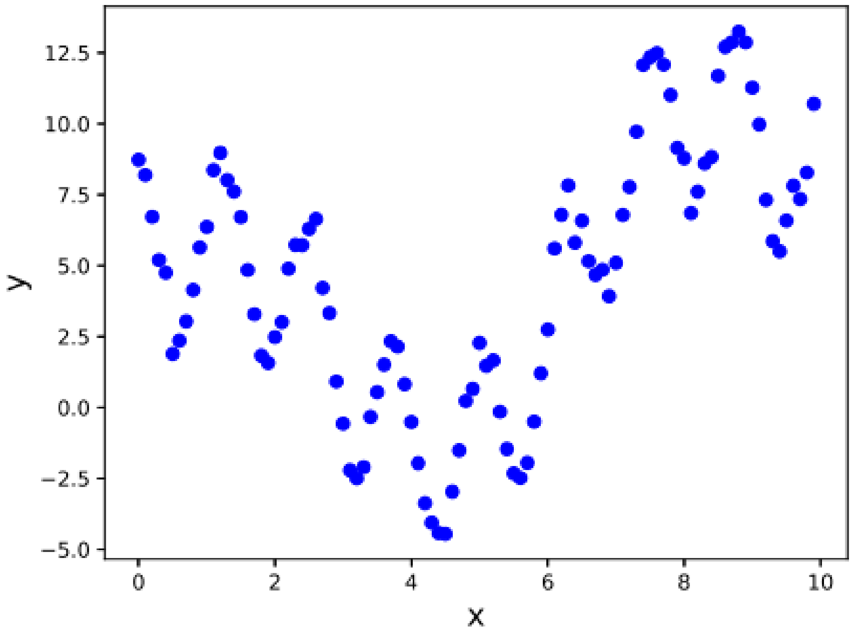
NUM8

Cel ćwiczenia:

Mamy zadany zbiór punktów zilustrowany poniżej:



A) Mamy znaleźć wartości współczynników, które najlepiej opiszą te dane w sensie metody najmniejszych kwadratów, następnie graficznie przedstawić rezultaty.

$$F(x) = a \cdot x^2 + b \cdot \sin(x) + c \cdot \cos(5x) + d \cdot \exp(-x)$$

B) Mamy zaproponować inną funkcję G(x) i wygenerować dla niej zbiór punktów w postaci $(x, G(x) + \delta y)$ gdzie δy to losowe zaburzenie. Następnie powtórzyć dopasowanie z pkt. (a) dla swoich danych i sprawdzić czy udało się odtworzyć wartości ustalonych wcześniej parametrów.

Mamy N par punktów(x_i , y_i) gdzie x_i jest dokładną wartością argumentu a y_i jest zmierzoną wartością funkcji, które mogą być obarczone błędami pomiarowymi.

Każdej zmierzonej wartości y_i odpowiada wartość teoretyczna $\overline{y}_i$ jaką zmienna powinna przybrać dla danej wartości zmiennej x. Przyjmujemy, że wartość teoretyczna jest kombinacją liniową pewnych znanych funkcji:

$$\overline{y}_i = a_1 \cdot f_1(x_i) + a_2 \cdot f_2(x_i) + \cdots + a_s \cdot f_s(x_i)$$

Zespół wszystkich wartości teoretycznych możemy przedstawić jako $\overline{y} = Ap$

Dla policzenia naszego problemu posłużymy się wzorem metody najmniejszych kwadratów.

Metoda ta jest standardową metodą przybliżania rozwiązań układów nadokreślonych, tzn zestawu równań w którym jest ich więcej niż zmiennych. Nazwa pochodzi od tego, że końcowe rozwiązanie tą metodą minimalizuje sumę kwadratów błędów przy rozwiązywaniu każdego z równań.

Mając zestaw danych pomiarowych w postaci (x,y), określamy funkcję opisującą daną zależność.

Singular Value Decomposition dostarcza przybliżonego rozwiązania takich układów, optymalnego w sensie najmniejszych kwadratów.

Rozkład SVD macierzy $A = U\Sigma V^T$, gdzie:

U Σ i V to macierze otrzymane z tego rozkładu.

Następnie obliczamy pseudo inwersję macierzy A, którą oznaczamy jako $A^+ = V\Sigma^+ U^T$

Gdzie Σ^+jest pseudo inwersją macierzy Σ .

