Équation de Legendre associée

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Équation de Legendre associée

On veut résoudre l'équation de Legendre associée sous la forme suivante :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}P_l^m(\mu)+l(l+1)P_l^m(\mu)=0$$

Où m et l sont des constantes.

En dérivant, on obtient :

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}P_l^m(\mu)-2\mu\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_l^m(\mu)=0$$

Pour $m=0$,

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2}{d\mu^2}P_l(\mu)-2\mu\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)+l(l+1)P_l(\mu)=0$$

C’est l'équation de Legendre.

Dérivons m fois :

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^3}{d\mu^3}P_l(\mu)-2\times 2\mu\frac{d^2}{d\mu^2}P_l(\mu)-2\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)+l(l+1)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)=0$$

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^3}{d\mu^3}P_l(\mu)-2\times 2\mu\frac{d^2}{d\mu^2}P_l(\mu)-2\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)+l(l+1)\frac{d}{d\mu}P_l(\mu)=0$$

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^4}{d\mu^4}P_l(\mu)-2\times 3\mu\frac{d^3}{d\mu^3}P_l(\mu)+\left[l(l+1)-2\times 3\right]\frac{d^2}{d\mu^2}P_l(\mu)=0$$

…

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^{m+2}}{d\mu^{m+2}}P_l(\mu)-2(m+1)\mu\frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}}P_l(\mu)+\left[l(l+1)-m(m+1)\right]\frac{d^m}{d\mu^m}P_l(\mu)=0$$

Posons,

$$y_m(\mu) = \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) \text{ donc,}$$

$$\left(1-\mu^2\right) y_m''(\mu) - 2(m+1)\mu y_m'(\mu) + \left[l(l+1) - m(m+1)\right] y_m(\mu) = 0$$

Avec,

$$y_m(\mu) = \left(1-\mu^2\right)^{-\frac{m}{2}} z(\mu)$$

On arrive à :

$$\left(1-\mu^2\right) z_m''(\mu) - 2\mu z_m'(\mu) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right] z_m(\mu) = 0$$

C’est l'équation de Legendre associée. $z_m(\mu)$ obéit à la même équation que $P_l^m(\mu)$ alors :

$Cz_m(\mu) = P_l^m(\mu)$, Pour tout les constantes C .

Par convention on pose $C = (-1)^m$:

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m z(\mu) = (-1)^m \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} y_m(\mu) \text{ Alors,}$$

$$\boxed{P_l^m(\mu) = (-1)^m \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu)}$$

C’est le polynôme de Legendre associé.

Mais,

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \quad , \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Donc,

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu)$$

$$= (-1)^m \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} \left[\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \right]$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} \left[\frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \right]$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} \left[\frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \right]$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}} (\mu^2 - 1)^l$$

Par la formule de Leibnitz :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[u(x)v(x)\right] = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\left(n-r\right)!} \frac{d^r}{dx^r} u(x) \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} v(x)$$

On arrive à :

$$\boxed{P_l^m(\mu) = (-1)^l \frac{\left(l+m\right)!}{\left(l-m\right)!} \frac{\left(1-\mu^2\right)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} (1-\mu^2)^l \quad , \quad l = 0,1,2,\ldots \quad , \quad m = 0,1,2,\ldots,l}$$

Pour les exposants positifs.

Et comme, $P_l^{-m}(\mu)$ obéit à la même équation que $P_l^m(\mu)$ alors :

$$P_l^{-m}(\mu) = CP_l^m(\mu)$$

On trouve C :

On peut montrer que :

