Introducción a Modelos Continuos

1. La tasa de crecimiento de enfermos de cólera es proporcional a la población de enfermos con una tasa de proporción igual a 0,2. Si en un momento dado (**t** = 0) la población contagiada asciende a 200,

   a. Resolver analítica y numéricamente el problema.
   b. ¿En cuántas unidades de integración se duplica la población?
   c. Calcular el error absoluto y relativo hasta este instante.
   d. ¿Cuál será la tendencia de la enfermedad?

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}2.\mathrm{E} \qquad E(t=0) = 200$$

a. Resolver de manera analítica el problema implica resolver la ecuación diferencial planteada. Para esta ecuación diferencial puntual podemos utilizar variables separables.

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}2.E$$

$$\frac{dE}{E} = 0{,}2.dt$$

$$\int_{E_0}^{E} \frac{dE}{E} = 0{,}2 \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\ln E - Ln\, E_0 = 0{,}2(t - t_0)$$

$$ln \frac{E}{E_0} = 0{,}2.(t - t_0)$$

$$\frac{E}{E_0} = e^{0{,}2.(t-t_0)}$$

$$E = E_0.e^{0{,}2.(t-t_0)}$$

Aplicando condiciones iniciales se obtiene:

$$\boxed{E = 200.e^{0{,}2.t}}$$

b. Para obtener en cuántas unidades de integración se duplica la población de enfermos, de manera analítica, podemos igualar la solución particular al valor objetivo (400) y luego despejar la variable del tiempo:

$$400 = 200.e^{0{,}2.t}$$

$$2 = e^{0{,}2.t}$$

$$\ln(2) = 0{,}2.t$$

$$\frac{\ln(2)}{0{,}2} = t$$

La población se duplica en t=3,465735 unidades de integración.

c. El cálculo del error absoluto y relativo implica conocer ambas soluciones: la analítica y la numérica. El error absoluto es la diferencia en valor absoluto entre las mencionadas soluciones. El error relativo es el cociente entre el error absoluto y la solución analítica.

EA = |Sol. Analítica – Sol. Numérica| ER = EA / Sol. Analítica

d. Para establecer la tendencia de la enfermedad, se puede utilizar tanto la solución analítica como los datos de la solución numérica.

2. La siguiente ecuación:

$$\frac{dp}{dt} = -p$$

describe la tasa de ingreso de bedeles a una universidad estatal. El ingreso de alumnos a esa institución está representado por:

$$\frac{da}{dt} = 5000 - a$$

a. Analizar la evolución de ambas poblaciones a través de su solución numérica, sabiendo que la unidad de tiempo es igual a 10 años. Considerar **p(0)** = 50 y **a(0)** = 500.
b. Se desea saber la cantidad de alumnos atendidos por cada bedel (por año), a lo largo de 10 años. Graficar esa variable.
c. La universidad desea saber si debe poner cupo en el ingreso de alumnos, ya que se prevé que debería haber un máximo de 100 alumnos por cada bedel. A qué valor límite llega el número de alumnos. Justifique.

c. El valor límite puede ser obtenido tanto de manera numérica como analítica en este caso en particular. Teniendo en cuenta que un valor "límite" implica que la función se hace constante, y que por lo tanto la derivada de dicha función a partir de ese momento es cero, mediante la siguiente equiparación se puede obtener el valor límite de forma analítica.

$$\frac{da}{dt} = 5000 - a$$

$$0 = 5000 - a$$

$$a = 5000$$

Cuando la derivada de "a" se hace cero, la función "a" se hace constante, llega a un límite.

3. El disco duro de la computadora de una empresa va aumentando su espacio ocupado en función de la información que ingresa, según la ley siguiente:

$$\frac{d^2e}{di^2} + 2.i.\frac{de}{di} - 4.e = 0$$ donde **e** = espacio ocupado; **i** = información que ingresa

Inicialmente, el espacio ocupado es el 20% (Eo=0,2) y su tasa de crecimiento inicial es tal que a medida que se graba información, se ocupa el doble de espacio en disco (E'o=0,4).

a. Encontrar el espacio ocupado en el disco para **i** = 1, integrando numéricamente.
b. Graficar y analizar la evolución del estado del disco. ¿Se llena el disco en algún momento?

Para poder integrar numéricamente una ecuación de segundo orden (o cualquier orden superior) la misma deberá ser dividida en un sistema de ecuaciones de primer orden, el cual constará de una cantidad de ecuaciones de primer orden igual al grado de la ecuación de orden superior.
En este ejercicio la ecuación de segundo orden será transformada en un sistema de dos ecuaciones de primer orden.

El primer paso a seguir es despejar el término de mayor orden:

$$\frac{d^2e}{di^2} + 2.i.\frac{de}{di} - 4.e = 0 \qquad => \qquad \frac{d^2e}{di^2} = -2.i.\frac{de}{di} + 4.e$$

Luego se debe plantear un sistema de ecuaciones de primer orden, donde se establece una equivalencia entre la derivada de primer orden de la variable que se despejó en el paso anterior, con una variable auxiliar.

$$\frac{de}{di} = Z$$

Si se deriva a ambos lados de esta expresión, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2e}{di^2} = \frac{dz}{di}$$

En el primer paso se había despejado el término de mayor orden, cuya expresión puede equipararse ahora a la derivada primera de la variable auxiliar. Por lo tanto, nuestro sistema de ecuaciones de primer orden queda expresado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dfrac{de}{di} = Z \\ \\ \dfrac{dz}{di} = -2.i.Z + 4.e \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{(i=0)} = 0{,}2 \\ \\ Z_{(i=0)} = 0{,}4 \end{cases}$$

Si en el término despejado en el primer paso hubiese términos de primer orden, deberán ser reemplazados por la variable auxiliar, como puede apreciarse en este caso.
Las condiciones iniciales expresadas inicialmente (un punto de la función E y un punto de la derivada primera E') pasan a ser las condiciones iniciales de la función E y la función Z, ya que Z equivale a E' e inicialmente contamos con el dato de E'(i=0)=0,4.

Ecuaciones de tercer orden

Para ecuaciones de tercer orden o más el procedimiento es muy similar. Solo requiere más variables auxiliares.
Supongamos que tenemos una ecuación de tercer orden de acuerdo al siguiente modelo:

$$2.\frac{d^3a}{dt^3} + 8.\frac{d^2a}{dt^2} - 16.\frac{da}{dt} + 32.a = 4.t$$

Primero, despejamos el término de mayor orden, en este caso, de tercer orden.

$$\frac{d^3a}{dt^3} = -4.\frac{d^2a}{dt^2} + 8.\frac{da}{dt} - 16.a + 2.t$$

Planteamos un término de primer orden de la variable despejada, igualado a una variable auxiliar.

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = w \\ \dfrac{dw}{dt} = -4.w + 8.z - 16.a + 2.t \end{cases}$$

Si se deriva a ambos lados, se obtiene un Z' que equivale a A''. Como no conocemos a A'', la simbolizamos con otra variable auxiliar W, se deriva una vez más a ambos lados y de obtiene A''' (que equivale a W') y para la cual despejamos su fórmula en el primer paso (al transcribir la fórmula se deben reemplazar los términos de primer y segundo orden por sus respectivas variables auxiliares).

Por último, para poder integrar numéricamente una ecuación diferencial de tercer orden, se necesitan las siguientes condiciones iniciales: un punto de la función A, un punto de la derivada A', un punto de la derivada segunda A''. Todos ellos para el mismo valor de variable independiente t.