باسمه تعالی

سیستم‌های کنترل پیشرفته (مدرن)

آزمون پایانی

۱۴۰۴-۱۴۰۵-۱

---

۱. مقدمه

در بسیاری از کاربردهای عملی مهندسی کنترل، مدل ریاضی دقیق سیستم در دسترس نیست. در چنین شرایطی، مهندسان باید با استفاده از داده‌های ورودی-خروجی، مدل سیستم را شناسایی کنند. این فرآیند که شناسایی سیستم [1] نامیده می‌شود، یکی از مهارت‌های اساسی در مهندسی کنترل است.

در این آزمون، یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان [2] به صورت یک جعبه سیاه [3] در محیط Simulink در اختیار شما قرار داده شده است. شما تنها به ورودی و خروجی این سیستم دسترسی دارید و هیچ اطلاعاتی از ساختار داخلی آن ندارید.

*** اهداف**

۱. شناسایی مدل فضای حالت سیستم از روی داده‌های ورودی-خروجی

۲. تحلیل پایداری، کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم شناسایی‌شده

۳. تحلیل پایداری لیاپانوف و یافتن تابع لیاپانوف

۴. طراحی فیدبک حالت برای جایابی قطب

۵. طراحی رؤیتگر (تخمینگر) حالت (مرتبه کامل و کاهش‌مرتبه)

۶. طراحی سیستم ردیاب با کنترل انتگرالی

۷. تبدیل به فرم‌های کانونیک (کنترل‌پذیر، رؤیت‌پذیر، جردن)

۸. اعتبارسنجی نتایج با مقایسه سیستم شناسایی‌شده و جعبه سیاه اصلی

---

[1] System Identification

[2] Linear Time-Invariant (LTI)

[3] Black Box

۲. خلاصه روش شناسایی سیستم

*** توجه مهم**

جزئیات کامل روش شناسایی سیستم در فایل ضمیمه آورده شده است. همچنین اکثر موارد این بخش منطبق با فصل ۷ کتاب Chen که مرجع اصلی درس است، می‌باشد و مطالعه آن بخش می‌تواند کمک کننده باشد.

۱.۲. خلاصه الگوریتم

برای شناسایی یک سیستم خطی پیوسته $\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad y = C_c x$ از روی داده‌های ورودی-خروجی، مراحل زیر را دنبال کنید:

۱. اعمال ورودی ضربه: یک پالس باریک با عرض T_s و ارتفاع $\frac{1}{T_s}$ به سیستم اعمال کنید.

۲. نمونه‌برداری: خروجی را با زمان نمونه‌برداری T_s ذخیره کنید. این نمونه‌ها پارامترهای مارکوف h_k هستند.

۳. ساخت ماتریس هنکل: از پارامترهای مارکوف، ماتریس هنکل $\mathcal{H}$ را بسازید.

۴. تعیین مرتبه: با محاسبه SVD ماتریس هنکل، مرتبه سیستم را از تعداد مقادیر تکین قابل توجه تعیین کنید.

۵. استخراج ماتریس‌ها: با استفاده از الگوریتم هو-کالمن، ماتریس‌های گسسته (A_d, B_d, C_d) را بدست آورید.

۶. تبدیل به پیوسته: با دستور d2c سیستم پیوسته را بدست آورید.

۲.۲. راهنمای کد **MATLAB**

گام ۱: ساخت ماتریس هنکل از پاسخ ضربه

```
% h = sampled impulse response (Markov parameters)
% L = Hankel matrix size (L >= 2*n)
H = zeros(L, L);
for i = 1:L
    for j = 1:L
        H(i,j) = h(i+j-1);
    end
end
```

گام ۲: تجزیه **SVD** و تعیین مرتبه

```
[U, S, V] = svd(H);
singular_values = diag(S);
% n = number of significant singular values
```

