$$

$$m_{x=1.59} = f'(1.59) = 2.2$$

Le tableau de variation

x	1		1.59		$+\infty$
y'		$+$	2.2	$+$	
y''		$-$	0	$+$	
y	0	↗	1.74 Inf	↗	$+\infty$

La courbe


3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3