SIMULACIÓN: Guía de trabajos prácticos UNIDAD Nro. 6 - 2013

Profesor Titular:
MAGRIS, Sergio.

Profesor Asociado:
SÁNCHEZ, Daniel.

Profesor Adjunto:
CASTRO, Sergio.

Jefes de Trabajos Prácticos:
PAILOS, Hugo.
CARENA, Gonzalo.
BERROTARAN, Juan José.

Auxiliares de Primera:
DANIELE, Analía.
GUALPA, Martín.
BARALE, Lorena.

Unidad Nº 6: SIMULACIÓN CONTINUA DE MODELOS

1. Un grupo de colonos llega en el año 1950 a determinada región deshabitada en la provincia de Misiones, provenientes desde Capital Federal. Según el censo realizado en el año 1960 la población llegaba a los 250 habitantes. Se sabe que durante los primeros 5 años, la población creció un 30%. Debido a las dificultades de acceso existentes en esa época y las características del contexto (población pequeña, abundancia de alimentos, etc) suponemos para este caso a la tasa de crecimiento de la población como directamente proporcional a la cantidad de habitantes, siendo la ecuación que representa al sistema : dP/dt = k.P

a. Calcule la cantidad inicial de colonos.
b. No existen registros exactos de la cantidad de habitantes que hubo en 1965. Calcule según el modelo que población pudo haber existido.
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución de la cantidad de habitantes respecto al tiempo.
e. ¿Que pasa cuando el tiempo tiende a infinito?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

2. La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población de conejos P es proporcional la raíz cuadrada de P. En el instante t = 0 (meses) la población asciende a 100 conejos y aumentó en 20 conejos pasado un mes. (dP/dt = $k.\sqrt{P}$)

a. ¿ Cuántos conejos habrá en dos años?
b. ¿ Cuándo habrá 1000 conejos?

3. La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población, P, de Cocodrilos en un pantano es proporcional al cuadrado de P (dP/dt = k.P^2). El pantano albergaba una docena de cocodrilos en 1988, dos docenas en 1998.

a. ¿Cuando habrá cuatro docenas de lagartos en el pantano?
b. ¿Que sucede a partir de ese momento?

4. Si la población de un país se duplica cada 100 años: ¿en cuántos años se triplica y en cuántos se quintuplica? Suponga que la velocidad de crecimiento es proporcional al número de habitantes. (dP/dt = k.P)

5. Si la población de un país se podía calcular en 1960 como:
$25 \cdot 10^6 = P_0 \cdot e^{\alpha \cdot 1960}$
Y en 1970 como: $30 \cdot 10^6 = P_0 \cdot e^{\alpha \cdot 1970}$
a. Calcular la población en el 2000.
b. Calcular la población en el 2007.

6. La velocidad de crecimiento de enfermos de cólera es proporcional a la población de enfermos con una constante de proporcionalidad de 0,2. 1/días. Si en un momento dado (t = 0) la población contagiada asciende a 200. Si la ec. que representa al modelo es dC/dt = 0,2 . C
Resuelva analíticamente.
a. ¿En cuántos días se duplica la población?
b. ¿Cuántos enfermos habrá al cabo de 10 días?
Resuelva numéricamente el problema.
c. ¿Cuál será la tendencia de la enfermedad?

7. En 1970 se estimó que la población de caimanes en un parque nacional era de 300. En 1980, la población había crecido hasta alcanzar un valor aproximado de 1.500 ejemplares. Calcule la población de caimanes para el año 2010. Suponga que la velocidad de crecimiento es proporcional al número de habitantes. (dC/dt = k.C).

8. En 1990, el departamento de Recursos Naturales arrojó en un lago 1.000 ejemplares de una especie de pez híbrido. En 1997 se calculó que la población de esta especie en el lago era de 3.000. Calcule la población de peces en el lago en el 2005. Suponga que la velocidad de crecimiento es proporcional al número de habitantes (dP/dt = k.P).

9. En cierto cultivo de bacterias, la velocidad de aumento es proporcional al número presente (dB/dt = k.B).
a. Si se ha hallado que el número se duplica en 10 hs. ¿qué número se debe esperar al cabo de 120 hs.?
b. Si hay 10^6 al cabo de 3 hs. y $5 \cdot 10^6$ al cabo de 5 hs. ¿cuántos habría en un principio?

10. Si el 5% de los estudiantes de una universidad tienen una enfermedad contagiosa y 1 semana después un total del 15% han adquirido la enfermedad: ¿que porcentaje la habrán adquirido 2, 3, 4 y 5 semanas más tarde? Asuma que no hay cuarentena y que la tasa de crecimiento de estudiantes contagiados es proporcional a la cantidad de enfermos (dE/dt = k.E).

11. La vida media de un isótopo radiactivo es la cantidad de tiempo que toma a una cantidad de material radiactivo desintegrarse a la mitad de su cantidad original. La vida media del carbono 14 (C-14) es de 5230 años. La vida media del iodo 131 es de 8 días. (dC/dt = -k.C).
a. Determine el parámetro de la tasa de desintegración del C-14.
b. Calcule el parámetro de tasa de desintegración del I-131.
c. ¿Cuáles son las unidades de los parámetros de tasa de desintegración en las partes (a) y (b)?

