Plan d’étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \sqrt{x^3 - 9x} \Rightarrow D_f = \underbrace{[-3,0]}_{I_1} \cup \underbrace{[3,+\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$x = -3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -3 \\ 0 \end{array} \right.$$

Alors le point $\left| \begin{array}{l} -3 \\ 0 \end{array} \right.$ est un point d’arrêt.

A la borne droite

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Alors le point $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ est un point d’arrêt.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3 \\ 0 \end{array} \right.$$

Alors le point $\left| \begin{array}{l} 3 \\ 0 \end{array} \right.$ est un point d’arrêt.

A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - 9x} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 9x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(x - \frac{9}{x})}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{x - \frac{9}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x - \frac{9}{x}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x - \frac{9}{x}} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x^2 - 9}{2\sqrt{x^3 - 9x}}$$

$$3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1.73 \Rightarrow y = 3.22 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1.73 \\ 3.22 \end{vmatrix} \\ x = 1.73 \notin D_f \end{cases}$$

$$2\sqrt{x^3 - 9x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$m_{x\to-3^+} = \lim_{x\to-3^+} f'(x) = \lim_{x\to-3^+} \frac{3x^2 - 9}{2\sqrt{x^3 - 9x}} = \frac{3(-3+\varepsilon)^2 - 9}{2\sqrt{(-3+\varepsilon)^3 - 9(-3+\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{18 - 18\varepsilon + 3\varepsilon^2}{2\sqrt{18\varepsilon - 9\varepsilon^2 + \varepsilon^3}} = \frac{18}{2\sqrt{18\varepsilon}} = \frac{3}{\sqrt{2\varepsilon}} = +\infty$$

$$m_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2-9}{2\sqrt{x^3-9x}} = \frac{3(0-\varepsilon)^2-9}{2\sqrt{(0-\varepsilon)^3-9(0-\varepsilon)}} == \frac{-9+3\varepsilon^2}{2\sqrt{9\varepsilon-\varepsilon^3}} = \frac{-9}{2\sqrt{9\varepsilon}} = \frac{-3}{2\sqrt{\varepsilon}} = -\infty$$

$$m_{x\to 3^+} = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2-9}{2\sqrt{x^3-9x}} = \frac{3(3+\varepsilon)^2-9}{2\sqrt{(3+\varepsilon)^3-9(3+\varepsilon)}} =$$

$$= \frac{18+18\varepsilon+3\varepsilon^2}{2\sqrt{18\varepsilon+9\varepsilon^2+\varepsilon^3}} = \frac{18}{2\sqrt{18\varepsilon}} = \frac{3}{\sqrt{2\varepsilon}} = +\infty$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{3(x^4-18x^2-27)}{4\left(x^3-9x\right)\sqrt{x^3-9x}}$$

$$3(x^4-18x^2-27)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4.4 \notin D_f \\ x=4.4 \Rightarrow y=6.77 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 4.4 \\ 6.77 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$4\left(x^3-9x\right)\sqrt{x^3-9x}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -3 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ x=3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$m_{x=4.4} = f'(4.4) = 3.64$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$	-3		-1.73		0		3		4.4		$+\infty$
y'			$+$	0	$-$				$+$	3.64	$+$	
y''			$-$		$-$				$-$	0	$+$	
y		0	$\nearrow$ $\frown$	3.22 Max	$\searrow$ $\frown$	0		0	$\nearrow$ $\frown$	6.77	$\nearrow$ $\smile$	$+\infty$

La courbe