Plan d'étude et représentation graphique de $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

www.cafeplanck.com
info@cafeplanck.com

Le domaine de définition de f

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \underbrace{(-\infty, 0)}_{I_1} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{I_2}$$

Etudier la fonction au bornes de D_f

Etudier la fonction au bornes de I_1

A la borne gauche

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

Etudier la fonction au bornes de I_2

A la borne gauche

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon^2}} = +\infty$$

Alors la droite d'équation $X = 0$ est une asymptote verticale pour la courbe de f .

A la borne droite

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

Alors la droite d'équation $Y = 0$ est une asymptote horizontale pour la courbe de f .

Le sens de variation de f

$$y' = f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}} = \frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3x\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

Convexité de f

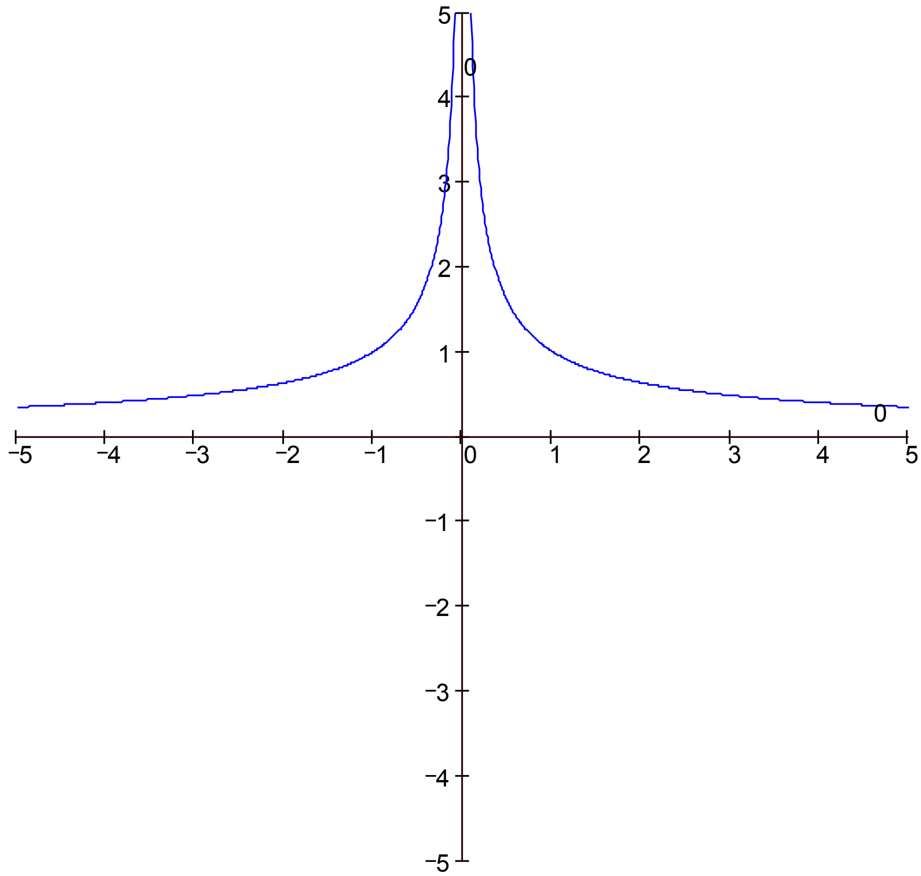
$$y'' = f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x^8}} = \frac{10}{9x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

$$9x^2\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	‖	−	
y''		+	‖	+	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

La courbe


5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
0