Plan d’étude et représentation graphique de $y = f(x) = \dfrac{-4x+5}{x^2-1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{-4x+5}{x^2-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\} = \underbrace{(-\infty,-1)}_{I_1} \cup \underbrace{(-1,1)}_{I_2} \cup \underbrace{(1,+\infty)}_{I_3}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+5}{x^2-1} = 0$$

Alors la droite d’équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to-1^-} y = \lim_{x\to-1^-} \frac{-4x+5}{x^2-1} = \frac{-4(-1-\varepsilon)+5}{(-1-\varepsilon)^2-1} = \frac{9+4\varepsilon}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{9}{+2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{9}{+2\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d’équation $X = -1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x\to-1^+} y = \lim_{x\to-1^+} \frac{-4x+5}{x^2-1} = \frac{-4(-1+\varepsilon)+5}{(-1+\varepsilon)^2-1} = \frac{9-4\varepsilon}{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{9}{-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{9}{-2\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d’équation $X = -1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^-} \frac{-4x+5}{x^2-1} = \frac{-4(1-\varepsilon)+5}{(1-\varepsilon)^2-1} = \frac{1+4\varepsilon}{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{-2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{-2\varepsilon} = -\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_3

A la borne gauche

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1^+} \frac{-4x+5}{x^2-1} = \frac{-4(1+\varepsilon)+5}{(1+\varepsilon)^2-1} = \frac{1-4\varepsilon}{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1} = \frac{1}{+2\varepsilon+\varepsilon^2} = \frac{1}{+2\varepsilon} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 1$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x+5}{x^2-1} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{2(2x^2-5x+2)}{(x^2-1)^2}$$

$$2(2x^2-5x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0.5 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0.5 \\ -4 \end{array} \right. \\ x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\left(x^2-1\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin D_f \\ x = 1 \notin D_f \end{cases}$$

Convexité de f

$$y'' = f''(x) = \frac{-2\left(4x^3-15x^2+12x-5\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$-2\left(4x^3-15x^2+12x-5\right) = 0 \Rightarrow x = 2.85 \Rightarrow y = -0.9 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2.85 \\ -0.9 \end{array} \right.$$

$$\left(x^2-1\right)^3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \notin D_f \\ x=1 \notin D_f \end{cases}$$

$$m_{x=2.85}=f'(2.85)=-0.16$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		0.5		1		2		2.85		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	-0.16	$-$	
y''		$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↘ ∩	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ ∪	4 Min	↗ ∪	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ ∩	1 Max	↘ ∩	0.9 Inf	↘ ∪	0

La courbe