NUM5

Cel ćwiczenia:

Rozwiązanie układu równań dla N=124 za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela, przedstawienie graficznie różnic pomiędzy dokładnymi rozwiązaniami a jego kolejnymi iteracjami wybierając kilka zestawów punktów startowych.

Opis ćwiczenia:

1. Zdefiniowanie funkcji do metody Jacobiego
2. Zdefiniowanie funkcji do metody Gaussa-Seidela
3. Zdefiniowanie funkcji do rysowania wykresów

Teoria:

Metoda Jacobiego i Gaussa-Seidela to metody iteracyjne. Różnica względem poprzednich zadań jest taka, że wcześniej stosowaliśmy metody, które pozwalały nam na ,,dokładne" obliczenie rozwiązań.
Teraz będziemy rozwiązywać iterację do momentu aż osiągniemy satysfakcjonujący nas wynik, czyli wynik, który będzie mieścił się w granicach błędu.

Metoda Jacobiego:

Aby metoda Jacobiego była zbieżna jego wartości bezwzględne elementów na głównej przekątnej są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w wierszach.
Na szczęście w naszej macierzy jest to spełnione, więc metoda na pewno będzie zbieżna.

Metoda Gaussa-Seidela:

Aby metoda Gaussa-Seidela była zbieżna, macierz musi być dodatnio określona i symetryczna. Tak samo jak wcześniej ten punkt jest spełniony.

Nasza macierz:

Naszą macierz A możemy rozłożyć na macierze L D U. Czyli macierz poddiagonalną, macierz diagonalną oraz macierz nad diagonalną.

Dla metody Jacobiego A = D + (L+U):

$$x_i^{n+1} = \left(b_i - \sum_{k<i} a_{ik} x_k^n - \sum_{k>i} a_{ik} x_k^n\right) \frac{1}{a_{ii}}$$

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i - x_{i-1}^n - 0.15 x_{i-2}^n - x_{i+1}^n - 0.15 x_{i+2}^n}{3}$$

Dla metody Gaussa-Seidela A=(L+D) + U

$$x_i^{n+1} = \left(b_i - \sum_{k<i} a_{ik} x_k^{n+1} - \sum_{k>i} a_{ik} x_k^n\right) \frac{1}{a_{ii}}$$

$$x_i^{n+1} = \frac{b_i - x_{i-1}^n - 0.15 x_{i-2}^{n+1} - x_{i+1}^n - 0.15 x_{i+2}^n}{3}$$

W naszym przypadku korzystając z metod iteracyjnych, musimy ustalić limity i warunki, kiedy program musi się zakończyć. Do wyznaczenia zbieżności naszych metod użyjemy norm euklidesowych. Będziemy je porównywać z każdą iteracją do momentu aż różnica będzie mniejsza niż ustalona przez nas precyzja. W tym momencie program wypisze nasze rezultaty.

WYNIKI

Metoda Jacobiego:

