

Cel

- Napisanie programu, który będzie obliczał przybliżenie pochodnej funkcji $f(x) = \sin(x^2)$ przy użyciu wzorów na różnicę w przód i różnicę centralną.

W przód:

$$Dh f(x) = (f(x + h) - f(x))/h$$

Centralna:

$$Dh f(x) = (f(x + h) - f(x - h))/2h.$$

- Analiza zachowania błędu $|Dh f(x) - f'(x)|$ dla różnych wartości parametru h i typów zmiennoprzecinkowych float oraz double.

Opis

- Zaimportowanie odpowiednich bibliotek języka python (matplotlib, numpy)
- Implementacja funkcji, które obliczają:
 - exact_derivative(dokładną pochodną w punkcie)
 - forward_derivative(Metoda pochodnej w przód)
 - central_derivative(Metoda pochodnej centralnej)
 - graph(generowanie wykresu w skali logarytmicznej)
 - calculate_errors(obliczenie błędu przybliżonej pochodnej w porównaniu z dokładną pochodną dla różnych wartości parametru h).

Teoria

W trakcie obliczania przybliżonych pochodnych funkcji, istnieje kilka czynników, które mają kluczowe znaczenie dla jakości wyników obliczeń. Przede wszystkim, precyzja użytych typów zmiennoprzecinkowych, takich jak float (float32) i double (float64), ma wpływ na dokładność obliczeń. Wartość parametru h oraz typ zmiennoprzecinkowy muszą być dobrze przemyślane, aby uzyskać wiarygodne wyniki.

Float: typ zmiennoprzecinkowy float ma pojedynczą precyzję i składa się z 32 bitów. Jego epsilon maszynowy jest stosunkowo duży w porównaniu do double.

Double: typ zmiennoprzecinkowy o podwójnej precyzji z 64 bitami. Dzięki większej liczbie bitów dostępnych do reprezentacji mantysy i cechy, double jest znacznie bardziej precyzyjny oraz ma znacznie mniejszą wartość epsilon maszynowego niż float.

Parametr h odgrywa kluczową rolę w obliczeniach przybliżonych pochodnych. Wybór odpowiedniej wartości h jest ważny ze względu na precyzję i stabilność obliczeń. Zbyt duże wartości h mogą prowadzić do niskiej precyzji przybliżonej pochodnej, ponieważ różnice między punktami są zbyt duże.

Wzory na pochodne:

W ćwiczeniu wykorzystujemy dwa wzory na numeryczne przybliżanie pochodnych:

Pochodna w przód (Forward Difference):

$$Dh f(x) = (f(x + h) - f(x))/h$$

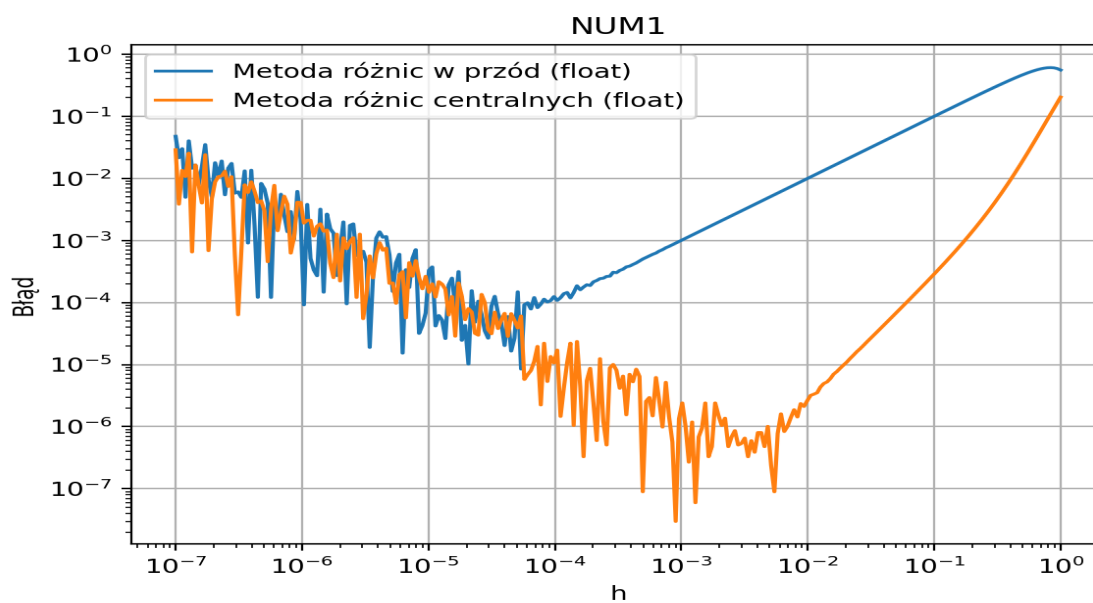
Pochodna centralna (Central Difference):