گام ۳: استخراج ماتریس‌های گسسته (الگوریتم هو-کالمن)

```
Un = U(:,1:n); Sn = S(1:n,1:n); Vn = V(:,1:n);
Obs = Un * sqrt(Sn);       % Observability matrix
```

```
Con = sqrt(Sn) * Vn';      % Controllability matrix
Cd = Obs(1,:);             % First row
Bd = Con(:,1);             % First column
Ad = sqrt(Sn) \ Un' * Hs * Vn / sqrt(Sn);  % Hs = shifted Hankel
```

گام ۴: تبدیل به سیستم پیوسته

```
Ts = 0.01;  % sampling time
sysd = ss(Ad, Bd, Cd, 0, Ts);
sysc = d2c(sysd, 'zoh');
[Ac, Bc, Cc, Dc] = ssdata(sysc);
```

*** نکات کلیدی**

۱. زمان نمونه‌برداری پیشنهادی: $T_s = 0.01$ ثانیه.

۲. اندازه ماتریس هنکل: $L \geq 2n$ (حداقل دو برابر مرتبه سیستم).

۳. مرتبه سیستم از افت شدید در مقادیر تکین تعیین می‌شود.

۴. برای جزئیات کامل به فایل ضمیمه مراجعه کنید.

۳. خواسته‌ها

* راهنمای کلی

۱. تمام شبیه‌سازی‌ها باید در محیط MATLAB/Simulink انجام شوند.

۲. در تمام سؤالات، مراحل کار و روابط ریاضی را به طور کامل توضیح دهید.

۳. نمودارها باید دارای عنوان، برچسب محورها و راهنما (legend) باشند.

۴. کدهای MATLAB باید خوانا و دارای توضیحات کافی باشند.

بخش الف: شناسایی سیستم (سؤالات ۱ تا ۳)

۱. شناسایی مدل سیستم: با استفاده از روش توضیح‌داده‌شده در بخش ۲ (الگوریتم هو-کالمن)، مدل فضای حالت سیستم جعبه سیاه را شناسایی کنید.

الف) یک پالس باریک با عرض $T_s = 0.01$ ثانیه و ارتفاع $\frac{1}{T_s} = 100$ به ورودی سیستم اعمال کنید.

ب) خروجی سیستم را با زمان نمونه‌برداری $T_s = 0.01$ ثانیه برای مدت ۵ ثانیه ذخیره کنید.

ج) ماتریس هنکل را بسازید و مقادیر تکین آن را محاسبه کنید.

د) مرتبه سیستم را از روی مقادیر تکین تعیین کنید و دلیل انتخاب خود را توضیح دهید.

ه) ماتریس‌های فضای حالت گسسته (A_d, B_d, C_d) را محاسبه کنید.

و) با استفاده از دستور d2c، سیستم پیوسته (A_c, B_c, C_c) را بدست آورید.

۲. اعتبارسنجی مدل شناسایی‌شده: برای بررسی صحت مدل شناسایی‌شده:

الف) پاسخ پله سیستم شناسایی‌شده را با استفاده از دستور step رسم کنید.

ب) یک ورودی پله واحد به سیستم جعبه سیاه در Simulink اعمال کنید و خروجی را ذخیره کنید.

ج) دو پاسخ را در یک نمودار رسم کنید و میزان تطابق آن‌ها را بررسی کنید.

د) خطای نسبی بین دو پاسخ را محاسبه و گزارش کنید.

۳. گزارش ماتریس‌های فضای حالت: ماتریس‌های A، B، C و D سیستم پیوسته شناسایی‌شده را با دقت ۴ رقم اعشار گزارش کنید.

بخش ب: تحلیل سیستم (سؤالات ۴ تا ۷)

۴. تحلیل پایداری:

الف) مقادیر ویژه ماتریس A را محاسبه کنید.

ب) با توجه به محل قطب‌ها، پایداری سیستم را بررسی کنید.

ج) قطب‌ها را در صفحه مختلط رسم کنید.

۵. کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری:

الف) ماتریس کنترل‌پذیری $\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$ را محاسبه کنید.

ب) ماتریس رؤیت‌پذیری $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید.

ج) با محاسبه رتبه این ماتریس‌ها، کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری سیستم را بررسی کنید.

د) نتایج خود را با استفاده از دستورات ctrb، obsv و rank در MATLAB تأیید کنید.

