Équation de Laplace en coordonnées sphérique

Mécanique Quantique

Hossein Rahimzadeh

8/19/2008

Dans le cas où Φ est indépendant de ϕ

Équation de Laplace :

$$\nabla^2\Phi = 0$$

En coordonnées sphérique :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

Dans une symétrie axiale Φ est indépendant de ϕ donc $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi}=0$.

Soit $\Phi'(r,\theta)$ une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :

$$\Phi'(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$$

On dérive :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi'}{\partial r}=\dfrac{dR(r)}{dr}\Theta(\theta)\\[2ex]\dfrac{\partial\Phi'}{\partial\theta}=R(r)\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\\[2ex]\dfrac{\partial^2\Phi'}{\partial\phi^2}=0\end{cases}$$

On substitut dans l'équation de Laplace :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\Theta(\theta)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta R(r)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]=0$$

On divise par $R(r)\Theta(\theta)$:

$$\frac{1}{R(r)r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\Theta(\theta)r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]=0$$

On multiplie par r^2 :

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]=0$$

On pose :

$$\underbrace{\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]}_{\text{Fonction de } r\,\equiv\, l(l+1)}+\underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]}_{\text{Fonction de } \theta\,\equiv\, -l(l+1)}=0$$

Première équation

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+l(l+1)=0$$

On multiplie par $\Theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

Avec un changement de variable $\mu=\cos\theta$ on arrive à :

$$\mu=\cos\theta \;\Rightarrow\; \begin{cases} d\mu=-\sin\theta d\theta \\ \sin\theta=\dfrac{1-\mu^2}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d}{\underbrace{\sin\theta d\theta}_{-d\mu}}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta(\theta)}{\underbrace{\sin\theta d\theta}_{-d\mu}}\right]+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

C'est l'équation de Legendre, $\Theta(\theta)$ obéit à la même équation que $P_l(\mu)$ alors :

$\Theta_l(\theta)=C_lP_l^m(\mu)=C_lP_l^m(\cos\theta)$, Pour tout les constantes C_l .

Pour $C_l = 1$:

$$\boxed{\Theta_l(\theta) = P_l(\cos\theta)}$$

Deuxième équation

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right] - l(l+1) = 0$$

On simplifie :

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right] - l(l+1)R(r) = 0$$

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + 2r\frac{dR(r)}{dr} - l(l+1)R(r) = 0$$

C'est l'équation d'Euler-Cauchy dont la solution est :

$$\boxed{R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}}$$

Solution particulière :

$$\boxed{\Phi_l'(r,\theta) = R_l(r)\Theta_l(\theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)}$$

Solution générale :

$$\boxed{\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta)}$$

Dans le cas où Φ est indépendant de r

Équation de Laplace :

$$\nabla^2\Phi = 0$$

En coordonnées sphérique :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

Si Φ est indépendant de r alors $\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0$:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

Soit $\Phi'(\theta,\phi)$ une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :

$$\Phi'(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

On dérive :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi'}{\partial r}=0\\[2mm]\dfrac{\partial\Phi'}{\partial\theta}=\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\Phi(\phi)\\[2mm]\dfrac{\partial^2\Phi'}{\partial\phi^2}=\Theta(\theta)\dfrac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}\end{cases}$$

On substitut dans l'équation de Laplace :

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta R(r)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\Phi(\phi)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(r)\Theta(\theta)\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

On divise par $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+\frac{1}{\Phi(\phi)r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

On multiplie par $r^2\sin^2\theta$:

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

On pose :

$$\underbrace{\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]}_{\text{Fonction de } r \text{ et } \theta\equiv -m^2}+\underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}}_{\text{Fonction de } \phi\equiv -m^2}=0$$

Première équation

$$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=-m^2$$

Donc,

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+m^2\Phi(\phi)=0$$

C’est l’équation de Helmholtz dont la solution est :

$$\Phi_m(\phi)=C_m e^{im\phi}$$

On trouve C_m :

$$\int_0^{2\pi} d\phi\Phi_m^*(\phi)\Phi_{m'}(\phi)=\delta_{mm'}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi\left(C_m e^{im\phi}\right)^* C_{m'}e^{im'\phi}=\delta_{mm'}$$

$$C_m C_{m'}\int_0^{2\pi} d\phi e^{-im\phi}e^{im'\phi}=\delta_{mm'}$$

Pour $m = m'$

$$C_m^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 1$$

$$C_m^2 2\pi = 1$$

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Donc,

$$\boxed{\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}}$$

Deuxième équation

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] - m^2 = 0$$

On divise par $\sin^2\theta$:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = 0$$

