

# Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3}$

---

www.cafeplanck.com

info@cafeplanck.com

## Le domaine de définition de $f$

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

## Etudier la fonction aux bornes de $D_f$

### A la borne gauche

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Alors la courbe de  $f$  tend vers un infini au long de la droite  $Y = ax + b$ . On cherche  $a$  et  $b$  :

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + 3x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 - 3x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2 + 3} = 0$$

Alors la droite d'équation  $Y = x$  est une asymptote oblique pour la courbe de  $f$ .

### A la borne droite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Alors la courbe de  $f$  tend vers un infini au long de la droite  $Y = ax + b$ . On cherche  $a$  et  $b$  :

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 3x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - 3x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2 + 3} = 0$$

Alors la droite d'équation  $Y = x$  est une asymptote oblique pour la courbe de  $f$ .

### Le sens de variation de $f$

$$y' = f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 9)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$x^2(x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x = 0 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

### Convexité de $f$









$$y'' = f''(x) = \frac{-6x(x^2 - 9)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$-6x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ x = -3 \Rightarrow y = -2.25 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 \\ -2.25 \end{vmatrix} \\ x = 3 \Rightarrow y = 2.25 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 \\ 2.25 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$m_{x=-3} = f'(-3) = 1.13$$

$$m_{x=3} = f'(3) = 1.13$$

### Le tableau de variation

$x$	$-\infty$	$-3$	$0$	$3$	$+\infty$				
$y'$		$+$	$1.13$	$+$	$0$	$+$	$1.13$	$+$	
$y''$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$y$	$-\infty$		$-2.25$		$0$		$2.25$		$+\infty$
			Inf		Inf		Inf		

### La courbe