$$\boxed{P_l^{-m}(\mu) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)}$$

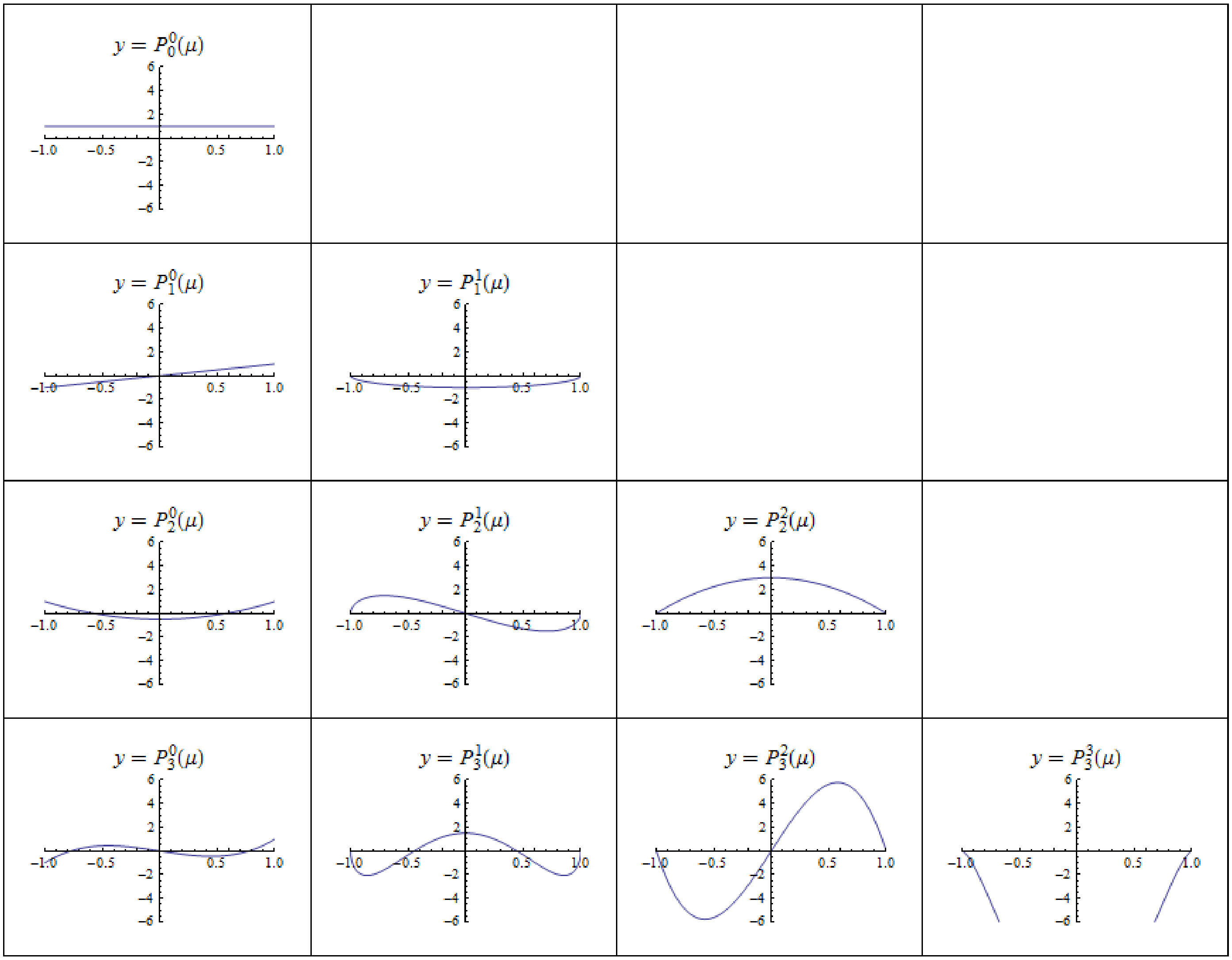
Alors :

Pour les exposants négatifs.

