Moment cinétique

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/26/2008

Moment cinétique

En mécanique classique	En mécanique quantique
Moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$	Moment cinétique orbital $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}$
Pas d'équivalent	Moment cinétique intrinsèque (spin) $\hat{\mathbf{S}}$
Pas d'équivalent	Moment cinétique général $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$

Représentation en fonction de des coordonnées spatiales

Moment cinétique orbital $\hat{\mathbf{L}}$	Moment cinétique intrinsèque (spin) $\hat{\mathbf{S}}$	Moment cinétique général $\hat{\mathbf{J}}$
Représentation dans (x, y, z) Représentation dans (r, θ, ϕ)	Pas de représentation spatiale	Pas de représentation spatiale

Représentation de moment cinétique orbital en fonction de des coordonnées cartésienne

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{P}_x & \hat{P}_y & \hat{P}_z \end{pmatrix}$$

Alors :

Les composantes de l'opérateur $\hat{\mathbf{L}}$

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y = \hat{y}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} - \hat{z}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\hbar}{i}\left(\hat{y}\frac{\partial}{\partial z} - \hat{z}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{P}_x - \hat{x}\hat{P}_z = \hat{z}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{x}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\hbar}{i}\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{x}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{P}_y - \hat{y}\hat{P}_x = \hat{x}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{y}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\hbar}{i}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{y}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Opérateur $\hat{L}^2$:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

Les opérateurs de transitions $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$:

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

Donc,

$$\hat{L}_x = \frac{\hat{L}_+ + \hat{L}_-}{2}$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hat{L}_+ - \hat{L}_-}{2i}$$

Représentation de moment cinétique orbital en fonction des coordonnées sphérique

Sans calculs :

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\hat{L}_2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

$$\hat{L}_+ = \hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \quad \hat{L}_- = \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

En résumé :

Opérateur	définition	En coordonnées cartésienne (x, y, z)	En coordonnées sphérique (r, θ, ϕ)
$\hat{L}_x$	$\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y$	$\frac{\hbar}{i}\left(\hat{y}\frac{\partial}{\partial z} - \hat{z}\frac{\partial}{\partial y}\right)$	$\frac{\hbar}{i}\left(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$
$\hat{L}_y$	$\hat{z}\hat{P}_x - \hat{x}\hat{P}_z$	$\frac{\hbar}{i}\left(\hat{z}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{x}\frac{\partial}{\partial z}\right)$	$\frac{\hbar}{i}\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$
$\hat{L}_z$	$\hat{x}\hat{P}_y - \hat{y}\hat{P}$	$\frac{\hbar}{i}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial y} - \hat{y}\frac{\partial}{\partial x}\right)$	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}$
$\hat{L}^2$	$\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$	Pas besoin	$-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$
$\hat{L}_+$	$\hat{L}_x + i\hat{L}_y$	Pas besoin	$\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$
$\hat{L}_-$	$\hat{L}_x - i\hat{L}_y$	Pas besoin	$\hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$

Les composantes de $\hat{\mathbf{L}}$ ainsi que les composantes de $\hat{\mathbf{r}}$ et de $\hat{\mathbf{P}}$ sont Hermitiennes :

Par exemple :

$$\hat{L}_x^\dagger = \left(\hat{y}\hat{P}_z - \hat{z}\hat{P}_y\right)^\dagger$$

$$= \left(\hat{y}\hat{P}_z\right)^\dagger - \left(\hat{z}\hat{P}_y\right)^\dagger$$

$$= \hat{P}_z^\dagger\hat{y}^\dagger - \hat{P}_y^\dagger\hat{z}^\dagger$$

$$= \hat{P}_z \hat{y} - \hat{P}_y \hat{z}$$

$$= \hat{y} \hat{P}_z - \hat{z} \hat{P}_y$$

$$= \hat{L}_x$$

Ainsi :

$$\boxed{\hat{L}_x^{\dagger} = \hat{L}_x \quad , \quad \hat{L}_y^{\dagger} = \hat{L}_y \quad , \quad \hat{L}_z^{\dagger} = \hat{L}_z}$$