[0.1780152340634895, 0.38116168368745224, 0.5652840941469102, 0.7547708048477565, 0.943419626096l287, 1.132064084402794, 1.3207574555922388, 1.5094336291724035, 1.6981131715560345, 1.8867924844920054, 2.0754716888554863, 2.264150944908271, 2.4528301886631145, 2.641509433882433, 2.8301886792745345, 3.018867924522245, 3.207547169811684, 3.3962264150944037, 3.5849056603771623, 3.773584905660286, 3.962264150943278, 4.150943396226298, 4.339622641509314, 4.528301886792332, 4.7169811320753485, 4.905660377358367, 5.094339622641384, 5.283018867924403, 5.47169811320742, 5.6603773584904395, 5.849056603773459, 6.037735849056478, 6.226415094339495, 6.415094339622517, 6.603773584905536, 6.792452830188555, 6.981132075471575, 7.169811320754595, 7.358490566037616, 7.547169811320636, 7.735849056603655, 7.924528301886675, 8.113207547169692, 8.301886792452715, 8.490566037735734, 8.679245283018753, 8.867924528301774, 9.056603773584795, 9.245283018867815, 9.433962264150834, 9.622641509433855, 9.811320754716876, 9.999999999999893, 10.188679245282914, 10.37735849056593, 10.56603773584895, 10.75471698113197, 10.94339622641499, 11.132075471698009, 11.320754716981027, 11.509433962264046, 11.698113207547065, 11.88679245283008, 12.0754716981131, 12.26415094339612, 12.452830188679137, 12.641509433962156, 12.830188679245175, 13.018867924528193, 13.207547169811212, 13.396226415094231, 13.58490566037725, 13.773584905660266, 13.962264150943286, 14.150943396226305, 14.339622641509322, 14.528301886792342, 14.716981132075361, 14.90566037735838, 15.094339622641394, 15.283018867924417, 15.471698113207433, 15.66037735849045, 15.849056603773471, 16.037735849056492, 16.22641509433951, 16.415094339622538, 16.60377358490555, 16.792452830188573, 16.98113207547159, 17.1698113207546, 17.358490566037627, 17.54716981132064, 17.735849056603662, 17.924528301886685, 18.113207547169697, 18.301886792452716, 18.49056603773574, 18.679245283018755, 18.867924528301774, 19.056603773584836, 19.245283018867628, 19.433962264151404, 19.622641509433667, 19.81132075470816, 20.00000000005831, 20.18867924506873, 20.377358490884017, 20.566037737631657, 20.75471696425553, 20.943396301364654, 21.13207529736037, 21.320754490966383, 21.509438472994045, 21.698088743608906, 21.886867012254285, 22.075434068531063, 22.26306920098513, 22.460321797505387, 22.61337652779854, 22.87515845613541, 23.232865218771025, 21.061564102655183, 33.151168704843045]

Metoda Gaussa-Seidela:

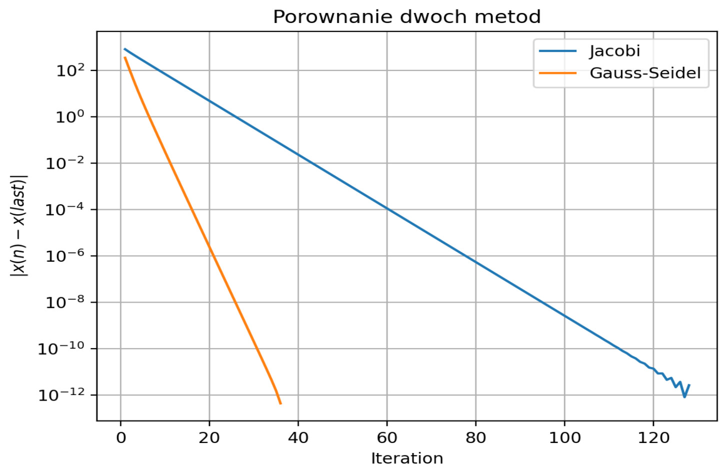
[0.17801523406349687, 0.38116168368747005, 0.5652840941469258, 0.7547708048477988, 0.9434196260961443, 1.132064084402864, 1.320757455592257, 1.5094336291724915, 1.6981131715560662, 1.8867924844921005, 2.07547168885554, 2.2641509449083617, 2.4528301886631954, 2.6415094338825225, 2.830188679274631, 3.0188679245223415, 3.207547169811789, 3.3962264150945067, 3.584905660377275, 3.7735849056603983, 3.9622641509433882, 4.150943396226426, 4.339622641509419, 4.528301886792469, 4.716981132075456, 4.9056603773585055, 5.094339622641494, 5.28301886792455, 5.471698113207517, 5.660377358490602, 5.849056603773551, 6.037735849056628, 6.226415094339614, 6.415094339622635, 6.603773584905682, 6.792452830188648, 6.981132075471734, 7.1698113207546825, 7.358490566037765, 7.547169811320734, 7.7358490566037865, 7.9245283018867845, 8.113207547169818, 8.301886792452821, 8.49056603773586, 8.679245283018847, 8.867924528301922, 9.05660377358486, 9.245283018867982, 9.433962264150878, 9.622641509434027, 9.811320754716926, 10.000000000000044, 10.188679245282993, 10.37735849056605, 10.566037735849054, 10.754716981132072, 10.943396226415095, 11.132075471698125, 11.320754716981114, 11.509433962264177, 11.698113207547143, 11.886792452830209, 12.075471698113196, 12.264150943396226, 12.452830188679256, 12.641509433962247, 12.830188679245301, 13.018867924528287, 13.20754716981133, 13.396226415094334, 13.584905660377368, 13.773584905660357, 13.962264150943426, 14.150943396226387, 14.339622641509452, 14.528301886792446, 14.71698113207546, 14.905660377358515, 15.094339622641478, 15.283018867924563, 15.471698113207509, 15.660377358490607, 15.849056603773553, 16.037735849056627, 16.22641509433961, 16.415094339622648, 16.603773584905664, 16.79245283018868, 16.9811320754717, 17.169811320754715, 17.35849056603774, 17.547169811320742, 17.73584905660379, 17.92452830188677, 18.113207547169825, 18.301886792452834, 18.490566037735835, 18.679245283018894, 18.867924528301852, 19.05660377358497, 19.24528301886771, 19.43396226415153, 19.622641509433755, 19.811320754708273, 20.000000000058403, 20.18867924506883, 20.377358490884106, 20.566037737631753, 20.75471696425561, 20.94339630136474, 21.132075297360444, 21.32075449096646, 21.509438472994116, 21.698088743608967, 21.886867012254346, 22.075434068531106, 22.263069200985182, 22.46032179750542, 22.613376527798575, 22.875158456135434, 23.232865218771042, 21.0615641026552, 33.15116870484305]