Jest ona tworzona przez odwrócenie niezerowych elementów na przekątnej Σ a zerowe elementy pozostają bez zmian.

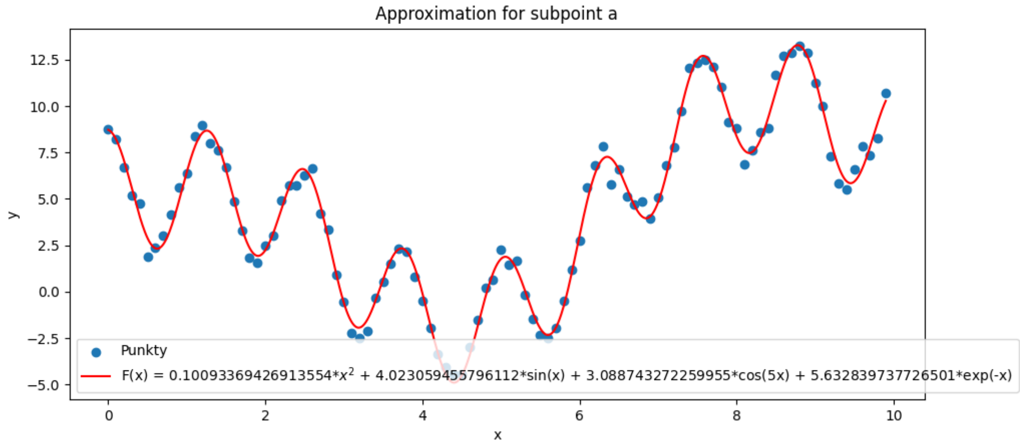
Wektor, którego szukamy jest ostatecznie obliczany jako $x = A^+ b$

W przypadku podpunktu b) mamy wybrać inną funkcję $G(x)$. Dodatkową cechą tego podpunktu jest fakt, iż wyznaczamy zbiór punktów z nadanym losowym zaburzeniem dla każdej wartości y. Zbiór punktów dla podpunktu b) będzie macierzą w której pierwsza kolumna to zbiór wartości x, druga kolumna to zbiór wartości y, lecz dla każdej wartości będziemy dodawać losowe zaburzenie.

Wyniki:

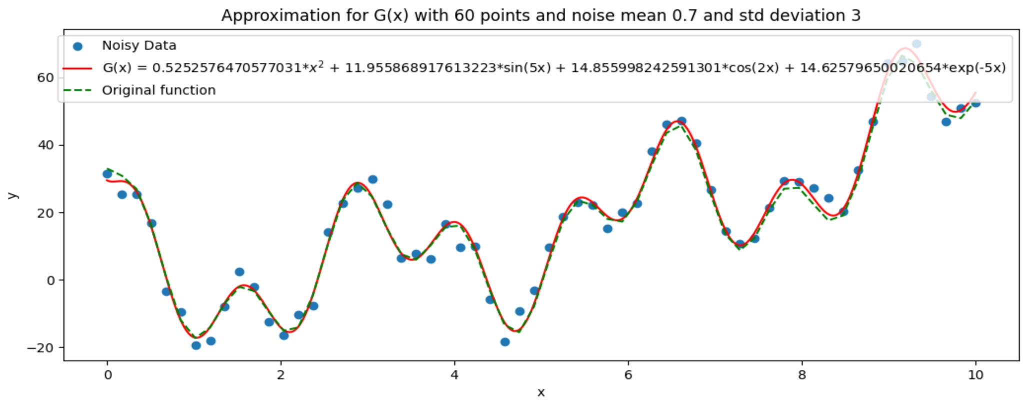
Optymalne współczynniki dla funkcji F(x):
a: 0,10093369426913554, b: 4,023059455796112, c: 3,088743272259955, d: 5,632839737726501

Optymalne współczynniki dla funkcji G(x) (dla 60 punktów ze średnią szumu 0,7 i odchyleniem standardowym 3):
a: 0,5252576470577031, b: 11,955868917613223, c: 14,855998242591301, d: 14,62579650020654
Optymalne współczynniki dla funkcji G(x) (dla 50 punktów ze średnią szumu 10 i odchyleniem standardowym 20):
a: 0,6979705007933549, b: 13,519913679410957, c: 10,530047448668704, d: 19,198658368177366
Optymalne współczynniki dla funkcji G(x) (dla 50 punktów ze średnią szumu 0,1 i odchyleniem standardowym 3):
a: 0,5014951340383019, b: 12,623949699707655, c: 14,894022853847837, d: 17,231857974040395