L'opérateur $\hat{L}^2$ est Hermitien :

$$\boxed{\hat{L}^{2\dagger} = \hat{L}^2}$$

Les opérateurs de transitions $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$ ne sont pas Hermitiens mais :

$$\boxed{\hat{L}_+^{\dagger} = \hat{L}_- \quad , \quad \hat{L}_-^{\dagger} = \hat{L}_+}$$

Les relations de commutation :

Les relations de commutation entre les composantes de $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\boxed{\begin{array}{lll} [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar & [\hat{x}, \hat{p}_y] = 0 & [\hat{z}, \hat{p}_x] = 0 \\ [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0 & [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar & [\hat{y}, \hat{p}_z] = 0 \\ [\hat{z}, \hat{p}_x] = 0 & [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0 & [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar \end{array}}$$

Les relations de commutation entre les composantes de $\hat{\mathbf{L}}$:

$$\boxed{\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = i\hbar \hat{L}_z \quad , \quad \left[\hat{L}_y, \hat{L}_z\right] = i\hbar \hat{L}_x \quad , \quad \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] = i\hbar \hat{L}_y}$$

Les relations de commutation entre les composantes de $\hat{\mathbf{L}}$ et $\hat{L}^2$:

$$\boxed{\left[\hat{L}_x,\hat{L}^2\right]=0\ ,\ \left[\hat{L}_y,\hat{L}^2\right]=0\ ,\ \left[\hat{L}_z,\hat{L}^2\right]=0}$$

Les relations de commutation entre $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$:

$$\boxed{\left[\hat{L}_+,\hat{L}_-\right]=2\hbar\hat{L}_z}$$

Les relations de commutation entre $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$ et $\hat{L}^2$:

$$\boxed{\left[\hat{L}_+,\hat{L}^2\right]=0\ ,\ \left[\hat{L}_-,\hat{L}^2\right]=0}$$

Les relations de commutation entre $\hat{L}_+$ et $\hat{L}_-$ et $\hat{L}_z$:

$$\boxed{\left[\hat{L}_z,\hat{L}_-\right]=-\hbar\hat{L}_-\ ,\ \left[\hat{L}_z,\hat{L}_+\right]=+\hbar\hat{L}_+}$$

Les équations aux valeurs propres :

$$\hat{L}^2\left|l\quad m\right\rangle=\hbar^2 l(l+1)\left|l\quad m\right\rangle$$

$$\hat{L}_z\left|l\quad m\right\rangle=\hbar m\left|l\quad m\right\rangle$$

$$\hat{L}_+\left|l\quad m\right\rangle=\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\left|l\quad m+1\right\rangle$$

$$\hat{L}_-\left|l\quad m\right\rangle=\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\left|l\quad m-1\right\rangle$$

Où l un nombre entier $0 \le l \le n+1$ et $m = \{-l, -l+1, \ldots 0, \ldots, l-1, l\}$ et n est le nombre quantique principale.

En général :

$$\hat{J}^2 | j \quad m\rangle = \hbar^2 j(j+1) | j \quad m\rangle$$

$$\hat{J}_z | j \quad m\rangle = \hbar m | j \quad m\rangle$$

$$\hat{J}_+ | j \quad m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \, | j \quad m+1\rangle$$

$$\hat{J}_- | j \quad m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \, | j \quad m-1\rangle$$

Où j un nombre entier $0 \le j \le n+1$ et $m = \{-j, -j+1, \ldots 0, \ldots, j-1, j\}$ et n est le nombre quantique principale.

