Tarea III

Análisis de Algoritmos, Grupo 3

Maria Andrea Rodriguez Tastets[1], Erick Elejalde Sierra[2],
Cristóbal Donoso Oliva[3] Matías Medina Silva[4]

[1]Docente a cargo de la asignatura [2]Ayudante de asignatura
[3−4]Estudiantes de pregrado
[1]andrea@udec.cl [2]erick.elejalde@gmail.com [3]cdonoso94@gmail.com
[4]matiasdmedina@udec.cl
[1−2−3−4]Dpto. de Ingeniería Civil Informática y Ciencias de la Computación
Universidad de Concepción, Concepción, Chile.

21 de Junio del 2016

Índice

1. Hormigas en un palo

1.1. Definición del problema

Un ejército de hormigas camina en un palo horizontal de largo l, cada una a una velocidad constante v. Cuando una hormiga alcanza el final del palo se cae. Cuando dos hormigas se encuentran ellas se dan vuelta y caminan en sentido contrario. Se sabe la posición inicial de las hormigas pero no su dirección de movimiento. Se te pide determinar el menor y mayor tiempo posible para que todas las hormigas se caigan del palo.

Supongamos que tenemos un conjunto ordenado $\mathrm{S} = \{\mathrm{a}_1, \ldots, a_n\}$ de n hormigas y un palo de largo l. Cada hormiga a_i tiene una posición incial p_i, donde $0 \leq \mathrm{p}_i \leq l$.

1.2. Subestructura óptima

Antes de definir la subescructura óptima se analizará que sucede cuando dos hormigas colisionan.

Figura 1: Antes de colisión

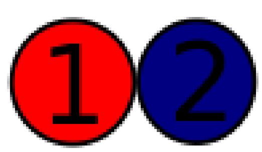

Figura 2: Colisión

Como vemos en la figura 3, lo que le sucede a una hormiga tras una colisión

Figura 3: Después de colisión

es lo mismo que le sucedería a la otra hormiga, en otras palabras, es como si no hubiese habido un choque y las hormigas intercambiarán su "identidad", siendo esta representada por los números. Entonces el tiempo total para que todas las hormigas caigan estaría dado por la hormiga que demore más tiempo en cruzar el palo como si no hubiesen colisiones

Denotemos el conjunto $\mathrm{S}_{i,j}$ que contiene desde las hormiga i hasta la hormiga j.

Se asume que el conjunto está ordenado en orden creciente en terminos de p, es decir que $\forall$ $\mathrm{a}_k \in \mathrm{S}_{i,j}$, $\mathrm{p}_k \leq \mathrm{p}_{k+1}$ con $0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{j}$, entonces, para encontrar el tiempo máximo es trivial, ya que solo se necesita comparar la horgmia a_0 con la hormiga a_n y calcular cual demoraría más en cruzar a la orilla opuesta del palo. Para el tiempo mínimo, el problema se transofrma en encontrar la hormiga que se demora más tiempo en cruzar el palo, considerando la dirección de movimiento hacia la orilla más cercana.

Luego se tiene un problema $\mathrm{S}_{i,j}$, donde una solución a $\mathrm{S}_{i,j}$ sería dado por el tiempo mínimo de la hormiga a_k, tal que $\mathrm{p}_i \leq \mathrm{p}_k \leq \mathrm{p}_j$. Esto genera dos subproblemas $\mathrm{S}_{i,k}$ y $\mathrm{S}_{k+1,j}$, donde la solución al problema $\mathrm{S}_{k+1,j}$ debe ser menor que a_k.

La subestructura óptima es la siguiente. Suponemos que una solucion $\mathrm{A}_{i,j}$ de $\mathrm{S}_{i,j}$ es el tiempo mínimo de la hormiga a_k. Entonces las soluciones $\mathrm{A}_{i,k}$ de $\mathrm{S}_{i,k}$ y $\mathrm{A}_{k+1,j}$ de $\mathrm{S}_{k+1,j}$ que se usan en la solución optima de $\mathrm{S}_{i,j}$ deben ser óptimas.

1.3. Demostración subestructura óptima

Se asume que $A_{i,j}$ (el tiempo mínimo de la hormiga a_k) es la solución óptima del problema $S_{i,j}$. Si hay una solución $A'_{i,k}$ de $S_{i,k}$ con una hormiga que tome más tiempo en cruzar el palo que en $A_{i,k}$, entonces podríamos reemplazar $A_{i,k}$ por $A'_{i,k}$ en $A_{i,j}$ y así mismo reemplazar $A'_{i,k}$ por $A_{i,j}$, ya que $a_k \in S_{i,k}$. Ya que asumimos que $A_{i,j}$ era una solución optima, entonces hay una contradicción. Lo mismo se aplica para $S_{k,j}$

1.4. Solución recursiva

Se quiere encontrar el tiempo de la hormiga a_k que demore más en recorrer el palo teniendo en cuenta la opción minima, es decir, que camine hacia la orilla más cercana. Para el calculo de la opción minima se definió la siguiente función d[i] considerando la posición pi, el largo del palo l y la velocidad v:

$$d[i] = min\{\frac{l-pi}{v}, \frac{pi}{v}\}$$

Figura 4: Función de opción mínima

Luego, denotamos c[i,j] como el tiempo de la hormiga que más tiempo demora en cruzar el palo considerando tu opción mínima:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & S_{i,j} = 0 \\ d[i] & S_{i,j} = 1 \\ max\{c[i,(i+j)/2], c[(i+j)/2, j]\} & S_{i,j} \neq 0 \end{cases}$$

Figura 5: Tiempo de caida

1.5. Elección Greedy

Para este problema, la elección greedy será solo comparar a las hormigas más cercanas al centro del palo por cada sub problema.