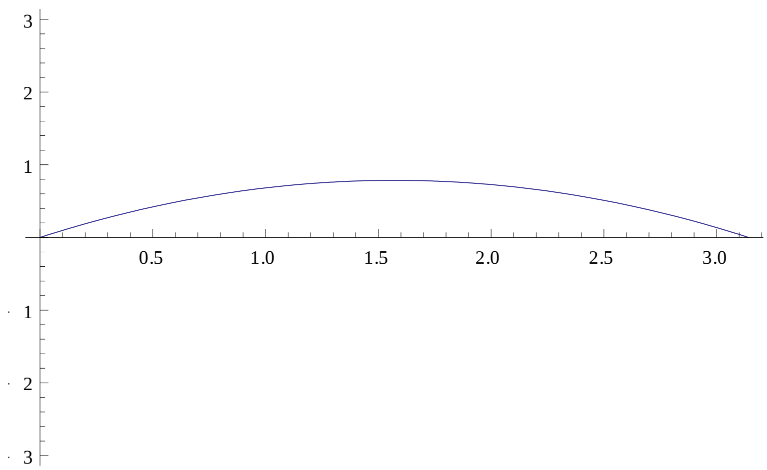
Équation d'onde classique $\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\mathbf{r},t)=0$

(Solution sous forme d'ondes stationnaire)

Hossein Rahimzadeh
www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Initiation

Corde tendue de longueur $L(\mathrm{m})$, de masse $M(\mathrm{Kg})$, et de tension constante $T(\mathrm{N})$ fixée aux points $x=0$ et $x=L$ ayant La forme initiale $y(x)$ et La vitesse initiale $v(x)$.



La densité linéaire de la corde sera $\mu=\frac{M}{L}(\mathrm{Kgm^{-1}})$ et onde se déplacera avec la vitesse $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}(\mathrm{ms^{-1}})$.

En coordonnées cartésiennes et en une dimension, Laplacien s'écrit sous la forme suivante :

$\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t)=\nabla^2\Psi(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)$ .Donc,

Équation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)=0$$

Les conditions frontières :

- Le déplacement est nul à $x=0$: $\Psi(0,t)=0$
- Le déplacement est nul à $x=L$: $\Psi(L,t)=0$

Les conditions initiales :

- La forme initiale de la corde : $\Psi(x,0) = y(x)$
- La vitesse initiale de la corde : $\left.\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)\right|_{t=0} = v(x)$

Séparation du temps

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)$$

$$v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t)$$

Par la méthode de séparation des variables on pose :

$$\Psi(x,t) = X(x)T(t)$$

$$v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[X(x)T(t)\right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X(x)T(t)\right]$$

$$v^2 T(t)\frac{d^2}{dx^2}X(x) = X(x)\frac{d^2}{dt^2}T(t)$$

On divise par $\Psi(x,t) = X(x)T(t)$:

$$v^2\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t)$$

Puisque le terme à gauche ne dépend que de x et le terme à droite ne dépend que de t il est clair que chaque terme est constante.

On suppose $-\omega^2$ comme constante de séparation :

$$\underbrace{v^2\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x)}_{-\omega^2} = \underbrace{\frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t)}_{-\omega^2}$$

Le terme à gauche

$$v^2\frac{1}{X(x)}\frac{d^2}{dx^2}X(x) = -\omega^2$$

Ou bien,

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)+\underbrace{\frac{\omega^2}{v^2}}_{k^2}X(x)=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}X(x)+k^2X(x)=0$$

Avec les conditions frontières :

- Le déplacement est nul à $x=0$: $X(0)=0$
- Le déplacement est nul à $x=L$: $X(L)=0$

C'est l'équation de *Helmholtz* en une dimension dont les solutions sont :

Les valeurs propres : $k_n=\frac{n\pi}{L}$, $n=1,2,3,\ldots$

Les fonctions propres : $X_n(x)=\sin(\frac{n\pi x}{L})$, $n=1,2,3,\ldots$

Le terme à droite

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2}{dt^2}T(t)=-\omega^2$$

Ou bien,

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t)+\omega^2T(t)=0$$

Dont la solution pour chaque $\omega_n=k_nv=\frac{n\pi}{L}v$, $n=1,2,3,\ldots$ est :

$$T_n(t)=A_n\cos(\omega_nt)+B_n\sin(\omega_nt) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots$$

$$T_n(t)=A_n\cos(\frac{n\pi}{L}vt)+B_n\sin(\frac{n\pi}{L}vt) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots$$

Les composants de la fonction d'onde

$$\Psi_n(x,t)=X_n(t)T_n(t)=\sin(\frac{n\pi x}{L})\left[A_n\cos(\frac{n\pi}{L}vt)+B_n\sin(\frac{n\pi}{L}vt)\right] \quad , \quad n=1,2,3,\ldots$$

Solution générale

Comme tous les modes peuvent être présents simultanément, la solution générale s'écrira comme une superposition linéaire de tous les modes.

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(t)T_n(t)$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{L})[A_n\cos(\frac{n\pi}{L}vt)+B_n\sin(\frac{n\pi}{L}vt)]$$

On trouve A_n

La forme initiale des ondes est $\Psi(x,0)=y(x)$ donc :

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Par la méthode d'analyse de *Fourier* :

On multiplie par $\sin(\frac{m\pi x}{L})$:

$$y(x)\sin(\frac{m\pi x}{L})=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi x}{L})$$

On intègre le long de la corde :

$$\begin{aligned}\int_0^L y(x)\sin(\frac{m\pi x}{L})dx &= \int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^L\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{L}{2}\delta_{mn}\\ &=A_n\frac{L}{2}\end{aligned}$$

Pour $m=n$:

$\int_0^L y(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx=A_n\frac{L}{2}$ Alors,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

On trouve B_n

La vitesse initiale des ondes : $\left.\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)\right|_{t=0} = v(x)$ donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{L})\left[-\frac{n\pi}{L}vA_n\sin(\frac{n\pi}{L}vt) + \frac{n\pi}{L}vB_n\cos(\frac{n\pi}{L}vt)\right]$$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}vB_n\sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Par la méthode d'analyse de *Fourier* :

On multiplie par $\sin(\frac{m\pi x}{L})$:

$$v(x)\sin(\frac{m\pi x}{L}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}vB_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})$$

On intègre le long de la corde :

$$\begin{aligned}\int_0^L v(x)\sin(\frac{m\pi x}{L})dx &= \int_0^L\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}vB_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}vB_n\int_0^L\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}vB_n\frac{L}{2}\delta_{mn} \\ &= \frac{n\pi}{L}vB_n\frac{L}{2}\end{aligned}$$

Pour $m = n$:

$$\int_0^L v(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx = \frac{n\pi}{L}vB_n\frac{L}{2}$$

Alors,

$$B_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L v(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

En résumé

$$\left\{\begin{array}{l}\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{L})[A_n\cos(\frac{n\pi}{L}vt)+B_n\sin(\frac{n\pi}{L}vt)] \\ \\ \text{Avec,} \\ \\ A_n=\frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx \\ \\ B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^L v(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\end{array}\right.$$

Cas particulier

Dans le cas dont la vitesse initiale est nulle :

$B_n=0$ et donc,

$$\left\{\begin{array}{l}\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi}{L}vt) \\ \\ \text{Avec,} \\ \\ A_n=\frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})dx\end{array}\right.$$