Équation d'Euler-Cauchy

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Équation d'Euler-Cauchy

On veut résoudre l'équation d'Euler-Cauchy sous la forme particulière suivante :

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + 2r \frac{d}{dr} R(r) - l(l+1)R(r) = 0$$

Où l est une constante.

On pose une solution de la forme $R(r) = r^p$ dont les dérivées sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} R(r) = pr^{p-1} \\ \frac{d^2}{dr^2} R(r) = p(p-1)r^{p-2} \end{cases}$$

En substituant dans l'équation initiale, on obtient l'équation auxiliaire :

$$r^2 p(p-1)r^{p-2} + 2rpr^{p-1} - l(l+1)r^p = 0$$

$$p(p-1)r^p + 2pr^p - l(l+1)r^p = 0$$

$$r^p \left[p(p-1) + 2p - l(l+1) \right] = 0$$

$$r^p \left[p^2 + p - l(l+1) \right] = 0$$

$$p^2 + p - l(l+1) = 0$$

En résolvant l'équation auxiliaire :

$$\begin{cases} p_1 = l \\ p_2 = -(l+1) \end{cases}$$

Les solutions correspondantes sont :

$R_1(r) = r^l$

$R_2(r) = r^{-(l+1)} = \frac{1}{r^{l+1}}$

La solution générale est :

$R(r) = A_l R_1(r) + B_l R_2(r)$ donc :

$$\boxed{R(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}}$$

A_l et B_l sont des constantes qu'on les détermine par les conditions frontières par exemple :

Si $R(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ alors :

$B_l = 0 \Rightarrow R(r) = A_l r^l$

Si $R(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$ alors :

$A_l = 0 \Rightarrow R(r) = \frac{B_l}{r^{l+1}}$