12. El modelo del carbono 14 se usa a menudo para determinar la edad de un fósil. Por ejemplo, en una cueva de Sudáfrica se encontró un cráneo humanoide junto con los restos de una fogata. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es igual a la de la fogata. Se ha establecido que solamente un 10% de cantidad original de carbono 14 queda en la madera quemada de la fogata. La semivida del carbono 14 es de aproximadamente de 5.600 años. (La semivida de una sustancia radiactiva es el tiempo que transcurre para que se desintegre la mitad de la sustancia). Tener presente que la tasa de desintegración del carbono es proporcional a la cantidad presente por un coeficiente (dC/dt = -k.C).

a. Determine el parámetro de la tasa de desintegración.
b. ¿Cual es la edad del cráneo?
c. ¿En cuantos años no se podría calcular mas por este método la edad?
d. Integre numéricamente.
e. Grafique la evolución de la cantidad de carbono al transcurrir el tiempo.
f. ¿Que sucede con el pasar del tiempo?
g. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

13. El isótopo radiactivo I-131 (su vida media es de 8 días) se usa en el tratamiento de la hipertiroides. El I-I31 administrado a un paciente se acumula en forma natural en la glándula tiroides, donde se desintegra y acaba con parte de la glándula. Suponga que se requieren 72 horas para enviar el I-131 del productor al hospital.

a. ¿Qué porcentaje de la cantidad originalmente enviada llega al hospital? (Vea el ejercicio anterior.)
b. Si el I-131 es almacenado en el hospital 48 horas adicionales antes de ser usado, ¿qué tanto queda de la cantidad original enviada por el productor cuando el material radiactivo se utilice?
c. ¿Qué tiempo le tomará al I-131 desintegrarse completamente de manera que el hospital pueda deshacerse de los residuos sin precauciones especiales?

14. Se ha encontrado que el 0,5 por ciento de radio desaparece en 12 años (dR/dt = -k.R).

a. ¿Qué porcentaje desaparecerá en 1.000 años?
b. ¿Cuál es la vida media del radio?

15. Para estimar la vida media de un isótopo, podríamos comenzar con 1.000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma a 500 de ellos desintegrarse o podríamos comenzar con 10.000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma desintegrarse a 5.000 de ellos. ¿Obtendremos la misma respuesta? Explíquelo (La ecuación del modelo es: dR/dt = -k.R).

16. Inicialmente se tienen 50 g. de una sustancia radiactiva y al cabo de 3 días quedan solamente 10 g. ¿qué porcentaje de la cantidad original queda al cabo de 4 días?. (Suponer que la rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente, es decir: dS/dt = -k.S).

17. Si hay inicialmente 300 g. de una sustancia radiactiva y al cabo de 5 años quedan 200 g. ¿cuánto tiempo deberá transcurrir antes de que queden solamente 10 g.?. (Suponer que la rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente, dS/dt = -k.S).

18. Si hay inicialmente 100 kg. de una sustancia radiactiva y al cabo de 8 años quedan 200 g. ¿cuánto tiempo deberá transcurrir antes de que queden solamente 10 g.?. (Suponer que la rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente, dS/dt = -k.S).

19. Supongamos que depositamos $ 5.000 en una cuenta de ahorro con interés incrementado a una tasa anual de 5% compuesto en forma continua (la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero en la cuenta es directamente proporcional a la cantidad existente en el momento por el interés, es decir: dD/dt = 0,05.D).

a. ¿En cuántos años alcanzará a duplicar su depósito?
b. ¿De cuanto dinero dispondrá en su cuenta después de 10 años?
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución de la cantidad de dinero en la cuenta al transcurrir el tiempo.
e. De no mediar algún evento externo (ej: extracción, cambio de interés, corralito, etc.). ¿En algún momento la cantidad de dinero en la cuenta decaerá?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.
g. Obtenga el modelo que represente al sistema si se desea retirar anualmente $1000 de la cuenta.

20. La señora Rodríguez desea comprar una casa nueva y debe pedir un préstamo de $150.000. Ella quiere una hipoteca a 20 años y tiene dos opciones. Puede pedir prestado el dinero a 7% anual sin puntos o bien al 6.85% por año con un cargo de 3 puntos (un punto es una comisión del 1% de la cantidad del préstamo que debe pagarse al principio del préstamo. En el ejemplo, una hipoteca con 3 puntos requiere que la señora Rodríguez pague $4.500 adicionales para recibir el préstamo. Como aproximación suponemos que el interés es compuesto y que los pagos se hacen continuadamente. Considere que la tasa de crecimiento de la deuda es directamente proporcional a la cantidad adeudada con una constante de proporcionalidad igual al interés, menos el pago anual.
(Opción 1: dD/dt = 0,07.D – t.p_a, Opción 2: dD/dt = 0,0685.D – t.p_a, siendo p_a el pago anual).

a. ¿Cuanto debe pagar en cada caso?
b. ¿Que opción es mejor sobre el tiempo del préstamo? (suponiendo que la señora Rodríguez no invierte el dinero que hubiese pagado en puntos)
c. Si puede invertir los $4.500 que hubiese pagado en puntos para la segunda hipoteca al 5% compuesto continuamente ¿cuál es mejor opción?

