Le courant de probabilité

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Le courant de probabilité

La densité de probabilité de présence de particule au point x et à l'instant t est :

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t)$$

La variation de $P(x,t)$ en fonction du temps est :

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\psi^*(x,t)\psi(x,t)\right]$$

$$= \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]$$

On trouve $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ à partir de l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$ où $V(x)$ est réel

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar}V(x)\psi$$

Et le conjugué complexe :

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \frac{1}{i\hbar}V(x)\psi^*$$

Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \frac{1}{i\hbar}V(x)\psi^*\right)\psi + \psi^*\left(-\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar}V(x)\psi\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}\psi - \psi^*\frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)}_{j(x,t)}\right]$$

Donc,

Équation de continuité pour la densité de probabilité de présence de particule au point x et à l'instant t est :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0}$$

Avec, le courent de probabilité

$$\boxed{j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)}$$

Remarque 1 :

Si on intègre l'équation de continuité entre $-\infty$ et ∞ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\left(\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} dxP(x,t) + \left[j(x,t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Pour les fonctions d'onde qui sont des fonctions carrés sommable, le courent de probabilité est nulle à l'infini. Donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} dxP(x,t) = 0$$

Alors, la probabilité de présence de particule dans l'élément dx est indépendante du temps donc, pour tous les t :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dxP(x,t) = 1$$

Remarque 2 :

Si on intègre l'équation de continuité entre a et b :

$$\int_a^b dx\left(\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b dxP(x,t) + \left[j(x,t)\right]_a^b = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b dxP(x,t) = j(a,t) - j(b,t)}$$

Cette équation dit que le changement de la probabilité de présence de particule dans l'élément dx est égal à la différence entre le courant de probabilité qui entre, $j(a,t)$ et qui sort, $j(b,t)$ de l'élément dx.

Remarque 3 :

Dans le cas où Hamiltonien est indépendant du temps :

$P(x,t)$ est indépendant du temps $\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = 0$, donc :

$$\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = 0$$

Cette équation dit que $j(x,t)$ est indépendant de x et on devra avoir égalité de j des deux côtés de la frontière entre deux régions de potentiels différents :

$$\boxed{j_I(x_0) = j_{II}(x_0)}$$

Remarque 4 :

$j(x)$ est le flux de particules.

Exemple 1:

Pour les particules qui se déplace vers la droite $u(x) = e^{ikx}$:

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(u^*(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{du^*(x)}{dx}u(x)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[\left(e^{-ikx}\right)\left(ike^{ikx}\right) - \left(-ike^{-ikx}\right)\left(e^{ikx}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left(2ik\right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v$$

Exemple 2:

Pour les particules qui se déplace vers la gauche $u(x) = e^{-ikx}$:

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(u^*(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{du^*(x)}{dx}u(x)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[\left(e^{ikx}\right)\left(-ike^{-ikx}\right) - \left(ike^{ikx}\right)\left(e^{-ikx}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left(-2ik\right) = -\frac{\hbar k}{m} = -\frac{p}{m} = -v$$

Remarque 5 :

Le flux d'incident

Le flux d'incident pour les particules incidentes vers la droite :

$u(x) = Ie^{ikx}$ òu $I = 1$ est le coefficient d'incidente :

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(u^*(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{du^*(x)}{dx}u(x) \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[\left(e^{-ikx}\right)\left(ike^{ikx}\right) - \left(-ike^{-ikx}\right)\left(e^{ikx}\right) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}(2ik)$$

$$\boxed{j_{In} = \frac{\hbar k}{m}}$$

Le flux de réflexion

Pour les particules réfléchies vers la gauche :

$u(x) = Re^{-ikx}$ òu R est le coefficient de réflexion :

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(u^*(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{du^*(x)}{dx}u(x) \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[\left(R^* e^{ikx}\right)\left(-ikRe^{-ikx}\right) - \left(ikR^* e^{ikx}\right)\left(Re^{-ikx}\right) \right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left(-ik|R|^2 - ik|R|^2 \right)$$

Alors,

$$\boxed{j_{Réf} = -\frac{\hbar k}{m}|R|^2}$$

Le flux de transmission

Pour les particules transmises vers la droite :

$u(x) = Te^{ikx}$ òu T est le coefficient de transmission :

$$j(x) = \frac{\hbar}{2im}\left(u^*(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{du^*(x)}{dx}u(x)\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left[\left(T^*e^{-ikx}\right)\left(ikTe^{ikx}\right) - \left(-ikT^*e^{-ikx}\right)\left(Te^{ikx}\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left(ik|T|^2 + ik|T|^2\right)$$

Alors,

$$\boxed{j_{Tr} = \frac{\hbar k}{m}|T|^2}$$

Remarque 6 :

Si ψ est réel :

$$\psi^* = \psi \Rightarrow j = 0$$

Alors, onde est stationnaire.

Exemple :

$$\psi(x) = e^{-qx} \Rightarrow j = 0$$