Les fonctions propres de l’opérateur de moment cinétique en coordonnées sphérique

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Les fonctions propres de l'opérateur de moment cinétique en coordonnées sphérique

$$\hat{L}_z \left| l \quad m \right\rangle = \hbar m \left| l \quad m \right\rangle$$

Où l est un nombre entier $0 \leq l \leq n+1$ et $m = \{-l, -l+1, \ldots 0, \ldots, l-1, l\}$ et n est le nombre quantique principale.

Alors :

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi}\psi_{l,m}(\theta,\phi) = \hbar m \psi_{l,m}(\theta,\phi)$$

Soit $\psi'(\theta,\phi)$ une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :

$$\psi'(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

On substitut dans l'équation :

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\Theta(\theta)\Phi(\phi)\right] = \hbar m \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

$$\Theta(\theta)\frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} = im\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

$$\frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} = im\Phi(\phi)$$

$$\frac{d\Phi(\phi)}{\Phi(\phi)} = imd\phi$$

$$\ln\Phi(\phi) = im$$

$$\Phi_m(\phi) = C_m e^{im}$$

On trouve C_m :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \Phi_m^*(\phi)\Phi_{m'}(\phi) = \delta_{mm'}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \left(C_m e^{im\phi}\right)^* C_{m'} e^{im'\phi} = \delta_{mm'}$$

$$C_m C_{m'} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi} e^{im'\phi} = \delta_{mm'}$$

Pour $m = m'$

$$C_m^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

$$C_m^2 2\pi = 1$$

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Donc,

$$\boxed{\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}}$$

La solution particulière devient :

$$\psi'(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

On substitut dans l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \left| l \quad m \right\rangle = \hbar^2 l(l+1) \left| l \quad m \right\rangle$$

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\Theta(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}=\hbar^2 l(l+1)\Theta(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}e^{im\phi}+\cot\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}e^{im\phi}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2e^{im\phi}}{d\phi^2}\Theta(\theta)=-l(l+1)\Theta(\theta)e^{im\phi}$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta)=-l(l+1)\Theta(\theta)$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta)=-l(l+1)\Theta(\theta)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta)+\cos\theta\frac{d}{\sin\theta d\theta}\Theta(\theta)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

Avec un changement de variable $\mu=\cos\theta$ on arrive à :

$$\mu=\cos\theta\ \Rightarrow\ \frac{d\mu}{d\theta}=-\sin\theta\ \Rightarrow\ \frac{d^2\mu}{d\theta^2}=-\cos\theta$$

Alors,

$$\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}=\frac{d\Theta(\theta)}{d\mu}\frac{d\mu}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\mu}$$

Et,

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\mu^2}\frac{d\mu}{d\theta}\frac{d\mu}{d\theta}+\frac{d\Theta(\theta)}{d\mu}\frac{d^2\mu}{d\theta^2}=\sin^2\theta\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\mu^2}-\cos\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\mu}$$

Alors :

$$\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\mu^2}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\mu^2}-\underbrace{\cos\theta}_{\mu}\frac{d\Theta(\theta)}{d\mu}+\underbrace{\cos\theta}_{\mu}\frac{d}{\underbrace{\sin\theta d\theta}_{-d\mu}}\Theta(\theta)-\frac{m^2}{\underbrace{\sin^2\theta}_{1-\mu^2}}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

$$(1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2}\Theta(\theta)-2\mu\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

C'est l'équation de *Legendre associée*. $\Theta(\theta)$ obéit à la même équation que $P_l^m(\mu)$ alors :

$\Theta_{l,m}(\theta)=C_{l,m}P_l^m(\mu)=C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)$, Pour tout les constantes $C_{l,m}$.

On trouve $C_{l,m}$:

La solution particulière est :

$$\Phi'_{l,m}(\theta,\phi)=\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m\left(\phi\right)=C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)\Phi_m\left(\phi\right)$$

$$\int d\Omega\Phi'^*_{l,m}(\theta,\phi)\Phi'_{l,m}(\theta,\phi)=1$$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)\right]^2\int_0^{2\pi}d\phi\Phi^*_m\left(\phi\right)\Phi_m\left(\phi\right)=1$$

$$C^2_{l,m}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left[P_l^m(\cos\theta)\right]^2}_{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\Phi^*_m\left(\phi\right)\Phi_m\left(\phi\right)}_{1}=1$$

Alors,

$$C_{l,m}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Donc,

$$\boxed{\Theta_{l,m}(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)}$$

Alors,

$$\psi'_{l,m}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

$$=\underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}}_{Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

Et :

$$\boxed{\psi'_{l,m}(\theta,\phi)=Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

En résumé :

Équation aux valeurs propres	Les fonctions propres	Les valeurs propres
$\hat{L}_z\left\|l \quad m\right\rangle=\hbar m\left\|l \quad m\right\rangle$	$Y_{l,m}(\theta,\phi)$	$\hbar m$
$\hat{\mathbf{L}}^2\left\|l \quad m\right\rangle=\hbar^2 l(l+1)\left\|l \quad m\right\rangle$	$Y_{l,m}(\theta,\phi)$	$\hbar^2 l(l+1)$