21. Una estudiante ha ahorrado $30.000 para sus estudios universitarios. Cuanto comienza a estudiar, invierte el dinero en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés anual compuesto continuamente. Suponga que sus gastos universitarios son de $10.000 por año y que ella dispone que este dinero sea deducido de su cuenta de ahorros en pagos pequeños. En otras palabras, suponemos que ella está pagando en forma continua (dD/dt = 0,06.D – 10000.t).
¿Cuanto tiempo le durará el dinero?

22. Una profesora universitaria contribuye con $1.200 por año a su fondo de retiro haciendo muchos pequeños depósitos a lo largo del año. El fondo crece a razón de 8% anual compuesto continuamente. Después de 30 años se jubila y comienza a retirar de su fondo a razón de $3.000 mensuales. (son dos ecuaciones: $dF_1/dt = 0,08 . F_1 + 1200$, $dF_2/dt = 0,08 . F_2 – 36000.t$)
¿Cuanto le duraría el dinero si no hace ningún depósito después de retirarse?

23. Una persona deposita inicialmente $500 en una cuenta de ahorros, que paga interés a una tasa de 4% anual compuesto continuamente. Suponga que la persona dispone que se le depositen automáticamente $10 por semana en la cuenta de ahorros. dA/dt = 0,04.A + 520 .t
¿Cuánto tendrá en la cuenta en un año y medio?

24. Un estudiante debe memorizar un poema y dispone para ello de 30 minutos. Se sabe que la tasa de memorización de estrofas es directamente proporcional a la cantidad que le falta por memorizar, por una constante. Pasados los primeros 15 minutos, ya había memorizado un 70 % de las estrofas. (dM/dt = k.M)
¿Cuanto tiempo le toma memorizar todo el poema?

25. Considere la variación del stock S de una empresa, en un modelo de producción general. El stock S tiene una tasa natural de crecimiento F(S), tal que F(S) es proporcional al producto del stock por la diferencia entre la unidad y el stock relativo a una constante k, con una constante de proporcionalidad igual a 0,2. es decir: $dS/dt = F(S) = 0{,}2.S(1-S)/k$
.

a. Resolver numéricamente (10 pasos). Considere $S(0) = 10$ y $k = 3$.
b. Graficar y analizar la tasa natural de crecimiento de F en relación al stock.
c. A qué valor tiende S(t) cuando t tiende a infinito?.
d. Calcular el error absoluto y relativo del stock para cada tiempo de Integración, sabiendo que la solución exacta de S(t) es: $S(t) = K / (1 + C.\ e^{-Rt})$, donde $C = (K - S(0)) / (S(0))$
e. ¿Qué se puede decir de la solución encontrada en el paso a?. ¿Es buena la integración realizada?. ¿Por qué?

26. La tasa de memorización de determinados códigos de una lista es directamente proporcional a la cantidad de códigos de la lista que quedan por aprender. La lista contiene 70 códigos, y se sabe que a los 20 minutos un ingeniero ya había memorizado 50 códigos. ($dM/dt = k.M$)

a. Indique el tiempo restante necesario para que memorice la totalidad de códigos.
b. Indique cuanto tiempo le lleva aprender el 80% de los códigos.
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución de la cantidad de códigos aprendidos respecto al tiempo.
e. ¿Que pasa cuando el tiempo tiende a infinito?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

27. Un operario es asignado para aprender el procedimiento de manejo de un nuevo equipo complejo. Se supone a la tasa de aprendizaje como directamente proporcional a la cantidad de instrucciones que restan por aprender, con constante k. Se sabe que a los 480 minutos había aprendido toda la información del manual. Para simplificar, se supone que su nivel de aprendizaje es similar al de los compañeros. ($dA/dt = k.A$)
¿Cuanto tiempo debería llevarle a un operario aprender la mitad del manual?

28. Se juega la final de un concurso de memorización. Los finalistas son los jugadores Rosa y Pepe. A los 15 minutos de iniciado el juego (que consiste en memorizar un poema en determinado tiempo) se sabe que Rosa lleva memorizado tres cuartas partes del poema. Por otro lado, a partir de juegos anteriores, se determino que la velocidad de memorización de Pepe es directamente proporcional a la cantidad que queda por memorizar con un coeficiente $k = 3$. ($dM/dt = 3.M$)

a. ¿Quien lleva la delantera?
b. Suponiendo que puede modelarse de igual manera la función de memorización de Rosa. ¿Como demuestra matemáticamente quien es más veloz?

29. Se tiene en Base Marambio una temperatura exterior de –20 grados. Se rompe el motor de la calefacción y la temperatura interior, que en ese momento es de 25 grados, comienza a variar según la siguiente ecuación:

$$dT/dt + 0{,}55T = -4$$

a. Graficar la variación de la temperatura en función del tiempo.
b. ¿En cuántas unidades de integración desciende la temperatura a 0 grados?
c. ¿A qué valor converge la temperatura de la vivienda?