$$Dh f(x) = (f(x + h) - f(x - h))/2h.$$

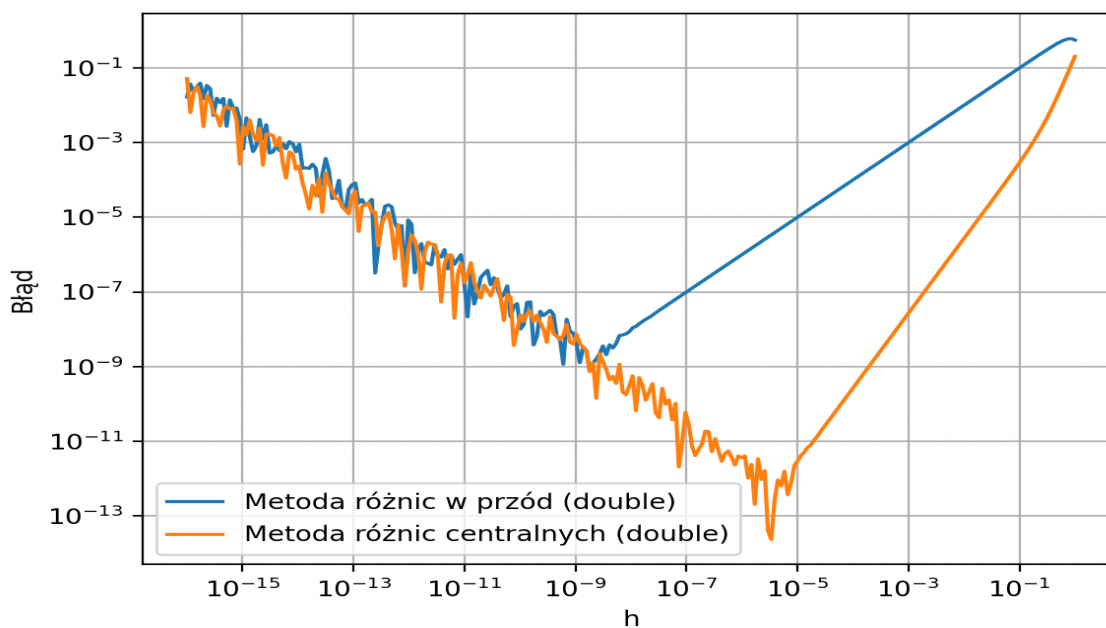
Ćwiczenie przeprowadza analizę błędów obliczeń przy użyciu obu typów zmiennoprzecinkowych (float i double) oraz różnych wartości parametru h . Wyniki są przedstawione na wykresie w skali logarytmicznej, co pozwala na lepsze zrozumienie zachowania błędów w stosunku do zmiany wartości h .

Wyniki:

Dla typu float:



Dla typu double:



Wnioski:

- Dokładność i stabilność obliczeń zależy od typów zmiennoprzecinkowych i odpowiedniego wyboru wartości h .
- Istnieją wartości h , które minimalizują błąd numeryczny.
- Im mniejsza wartość h , tym dokładniejsze przybliżenie pochodnej.
- Istnieje ograniczenie co do wartości h , poniżej której błędy przybliżeń zaczynają dominować, a obliczenia są co raz mniej dokładne.
- Mniejszy błąd otrzymujemy przy typie zmiennoprzecinkowym `double` i metodzie różnic centralnych

Uruchomienie programu:

`make float` - uruchamia wykres z typem `float`

`make double` – uruchamia wykres z typem `double`

W pliku `makefile` jest załączona kompilacja `python3` `main.py float/double`.

W razie problemów można zmienić z `python3` na `python`.