Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underbrace{(-\infty, 0)}_{I_1} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (y - ax) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2}{x} \right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to0^-} y = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{(0-\varepsilon)^2+1}{0-\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2+1}{-\varepsilon} = \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{(0+\varepsilon)^2+1}{0+\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2+1}{+\varepsilon} = \frac{1}{+\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} (y - ax) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2}{x} \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \right. \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2 Max	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2 Min	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe