Plan d’étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underbrace{(-\infty, 0)}_{I_1} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} = 1$$

Alors la droite d’équation $Y = 1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} = \frac{(0-\varepsilon)^2 - 4(0-\varepsilon) + 4}{(0-\varepsilon)^2} = \frac{+\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 4}{+\varepsilon^2} = \frac{4}{+\varepsilon^2} = +\infty$$

Alors la droite d’équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} = \frac{(0+\varepsilon)^2 - 4(0+\varepsilon) + 4}{(0+\varepsilon)^2} = \frac{+\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 4}{+\varepsilon^2} = \frac{4}{+\varepsilon^2} = +\infty$$

Alors la droite d’équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2} = 1$$

Alors la droite d'équation $Y = 1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{4(x-2)}{x^3}$$

$$4(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-8(x-3)}{x^4}$$

$$-8(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 0.11 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 \\ 0.11 \end{vmatrix}$$

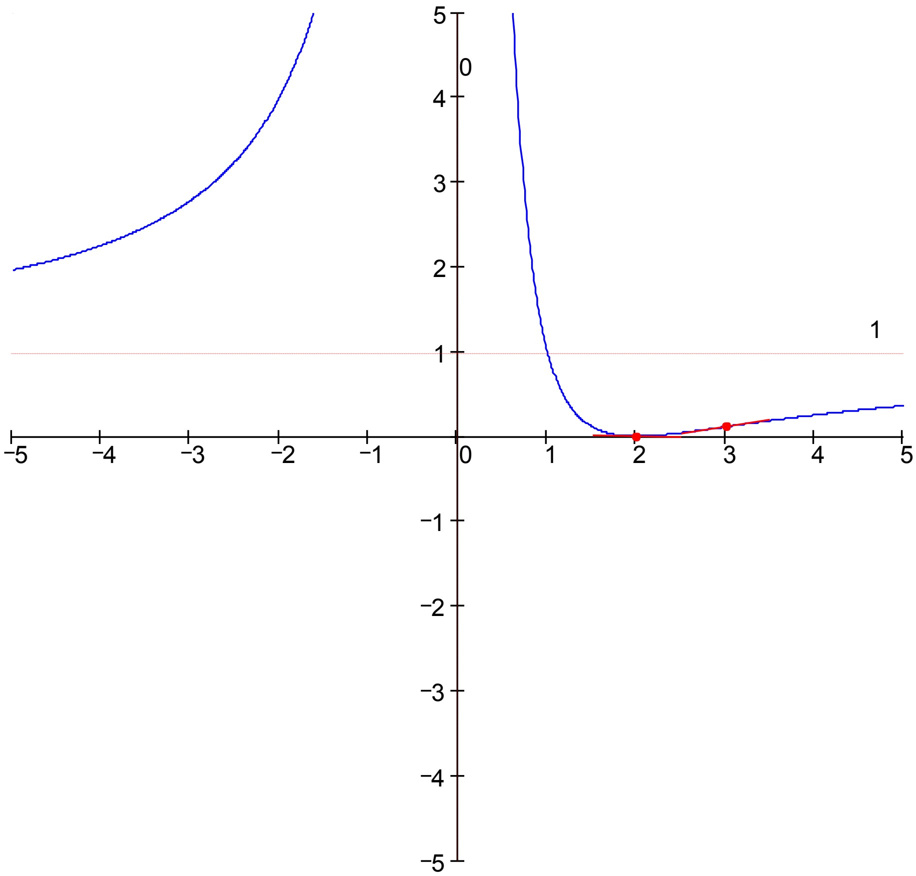
$$x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

$$m_{x=3} = f'(3) = 0.15$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	0.15	$+$	
y''		$+$	‖	$+$	|	$+$	0	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 Min	↗	0.11 Inf	↗	1

La courbe


5
4
3
2
1
0
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
−4
−5