30. La ley de Newton del enfriamiento establece que la rapidez con que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio en que está situado. Un cuerpo cuya temperatura es de 75º C se coloca en el tiempo $t = 0$ en un medio en que la temperatura (T_{AMB}) se conserva a 28º C. Después de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta una temperatura de 65º C. ($dT/dt = (T_{AMB} - T).k$)

a. ¿Cuál será la temperatura del cuerpo después de 10 minutos?
b. ¿Cuándo la temperatura del cuerpo será de 35º C?

c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución de la temperatura del cuerpo respecto al tiempo.
e. ¿Que sucede cuando el tiempo tiende a infinito?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

31. Agua a una temperatura de 100° C se enfría en 10 minutos a 80° C en un cuarto con temperatura de 25° C. ($dT/dt = (T_{AMB} - T).k$)

a. Encuentre la temperatura del agua después de 20 minutos.
b. ¿Cuándo la temperatura será de 40° C?

32. Un mozo retira el café en el mostrador, sabiendo que la temperatura a la que debe llegar el café a la mesa para que sea correcto, es de 45° C, que el tiempo medio de transporte del mostrador a la mesa es de 45 segundos y que la temperatura del ambiente es de 25° C. Sabiendo que en ese entorno, el café se enfría de una temperatura de 100° C en 10 minutos a 50° C. ($dT/dt = (T_{AMB} - T).k$)

a. Determine cuál es la temperatura media que debe tener el café cuando el mozo lo retira.
b. Si el mozo tarda 2 minutos en promedio desde que el café está listo hasta que llega a retirarlo para llevarlo a la mesa, ¿a qué temperatura se debe preparar el café?.
c. ¿A qué valor converge la temperatura del café?

33. Agua a una temperatura de 100° C se enfría en 10 minutos a 80° C en un cuarto con temperatura de 25° C. ($dT/dt = (T_{AMB} - T).k$)

a. Encuentre la temperatura del agua después de 20 minutos.
b. ¿Cuándo la temperatura será de 40° C?

34. Agua a una temperatura de 10° C toma 5 minutos para calentarse a 20° C en un cuarto con temperatura de 40° C. ($dT/dt = (T_{AMB} - T).k$)

a. Encuentre la temperatura después de 20 minutos.
b. ¿Cuándo la temperatura será de 25° C?

35. La temperatura interior de una vivienda es de 25 grados C. La temperatura exterior es de 4 grados C. Si el aparato de calefacción deja de funcionar y la vivienda comienza a enfriarse a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura de la misma y la del exterior.
($dT/dt = (T_{AMB} - T).k$)

a. Si la vivienda se enfría de 20 a 10 grados C en 10´, ¿cuánto tardará en descender la temperatura a 0° C?
b. ¿A qué valor converge la temperatura de la vivienda?

36. La ley de Newton del enfriamiento establece que la razón de cambio de la temperatura T(t) de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio Tm y la temperatura del cuerpo. Sea la constante de proporcionalidad igual a 1(min)-1 y la temperatura del medio de 30° C. Si el cuerpo está inicialmente a 100° C. ($dT/dt = (T_M - T).k$)

a. Use el método de Euler con h = 0,1 para aproximar la temperatura del cuerpo al cabo de 1 y 2 minutos.
b. Comparar con el valor exacto.

37. La Ley de Stefan de radiación establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo a T(t) grados, que se encuentra en un medio a Tm grados, es proporcional a Tm4 - T4. Sea la constante de proporcionalidad (40)-4 y la temperatura del medio es constante de 25o C.
($dT/dt = (T_M - T).k$).
Si T(0) = 90o C, use el método de Euler con h = 0,2 para aproximar T(1), T(2) y T(3).

38. La aceleración de mi Torino es proporcional a la diferencia entre 250 Km/h y la velocidad que ha alcanzado. En una prueba de pista se observa que este automóvil puede acelerar desde el reposo hasta 100 Km/h en 10 segundos. (dV/dt = (250 –V).k).

a. ¿Que aceleración alcanza después de los 15 segundos de haber arrancado?
b. Indique el tiempo que necesita desde el arranque para alcanzar los 200 Km/h.
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución de la aceleración respecto al tiempo.
e. ¿Que sucede cuando el tiempo tiende a infinito?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

39. Suponga que un bote de motor está moviéndose a 40 pies/s cuando el motor repentinamente se detiene, y que 10 segundos más tarde el bote ha reducido su velocidad a 20 pies/s. Suponga que la resistencia que encuentra mientras se desliza es proporcional a su velocidad. (dV/dt = -k.V).

a. ¿Cuantos segundos tarda el bote en detenerse?
b. ¿Que distancia total se desliza el bote desde el momento en que se detuvo el motor?
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución del sistema.
e. ¿Que sucede con el pasar del tiempo?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

40. Si la ecuación de movimiento de una gota que cae desde lo alto es:

$$dv/dt = 32 - 2v^2$$

a. Aplicar el método de Runge-Kutta de 4to. Orden, con h = 0,2.
b. ¿Cuál es la velocidad límite?.
c. Si t = 1 minuto equivale a h = 0,2. ¿Cuánto tarda en alcanzar dicha velocidad?.
d. Graficar la velocidad en función del tiempo y analizar la curva obtenida.

41. Consideremos un gran tanque que contiene azúcar y agua con lo que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que:

- El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, por lo que siempre hay 100 galones en el tanque.
- El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque.
- El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo A a razón de 2 galones por minuto.
- El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo B a razón de 1 galones por minuto.
- El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.