Podsumowanie

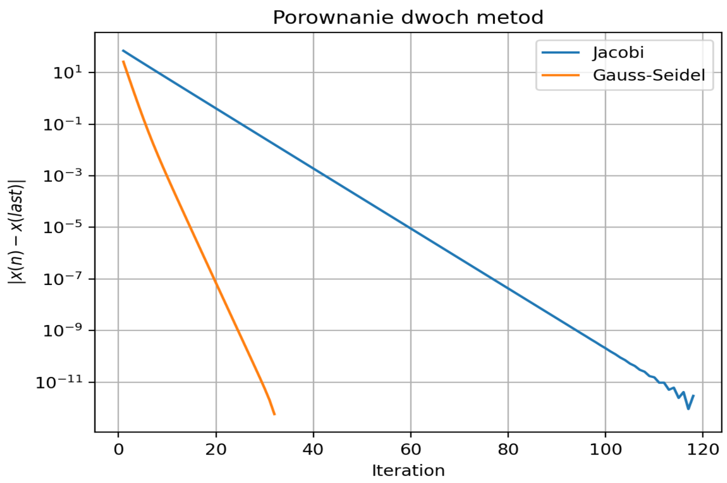
Wyniki obu metod dają niemal takie same wyniki, różnice są minimalne i najprawdopodobniej spowodowane zaokrąglaniem liczb do określonej precyzji. Jak widać na poniższych wykresach, metoda Gaussa-Seidela zbiega szybciej od metody Jacobiego.
Wynika to z tego, iż w metodzie Gaussa-Seidela do obliczeń używamy najbardziej aktualnych wartości jak tylko możemy, a w metodzie Jacobiego w każdej iteracji bazujemy na wektorze ze stanu poprzedniej iteracji.

Wykresy

Jacobi vs Gauss-Seidel w losowym wektorze x:



Jacobi vs Gauss-Seidel w wektorze [7,7…]



Uruchomienie:

make run – uruchamia program wraz z wykresem dla losowego wektora