METODOS DE RUNGE-KUTTA.

Los métodos de RK se derivan a partir de la serie de Taylor. La forma general de la ecuación usada para formular el método de RK es

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \qquad , \quad \Delta y_n = \phi(t_n, y_n)h$$

Δy_n es la función incremental que puede interpretarse como la pendiente representativa del intervalo.

En general

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + ... + a_n k_n$$

Las *a*'s son constantes y las *k*'s se definen como:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + p_1 h, y_n + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_n + p_2 h, y_n + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

.

.

$$k_n = f(t_n + p_{n-1} h, y_n + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-2} k_2 h + ... + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Para derivar los valores de las constantes *a* y *k* en el método de RK de 2^0, escribimos

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

donde

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + p_1 h, y_n + q_{11} k_1 h)$$

Desarrollamos y_{n+1} en serie de Taylor de 2^0 orden, tomando como punto base y_n

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\,h + \frac{f'(t_n, y_n)}{2!} h^2$$

la derivada de $f(t_n, y_n)$ se desarrolla por medio de la regla de la cadena

$$f'(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

sustituyendo esta expresión obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\frac{h^2}{2!} \qquad (1)$$

Además la expansión de $f\left(t_n + p_1 h, y_n + q_{11} k_1 h\right)$ en serie de Taylor, toma la forma dada por:

$$g(x+r, y+s) = g(x,y) + r\frac{\partial g}{\partial x} + s\frac{\partial g}{\partial y} + \ldots$$

entonces, la serie de Taylor de la función mencionada resulta:

$$f\left(t_n + p_1 h, y_n + q_{11} k_1 h\right) = f\left(t_n, y_n\right) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial t} + q_{11} k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + O\left(h^2\right)$$

de donde tendremos:

$$y_{n+1} = y_n + \left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right)h = y_n + a_1 h\ f\left(t_n, y_n\right) + a_2 h\ f\left(t_n + p_1 h, y_n + q_{11} k_1 h\right)$$

$$= y_n + a_1 h\ f\left(t_n, y_n\right) + a_2 h\left[f\left(t_n, y_n\right) + p_1 h\frac{\partial f}{\partial x} + q_{11} k_1 h\frac{\partial f}{\partial y} + O\left(h^2\right)\right]$$

$$= y_n + a_1 h\ f\left(t_n, y_n\right) + a_2 h\ f\left(t_n, y_n\right) + a_2 p_1 h^2\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} k_1 h^2\frac{\partial f}{\partial y} + O\left(h^3\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \left[a_1 f\left(t_n, y_n\right) + a_2 f\left(t_n, y_n\right)\right]h + \left[a_2 p_1\frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f\left(t_n, y_n\right)\frac{\partial f}{\partial y}\right]h^2 + O\left(h^3\right)$$

recordando que $k \ = f\left(t_n, y_n\right)$.

Comparando esta ultima ecuación con (1) arriba

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_1 + p_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} = \tfrac{1}{2}$$

que representan 3 ecuaciones en 4 incógnitas. Existen una familia de métodos de RK de 2^0 orden, uno de ellos es el definido por

$$y_{n+1} = y_n + \left(\tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)h$$

METODO DE RUNGE-KUTTA (CON COEFICIENTES DE RUNGE).

La formula del método RK de 4^0 orden es:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad , \quad \Delta y_n = \frac{\Delta t}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right)$$

donde

$$k_0 = f\left(t_n , y_n\right)$$

$$k_1 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\Delta t\right)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\Delta t\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \Delta t, y_n + k_2 \Delta t\right)$$

Las cantidades k representan las pendientes en varios puntos:

- K_0 es la pendiente en el punto inicial del intervalo
- K_3 es la pendiente en el punto final del intervalo
- K_2 es una de las pendientes a mitad del intervalo con ordenada $y_n + \frac{1}{2} k_1 \Delta t$
- K_1 es la 2^a pendiente a mitad del intervalo con ordenada $y_n + \frac{1}{2} k_0 \Delta t$

Mientras que el método de Euler utiliza una pendiente, el método RK usa un promedio ponderado de pendientes.

