# NUM9

**Cel ćwiczenia:**

Znalezienie numerycznie pierwiastka równań $f(x) = 0$ i $g(x) = 0$ dla

a) $f(x) = \sin(x) - 0.4$
b) $g(x) = f(x)^2 = (\sin(x) - 0.4)^2$

Na przedziale x zawartym między 0 a $\frac{\pi}{2}$ za pomocą metod bisekcji, falsi, siecznych i Newtona.

## Teoria:

**Metoda bisekcji:**

Warunek działania: $f(a) \cdot f(b) < 0$

Metoda ta nazywana jest metodą połowienia, pozwala znaleźć pierwiastek dowolnej funkcji na zadanym przedziale.

Funkcja musi być ciągła na całym przedziale, określona na całym przedziale i na krańcach przedziałów wartości funkcji muszą mieć przeciwne znaki.

Na początku wyliczamy punkt środkowy przedziału [a,b] ze wzoru $c \frac{(a+b)}{2}$, następnie sprawdzamy czy wystąpił warunek stopu.

Jeżeli tak to pętla się przerywa, jeżeli nie to program sprawdza $f(a) \cdot f(c) < 0$. Jeżeli ten warunek jest spełniony to ustalamy, że nasze b = c. Później jeżeli $f(c) \cdot f(b) < 0$ możemy przyjąć, że a = c.

**Metoda Falsi:**

Warunkiem działania jest $f(a) \cdot f(b) < 0$. Metoda jest niemal identyczna do metody bisekcji. Różni się jedynie tym jakim sposobem wyznaczamy punkt c.

Funkcja musi być ciągła na całym przedziale, określona na całym przedziale oraz na krańcach przedziałów wartości funkcji muszą mieć przeciwne znaki.

Jako przybliżenie miejsca zerowego bierzemy punkt, który jest przecięciem siecznej przechodzącej przez punkty na krańcach przedziału i osi odciętych.

Wyznaczamy go wzorem: $c = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$

Jeżeli warunek stopu nie zajdzie to algorytm jest ponawiany jako nowy przedział w którym funkcja zmienia swój znak.

**Metoda siecznych**

Metoda jest często mylona z metodą Falsi.

**Warunki:** Funkcja musi być ciągła na całym przedziale oraz określona na całym przedziale.

Punkt wyjścia to dowolne dwa punkty dla których wartości funkcji są różne.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Jeżeli wartość bezwzględna różnicy $x_i$ oraz dokładnego rozwiązania jest mniejsza od ustalonej tolerancji to pętla się przerywa. Gdy to nie nastąpi wszystkie kroki są powtarzane. Metoda ta w niektórych przypadkach może zawodzić czyli nie być zbieżna.

**Metoda Newtona**

Nazywana jest również metodą stycznych, jest to algorytm iteracyjny prowadzący do wyznaczenia przybliżonej wartości miejsca zerowego funkcji jednej zmiennej lub wielu zmiennych.

Przybliżenie szukanego miejsca zerowego w tej metodzie dla każdej iteracji określamy wzorem:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Wzór iteracyjny powtarzamy do momentu, aż $x_{i+1} - x_i < \varepsilon$

Dla tej metody dodatkowo musimy wyliczyć pochodną funkcji dla której szukamy miejsca zerowego.

Jednym z potencjalnych problemów tej metody jest konieczność istnienia pochodnej funkcji oraz konieczność rozpoczęcia od odpowiednio dobranego początkowego przybliżenia.

Metoda Newtona jest szeroko stosowana ze względu na swoją szybkość zbieżności, szczególnie w przypadku funkcji o gładkim i dobrze zachowującym się charakterze.