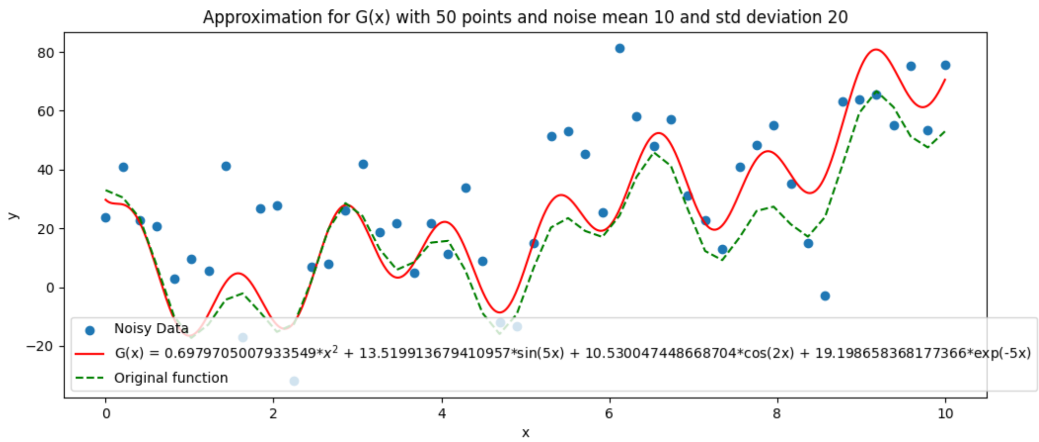


W tym przypadku aproksymacja jest poprawna, wykres niemal zlewa się z oryginalną funkcją.

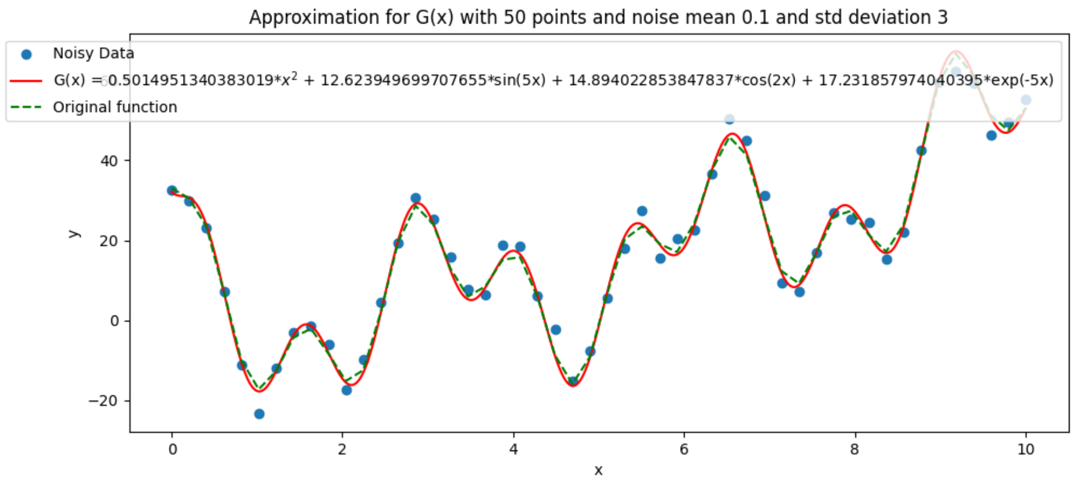
Dla tego podpunktu wynik obliczany metodą najmniejszych kwadratów jest zgodny z wynikiem sprawdzonym przy użyciu biblioteki numerycznej.



W tym przypadku jeśli relatywnie dużo punktów, a średni szum jest mały to funkcja dopasowana będzie bliska funkcji oryginalnej.



Pomimo, że w tym przypadku jest tylko 10 punktów mniej, lecz odchylenie standardowe i szum jest znacznie większy niż w poprzednim, oryginalna funkcja różni się znacząco od aproksymowanej.



W tym przypadku szum jest bardzo niski przez co wykresy przy ilości zadanych punktów niemal się pokrywają.