Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \frac{x^3+1}{x}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{x^3+1}{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underbrace{(-\infty,0)}_{I_1} \cup \underbrace{(0,+\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy.

A la borne droite

$$\lim_{x\to0^-} y = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3+1}{x} = \frac{(0-\varepsilon)^3+1}{0-\varepsilon} = \frac{-\varepsilon^3+1}{-\varepsilon} = \frac{1}{-\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+1}{x} = \frac{(0+\varepsilon)^3+1}{0+\varepsilon} = \frac{\varepsilon^3+1}{+\varepsilon} = \frac{1}{+\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de l'axe Oy .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

$$2x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 0.79 \Rightarrow y = 1.89 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0.79 \\ 1.89 \end{array} \right.$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{2(x^3+1)}{x^3}$$

$$2(x^3+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

$$m_{x=-1} = f'(-1) = -3$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0		0.79		$+\infty$
y'		$-$	-3	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y''		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	0 Inf	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1.89 Min	↗	$+\infty$

La courbe