DERIVACIÓN DE LA FORMULA DE RK 4^0 ORDEN CON COEFICIENTES DE RUNGE.

Las formulas de los métodos de RK se desarrollan a partir de las serie de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + y_n'(t_{n+1} - t_n) + \frac{y_n''}{2!}(t_{n+1} - t_n)^2 + \frac{y_n'''}{3!}(t_{n+1} - t_n)^3 + \frac{y_n^{iv}}{4!}(t_{n+1} - t_n)^4 + \ldots..$$

como $t_{n+1} = t_n + \Delta t$,

$$y_{n+1} = y_n + y_n'\Delta t + \frac{y_n''}{2!}\Delta t^2 + \frac{y_n'''}{3!}\Delta t^3 + \frac{y_n^{iv}}{4!}\Delta t^4 + \ldots..$$

definamos $y_{n+1} - y_n = =\Delta y_n$, entonces

$$\Delta y_n = y_n'\Delta t + \frac{y_n''}{2!}\Delta t^2 + \frac{y_n'''}{3!}\Delta t^3 + \frac{y_n^{iv}}{4!}\Delta t^4 + \ldots.. \qquad \text{(A)}$$

Denotamos: $y' = f(t, y)$, entonces:

$$y'' = f' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_t + f_y f$$

$$y''' = f'' = \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial y} f =$$

$$= \left[f_{tt} + \left(f_{yt} f + f_y f_t\right)\right] + \left[f_{ty} + \left(f_{yy} f + f_y^2\right)\right] f$$

$$y^{iv} = f_{ttt} + \ldots\ldots$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de Δy_n resulta

$$\Delta y_n = f_n \Delta t + \left(\tfrac{1}{2!}\right)\left(f_t + f_y f\right)_n (\Delta t)^2 + \left(\tfrac{1}{3!}\right)\left[f_{tt} + 2 f_{ty} f + f_{yy} f^2 + \left(f_t + f_y f\right) f_y\right]_n (\Delta t)^3 + \left(\tfrac{1}{4!}\right)\left[f_{ttt} + \ldots\right](\Delta t)^4 \qquad \text{(B)}$$

La evaluación de tanta derivada es poco practico y para evitar esta dificultad tomamos arbitrariamente

$$\Delta y_n = \left(\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \ldots + \mu_m z_m\right)$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= f(t_n, y_n)\Delta t \\
z_1 &= f(t_n + \alpha_1 \Delta t, y_n + \beta_{10} z_0)\Delta t \\
z_2 &= f(t_n + \alpha_2 \Delta t, y_n + \beta_{20} z_0 + \beta_{21} z_1)\Delta t \\
&. \\
&. \\
z_m &= f(t_n + \alpha_n \Delta t, y_n + \beta_{m0} z_0 + \beta_{m1} z_1 + \ldots.)\Delta t
\end{aligned}$$

El objetivo es determinar los tres conjuntos de constantes μ , α , β. El subíndice *m* indica que las expresiones para Δy_n debe coincidir hasta el término que contiene a $(\Delta t)^{m-1}$.

Con *m = 3* :

$$\Delta y_n = \mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 \qquad \text{(C)}$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= f(t_n, y_n)\Delta t \\
z_1 &= f(t_n + \alpha_1 \Delta t, y_n + \beta_{10} z_0)\Delta t \\
z_2 &= f(t_n + \alpha_2 \Delta t, y_n + \beta_{20} z_0 + \beta_{21} z_1)\Delta t \\
z_3 &= f(t_n + \alpha_3 \Delta t, y_n + \beta_{30} z_0 + \beta_{31} z_1 + \beta_{32} z_2)\Delta t
\end{aligned}$$

Ahora buscamos la forma de determinar las 13 constantes μ_0 , μ_1 , μ_2 , μ_3 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , β_{10} , β_{20}, β_{30}, β_{21}, β_{31}, β_{32}. Para esto, partimos de la serie de Taylor para dos variables independientes alrededor del punto (a , b):