۶. مینیمال بودن تحقق:

الف) با توجه به نتایج سؤال ۵، آیا تحقق شناسایی‌شده مینیمال است؟ دلیل بیاورید.

ب) اگر تحقق مینیمال نیست، یک تحقق مینیمال از سیستم ارائه دهید.

ج) از دستور minreal برای تأیید نتیجه خود استفاده کنید.

۷. ماتریس انتقال حالت و تابع تبدیل:

الف) ماتریس انتقال حالت $\Phi(t) = e^{At}$ را به صورت تحلیلی محاسبه کنید.

ب) تابع تبدیل سیستم $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ را بدست آورید.

ج) قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل را گزارش کنید.

د) نتایج خود را با دستورات tf، pole و zero تأیید کنید.

بخش ج: طراحی فیدبک حالت (سؤالات ۸ تا ۱۰)

۸. جایابی قطب با فیدبک حالت:

یک کنترلر فیدبک حالت به صورت $u = -Kx + r$ طراحی کنید.

الف) طراحی با قطب‌های کند: قطب‌های حلقه بسته را در محدوده $[1, 3]$ قرار دهید. ماتریس بهره K را محاسبه کنید.

ب) طراحی با قطب‌های سریع: قطب‌های حلقه بسته را در مجدوده $[5, 8]$ قرار دهید. ماتریس بهره K را محاسبه کنید.

ج) برای هر دو حالت، پاسخ پله سیستم حلقه بسته را شبیه‌سازی و رسم کنید.

د) سیگنال کنترلی $u(t)$ را برای هر دو حالت رسم کنید.

ه) مقایسه کنید: چه هزینه‌ای (از نظر دامنه سیگنال کنترلی) برای سریع‌تر شدن پاسخ پرداخت می‌شود؟

۹. عملکرد در حضور اغتشاش:

سؤال ۸ را در حضور اغتشاش تکرار کنید.

الف) یک اغتشاش با دامنه محدود و متغیر با زمان به متغیرهای حالت اضافه کنید.

ب) پاسخ سیستم با قطب‌های کند و سریع را در حضور این اغتشاش شبیه‌سازی کنید.

ج) کدام طراحی (کند یا سریع) مقاومت بهتری در برابر اغتشاش دارد؟ دلیل بیاورید.

۱۰. طراحی سیستم ردیاب با کنترل انتگرالی:

برای ردیابی ورودی مرجع با خطای حالت ماندگار صفر، یک کنترلر با عمل انتگرالی طراحی کنید.

الف) سیستم تعمیم‌یافته با حالت انتگرالی $x_I = \int (r-y)dt$ را بنویسید:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

ب) کنترل‌پذیری سیستم تعمیم‌یافته را بررسی کنید.

ج) فیدبک حالت $u = -K_x x - K_I x_I$ را طوری طراحی کنید که قطب‌های حلقه بسته در مکان‌های مناسب قرار گیرند.

د) پاسخ سیستم به ورودی پله با دامنه ۱.۰ را شبیه‌سازی کنید و نشان دهید خطای حالت ماندگار صفر است.

بخش د: طراحی رؤیتگر (سؤالات ۱۱ تا ۱۳)

۱۱. رؤیتگر لیونبرگر مرتبه کامل:

الف) یک رؤیتگر مرتبه کامل با معادله زیر طراحی کنید:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

ب) ماتریس بهره رؤیتگر L را طوری انتخاب کنید که قطب‌های رؤیتگر ۳ تا ۵ برابر سریع‌تر از قطب‌های کنترلر باشند.

ج) سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت تخمینی $u = -K\hat{x}$ را شبیه‌سازی کنید.

د) خطای تخمین $e = x - \hat{x}$ را رسم کنید و نشان دهید که به صفر میل می‌کند.

ه) رویتگر را به ازای شرایط اولیه متفاوت هم سیستم و هم خود رویتگر تست کنید.

