Generación de variables aleatorias

Distribución uniforme

Para la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos entre el intervalo [A; B] se utilizará el siguiente modelo:

$X = A + RND(B - A)$ con **RND** que simboliza a nuestro generador uniforme [0; 1]

Este generador fue obtenido por el método de transformada inversa explicado previamente. El mismo se aplica cuando deban generarse variables aleatorias con distribución uniforme, con la salvedad de que el intervalo en el que las mismas deban generarse no sea entre cero y uno, sino entre otro intervalo de valores A-B.

Por ejemplo, entre 8 y 14. En este intervalo A toma el valor de 8 y B el valor de 14, por lo tanto nuestro generador específico para este intervalo queda:

$$X = 8 + RND(14 - 8) \quad => \quad X = 8 + RND.6$$

De esa manera se podrá generar variables aleatorias en el intervalo [8; 14] y que aun mantengan su distribución uniforme. Lo que se hace con este generador es transformar una distribución uniforme [0; 1] en una distribución uniforme [A; B].

Ejercicio

La temperatura de una estufa se comporta uniformemente dentro del rango de 95ºC a 100ºC. Simular 5 valores de temperaturas:

Muestra	RND	Temperatura ºC
1	0.48	
2	0.82	
3	0.69	
4	0.67	
5	0.00	

Distribución exponencial negativa

Si la probabilidad de que un evento ocurra durante un corto intervalo de tiempo es muy pequeña, y la ocurrencia de este evento es independiente de otros eventos, entonces el intervalo de tiempo **entre** la ocurrencia de eventos esta exponencialmente distribuido.

Se utilizará el siguiente modelo para generar números exponencialmente distribuidos:

$$X = \frac{-1}{\lambda}.\ln(1 - RND) \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

Este generador también fue obtenido con el método de la transformada inversa explicado previamente. En este caso el símbolo λ representa la frecuencia con la que ocurre el evento bajo análisis, lo cual no debe ser confundido con la media μ de la distribución.

Por ejemplo, si a cierto lugar ingresasen "tres personas cada sesenta minutos", el lambda λ sería igual a $\frac{3}{60}$, lo cual puede simplificarse a $\frac{1}{20}$. Si el lambda λ es de $\frac{1}{20}$ entonces la media μ es de 20 minutos. Sería incorrecto afirmar que ante la premisa de "tres personas cada sesenta minutos" la media sería de 3. Primero, porque el "tres" se refiere a personas y no a minutos, y la media se refiere a la cantidad de tiempo promedio entre una llegada y otra de personas. Es decir, el tiempo entre llegadas de personas, que tiene una media de 20 minutos.

Ejercicio

La llegada de personas a la caja de un banco se comporta de forma exponencial con media de 3 minutos por cliente. Simular el comportamiento de la variable aleatoria:

Muestra	RND	Dif. entre llegadas μ=3’	Frecuencia $\lambda=\frac{12}{60'}$
1	0.64		
2	0.83		
3	0.03		
4	0.50		
5	0.21		

Además efectuar los cálculos suponiendo ahora que a la caja del banco llegan 12 personas por hora.

Distribución normal

1 - Método de Box-Muller

Este método nos permite la generación de variables aleatorias normales, ya sea para distribución normal estándar (μ=0 y σ=1) o para cualquier otra combinación de media μ y desviación estándar σ.
La particularidad de este método, a diferencia de los dos generadores anteriores, es que requiere de un par de números aleatorios uniformes como parámetros de entrada, para poder generar un par de números aleatorios de distribución normal.

$$N_1 = [\sqrt{-2.\ln(RND_1)}.\cos(2.\pi.RND_2)] * \sigma + \mu$$

$$N_2 = [\sqrt{-2.\ln(RND_1)}.sen(2.\pi.RND_2)] * \sigma + \mu$$

El procedimiento es el siguiente:

- Obtener con un generador uniforme [0; 1] un par de números pseudo aleatorios (se denominarán RND_1 y RND_2).
- Utilizar RND_1 y RND_2 en la primera fórmula del método, para obtener N_1.
- Utilizar los mismos RND_1 y RND_2 utilizados en el punto anterior, en la segunda fórmula para obtener N_2.

Para generar otro par de números aleatorios de distribución normal N_1 y N_2, repetir el procedimiento.

2 - Método de Convolución

Si se toman n muestras a partir de una distribución uniforme sobre el intervalo que va de cero a uno, entonces la media $\mu = \frac{1}{2}$ y la varianza $\sigma^2 = \frac{1}{12}$; y de la suma de las n muestras se obtendría una variable X que estaría normalmente distribuida con una media de n/2 y una varianza de n/12.
Por lo tanto, si se selecciona un tamaño de muestra n=12, la varianza de X es igual a 1; y si se le resta 6 a la suma de las 12 muestras, la media es igual a cero.

El modelo a utilizar es el siguiente:

$$Z_i = \left(\sum_{i=1}^{N} RND_i - 6 \right) . \sigma + \mu$$

Se obtienen 12 números aleatorios uniformes. Se suman los 12 números. Al resultado se le resta 6. En ese punto sa ha obtenido un número aleatorio normalmente distribuido, con media cero y desviación estándar 1. Si a este número se lo multiplica por la desviación σ y se me suma la media μ, se obtiene un número normalmente distribuido, con media μ y desviación estándar σ.

Ejercicio

El volumen de un líquido de refresco sigue una distribución normal con media de 12 onzas y desviación estándar de 0,4 onzas. Generar 2 variables aleatorias normales utilizando el método Box-Muller y una variable aleatoria normal utilizando el método de Convolución.

Utilizar la siguiente serie uniforme: 0,48 0,82 0,69 0,67 0,00 0,64 0,46 0,16 0,50 0,21 0,34 0,75

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una distribución discreta. Esto significa que la variable aleatoria solo puede tener valores enteros, incluyendo el cero. Tiene una media y una varianza igual a λ (a diferencia de la distribución exponencial negativa, cuya media es inversamente proporcional a λ). Lambda (λ) puede ser un valor positivo y no necesariamente tiene que ser un número entero.

Es posible generar variables aleatorias Poisson mediante la relación existente entre la distribución de Poisson y la distribución exponencial. Si el tiempo entre ocurrencias de un evento durante un segmento de tiempo está exponencialmente distribuido, entonces la cantidad de llegadas en ese segmento de tiempo tiene una distribución de Poisson.

Otro método posible para la generación de valores de una distribución de Poisson [1] se basa en la generación de variables aleatorias uniformes (RND) en el intervalo que va de cero a uno. A continuación se muestra un algoritmo a tal efecto:

```
P = 1;
X = -1;
A = e^-λ;
Hacer
{
   Generar U = RND(0,1);
   P = P * U;
   X = X + 1;
} mientras (P >= A);
Devolver X;
```

El único parámetro que requiere este algoritmo es el Lambda (λ) el cual en este caso representa a la media de la distribución de Poisson para la cual se quieren generar variables aleatorias.

Ejercicio:

El número de piezas que entran a un sistema de producción sigue una distribución de Poisson con media de 2 piezas por hora. Simular el comportamiento de la llegada de piezas al sistema, para 5 segmentos de 1 hora.

[1] "El arte de la Simulación" – K.D.Tocher – The English University Press