Équation de Legendre

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Équation de Legendre

On veut résoudre l'équation de Legendre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right]+l(l+1)P_l(\mu)=0$$

Où l est une constante.

En dérivant, on obtient :

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}P_l(\mu)-2\mu\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)+l(l+1)P_l(\mu)=0$$

On cherche une solution de la forme $P_l(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mu^n$ dont les dérivées sont :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{d\mu}P_l(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n\mu^{n-1}\\ \dfrac{d^2}{d\mu^2}P_l(\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n\mu^{n-2}\end{cases}$$

En substituant dans l'équation initiale, on obtient :

$$\left(1-\mu^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n\mu^{n-2}-2\mu\sum_{n=0}^{\infty}na_n\mu^{n-1}+l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mu^n=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n\mu^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n\mu^n-2\sum_{n=0}^{\infty}na_n\mu^n+l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mu^n=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)a_n\mu^{n-2}-n(n-1)a_n\mu^n-2na_n\mu^n+l(l+1)a_n\mu^n\right]=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)a_n\mu^{n-2}-\left[n(n+1)-l(l+1)\right]a_n\mu^n\right]=0$$

$$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n\mu^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n+1)-l(l+1)\right]a_n\mu^n=0$$

On pose $n=p+2$ dans le premier terme et $n=p$ dans le deuxième terme :

$$(p+2)(p+1)a_{p+2}\mu^p-\left[p(p+1)-l(l+1)\right]a_p\mu^p=0$$

$$\left[(p+2)(p+1)a_{p+2} - \left[p(p+1) - l(l+1) \right] a_p \right] \mu^p = 0$$

Le coefficient de μ^p doit être égale à zéro.

$$a_{p+2} = \frac{p(p+1) - l(l+1)}{(p+2)(p+1)} a_p$$

C'est la relation de recouvrance qui détermine les a_p à condition de connaître a_0 et a_1.

Conventions :

-Pour les l paires

1- On cherche seulement les solutions paires en commençant par $a_0 = a_0$ et $a_1 = 0$:

$$P_l(\mu) = a_0 + a_2\mu^2 + a_4\mu^4 + \ldots + a_l\mu^l \quad , \ l \text{ paire}$$

2- On choisi a_0 de telle manière que :

$$P_l(1) \equiv 1$$

- Pour les l impaires

1- On cherche seulement les solutions impaires en commençant par $a_0 = 0$ et $a_1 = a_1$:

$$P_l(\mu) = a_1\mu + a_3\mu^3 + a_5\mu^5 + \ldots + a_l\mu^l \quad , \ l \text{ impaire}$$

2- On choisi a_1 de telle manière que :

$$P_l(1) \equiv 1$$

Exemple 1

Pour $l = 0$ l'équation de Legendre s'écrit comme,

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}P_0(\mu) - 2\mu\frac{d}{d\mu}P_0(\mu) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$P_0(\mu) = a_0$$

Par convention,

$$\mu = 1 \;\Rightarrow\; \underbrace{P_0(1)}_{1} = a_0 \;\Rightarrow\; a_0 = 1$$

$$\boxed{P_0(\mu) = 1}$$

Exemple 2

Pour $l = 1$ l'équation de Legendre s'écrit comme,

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}P_1(\mu) - 2\mu\frac{d}{d\mu}P_1(\mu) + 2P_1(\mu) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$P_1(\mu) = a_1\mu$$

Par convention,

$$\mu = 1 \;\Rightarrow\; \underbrace{P_1(1)}_{1} = a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = 1$$

$$\boxed{P_1(\mu) = \mu}$$

Exemple 3

Pour $l = 2$ l'équation de Legendre s'écrit comme,

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}P_2(\mu) - 2\mu\frac{d}{d\mu}P_2(\mu) + 6P_2(\mu) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$P_2(\mu) = a_0 + a_2\mu^2$$

Par convention,

$$\mu = 1 \Rightarrow \underbrace{P_2(1)}_{1} = a_0 + a_2 \Rightarrow a_0 + a_2 = 1$$

Mais, selon la relation de recouvrance,

$$a_{p+2} = \frac{p(p+1) - 6}{(p+2)(p+1)} a_p$$

On à :

$$a_2 = -3a_0$$

Donc,

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = 1 \\ a_2 = -3a_0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2} \ \ et \ \ a_2 = \frac{3}{2}$$

Alors,

$$\boxed{P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)}$$

Exemple 4

Pour $l = 3$ l'équation de Legendre s'écrit comme,

$$\left(1 - \mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2} P_3(\mu) - 2\mu \frac{d}{d\mu} P_3(\mu) + 12 P_3(\mu) = 0$$

