La barrière de potentiel

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

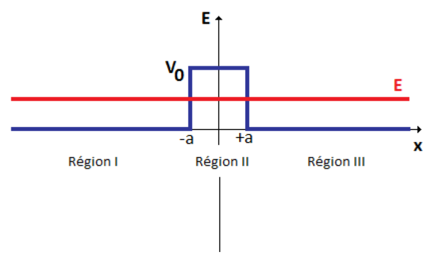
8/19/2008

La barrière de potentiel

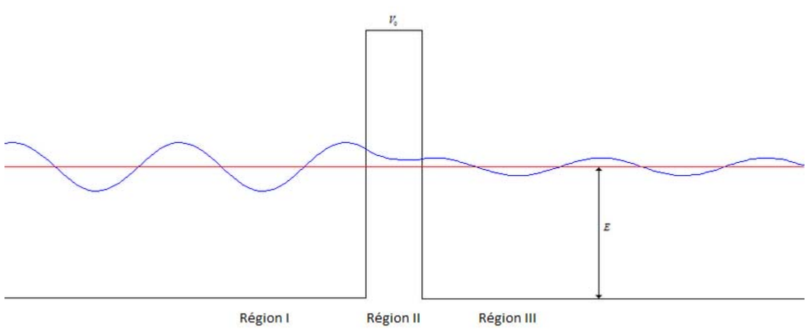
$$V(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<-a \\ V_0 & , \quad -a<x<a \\ 0 & , \quad x>a\end{cases}$$

On s'intéresse ici seulement à la solution dans le cas où $E<V_0$

Le cas $E<V_0$



Région I	Frontière X= -a	Région II	Frontière X= a	Région III
$\hat{H}u(x)=Eu(x)$		$\hat{H}u(x)=Eu(x)$		$\hat{H}u(x)=Eu(x)$
$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x)$		$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x)$		$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]u(x)=Eu(x)$
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)$
$V(x)=0$		$V(x)=V_0$		$V(x)=0$
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)=Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)+V_0u(x)=Eu(x)$		$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x)=Eu(x)$
$\frac{d^2}{dx^2}u(x)+\frac{2mE}{\hbar^2}u(x)=0$		$\frac{d^2}{dx^2}u(x)-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}u(x)=0$		$\frac{d^2}{dx^2}u(x)+\frac{2mE}{\hbar^2}u(x)=0$
$\frac{d^2}{dx^2}u(x)+k^2u(x)=0$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$		$\frac{d^2}{dx^2}u(x)-\kappa^2u(x)=0$ où $\kappa^2=\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$		$\frac{d^2}{dx^2}u(x)+k^2u(x)=0$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$
$u_I(x)=e^{ikx}+Re^{-ikx}$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$		$u_{II}(x)=Ae^{-\kappa x}+Be^{\kappa x}$ où $\kappa^2=\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$		$u_{III}(x)=Te^{ikx}$ où $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$



Les conditions de continuités :

À $x=-a$:

1. $u_I(-a)=u_{II}(-a) \Rightarrow e^{-ika}+Re^{ika}=Ae^{\kappa a}+Be^{-\kappa a}$
2. $u_I'(-a)=u_{II}'(-a) \Rightarrow ike^{-ika}-ikRe^{ika}=-\kappa Ae^{\kappa a}+\kappa Be^{-\kappa a}$

À $x=a$:

3. $u_{II}(a)=u_{III}(a) \Rightarrow Ae^{-\kappa a}+Be^{\kappa a}=Te^{ika}$
4. $u_{II}'(a)=u_{III}'(a) \Rightarrow -\kappa Ae^{-\kappa a}+\kappa Be^{\kappa a}=ikTe^{ika}$

Trouvons R et T :

$$\begin{cases} -Re^{ika}+0\times T+Ae^{\kappa a}+Be^{-\kappa a}=-e^{-ika} \\ ikRe^{ika}+0\times T-\kappa Ae^{\kappa a}+\kappa Be^{-\kappa a}=ike^{-ika} \\ 0\times R+Te^{ika}+Ae^{-\kappa a}+Be^{\kappa a}=0 \\ 0\times R-ikTe^{ika}-\kappa Ae^{-\kappa a}+\kappa Be^{\kappa a}=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -e^{ika} & 0 & e^{\kappa a} & e^{-\kappa a} \\ ike^{ika} & 0 & -\kappa e^{\kappa a} & \kappa e^{-\kappa a} \\ 0 & e^{ika} & e^{-\kappa a} & e^{\kappa a} \\ 0 & -ike^{ika} & -\kappa e^{-\kappa a} & \kappa e^{\kappa a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ T \\ A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -e^{-ika} \\ ike^{-ika} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

Coefficient de réflexion	$R=\dfrac{(k^2+\kappa^2)\sinh^2\kappa a e^{-2ika}}{2i\kappa k\cosh 2\kappa a+(k^2-\kappa^2)\sinh 2\kappa a}$
Coefficient de transmission	$T=e^{-2ika}\dfrac{2k\kappa}{2k\kappa\cosh 2\kappa a+i(k^2-\kappa^2)\sinh 2\kappa a}$

Les cas particuliers :

Transmission tota l	$\begin{cases}\kappa\to 0\\ \text{le largueur de la barrière devient très petit}\end{cases}\Rightarrow\ 2\kappa a\to 0\ \Rightarrow\ \sinh 2\kappa a\to 0\ \Rightarrow\ \lvert T\rvert\to 1$
	$2\kappa a\gg 1\ \Rightarrow\ \sinh^2 2\kappa a\to\dfrac{e^{2\kappa a}}{2}\ \Rightarrow\ \lvert T\rvert^2\to\dfrac{(4k\kappa)^2}{(k^2+\kappa^2)}e^{-4\kappa a}$