۱۲. رؤیتگر کاهش‌مرتبه:

الف) با فرض اینکه خروجی $y = Cx$ مستقیماً قابل اندازه‌گیری است، یک رؤیتگر کاهش‌مرتبه برای تخمین حالت‌های غیرقابل اندازه‌گیری طراحی کنید.

ب) معادلات رؤیتگر کاهش‌مرتبه را بنویسید.

ج) سیستم حلقه بسته با رؤیتگر کاهش‌مرتبه را شبیه‌سازی کنید.

د) عملکرد رؤیتگر کاهش‌مرتبه را با رؤیتگر مرتبه کامل مقایسه کنید.

۱۳. آزمون مقاومت در برابر اغتشاش:

برای بررسی مقاومت سیستم کنترلی طراحی‌شده (با رؤیتگر مرتبه کامل یا کاهش‌مرتبه):

الف) ابتدا اجازه دهید سیستم به حالت ماندگار برسد (حدود ۱۰ ثانیه).

ب) یک پالس با دامنه $+0.1$ و عرض 0.05 ثانیه به خروجی سیستم اعمال کنید.

ج) پاسخ سیستم را رسم کنید و بررسی کنید که آیا سیستم به حالت ماندگار برمی‌گردد.

د) آزمایش را با پالس دامنه -0.1 تکرار کنید.

ه) نتایج را تحلیل کنید و در مورد مقاومت سیستم بحث کنید.

بخش ه: تحلیل پایداری لیاپانوف (سؤالات ۱۴ تا ۱۶)

۱۴. پایداری لیاپانوف برای سیستم حلقه باز:

معادله لیاپانوف [۴] برای سیستم خطی $\dot{x} = Ax$ به صورت زیر است:

$$A^T P + PA = -Q$$

[4] Lyapunov Equation

الف) با انتخاب $Q = I$ (ماتریس همانی)، معادله لیاپانوف را برای ماتریس A سیستم شناسایی‌شده حل کنید و ماتریس P را بدست آورید.

ب) نشان دهید که ماتریس P بدست‌آمده معین مثبت است. (راهنمایی: مقادیر ویژه P را محاسبه کنید.)

ج) با توجه به قضیه لیاپانوف، نتیجه‌گیری کنید که سیستم مجانباً پایدار است.

د) از دستور lyap در MATLAB برای تأیید نتیجه خود استفاده کنید.

ه) سعی کنید یک ماتریس Q غیر همانی (مجاز به استفاده از ضرایب ماتریس همانی نیز نیستید) پیشنهاد دهید و خواسته‌ها را تکرار کنید.

۱۵. تابع لیاپانوف و تحلیل انرژی:

الف) تابع لیاپانوف $V(x) = x^T P x$ را با استفاده از ماتریس P بدست‌آمده در سؤال قبل تعریف کنید.

ب) نشان دهید که $V(x) > 0$ برای همه $x \neq 0$ (معین مثبت بودن).

ج) مشتق زمانی تابع لیاپانوف را محاسبه کنید:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

و نشان دهید که $\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0$ برای همه $x \neq 0$.

د) با شبیه‌سازی، تابع $V(x(t))$ را برای یک شرایط اولیه دلخواه رسم کنید و نشان دهید که به صورت یکنوا کاهش می‌یابد.

۱۶. پایداری سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت:

الف) برای سیستم حلقه بسته با فیدبک حالت $u = -Kx$ (با K طراحی‌شده در سؤال ۸-ب)، ماتریس حلقه بسته $A_{cl} = A - BK$ را محاسبه کنید.

ب) معادله لیاپانوف را برای A_{cl} حل کنید و ماتریس P_{cl} را بدست آورید.

ج) پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته را با استفاده از قضیه لیاپانوف اثبات کنید.

د) تابع لیاپانوف $V_{cl}(x) = x^T P_{cl} x$ را برای سیستم حلقه بسته شبیه‌سازی کنید و با سیستم حلقه باز مقایسه کنید.

بخش و: فرم‌های کانونیک و تبدیل تشابهی

۱۷. فرم کانونیک کنترل‌پذیر:

الف) چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را محاسبه کنید:

$$\det(sI - A) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

ب) ماتریس تبدیل T_c را برای تبدیل سیستم به فرم کانونیک کنترل‌پذیر بدست آورید.