(dA/dt = 10+10 – 0,03.A).

a. Si inicialmente la cantidad de azúcar en el tanque es 15 cucharadas: ¿Cual es la cantidad de azúcar en el tanque después de 20 minutos?
b. ¿En que momento la cantidad de azúcar en el tanque llegará a 17 cucharadas?
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución de la cantidad de azúcar en el tanque respecto al tiempo.
e. ¿Que sucede con el paso del tiempo?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

42. Suponga que un automóvil parte del reposo, que su motor proporciona una aceleración de 10 pies/s2, mientras que la resistencia del aire suministra 0.1 pies/s2 de desaceleración por cada pie por segundo de la velocidad del automóvil. (dV/dt = 10 – 0,1.V)

a. Encuentre la velocidad (límite) máxima posible del automóvil.
b. Determine cuanto tarda el automóvil en alcanzar el 90% de la velocidad límite.
c. ¿Que distancia recorrió?

43. Suponga que va a tener una gran cena con un gran grupo de invitados. Usted decide cocinar 2 galones de chile con carne. La receta indica 2 cucharaditas de salsa picante por galón, pero usted lee mal las instrucciones y pone 2 cucharadas grandes de salsa picante por galón. Como cada cucharada grande corresponde a 3 cucharaditas, usted ha puesto 6 de éstas por galón, lo que da un total de 12 cucharaditas de salsa picante en el guisado. Usted no quiere tirar el chile con carne porque el menú no es muy variado (y algunas personas gustan comer este platillo con mucho picante), por lo que termina sirviéndolo. Sin embargo, conforme cada persona se sirve, usted llena la cazuela con frijoles y jitomates sin picante hasta que la concentración de salsa picante concuerda con la de la receta. Suponga que los invitados toman 1 taza de chile con carne por minuto de la cazuela (hay 16 tazas en un galón). ($dP/dt = -t / 32$)

a. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que el chile con carne tenga la concentración de salsa picante indicada en la receta?
b. ¿Cuántas copas de chile con carne se habrán tomado de la cazuela'?

44. El químico A es transformado en el químico B. La tasa a la cual B se forma varía directamente proporcional con la cantidad de A presente en cualquier instante. Se sabe además que 10 lb de A están presentes inicialmente y si 3 lb se transforman en B en una hora. ($dA/dt = k.A$)

a. ¿Qué cantidad de A se transforma después de 2, 3 y 4 horas?
b. ¿En cuánto tiempo se transforma el 75% del químico A? (Este tipo de reacción se llama reacción de primer orden.)

45. Las alturas promedio de niños varones de varias edades se muestran en la siguiente Tabla. Use estos datos para predecir la altura media de varones adultos con pleno crecimiento.

Edad	Nacimiento	1 año	2 años	3 años	4 años	5 años	6 años	7 años	8 años
Altura en pulgadas	19.4	31.3	34.5	37.2	40.3	43.9	48.1	52.5	56.8

a. ¿Que altura puede presumirse para la edad de 10 años?
b. ¿Que altura indica el modelo para la edad de 6 años? ¿Que observa respecto de la altura de la tabla? ¿Como lo interpreta?
c. Integre numéricamente.
d. Grafique la evolución del sistema.
e. ¿Que sucede con el pasar del tiempo?
f. Indique sus conclusiones sobre el sistema.

46. Se está probando un nuevo modelo autorregulable de termostato. Las pruebas realizadas dan como resultado los siguiente valores:

Temperatura (en grados)	10	15	25	40
Apertura de aire (en mm)	0,5	0,9	3,1	4

Se desea averiguar:

a. Si existe, ¿cuál es la apertura máxima?.
b. ¿Cuál es la apertura para 50, 60, 80 y 100 grados?, calcule utilizando la fórmula logística.
c. Integre numéricamente desde 40 grados hasta 100 grados con un paso de 5 grados.
d. Grafique (temperatura vs. apertura).

47. Se está probando un nuevo motor. Las pruebas realizadas dan como resultado los siguientes valores:

Combustible inyectado (mm^3) por minuto	0,005	0,015	0,02	0,025
Revoluciones por minuto	1200	3500	4400	5000

Se desea averiguar:

a. Si existe, ¿cuál es la cantidad máxima de revoluciones por minuto? y ¿para qué cantidad de combustible inyectado se produce aproximadamente?.
b. ¿Cuáles son las revoluciones por minuto para 0,03, 0,05, 0,065 y 0,1 mm3 por minuto de combustible inyectado?, calcule utilizando la fórmula logística.
c. Grafique (combustible vs. revoluciones).

48. La siguiente tabla muestra la cantidad de agricultores (en unidades de miles) en Argentina durante los años 1949-1957:

1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
996	993	955	915	886	864	836	782	758

a. Representar los datos en un gráfico.
b. Construya un modelo que represente los datos de manera aproximada y grafique en el mismo gráfico anterior la solución encontrada con el modelo.
c. Estime el número de agricultores para el año 2005.

49. La producción de café de Colombia durante los años 1985-1990 está representada por:

1985	1986	1987	1988	1989	1990
90	100,5	110	121	130	142

a. Representar los datos en un gráfico.
b. Construya un modelo que represente los datos de manera aproximada y grafique en el mismo gráfico anterior la solución encontrada con el modelo.
c. Estime la producción de café para año 2002 y 2010.