On pose :

$$\underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] - \frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{\text{Fonction de } \theta \equiv -l(l+1)} = 0$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + l(l+1) = 0$$

On multiplie par $\Theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right] - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta) + l(l+1)\Theta(\theta) = 0$$

Avec un changement de variable $\mu=\cos\theta$ on arrive à :

$$\mu=\cos\theta \;\Rightarrow\; \begin{cases} d\mu=-\sin\theta d\theta \\ \sin\theta=\dfrac{1-\mu^2}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{d}{\sin\theta d\theta}}_{-d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\underbrace{\frac{d\Theta(\theta)}{\sin\theta d\theta}}_{-d\mu}\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

C’est l'équation de Legendre associée.

$\Theta(\theta)$ obéit à la même équation que $P_l^m(\mu)$ alors :

$\Theta_{l,m}(\theta)=C_{l,m}P_l^m(\mu)=C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)$, Pour tout les constantes $C_{l,m}$.

On trouve $C_{l,m}$:

La solution particulière est :

$$\Phi'_{l,m}(\theta,\phi)=\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m\left(\phi\right)=C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)\Phi_m\left(\phi\right)$$

$$\int d\Omega\Phi'^*_{l,m}(\theta,\phi)\Phi'_{l,m}(\theta,\phi)=1$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta\left[C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)\right]^2\int_0^{2\pi}d\phi\Phi^*_m\left(\phi\right)\Phi_m\left(\phi\right)=1$$

$$C_{l,m}^2\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta\left[P_l^m(\cos\theta)\right]^2}_{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\Phi^*_m\left(\phi\right)\Phi_m\left(\phi\right)}_{1}=1$$

Alors,

$$C_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Donc,

$$\boxed{\Theta_{l,m}(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)}$$

Solution particulière :

$$\Phi'_{l,m}(\theta,\phi) = \Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

Alors,

$$\boxed{\Phi'_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}}$$

On définie les Harmonique sphériques :

$$\boxed{Y_{l,m}(\theta,\phi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}}$$

Donc,

$$\Phi'_{l,m}(\theta,\phi) = \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}}_{\equiv Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

Alors,

$$\boxed{\Phi'_{l,m}(\theta,\phi) = Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

Solution générale :

$$\boxed{\Phi_{l,m}(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

Orthonormalité

$$\int d\Omega Y_{l,m}^{*}(\theta,\phi)Y_{l',m'}(\theta,\phi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Ou :

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l,m}^{*}(\theta,\phi)Y_{l',m'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Le cas général

Équation de Laplace :

$$\nabla^2\Phi = 0$$

En coordonnées sphérique :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

Soit $\Phi'(r,\theta,\phi)$ une solution particulière de cette équation, par la méthode de séparation des variables on pose :

$$\Phi'(r,\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

On dérive :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi'}{\partial r}=\dfrac{dR(r)}{dr}\Theta(\theta)\Phi(\phi)\\[2mm] \dfrac{\partial\Phi'}{\partial\theta}=R(r)\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\Phi(\phi)\\[2mm] \dfrac{\partial^2\Phi'}{\partial\phi^2}=R(r)\Theta(\theta)\dfrac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}\end{cases}$$

On substitut dans l'équation de Laplace :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\Theta(\theta)\Phi(\phi)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta R(r)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\Phi(\phi)\right]+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R(r)\Theta(\theta)\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

On divise par $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$:

$$\frac{1}{R(r)r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\Theta(\theta)r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+\frac{1}{\Phi(\phi)r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

On multiplie par $r^2\sin^2\theta$:

$$\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]+\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=0$$

On pose :

$$\underbrace{\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]}_{\text{Fonction de } r \text{ et } \theta\equiv -m^2}+\underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}}_{\text{Fonction de } \phi\equiv -m^2}=0$$

Première équation

$$\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=-m^2$$

Donc,

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+m^2\Phi(\phi)=0$$

C’est l’équation de Helmholtz dont la solution est :

$$\boxed{\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}}$$

Deuxième équation

$$\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]-m^2=0$$

On divise par $\sin^2\theta$:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0$$

On pose :

$$\underbrace{\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]}_{\text{Fonction de } r\equiv l(l+1)}+\underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]-\frac{m^2}{\sin^2\theta}}_{\text{Fonction de } \theta\equiv -l(l+1)}=0$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+l(l+1)=0$$

On multiplie par $\Theta(\theta)$:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right]-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

Avec un changement de variable $\mu=\cos\theta$ on arrive à :

$$\mu=\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} d\mu=-\sin\theta d\theta \\ \sin\theta=\dfrac{1-\mu^2}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d}{\underbrace{\sin\theta d\theta}_{-d\mu}}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta(\theta)}{\underbrace{\sin\theta d\theta}_{-d\mu}}\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$$

C'est l'équation de Legendre associée. $\Theta(\theta)$ obéit à la même équation que $P_l^m(\mu)$ alors :

$\Theta_{l,m}(\theta)=C_{l,m}P_l^m(\mu)=C_{l,m}P_l^m(\cos\theta)$, Pour tout les constantes $C_{l,m}$.

