

Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \frac{x^4 + 1}{x}$

www.cafeplanck.com

info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^4 + 1}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underset{I_1}{(-\infty, 0)} \cup \underset{I_2}{(0, +\infty)}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy .

A la borne droite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x} = \frac{(0 - \varepsilon)^4 + 1}{0 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 + 1}{-\varepsilon} = \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x} = \frac{(0 + \varepsilon)^4 + 1}{0 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 + 1}{+\varepsilon} = \frac{1}{+\varepsilon} = +\infty$$

1

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x^4 - 1}{x^2}$$

$$3x^4 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0.76 \Rightarrow y = 1.76 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0.76 \\ 1.76 \end{vmatrix} \\ x = -0.76 \Rightarrow y = -1.76 \Rightarrow \begin{vmatrix} -0.76 \\ -1.76 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{2(3x^4 + 1)}{x^3}$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$	-0.76	0	0.76	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty$	\nearrow	-1.76	\searrow	$-\infty$	$+\infty$
		\frown	Max	\frown	Min	\nearrow

La courbe