50. La siguiente tabla contiene datos sobre la población de búhos amarillos en Wyman Woods, Oxford, Inglaterra (recopilados por Southern).

Año	Población
1947	34
1948	40
1949	40
1950	40
1951	42
1952	48
1953	49
1954	52
1955	60
1956	64
1957	64
1958	62
1959	64

a. ¿Qué modelo de población usaría usted para modelar esta población?
b. ¿Puede usted calcular la población límite?
c. ¿Qué predice su modelo para la población actual?

51. Suponga que una especie de pez en un lago específico tiene una población que sigue el modelo logístico de población con razón k de crecimiento, capacidad N de soporte y tiempo t medido en años. Ajuste el modelo para tomar en cuenta cada una de las situaciones siguientes.

a. 100 peces son cultivados cada año.
b. Un tercio de la población de peces es cultivada anualmente.
c. El número de peces cultivados cada año es proporcional a la raíz cuadrada del número de peces en el lago.

52. Suponga el parámetro k = 0.3 de razón de crecimiento y la capacidad N = 2500 de soporte en el modelo logístico de población del ejercicio anterior. Y también que P(0) = 2500.

a. Si 100 peces son cultivados cada año, ¿qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de la población de peces? En otras palabras, ¿qué da un análisis cualitativo del modelo?
b. Si cada año se cultiva una tercera parte de los peces, ¿qué predice e1 modelo para el comportamiento a largo plazo de dicha población?

53. La altura promedio de un cierto tipo de planta después de 16, 32 y 48 días está dado respectivamente por 21.6, 43.8 y 54.2 cm. Asumiendo que el patrón de crecimiento sigue la curva logística:

a. Determine la altura teórica máxima esperada.
b. Las alturas teóricas después de 8, 24 y 60 días.

54. Suponga que en el instante t=0 un medio de la población "logística" de 100.000 personas han escuchado cierto rumor, y que el número de aquellos que han oído el rumor empieza a aumentar a razón de 1000 por día. ¿Cuanto tiempo pasará para que este rumor se propague al 80% de la población?

55. El flujo de información llega a un periódico a razón de 1000 noticias diferentes diarias. Un suceso de gran importancia hace aumentar el caudal de noticias durante 8 días según una variación de crecimiento proporcional al cuadrado del tiempo, con una constante de proporcionalidad igual a 3. ($dF_1/dt = 3.t^2$). Luego de esos 8 días, el flujo de información que llega, pasa a comportarse de la siguiente manera: $dF_2/dt + 0,001\ F_2^2 = 1210$

a. Encontrar el valor del flujo para t = 8 analíticamente.
b. Resuelve numéricamente por el método de Euler desde t = 8, en adelante.
c. Grafica desde t = 0.
d. ¿Cómo es el flujo final con respecto al inicial?

56. Una empresa tiene el siguiente flujo de ingresos:

Mes	1	2	3	4
Variación	13,5	12,9	12,4	11,8

Se desea averiguar:
Los ingresos esperados y la tasa de variación de los mismos al cabo de un año, sabiendo que en un momento dado I(0) = 200.
Una asesoría le propone un cambio en el manejo de las ventas de la empresa, y el comportamiento de los ingresos de allí en más será según:

$d^2I/dt^2 – 2\ I + 300 = 0$

Encontrar la evolución de la ingresos numéricamente y graficar (I vs. t) desde t = 0. Indicar la tendencia de los ingresos en los próximos 2 años. Considere una unidad de integración igual a un mes.

57. La variación de producción de soja en los últimos años fue:

Año	1995	1996	1997	1998
Variación de producción	13,1	11	8,9	7

A partir del 2001 cambia la tendencia, siendo ahora tal que la variación de la producción es igual al exceso de una constante (150) sobre la producción. (dP/dt = 150 – P)

a. Modele el primer tramo y calcule analíticamente P y P´ para el 2000 con P(1995) = 50.
b. Modele e integre numéricamente desde el 200 en adelante. Grafique desde 1995.
c. ¿Cuál será la tendencia de la producción?. Explicar en base a los términos de las ecuaciones.

58. La velocidad de procesamiento de datos de un microprocesador es de 1,5 Mips y varia en un –1,3% cada 5° C de variación de temperatura a partir de 0° C. Calcular la velocidad para 37° C y a que temperatura se hace 0. (dV/dT = - (0,013/5).T) ¿A qué temperatura, la velocidad se hace la mitad?

59. Una persona decide comenzar una dieta. Pesa actualmente 92 Kg y su peso ideal es de 72 Kg. Supone una aproximación a la tasa de pérdida de peso como directamente proporcional a la diferencia entre su peso actual y su peso ideal. A dos semanas de comenzar la dieta, ha llegado a perder 4 Kg. (dP/dt = k (P - 72)) ¿Cuanto tiempo pasará hasta que alcance los 75 Kg?

60. Hallar $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$ utilizando el método de Euler con $h = 0.25$, $h = 0.1$ y $h = 0.01$. Si la solución analítica del ejercicio 1 es $y(x) = e^x + x + 1$, comparar los resultados de la solución analítica con los obtenidos utilizando métodos numéricos. Graficar.

