Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow D_f = ° = (-\infty, +\infty)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} = -1$$

Alors la droite d'équation $Y = -1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} = -1$$

Alors la droite d'équation $Y = -1$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{4\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

$$4\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \\ x = 1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-8x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$-8x\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} \\ x=-1.73 \Rightarrow y=0.73 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1.73 \\ 0.73 \end{vmatrix} \\ x=1.73 \Rightarrow y=-2.73 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1.73 \\ -2.73 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$m_{x=-1.73} = f'(-1.73) = 0.5$$

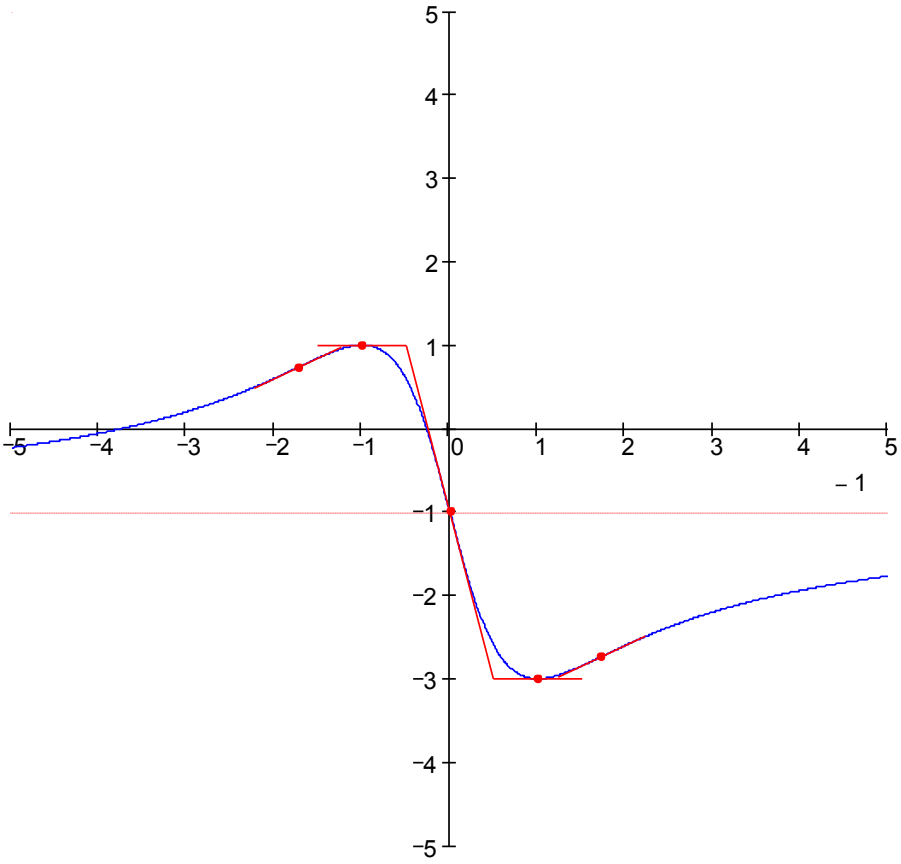
$$m_{x=0} = f'(0) = -4$$

$$m_{x=1.73} = f'(1.73) = 0.5$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1.73		-1		0		1		1.73		$+\infty$
y'		$+$	0.5	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	0.5	$+$	
y''		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	1	↗	0.73	↗	1	↘	-1	↘	-3	↗	-2.73	↗	1
		∪	Inf	∩	Max	∪	Inf	∪	Min	∪	Inf	∩	

La courbe


5
4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
− 1
−1
−2
−3
−4
−5