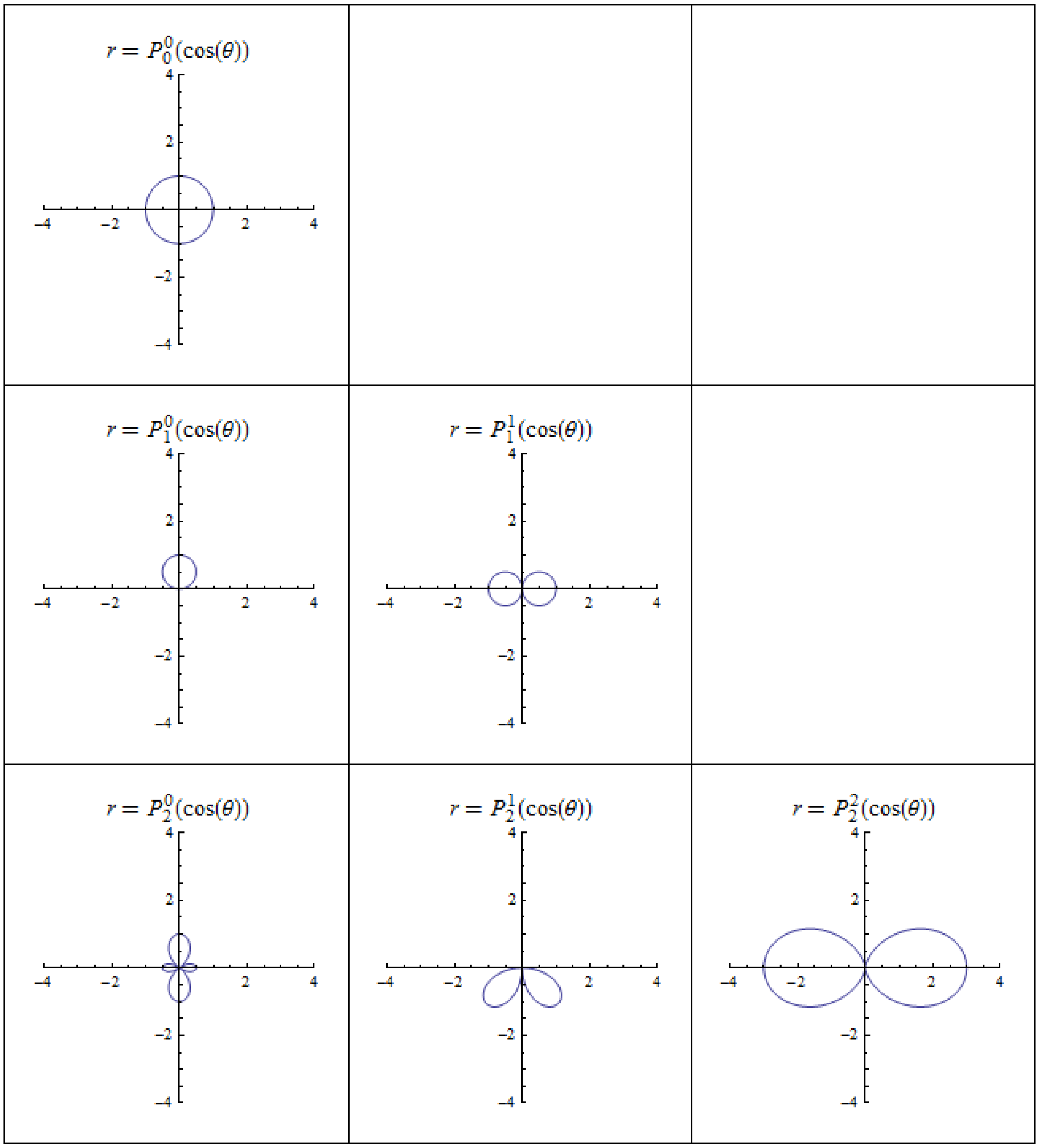
$$\boxed{P_l^{-m}(\mu) = (-1)^{l+m} \frac{\left(1-\mu^2\right)^{-\frac{m}{2}}}{2^l\, l!} \frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} (1-\mu^2)^l \quad , \; l = 0,1,2,\dots \quad , \; m = 0,1,2,\dots,l}$$

Les polynômes de Legendre associée

-En coordonnées cartésiennes



-En coordonnées polaires



Orthonormalité

1-Relation d'orthogonalité

On à :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}P_l^m(\mu)+l(l+1)P_l^m(\mu)=0$$

On multiplie par $P_{l'}^m(\mu)$:

$$P_{l'}^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)+l(l+1)P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)=0 \qquad \text{(i)}$$

Et :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^m(\mu)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}P_{l'}^m(\mu)+l'(l'+1)P_{l'}^m(\mu)=0$$

On multiplie par $P_l^m(\mu)$:

$$P_l^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^m(\mu)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)+l'(l'+1)P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)=0 \qquad \text{(ii)}$$

(i)-(ii) :

$$P_{l'}^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]-P_l^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^m(\mu)\right]-\left[l(l+1)-l'(l'+1)\right]P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)=0$$

On intègre :

$$\underbrace{\int_{-1}^{+1}P_{l'}^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]}_{I_1}-\underbrace{\int_{-1}^{+1}P_l^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^m(\mu)\right]}_{I_2}-\left[l(l+1)-l'(l'+1)\right]\int_{-1}^{+1}P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)=0$$

On calcul le première intégral :

$$I_1=\int_{-1}^{+1}d\mu P_{l'}^m(\mu)\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]$$

$$\begin{cases} u = P_{l'}^{m}(\mu) & dv = d\mu \dfrac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\dfrac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right] \\ du = d\mu \dfrac{d}{d\mu}P_{l'}^{m}(\mu) & v = \left(1-\mu^2\right)\dfrac{d}{d\mu}P_l^m(\mu) \end{cases}$$

$$I_1 = \left[uv\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} v du$$

$$I_1 = \underbrace{\left[P_{l'}^{m}(\mu)\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\right]_{-1}^{+1}}_{0} - \int_{-1}^{+1} d\mu\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^{m}(\mu)$$

$$I_1 = -\int_{-1}^{+1} d\mu\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^{m}(\mu)$$

Avec les mêmes calcules :

$$I_2 = -\int_{-1}^{+1} d\mu\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_l^m(\mu)\frac{d}{d\mu}P_{l'}^{m}(\mu)$$

Alors,

$$I_1 - I_2 = 0$$

Donc,

$$0 + \left[l(l+1) - l'(l'+1)\right]\int_{-1}^{+1} d\mu P_l^m(\mu) P_{l'}^{m}(\mu) = 0$$

