Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 4}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{-x^2}{x^2 - 4} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2,2\} = \underbrace{(-\infty,-2)}_{I_1} \cup \underbrace{(-2,2)}_{I_2} \cup \underbrace{(2,+\infty)}_{I_3}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2}{x^2 - 4} = -1$$

Alors la droite d'équation $Y = -1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f.

A la borne droite

$$\lim_{x \to -2^-} y = \lim_{x \to -2^-} \frac{-x^2}{x^2 - 4} = \frac{-(-2-\varepsilon)^2}{(-2-\varepsilon)^2 - 4} = \frac{-4 - 4\varepsilon - \varepsilon^2}{4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4} = \frac{-4}{+4\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{-4}{+4\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -2^+} y = \lim_{x \to -2^+} \frac{-x^2}{x^2 - 4} = \frac{-(-2+\varepsilon)^2}{(-2+\varepsilon)^2 - 4} = \frac{-4 + 4\varepsilon - \varepsilon^2}{4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 - 4} = \frac{-4}{-4\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{-4}{-4\varepsilon} = \frac{4}{+4\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

A la borne droite

$$\lim_{x\to 2^-} y = \lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2}{x^2-4} = \frac{-(2-\varepsilon)^2}{(2-\varepsilon)^2-4} = \frac{-4+4\varepsilon-\varepsilon^2}{4-4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{-4}{-4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{-4}{-4\varepsilon} = \frac{4}{+4\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_3

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 2^+} y = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2}{x^2-4} = \frac{-(2+\varepsilon)^2}{(2+\varepsilon)^2-4} = \frac{-2-4\varepsilon-\varepsilon^2}{4+4\varepsilon+\varepsilon^2-4} = \frac{-2}{+4\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{-2}{+4\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 2$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{x^2-4} = -1$$

Alors la droite d'équation $Y = -1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{8x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$(x^2-4)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin D_f \\ x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-8\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

$$(x^2-4)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \notin D_f \\ x = 2 \notin D_f \end{cases}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y''		$-$	‖	$+$	|	$+$	‖	$-$	
y	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 Min	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

La courbe