61. Hallar $y(0.5)$ para $y' = y$; $y(0) = 1$ utilizando el método de Euler con $h = 0.25$, $h = 0.1$ y $h = 0.01$. Encontrar la solución analítica y comparar los resultados. Graficar.

62. Hallar $y(1)$ para $y' = y^2 + 1$; $y(0) = 0$ utilizando el método de Euler con $h = 0.25$, $h = 0.1$ y $h = 0.01$. Sabiendo que la solución analítica es $y(x) = \tan(x)$, comparar los resultados obtenidos con la solución real. Graficar.

63. Hallar $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$ utilizando el método de Rounge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$. Comparar los resultados obtenidos con los del ejercicio 1. Graficar la solución analítica y la obtenida.

64. Hallar $y(1)$ para $y' = y^2 + 1$; $y(0) = 0$ utilizando el método de Rounge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$. Comparar los resultados con los obtenidos en el ejercicio 2. Graficar.

65. Un balance de masa para un químico en un reactor completamente mezclado puede escribirse como:

$$V\frac{dc}{dt} = F - Qc - kVc^2$$

Donde V = volumen (10m3), c = concentración, F = flujo másico (200g/min.), Q = flujo volumétrico (1m3/min.) y k = flujo de reacción de segundo orden (0.1m3/g/min.). Si $c(0) = 0$, resolver la EDO hasta que la concentración alcance un nivel estable. Graficar los resultados.

66. La razón de flujo de calor (conducción) entre dos puntos sobre un cilindro calentado en un extremo, está dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{100(L-x)(20-t)}{100-xt}$$

Donde λ = constante, A = área de la sección transversal del cilindro, Q = flujo de calor, T = temperatura, L = longitud de la barra y x = distancia desde el extremo calentado.
Combinar las dos ecuaciones para calcular el flujo de calor para t = 0 a 25seg. La condición inicial es:

$Q(0) = 0$, y $\lambda = 0.4\frac{cal \bullet cm}{seg}, A = 10cm^2, L = 20cm, x = 2.5cm$

67. Resolver el ejercicio anterior con $x = 1cm$ y $x = 15cm$. Comentar los resultados.

68. Hallar $y(1)$ para $y'' - y = x$ con $y(0) = 0, y'(0) = 1$ utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

69. Hallar $y(1)$ para $y''-y=x$ con $y(0)=0, y'(0)=1$ utilizando el método de Rounge-Kutta de cuarto orden con $h=0.1$. Comparar los resultados con los del ejercicio anterior. Evaluar la magnitud del error.

70. Un resorte con una masa de $2Kg$ tiene una longitud normal de $0.5m$. Se requiere una fuerza de $25.6N$ para mantenerlo estirado a una longitud de $0.7m$ (k = 5,12). Si el resorte se mantiene alargado hasta dichas dimensiones y luego se lo suelta con una velocidad inicial cero, determine la posición de la masa para $t \in [0,10]$ seg. Utilizar el método de Rounge-Kutta de cuarto orden seleccionando el paso óptimo. Obtener la solución analítica para calcular el error de la solución numérica. (2. x" + 5,12.x = 0 ; con x(0) = 0,7 ; x'(0) = 0)

71. Un circuito en serie consiste en un resistor con $R=20K\Omega$, un inductor con $L=1mHy$, un capacitor con $C=1nF$ y una batería de 12 V. Si la carga inicial y la corriente son 0, determine la carga y la corriente en el tiempo $t \in [0,10]$ mseg., y luego el valor estacionario de la corriente para $t=1seg$. (1.q" + 20 . q' + 1.q = 12 ; con q(0) = 0 ; i(0) = q'(0) = 0)

72. Un circuito en serie contiene un resistor con $R=1K\Omega$, un inductor con $L=10mHy$, un capacitor con $C=1pF$ y una batería de 10 V. La carga inicial es $Q=1x10^{-4}C$ y la corriente inicial es 0. (10.q" + 1.q' + 0,001.q = 10 ; con q(0) = 0,0001 ; i(0) = q'(0) = 0)

a. Determine la carga y la corriente en el tiempo t.
b. Grafique las funciones carga y corriente.

Resolver aplicando métodos numéricos.

73. La ecuación que gobierna la posición de un cuerpo en Movimiento Uniformemente Acelerado es $y''-3y'+2y=0$ con $y(0)=-1, y'(0)=1$. Hallar $y(1)$ utilizando el método de Euler con $h=0.1$. Resolver tomando 3 y 4 cifras significativas respectivamente. Comparar los resultados obtenidos.

74. Un sistema de control es representado en variables de estado por el siguiente par de ecuaciones:

$$y_1' = -0.5y_1$$
$$y_2' = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

con $y_1(0)=4, y_2(0)=6$

Hallar $y_{1,2}(2)$ utilizando el método de Euler con $h=0.5$.

75. Hallar $y_{1,2}(2)$ para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1' = -0.5y_1$$
$$y_2' = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

con $y_1(0)=4, y_2(0)=6$ utilizando el método de Rounge-Kutta de cuarto orden con $h=0.5$. Resolver tomando 3 y 4 cifras significativas. Calcular el error en cada paso.

