Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2} \Rightarrow D_f = \left[-3, +\infty\right)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$x = -3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors le point $\begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un point d'arrêt.

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 + 3x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(x+3)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{x+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{3x(x+2)}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}}$$

$$3x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0}{0} \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 \\ 2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$2\sqrt{x^3+3x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0}{0} \\ x=-3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$m_{x\to 0^-}=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x(x+2)}{2\sqrt{x^3+3x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x(x+2)}{2|x|\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3x(x+2)}{-2x\sqrt{x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3(x+2)}{-2\sqrt{x+3}}=\frac{3[(0-\varepsilon)+2]}{-2\sqrt{(0-\varepsilon)+3}}=\frac{-3\varepsilon+6}{-2\sqrt{-\varepsilon+3}}=\frac{6}{-2\sqrt{3}}=-\sqrt{3}=-1.73$$

$$m_{x\to 0^+}=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x(x+2)}{2\sqrt{x^3+3x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x(x+2)}{2|x|\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x(x+2)}{2x\sqrt{x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3[(0+\varepsilon)+2]}{2\sqrt{(0+\varepsilon)+3}}=\frac{3\varepsilon+6}{2\sqrt{\varepsilon+3}}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}=1.73$$

Convexité de f

$$y''=f''(x)=\frac{3x(x+4)}{4(x+3)\sqrt{x^3+3x^2}}$$

$$3x(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0}{0} \\ x=-4 \notin D_f \end{cases}$$

$$4(x+3)\sqrt{x^3+3x^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0}{0} \\ x=-3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

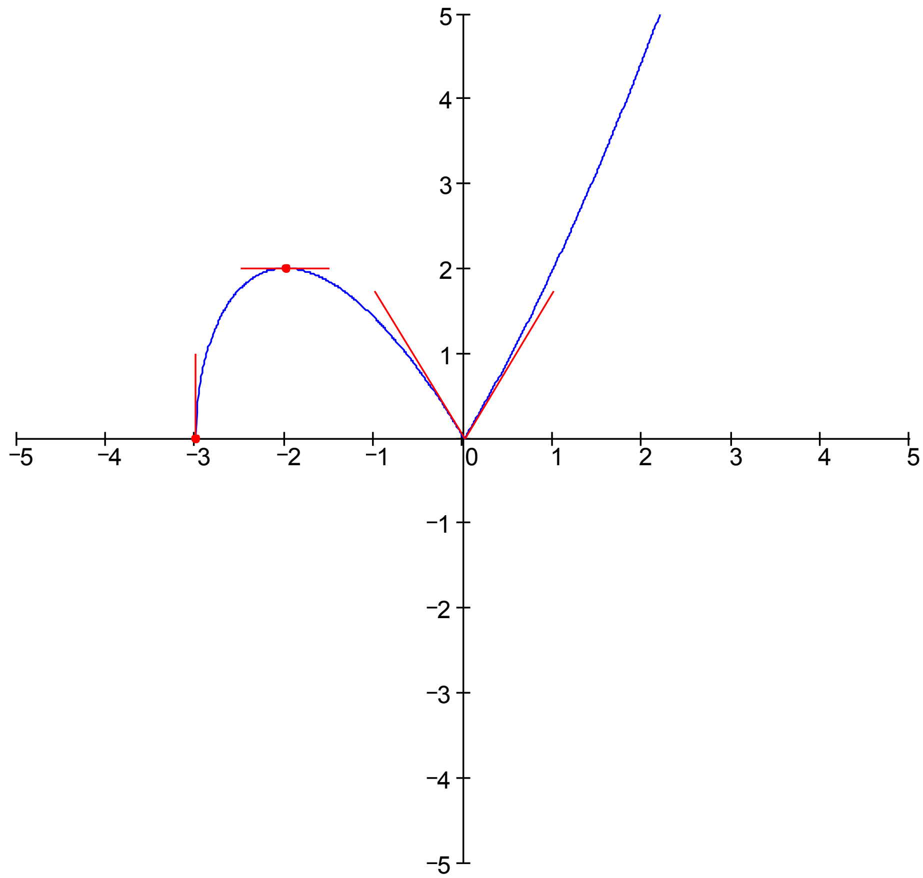
$$m_{x\to -3^+} = \lim_{x\to -3^+} f'(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{3x(x+2)}{2\sqrt{x^3+3x^2}} = \lim_{x\to -3^+} \frac{3x(x+2)}{2|x|\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to -3^+} \frac{3x(x+2)}{-2x\sqrt{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to -3^+} \frac{3(x+2)}{-2\sqrt{x+3}} = \frac{3[(-3+\varepsilon)+2]}{-2\sqrt{(-3+\varepsilon)+3}} = \frac{3\varepsilon-7}{-2\sqrt{+\varepsilon}} = \frac{-7}{-2\sqrt{+\varepsilon}} = \frac{7}{2\sqrt{+\varepsilon}} = +\infty$$

Le tableau de variation

x	-3		-2		0		$+\infty$
y'	‖	$+$	0	$-$	-1.73 1.73	$+$	
y''	‖	$-$	|	$-$	‖	$+$	
y	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$
		⌒	Max	⌒	Min	⌣	

La courbe


5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5