Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow D_f = \underbrace{\left(-\infty, -1\right]}_{I_1} \cup \underbrace{\left[1, +\infty\right)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(y - ax\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(|x| + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x + x\right) = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = -x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f .

A la borne droite

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors le point $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un point d'arrêt.

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Alors le point $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ est un point d'arrêt.

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$$

Alors la courbe de f tend vers un infini au long de la droite $Y = ax + b$. On cherche a et b :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(y - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(|x| - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - x \right) = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = x$ est une asymptote oblique pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$x = 0 \notin D_f$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$m_{x \to -1^-} = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{(-1 - \varepsilon)^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{+2\varepsilon + \varepsilon^2}} = -\infty$$

$$m_{x \to 1^+} = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{+2\varepsilon + \varepsilon^2}} = +\infty$$

Convexité de f

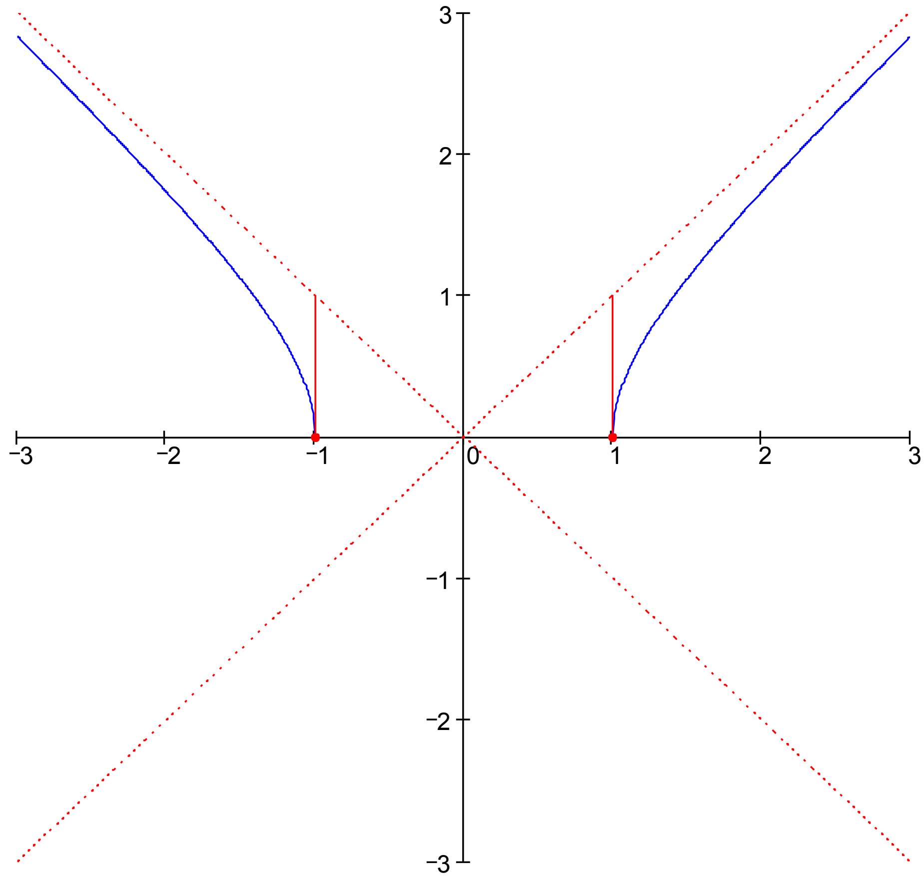
$$y'' = f''(x) = \frac{-1}{\left(x^2 - 1\right)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\left(x^2 - 1\right)\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right. \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y''		$-$				$-$	
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

La courbe


3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
0
1
2
3