Les éléments des sous-matrices des opérateurs de moment cinétique

$$\langle j \quad m' | \hat{J}^2 | j \quad m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\delta_{mm'}$$

$$\langle j \quad m' | \hat{J}_z | j \quad m\rangle = \hbar m \delta_{mm'}$$

$$\langle j \quad m' | \hat{J}_+ | j \quad m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\delta_{m+1,m'}$$

$$\langle j \quad m' | \hat{J}_- | j \quad m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\delta_{m-1,m'}$$

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2}$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i}$$

Représentation matricielle des opérateurs du moment cinétique

Exemple 1 : pour $j=1$:

$j=1 \Rightarrow m=-1,0,1$

On trouve $\hat{J}^2$:

$$\langle j \quad m' | \hat{J}^2 | j \quad m \rangle = \hbar^2 j(j+1)\delta_{mm'} = 2\hbar^2 \delta_{mm'}$$

$$\hat{J}^2 = \begin{array}{cccc} m=1 & m=0 & m=-1 & \\ 2\hbar^2 & 0 & 0 & m'=1 \\ 0 & 2\hbar^2 & 0 & m'=0 \\ 0 & 0 & 2\hbar^2 & m'=-1 \end{array}$$

Alors :

$$\hat{J}^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{J}_z$:

$$\langle j \quad m' | \hat{J}_z | j \quad m \rangle = \hbar m \delta_{mm'}$$

$$\hat{J}_z = \begin{array}{cccc} m=1 & m=0 & m=-1 & \\ \hbar & 0 & 0 & m'=1 \\ 0 & 0 & 0 & m'=0 \\ 0 & 0 & -\hbar & m'=-1 \end{array}$$

Alors :

$$\hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{J}_+$:

$$\langle j \quad m' | \hat{J}_+ | j \quad m \rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\delta_{m+1,m'} = \hbar\sqrt{2-m(m+1)}\,\delta_{m+1,m'}$$

$$\hat{J}_+ = \begin{array}{cccc} m=1 & m=0 & m=-1 & \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 & m'=1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar & m'=0 \\ 0 & 0 & 0 & m'=-1 \end{array}$$

Alors :

$$\hat{J}_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{J}_-$:

$$\langle j \quad m' | \hat{J}_- | j \quad m \rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\delta_{m-1,m'} = \hbar\sqrt{2-m(m-1)}\,\delta_{m-1,m'}$$

$$\hat{J}_- = \begin{array}{cccc} m=1 & m=0 & m=-1 & \\ 0 & 0 & 0 & m'=1 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 & m'=0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 & m'=-1 \end{array}$$

Alors :

$$\hat{J}_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{J}_x$:

$$\hat{J}_x = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}}{2}$$

Alors :

$$\hat{J}_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{J}_y$:

$$\hat{J}_y = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2i} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}}{2i}$$

Alors :

$$\hat{J}_y = \frac{\sqrt{2}}{2i}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérateur de moment cinétique intrinsèque (spin)

Exemple 2 : pour $j = \frac{1}{2}$:

$$j = \frac{1}{2} \Rightarrow \; m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

C'est un cas particulier, dans ce cas on désigne l'opérateur de moment cinétique intrinsèque (spin) comme $\hat{S}$:

Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=\frac{1}{2}$	Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=-\frac{1}{2}$
$\hat{S}^2\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{3}{4}\hbar^2\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle$	$\hat{S}^2\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{3}{4}\hbar^2\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle$
$\hat{S}_z\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{2}\hbar\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle$	$\hat{S}_z\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{2}\hbar\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle$
$\hat{S}_+\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle=0$	$\hat{S}_+\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle$
$\hat{S}_-\left\|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle$	$\hat{S}_-\left\|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle=0$

Par convention :

Spin up : $\left|+\right\rangle\equiv\left|\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}\right\rangle$

Spin down : $\left|-\right\rangle\equiv\left|\frac{1}{2}\quad-\frac{1}{2}\right\rangle$

Donc :

