Plan d’étude et représentation graphique de $y = f(x) = 2\sqrt{-x^2+1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = 2\sqrt{-x^2+1} \Rightarrow D_f = [-1,1]$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors le point $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un point d’arrêt.

A la borne droite

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors le point $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un point d’arrêt.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{-x^2+1}}$$

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{-x^2+1}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$m_{x\to -1^+} = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{-2x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{-2(-1+\varepsilon)}{\sqrt{-(-1+\varepsilon)^2+1}} = \frac{2-2\varepsilon}{\sqrt{-1+2\varepsilon-\varepsilon^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{+2\varepsilon-\varepsilon^2}} = +\infty$$

$$m_{x\to 1^-} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{-2(1-\varepsilon)}{\sqrt{-(1-\varepsilon)^2+1}} = \frac{-2+2\varepsilon}{\sqrt{-1+2\varepsilon-\varepsilon^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{+2\varepsilon-\varepsilon^2}} = -\infty$$

Convexité de f

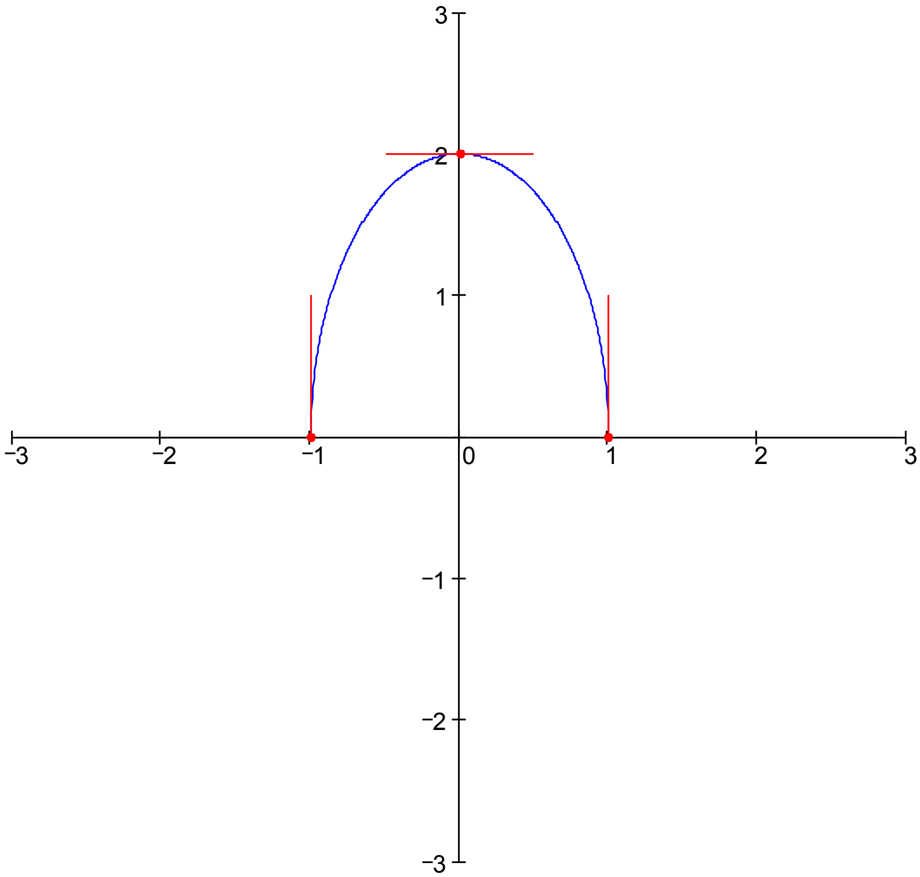
$$y'' = f''(x) = \frac{2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{-x^2+1}}$$

$$\left(x^2-1\right)\sqrt{-x^2+1}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ x=1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Le tableau de variation

x	-1		0		1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$ $\frown$	2 Max	$\searrow$ $\frown$	0

La courbe



3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3