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b) + f_y(a,b)k + \tfrac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)h^2 + 2 f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2\right] + \ldots.$$

La serie anterior a menudo se escribe simbólicamente como sigue:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)+\ldots$$

Ahora sustituimos z_0, z_1, z_2 y z_3 en la ultima ecuación para obtener:

$$z_0=f_n\Delta t$$
$$z_1=\left[f_n+\left(\alpha_1\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\beta_{10}z_0\frac{\partial}{\partial y}\right)f_n+\frac{1}{2!}\left(\alpha_1\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\beta_{10}z_0\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f_n+\frac{1}{3!}\left(\alpha_1\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+\beta_{10}z_0\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f_n+\ldots\right]\Delta t$$
$$z_2=\left[\begin{array}{l} f_n+\left(\alpha_2\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+(\beta_{20}z_0+\beta_{21}z_1)\frac{\partial}{\partial y}\right)f_n+\frac{1}{2!}\left(\alpha_2\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+(\beta_{20}z_0+\beta_{21}z_1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f_n \\ +\frac{1}{3!}\left(\alpha_2\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+(\beta_{20}z_0+\beta_{21}z_1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f_n+\ldots \end{array}\right]\Delta t$$
$$z_3=\left[\begin{array}{l} f_n+\left(\alpha_3\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+(\beta_{30}z_0+\beta_{31}z_1+\beta_{32}z_2)\frac{\partial}{\partial y}\right)f_n+\frac{1}{2!}\left(\alpha_2\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+(\beta_{30}z_0+\beta_{31}z_1+\beta_{32}z_2)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f_n+ \\ +\frac{1}{3!}\left(\alpha_2\Delta t\frac{\partial}{\partial t}+(\beta_{30}z_0+\beta_{31}z_1+\beta_{32}z_2)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f_n+\ldots \end{array}\right]\Delta t$$

Si igualamos los coeficientes de (B) con (C) y estas ultimas relaciones de las *z*'s, obtenemos 11 ecuaciones en 13 incógnitas :

$$\alpha_1=\beta_{10}$$
$$\alpha_2=\beta_{20}+\beta_{21}$$
$$\alpha_3=\beta_{30}+\beta_{31}+\beta_{32}$$
$$\mu_0+\mu_1+\mu_2+\mu_3=1$$
$$\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3=\tfrac{1}{2}$$
$$\mu_1\alpha_1^2+\mu_2\alpha_2^2+\mu_3\alpha_3^2=\tfrac{1}{3}$$
$$\mu_1\alpha_1^3+\mu_2\alpha_2^3+\mu_3\alpha_3^3=\tfrac{1}{4}$$

$$\mu_2\alpha_1\beta_{21} + \mu_3\left(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}\right) = \tfrac{1}{6}$$
$$\mu_2\alpha_1^2\beta_{21} + \mu_3\left(\alpha_1^2\beta_{31} + \alpha_2^2\beta_{32}\right) = \tfrac{1}{12}$$
$$\mu_2\alpha_1\alpha_2\beta_{21} + \mu_3\left(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}\right)\alpha_3 = \tfrac{1}{8}$$
$$\mu_3\alpha_1\beta_{21}\beta_{32} = \tfrac{1}{24}$$

Con 11 ecuaciones y 13 incógnitas debemos escoger 2 de las incógnitas y resolver el sistema de ecuaciones.
Para $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{3}$ obtenemos:
$\mu_0 = 1/6$, $\mu_1 = 1/3$, $\mu_2 = 1/3$, $\mu_3 = 1/6$;
$\alpha_1 = ½$, $\alpha_2 = ½$, $\alpha_3 = 1$;
$\beta_{10} = 1/2$, $\beta_{20} = 0$, $\beta_{30} = 0$, $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = 1$

Los anteriores coeficientes se denominan coeficientes de Runge.