La solution de cette équation est :

$$P_3(\mu) = a_1\mu + a_3\mu^3$$

Par convention,

$$\mu = 1 \;\Rightarrow\; \underbrace{P_3(1)}_{1} = a_1 + a_3 \;\Rightarrow\; a_1 + a_3 = 1$$

Mais selon la relation de recouvrance,

$$a_{p+2} = \frac{p(p+1)-12}{(p+2)(p+1)} a_p$$

On à :

$$a_3 = -\frac{5}{3} a_1$$

Donc,

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ a_3 = -\dfrac{5}{3} a_1 \end{cases} \;\Rightarrow\; a_1 = -\frac{3}{2} \;\; et \;\; a_2 = \frac{5}{2}$$

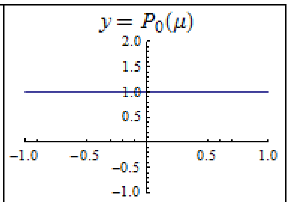
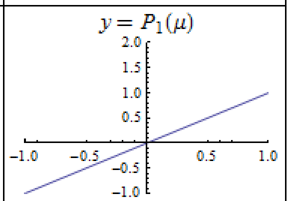
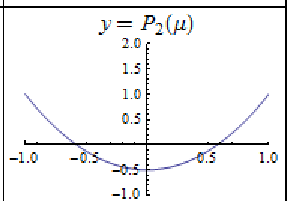
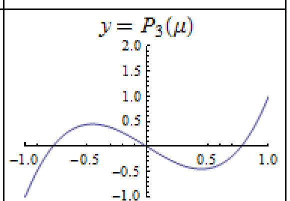
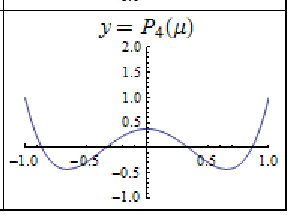
Alors,

$$\boxed{P_3(\mu) = \frac{1}{2}\mu(5\mu^2 - 3)}$$

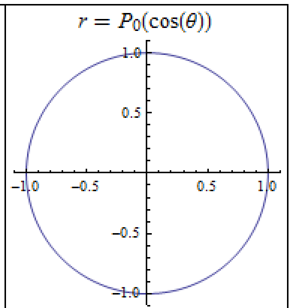
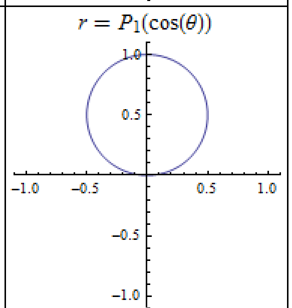
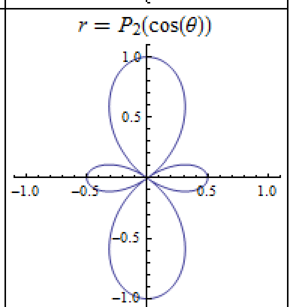
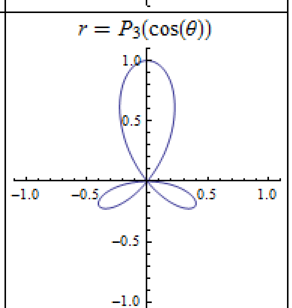
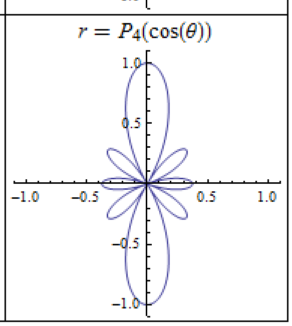
Ainsi,

Les polynômes de Legendre

-En coordonnées cartésiennes

$P_0(\mu)$	1	
$P_1(\mu)$	μ	
$P_2(\mu)$	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$	
$P_3(\mu)$	$\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$	
$P_4(\mu)$	$\frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$	

-En coordonnées polaires

$P_0(\cos(\theta))$	1	
$P_1(\cos(\theta))$	$\cos(\theta)$	
$P_2(\cos(\theta))$	$\frac{1}{2}(3\cos^2(\theta) - 1)$	
$P_3(\cos(\theta))$	$\frac{1}{2}(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$	
$P_4(\cos(\theta))$	$\frac{1}{8}(35\cos^4(\theta) - 30\cos^2(\theta) + 3)$	

Fonction génératrice des polynômes de Legendre

On peut trouver $P_l(\mu)$ à l'aide de la fonction génératrice :

$$\boxed{G(\mu,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}t^l P_l(\mu)}$$

Formule de Rodrigues :

$$\boxed{P_l(\mu)=\frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l \quad , \; l=0,1,2,\ldots}$$