Donc,

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} d\mu P_l^m(\mu) P_{l'}^{m}(\mu) = 0 \ \text{ pour } \ l \neq l'}$$

2-Relation de normalité

On à :

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m \left(1-\mu^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu)$$

On multiplie par elle même :

$$\left[P_l^m(\mu)\right]^2 = \left(1-\mu^2\right)^m \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu)$$

On intègre :

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l^m(\mu)\right]^2 = \underbrace{\int_{-1}^{+1} d\mu \left(1-\mu^2\right)^m \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu)}_{I_{l,m}}$$

$$\begin{cases} u = \left(1-\mu^2\right)^m \dfrac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) & dv = d\mu \dfrac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) \\ du = \left[-2\mu m \left(1-\mu^2\right)^{m-1} \dfrac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) + \left(1-\mu^2\right)^m \dfrac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}} P_l(\mu)\right] d\mu & v = \dfrac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} P_l(\mu) \end{cases}$$

$$I_{l,m} = \left[uv\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} v du$$

$$I_{l,m} = \underbrace{\left[\left(1-\mu^2\right)^m \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} P_l(\mu)\right]_{-1}^{+1}}_{0} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} P_l(\mu) \left[-2\mu m \left(1-\mu^2\right)^{m-1} \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) + \left(1-\mu^2\right)^m \frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}} P_l(\mu)\right] d\mu$$

$$I_{l,m} = -\int_{-1}^{+1} \left[\left(1-\mu^2\right)^m \frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}} P_l(\mu) - 2\mu m \left(1-\mu^2\right)^{m-1} \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu)\right] \frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}} P_l(\mu) d\mu$$

Mais, nous avons vu qu'en dérivent m fois l'équation de Legendre associée :

$$\left(1-\mu^2\right) \frac{d^{m+2}}{d\mu^{m+2}} P_l(\mu) - 2(m+1)\mu \frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}} P_l(\mu) + \left[l(l+1) - m(m+1)\right] \frac{d^m}{d\mu^m} P_l(\mu) = 0$$

Avec $m \to m-1$ on arrive à :

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}}P_l(\mu)-2\mu m\frac{d^m}{d\mu^m}P_l(\mu)=-\left[l(l+1)-m(m-1)\right]\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}P_l(\mu)$$

On multiplie par $\left(1-\mu^2\right)^{m-1}$:

$$\left(1-\mu^2\right)^m\frac{d^{m+1}}{d\mu^{m+1}}P_l(\mu)-2\mu m\left(1-\mu^2\right)^{m-1}\frac{d^m}{d\mu^m}P_l(\mu)=-\left[l(l+1)-m(m-1)\right]\left(1-\mu^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}P_l(\mu)$$

Alors,

$$I_{l,m}=-\int_{-1}^{+1}\left[-\left[l(l+1)-m(m-1)\right]\left(1-\mu^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}P_l(\mu)\right]\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}P_l(\mu)d\mu$$

$$I_{l,m}=\left[l(l+1)-m(m-1)\right]\underbrace{\int_{-1}^{+1}\left(1-\mu^2\right)^{m-1}\left[\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}P_l(\mu)\right]^2d\mu}_{I_{l,m-1}}$$

$$I_{l,m}=(l+m)(l-m+1)I_{l,m-1}$$

En continuent :

$$\begin{aligned}I_{l,m}&=(l+m)(l-m+1)I_{l,m-1}=(l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2)I_{l,m-2}\\&=(l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2)(l+m-2)(l-m+3)I_{l,m-3}\\&=(l+m)(l+m-1)(l+m-2)...(l-m+3)(l-m+2)(l-m+1)I_{l,0}\\&=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}I_{l,0}\end{aligned}$$

On trouve $I_{l,0}$:

$$I_{l,m}=\int_{-1}^{+1}d\mu\left(1-\mu^2\right)^m\frac{d^m}{d\mu^m}P_l(\mu)\frac{d^m}{d\mu^m}P_l(\mu)$$

$m=0$ donc,

$$I_{l,0}=\int_{-1}^{+1}d\mu P_l(\mu)P_l(\mu)=\frac{2}{2l+1}$$

Alors,

$$I_{l,m} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}$$

Et enfin :

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} d\mu \left[P_l^m(\mu)\right]^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}$$

En résumé :

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} d\mu P_l^m(\mu) P_{l'}^m(\mu) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}}$$

Et en coordonnées polaires :

Avec $\mu = \cos\theta$ on arrive à :

$$\boxed{\int_{0}^{\pi} \sin\theta d\theta P_l^m(\cos\theta) P_{l'}^m(\cos\theta) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}}$$