Pour les raisons d'orthonormalité on à choisi $C_{l,m}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$

$$\boxed{\Theta_{l,m}(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)}$$

Troisième équation

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]-l(l+1)=0$$

On simplifie :

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]-l(l+1)R(r)=0$$

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}+2r\frac{dR(r)}{dr}-l(l+1)R(r)=0$$

C’est l'équation d’Euler-Cauchy dont la solution est :

$$\boxed{R_l(r)=A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}}$$

Solution particulière :

$$\Phi'_{l,m}(r,\theta,\phi)=R_l(r)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi)=\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$$

$$=\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}}_{\equiv Y_{l,m}(\theta,\phi)}=\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

Alors :

$$\boxed{\Phi'_{l,m}(r,\theta,\phi)=\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

Solution générale :

$$\boxed{\Phi(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_lr^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)Y_{l,m}(\theta,\phi)}$$

En résumé:

Dans le cas où Φ est indépendant de ϕ (symétrie axiale)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)=0$$

Équation de Legendre : $\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]+l(l+1)\Theta(\theta)=0$

Solution : $\Theta_l(\theta)=P_l(\cos\theta)$

Équation d'Euler-Cauchy : $\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]-l(l+1)=0$

Solution : $R_l(r)=A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}$

Solution particulière :

$$\Phi_l'(r,\theta) = R_l(r)\Theta_l(\theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Solution générale :

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Dans le cas où Φ est indépendant de r

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

Équation de Helmholtz : $\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=-m^2$

Solution : $\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$

Équation de Legendre associée : $\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$

Solution : $\Theta_{l,m}(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)$

Solution particulière :

$$\Phi'_{l,m}(\theta,\phi) = \Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m\left(\phi\right) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

Ou,

$$\Phi'_{l,m}(\theta,\phi) = Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

Solution générale :

$$\Phi(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

Le cas général

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

Équation de Helmholtz : $\frac{1}{\Phi(\phi)}\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}=-m^2$

Solution : $\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}$

Équation de Legendre associée : $\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}\Theta(\theta)\right]-\frac{m^2}{1-\mu^2}\Theta(\theta)+l(l+1)\Theta(\theta)=0$

Solution : $\Theta_{l,m}(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)$

Équation d'Euler-Cauchy : $\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]-l(l+1)=0$

Solution : $R_l(r)=A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}$

Solution particulière :

$$\Phi'_{l,m}(r,\theta,\phi) = R_l(r)\Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\phi) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

Ou,

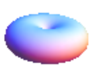
$$\Phi'_{l,m}(r,\theta,\phi) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

Solution générale :

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)Y_{l,m}(\theta,\phi)$$

Les Harmoniques Sphériques

	$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$l=0$			$Y_{0,0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$		
$l=1$		$Y_{1,-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta$	$Y_{1,0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$	$Y_{1,1}(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta$	
$l=2$	$Y_{2,-2}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{-2i\phi}\sin^2\theta$	$Y_{2,-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta$	$Y_{2,0}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)$	$Y_{2,1}(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta$	$Y_{2,2}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{2i\phi}\sin^2\theta$

	$m=-2$	$m=-1$	$m=0$	$m=1$	$m=2$
$l=0$			$\lvert Y_0^0(\theta,\phi)\rvert$ 		
$l=1$		$\lvert Y_1^{-1}(\theta,\phi)\rvert$ 	$\lvert Y_1^0(\theta,\phi)\rvert$ 	$\lvert Y_1^1(\theta,\phi)\rvert$ 	
$l=2$	$\lvert Y_2^{-2}(\theta,\phi)\rvert$ 	$\lvert Y_2^{-1}(\theta,\phi)\rvert$ 	$\lvert Y_2^0(\theta,\phi)\rvert$ 	$\lvert Y_2^1(\theta,\phi)\rvert$ 	$\lvert Y_2^2(\theta,\phi)\rvert$