**Wyniki:**

**Wyniki dla funkcji f(x):**

**Bisekcja: 0.4115168460677143**

**Regula Falsi: 0.411516846067594**

**Sieczne: 0.411516846067488**

**Newton: 0.411516846067488**

**Wyniki dla funkcji g(x):**

**Sieczne: 0.4115160896599407**

**Newton: 0.41151598092550545**

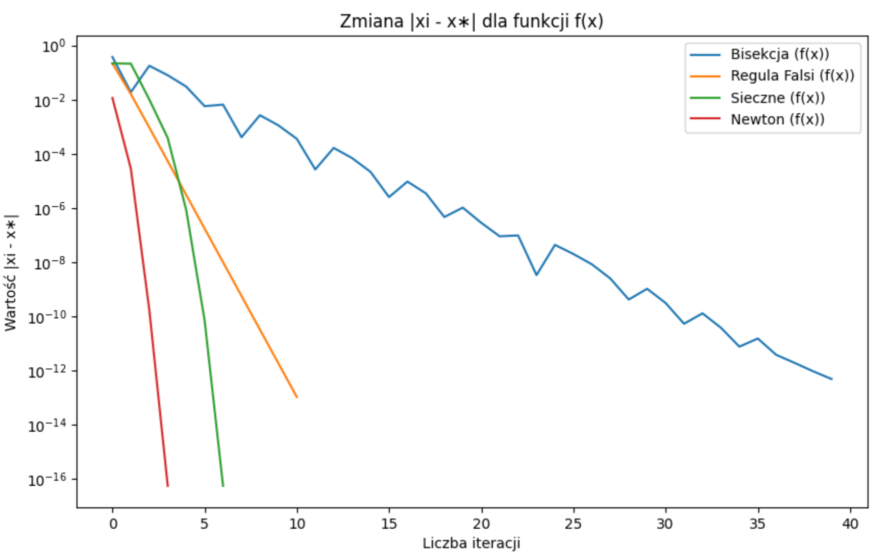
**Bisekcja: 0.4115165618423038**

**Wyniki dla funkcji u(x):**

**Sieczne: 0.41151684479281736**

**Newton: 0.4115168462359344**

**Bisekcja: 0.4115165618423038**

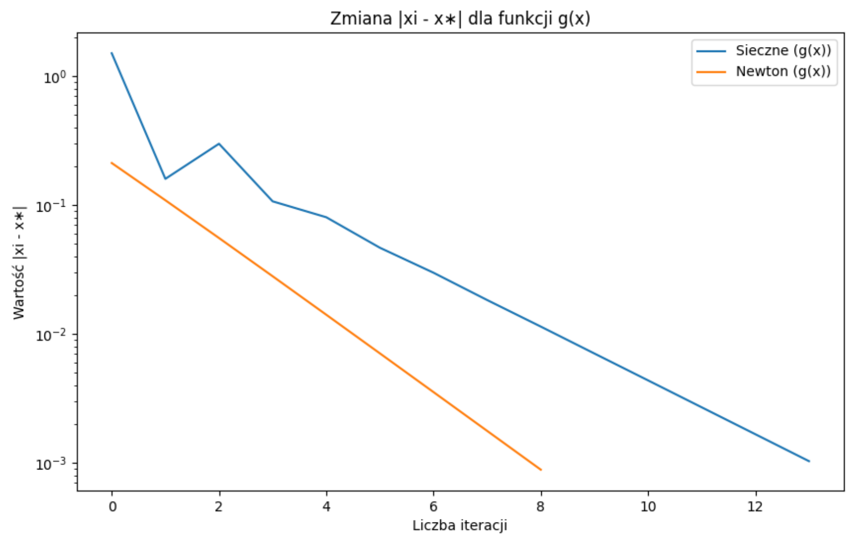



Na wykresie widać porównanie czterech metod podanych wyżej dla funkcji f(x). Najlepsza okazała się metoda Newtona, ponieważ dostajemy najmniejszą wartość x w najmniejszej liczbie iteracji.

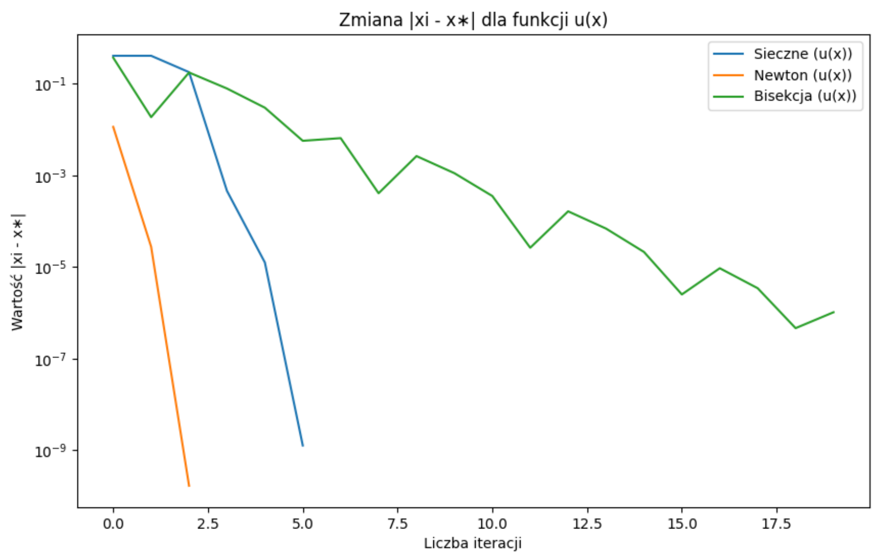
Metoda siecznych jest na drugim miejscu, dostajemy podobną wartość ale w większej ilości iteracji.

W metodzie falsi nasz mianownik bardzo szybko dąży do zera przez co metoda kończy swoje działanie wcześniej (urywa się).

W metodzie bisekcji zauważamy, że jest ona najmniej optymalna, ponieważ w przypadku niektórych iteracji dostajemy wartość większą niż poprzednia przez co liczba iteracji zwiększa się diametralnie.




Powyższy wykres przedstawia porównanie metod Newtona i siecznych dla funkcji g(x). Jak widać wyżej metoda Netwona jest lepsza, ponieważ kończy swoje działanie znacznie szybciej niż metoda sieczna.



Wykres podany powyżej przedstawia zbieżność metody Newtona, siecznych oraz bisekcji.

Jak widać metoda bisekcji ponownie się nie sprawdza, a metoda Newtona ponownie jest na szczycie tabeli z najmniejszą ilością iteracji.

## Wnioski:

Wynik metod jest zgodny z oczekiwaną wartością. W przypadku drugiego wykresu dla funkcji g(x) nie jesteśmy w stanie użyć metod bisekcji oraz metody Falsi, ponieważ jak wynika z założeń, nie możemy ich użyć dla funkcji, która nie zmienia znaku.

W przypadku bardziej złożonych funkcji lepsza może okazać się metoda Falsi pomimo faktu, że metoda Newtona królowała w wykresach. Metoda Falsi jest drugą najszybszą metodą, które testowaliśmy w tym zadaniu, lecz potrzebuje mniej obliczeń w porównaniu z chociażby metodą Newtona, przez co na ogół może okazać się wydajniejsza.