# Plan d’étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

## Le domaine de définition de $f$

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = {}^\circ = \left(-\infty, +\infty\right)$$

## Etudier la fonction au bornes de $D_f$

### A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Alors la courbe de $f$ tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche $a$ et $b$ :

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

Alors la courbe de $f$ a une branche parabolique au long de l’axe $Ox$ .

### A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$$

Alors la courbe de $f$ tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche $a$ et $b$ :

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$$

Alors la courbe de $f$ a une branche parabolique au long de l’axe $Ox$ .

## Le sens de variation de $f$

$$y' = f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$m_{x \to 0^-} = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = +\infty$$

$$m_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = +\infty$$

## Convexité de $f$

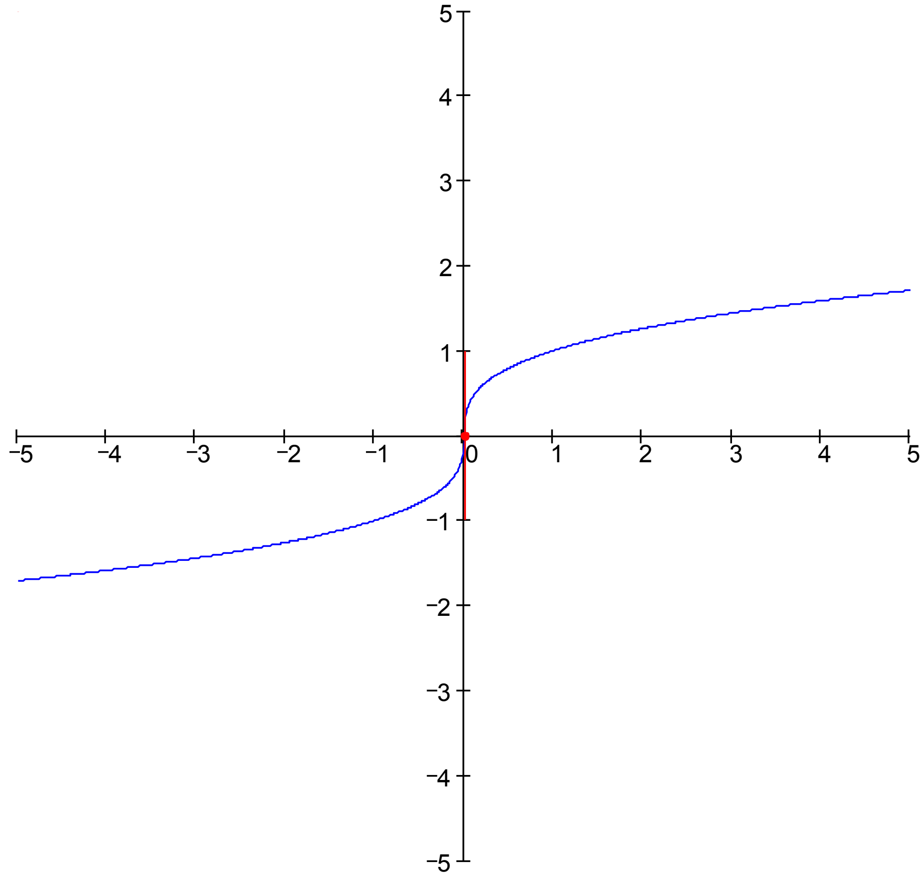
$$y'' = f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$9x\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

## Le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y''$ | | $+$ | | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ Inf | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## La courbe


5
4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4
−5