Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt[3]{x^2}) = -\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt[3]{x^2} - x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt[3]{x^2}) = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt[3]{x^2} - x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

Alors la courbe de f a une branche parabolique au long de la droite $Y = x$.

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x} + 2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$3\sqrt[3]{x} + 2 = 0 \Rightarrow x = -0.3 \Rightarrow y = 0.15 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -0.3 \\ 0.15 \end{array} \right.$$

$$3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$m_{x \to 0^-} = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{(0-\varepsilon)}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{-\varepsilon}} = -\infty$$

$$m_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{(0+\varepsilon)}} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{+\varepsilon}} = +\infty$$

Convexité de f

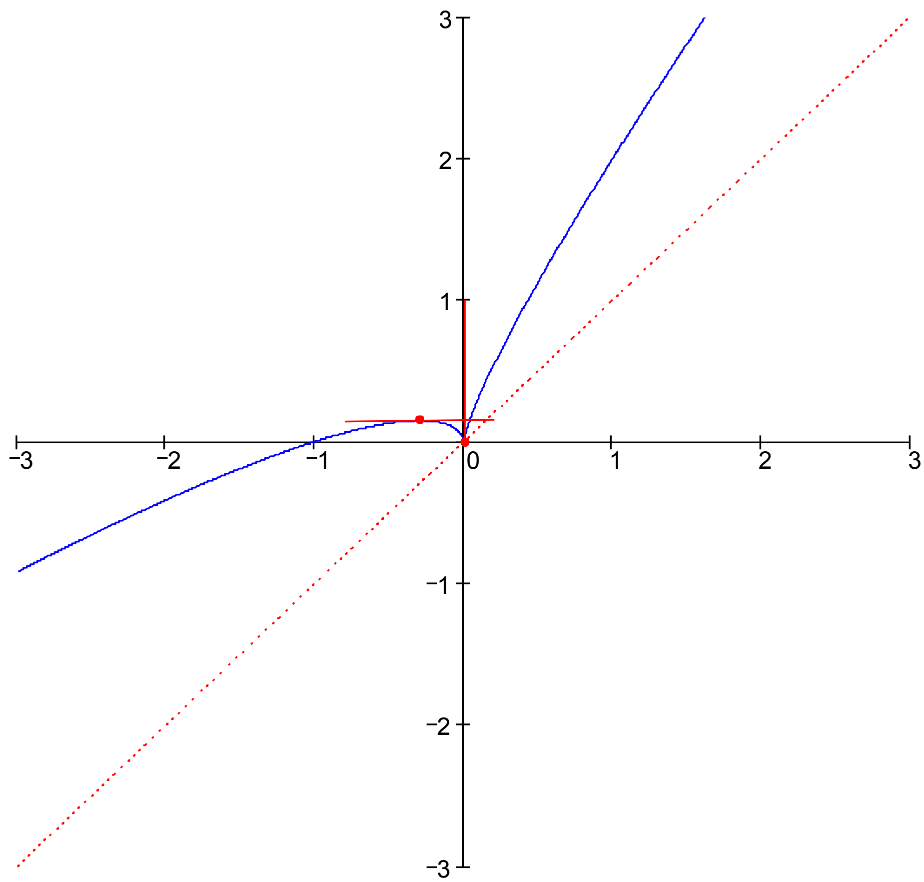
$$y'' = f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$$

$$9x\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-0.3		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	
y''		$-$		$-$	‖	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$ $\frown$	0.15 Max	$\searrow$ $\frown$	0	$\nearrow$ $\frown$	$+\infty$

La courbe


3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3