Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\} = \underbrace{(-\infty,-1)}_{I_1} \cup \underbrace{(-1,1)}_{I_2} \cup \underbrace{(1,+\infty)}_{I_3}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = 2$$

Alors la droite d'équation $Y = 2$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to-1^-} y = \lim_{x\to-1^-} \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2(-1-\varepsilon)^2 - 4(-1-\varepsilon) + 3}{(-1-\varepsilon)^2 - 1} = \frac{9 + 8\varepsilon + 2\varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1} = \frac{9}{+2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{9}{+2\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-1^+} y = \lim_{x\to-1^+} \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2(-1+\varepsilon)^2 - 4(-1+\varepsilon) + 3}{(-1+\varepsilon)^2 - 1} = \frac{9 - 8\varepsilon + 2\varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1} = \frac{9}{-2\varepsilon + \varepsilon^2} = \frac{9}{-2\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = -1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to1^-} y = \lim_{x\to1^-} \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{2(1-\varepsilon)^2-4(1-\varepsilon)+3}{(1-\varepsilon)^2-1} = \frac{1+2\varepsilon^2}{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{-2\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_3

A la borne gauche

$$\lim_{x\to1^+} y = \lim_{x\to1^+} \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{2(1+\varepsilon)^2-4(1+\varepsilon)+3}{(1+\varepsilon)^2-1} = \frac{1+2\varepsilon^2}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{+2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{+2\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} = 2$$

Alors la droite d'équation $Y = 2$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}$$

$$2(2x^2-5x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0.5 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 0.5 \\ -2 \end{matrix} \right. \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

$$(x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin D_f \\ x = 1 \notin D_f \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-2\left(4x^3-15x^2+12x-5\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$-2\left(4x^3-15x^2+12x-5\right) = 0 \Rightarrow x = 2.85 \Rightarrow y = 1.1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 2.85 \\ 1.1 \end{matrix} \right.$$

$$(x^2-1)^3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \notin D_f \\ x=1 \notin D_f \end{cases}$$

$$m_{x=2.85}=f'(2.85)=0.16$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0.5		1		2		2.85		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	0.16	$+$	
y''		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2 Max	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1 Min	$\nearrow$	1.1 Inf	$\nearrow$	2

La courbe