ج) سیستم را به فرم کانونیک کنترل‌پذیر تبدیل کنید:

$$\bar{A}_c = T_c^{-1} A T_c, \quad \bar{B}_c = T_c^{-1} B, \quad \bar{C}_c = C T_c$$

د) تأیید کنید که $\bar{A}_c$ به فرم زیر است:

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

ه) از دستور canon در MATLAB برای تأیید نتیجه استفاده کنید.

۱۸. فرم کانونیک رؤیت‌پذیر:

الف) ماتریس تبدیل T_o را برای تبدیل سیستم به فرم کانونیک رؤیت‌پذیر بدست آورید.

ب) سیستم را به فرم کانونیک رؤیت‌پذیر تبدیل کنید و ماتریس‌های $(\bar{A}_o, \bar{B}_o, \bar{C}_o)$ را گزارش کنید.

ج) رابطه دوگانگی بین فرم کانونیک کنترل‌پذیر و رؤیت‌پذیر را توضیح دهید.

د) نشان دهید که $\bar{A}_o = \bar{A}_c^T$.

۱۹. فرم جردن و تحلیل مدها:

الف) فرم جردن ماتریس A را محاسبه کنید:

$$J = T_J^{-1} A T_J$$

که در آن T_J ماتریس تبدیل جردن است.

ب) سیستم را در مختصات جردن بنویسید و نشان دهید که هر مد سیستم مستقل از سایر مدها تکامل می‌یابد.

ج) کنترل‌پذیری و رؤیت‌پذیری هر مد را جداگانه بررسی کنید.

$$rank([A-\lambda_i I \quad B]) = n \quad (\text{کنترل‌پذیری مد } \lambda_i)$$

$$rank\begin{bmatrix} A-\lambda_i I \\ C \end{bmatrix} = n \quad (\text{رؤیت‌پذیری مد } \lambda_i)$$

د) اگر مدی کنترل‌پذیر یا رؤیت‌پذیر نباشد، چه اتفاقی می‌افتد؟ توضیح دهید.

بخش ح: اعتبارسنجی نهایی

۲۰. مقایسه سیستم شناسایی‌شده با جعبه سیاه:

الف) کنترلر طراحی‌شده در سؤال ۱۰ (فیدبک حالت با عمل انتگرالی) را به سیستم جعبه سیاه اصلی در Simulink متصل کنید. (دقت کنید که با توجه به اینکه در سیستم جعبه سیاه فقط دسترسی به خروجی دارید استفاده از رویتگر نیاز می‌باشد.)

ب) همان کنترلر را به مدل شناسایی‌شده متصل کنید.

ج) پاسخ هر دو سیستم به ورودی پله با دامنه ۱.۰ را در یک نمودار رسم کنید.

د) میزان تطابق دو پاسخ را بررسی کنید و در مورد دقت شناسایی بحث کنید.

ه) اگر تفاوت قابل توجهی وجود دارد، دلایل احتمالی را بررسی کنید.

۴. نحوه تحویل

خواهشمند است جهت تحویل آزمون به نکات زیر توجه داشته باشید:

۱. فایل ارسالی باید شامل موارد زیر باشد:

۱.۱. یک فایل گزارش به صورت PDF شامل پاسخ تشریحی تمام سؤالات، روابط ریاضی، نمودارها و تحلیل نتایج

۲.۱. تمام فایل‌های MATLAB با پسوند m.

۳.۱. تمام فایل‌های Simulink با پسوند slx.

۲. تمام فایل‌ها می‌بایست به صورت یک فایل فشرده با فرمت zip در قالب **MC-Final-SID** ارسال شود. (که در آن SID شماره دانشجویی شماست.)

۳. کدها باید قابل اجرا باشند. قبل از ارسال، مطمئن شوید که تمام کدها بدون خطا اجرا می‌شوند.

۴. استفاده از هوش مصنوعی برای نوشتن گزارش مجاز نیست. در صورت مشاهده، نمره صفر داده خواهد شد.