$\hat{S}^2\left\|+\right\rangle=\frac{3}{4}\hbar^2\left\|+\right\rangle$	$\hat{S}^2\left\|-\right\rangle=\frac{3}{4}\hbar^2\left\|-\right\rangle$
$\hat{S}_z\left\|+\right\rangle=\frac{1}{2}\hbar\left\|+\right\rangle$	$\hat{S}_z\left\|-\right\rangle=-\frac{1}{2}\hbar\left\|-\right\rangle$
$\hat{S}_+\left\|+\right\rangle=0$	$\hat{S}_+\left\|-\right\rangle=\hbar\left\|+\right\rangle$
$\hat{S}_-\left\|+\right\rangle=\hbar\left\|-\right\rangle$	$\hat{S}_-\left\|-\right\rangle=0$

Les éléments des sous-matrices des opérateurs de moment cinétique intrinsèque (Spin)

Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=\frac{1}{2}$	Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=-\frac{1}{2}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}^2 \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\delta_{\frac{1}{2},m'}$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}^2 \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\delta_{-\frac{1}{2},m'}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_z \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\hbar\delta_{\frac{1}{2},m'}$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_z \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\delta_{-\frac{1}{2},m'}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_+ \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = 0$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_+ \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = \hbar\delta_{-\frac{3}{2},m'}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_- \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar\delta_{-\frac{1}{2},m'}$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_- \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$
$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2}$	$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2}$
$\hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i}$	$\hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i}$

Représentation matricielle des opérateurs du moment cinétique intrinsèque (Spin)

On trouve $\hat{S}^2$:

Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=\frac{1}{2}$	Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=-\frac{1}{2}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}^2 \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \delta_{\frac{1}{2},m'}$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}^2 \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \delta_{-\frac{1}{2},m'}$

$$\hat{S}^2 = \begin{array}{ccc} m=\frac{1}{2} & m=-\frac{1}{2} & \\ \frac{3}{4}\hbar & 0 & m'=\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4}\hbar & m'=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Alors :

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{S}_z$:

Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=\frac{1}{2}$	Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=-\frac{1}{2}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_z \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}\hbar \delta_{\frac{1}{2},m'}$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_z \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2}\hbar \delta_{-\frac{1}{2},m'}$

$$\hat{S}_z = \begin{array}{ccc} m=\frac{1}{2} & m=-\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2}\hbar & 0 & m'=\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\hbar & m'=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Alors :

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{S}_+$:

Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=\frac{1}{2}$	Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=-\frac{1}{2}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_+ \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = 0$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_+ \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = \hbar\delta_{\frac{1}{2},m'}$

$$\begin{array}{cccc} & m=\frac{1}{2} & m=-\frac{1}{2} & \\ \hat{S}_+ = & 0 & \hbar & m'=\frac{1}{2} \\ & 0 & 0 & m'=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Alors :

$$\hat{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{S}_-$:

Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=\frac{1}{2}$	Pour $j=\frac{1}{2}$ et $m=-\frac{1}{2}$
$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_- \middle| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar\delta_{-\frac{1}{2},m'}$	$\left\langle \frac{1}{2} \quad m' \middle| \hat{S}_- \middle| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$

$$\begin{array}{cccc} & m=\frac{1}{2} & m=-\frac{1}{2} & \\ \hat{S}_- = & 0 & 0 & m'=\frac{1}{2} \\ & \hbar & 0 & m'=-\frac{1}{2} \end{array}$$

Alors :

$$\hat{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{S}_x$:

$$\hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2} = \frac{\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2}$$

Alors :

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve $\hat{S}_y$:

$$\hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i} = \frac{\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{2i}$$

Alors :

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

En résumé :

$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\hat{S}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\hat{S}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\hat{S}_y = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Les matrices de Pauli

Par définition :

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ils sont les matrices de Pauli. On peut écrire les opérateurs de moment cinétique intrinsèque (spin) comme :

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x \qquad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\hbar\sigma_y \qquad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$$

Les relations de commutation :

C'est comme les relations de commutation du moment cinétique.

Les relations spécifiques :

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I} \qquad \text{et} \qquad \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0$$