Exemples

$$P_0(\mu)=\frac{1}{2^0 0!}(\mu^2-1)^0=1$$

$$P_1(\mu)=\frac{1}{2}\frac{d}{d\mu}(\mu^2-1)=\mu$$

$$P_2(\mu)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{d\mu^2}(\mu^2-1)^2=\frac{1}{2}(3\mu^2-1)$$

Relation d'orthonormalité

1-Relation d'orthogonalité

On à :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right]+l(l+1)P_l(\mu)=0$$

On multiplie par $P_{l'}(\mu)$:

$$P_{l'}(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right]+l(l+1)P_l(\mu)P_{l'}(\mu)=0 \qquad \text{(i)}$$

Et on à :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)\right]+l'(l'+1)P_{l'}(\mu)=0$$

On multiplie par $P_l(\mu)$:

$$P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)\right]+l'(l'+1)P_l(\mu)P_{l'}(\mu)=0 \qquad \text{(ii)}$$

(i)-(ii) :

$$P_{l'}(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right]-P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)\right]+\left[l(l+1)-l'(l'+1)\right]P_l(\mu)P_{l'}(\mu)=0$$

On intègre :

$$\underbrace{\int_{-1}^{+1}d\mu P_{l'}(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right]}_{I_1}-\underbrace{\int_{-1}^{+1}d\mu P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)\right]}_{I_2}+\left[l(l+1)-l'(l'+1)\right]\int_{-1}^{+1}d\mu P_l(\mu)P_{l'}(\mu)=0$$

On calcul le première intégral :

$$I_1=\int_{-1}^{+1}d\mu P_{l'}(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right]$$

$$\begin{cases} u=P_{l'}(\mu) & dv=d\mu\dfrac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\dfrac{d}{d\mu}P_l(\mu)\right] \\ du=d\mu\dfrac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu) & v=\left(1-\mu^2\right)\dfrac{d}{d\mu}P_l(\mu) \end{cases}$$

$$I_1=\left[uv\right]_{-1}^{+1}-\int_{-1}^{+1}vdu$$

$$I_1 = \underbrace{\left[P_{l'}(\mu)\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu) \right]_{-1}^{+1}}_{0} - \int_{-1}^{+1} d\mu \left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)$$

$$I_1 = -\int_{-1}^{+1} d\mu \left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)$$

Avec les mêmes calcules :

$$I_2 = -\int_{-1}^{+1} d\mu \left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)\frac{d}{d\mu}P_{l'}(\mu)$$

Alors,

$$I_1 - I_2 = 0$$

Donc,

$$0 + \left[l(l+1) - l'(l'+1) \right] \int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = 0$$

Donc,

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = 0 \;\; \text{pour} \;\; l \neq l'}$$

2-Relation de normalité

On à :

$$G(\mu,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\mu)$$

On multiplie par :

$$G(\mu,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\mu+t^2}} = \sum_{l'=0}^{\infty} t^{l'} P_{l'}(\mu)$$

Donc,

$$\left[G(\mu,t)\right]^2 = \frac{1}{1-2t\mu+t^2} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l'=0}^{\infty} t^l t^{l'} P_l(\mu) P_{l'}(\mu)$$

On intègre :

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \left[G(\mu,t)\right]^2 = \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{1}{1-2t\mu+t^2} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{l'=0}^{\infty} t^{l+l'} \int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu)$$

Pour $l = l'$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{1}{1-2t\mu+t^2}$$

Avec un changement de variable :

$$v = 1-2t\mu+t^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{dv}{d\mu} = -2t \\ \mu = -1 \;\Rightarrow\; v = (1+t)^2 \\ \mu = +1 \;\Rightarrow\; v = (1-t)^2 \end{cases}$$

On arrive à :

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = -\frac{1}{2t} \int_{(1+t)^2}^{(1-t)^2} \frac{dv}{v}$$

Alors,

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = -\frac{1}{2t}\left[\ln v\right]_{(1+t)^2}^{(1-t)^2} = -\frac{1}{2t}\ln\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2} = \frac{1}{t}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

Mais,

$\ln\dfrac{1+t}{1-t} = 2t + \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{2}{5}t^5 + \ldots + \dfrac{2}{2l+1}t^{2l+1} + \ldots$ donc,

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = \frac{1}{t}\left(2t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 + \ldots + \frac{2}{2l+1}t^{2l+1} + \ldots\right)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = 2 + \frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{5}t^4 + \ldots + \frac{2}{2l+1}t^{2l} + \ldots$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \frac{2}{2l+1}$$

Alors,

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l(\mu)\right]^2 = \frac{2}{2l+1}}$$

En résumé :

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}}$$

Et en coordonnées polaires :

Avec $\mu = \cos\theta$ on arrive à :

$$\boxed{\int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}}$$