

Tal- og bogstavregning

04 Potenser og rødder II

Rødder (heltallige)

Sidste gang talte vi om potenser, og i dag skal vi tage fat i potensernes ”onde fætre”, rødderne.

Det er selvfølgelig noget rod, at vi bruger udtrykket *rødder* om forskellige ting i matematikken (vi bruger det f.eks. til at beskrive nulpunkterne for en funktion), men det må I lære at abstrahere fra.

I dag handler det, som sagt, om rødder som de inverse (modsatte) funktioner til potenser, og I kender med garanti allerede udtrykket *kvadratrodd*, og I ved nok også, at der gælder følgende sammenhæng:

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$$

Kan vi generalisere, og sige, at:

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a ?$$

Vi kalder $\sqrt[n]{a}$ for *den n'te rod af a*.

Eksempler

- $\sqrt{9} = 3$ fordi $3^2 = 9$
- $\sqrt[3]{8} = 2$ fordi $2^3 = 8$
- $\sqrt[5]{-1} = -1$ fordi $(-1)^5 = -1$

Rod som potens (rationale tal som eksponent)

Med udgangspunkt i ovenstående, kan vi nu generelt skrive, at:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a}}_n = (\sqrt[n]{a})^n = a ,$$

og hvis vi nu forestiller os, at vi bruger potensregneregler nr. 5 på den højre del af ovenstående, så har vi:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\Downarrow$$

$$\left(a^x\right)^n = a^1$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{x \cdot n} = a^1$$

$$\Updownarrow$$

$$x \cdot n = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Vi kan altså fremover skrive \sqrt{x} (kvadratroden af x) som $x^{\frac{1}{2}}$ og $\sqrt[3]{x}$ (kubikroden af x) som $x^{\frac{1}{3}}$.

Eksempler

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $(-1)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-1} = -1$

Potensregnereglerne (eksempler)

1. $\sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = a^1 = a$
2. $a : \sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{1 - \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
3. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a \cdot b}$
4. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$
5. $\sqrt[3]{a^6} = (a^6)^{\frac{1}{3}} = a^{6 \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$

Opgaver

Opgave 1

Udregn, uden brug af hjælpemidler, følgende tal:

[Opgave 2.33](#)

Opgave 2

Udregn følgende tal:

[Opgave 2.35](#)

Opgave 3

Reducer følgende udtryk:

[Opgave 2.37](#)