76. Hallar las soluciones de $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_3$$
$$x_3' = -2x_1 - 5x_2 - 4x_3$$

Suponiendo las siguientes condiciones iniciales: $x_1(0) = 1, x_2(0) = -3, x_3(0) = 6$. Aplicar los métodos de Euler y de Rounge-Kutta.

77. Sabiendo que la solución analítica del ejercicio anterior es:

$$x(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -t \\ t-1 \\ 2-t \end{bmatrix} + e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Comparar la misma con las soluciones numéricas encontradas. Determinar los errores numéricos. Graficar.

78. Hallar $y(4)$ para $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5$ con $y(0) = 1$ utilizando el método de Euler con $h = 0.5$ y $h = 0.25$. Sabiendo que la solución real es $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$ determinar los errores de truncamiento y redondeo de las soluciones numéricas. Graficar las soluciones.

79. Las siguientes ecuaciones modelan un sistema tipo presa-predador:

$$\frac{dx}{dt} = 1.2x - 0.6xy$$
$$\frac{dy}{dt} = -0.8y + 0.3xy$$

Siendo las condiciones iniciales $x(0) = 2, y(0) = 1$, simular durante 30seg utilizando el método de Rounge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$. Graficar x e y vs. tiempo.

80. Se desea eliminar una plaga P en una cierta región, introduciendo un depredador D. La plaga se desarrolla según una tasa en proporción 0,04 de su población y es eliminada a una tasa en proporción 0,03 de los encuentros con el depredador. Este último, a su vez, tiene un decrecimiento proporcional a su población con una constante 0,8 y crece en proporción 0,05 de los encuentros con la plaga. (dP/dt = 0,04.P – 0,03.P.D , dD/dt = 0,05.P.D - 0,8.D)

Simule el comportamiento del sistema, sabiendo que $P(0) = 100, D(0) = 25$, con un $h = 0.2$. Realice 10 iteraciones.

Grafique.

¿Cuál será el comportamiento del depredador si la plaga desaparece?

81. Se desea eliminar una plaga P en una cierta región, introduciendo un depredador D. La plaga se desarrolla según una tasa en proporción 0,00001 del cubo su población y es eliminada a una tasa en proporción 0,08 de los encuentros con el depredador. Este último, a su vez, tiene un decrecimiento según una tasa en proporción 0,08 de sus propios encuentros y crece en proporción 0,01 de los encuentros con la plaga. (dP/dt = 0,00001.P^3 – 0,08.P.D , dD/dt = 0,01.P.D – 0,08.D)

Simule el comportamiento del sistema, sabiendo que $P(0)=1000, D(0)=150$, con un $h=0.1$

Grafique.

¿Cuál será el comportamiento del depredador si la plaga desaparece?.

82. Se desea eliminar una plaga P en una cierta región, introduciendo un depredador D. La plaga se desarrolla según una tasa en proporción 0.1 de su población y es eliminada a una tasa en proporción 0,05 de los encuentros con el depredador. Este último, a su vez, tiene un decrecimiento según una tasa en proporción 0.04 de sus propios encuentros y crece en proporción 0.05 de los encuentros con la plaga. (dP/dt = 0,1.P – 0,05.P.D , dD/dt = 0,05.P.D – 0,04.D^2)

Realiza el diagrama en bloques

Simule el comportamiento del sistema, sabiendo que $P(0)=140, D(0)=25$ P(0)= 140 y D(0)=25, con un $h=0.1$.

Grafique

Verifique que la plaga sea eliminada. Estudie el comportamiento del depredador una vez que la plaga desaparece.

83. La siguiente ecuación diferencia no lineal es conocida como el oscilador de Van der Pol.

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \mu(1-y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

Expresar la ecuación como un sistema de ecuaciones de primer orden tomando $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Luego resolver el sistema para $y(0)=0.5, y'(0)=0,$ y $y(0)=-1, y'(0)=2$ con $\mu = 2$. Graficar x1 vs. x2 en ambos casos.

84. Un sencillo modelado basado en la dinámica del fluido atmosférico son las ecuaciones de Lorentz que se muestran a continuación.

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy$$

Investigar las trayectorias de las ecuaciones de Lorentz para $\sigma = 10, b = 2.6667, r = 28$, con condiciones iniciales $x = y = z = 5$ durante 20 segundos. Utilizar los métodos de Euler y de Rounge-Kutta de cuarto orden. Graficar x, y y z en función del tiempo. Graficar también y vs. x y z vs. x.

85. Un motor de continua sin carga puede ser modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{K}{J}i(t) - \frac{B}{J}\omega(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}K\omega(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

Donde:

i(t) = corriente de armadura

$R = 7.5\Omega$ resistencia de armadura

θ(t) = desplazamiento del rotor

$K = 0.024\frac{Nm}{A}$ constante del motor

$L = 5.55x10^{-3}Hy$ inductancia de armadura

e(t) = voltaje aplicado

ω(t) = velocidad angular del rotor

$J = 1.5x10^{-5}Kgm^2$ inercia del rotor

$B = 0.0000259$ B = coeficiente de fricción viscosa.

Encontrar la velocidad de régimen del motor para $e(t) = 10V$ y $e(t) = 12V$.

Graficar i(t) y ω(t) para $t \in [0,5]$ seg. para ambos casos.