

Geometri og trigonometri

07 Sinusrelationerne

Nu er I blevet eksperter i beregning af stykker i retvinklede trekanter (ved hjælp af trigonometri). Desværre, så findes der mindst lige så mange vilkårlige trekanter som retvinklede, og vi har overhovedet ikke nogle værktøjer til beregning af stykker i de vilkårlige trekanter.

I dag skal vi se, om vi kan "opfinde/udlede" et værktøj, som kan hjælpe os lidt på vej.

Teori

Vi kigger på den *vilkårlige trekant* $\triangle ABC$, hvor alle vinkler er spidse (dvs. der er med garanti ingen ret vinkel).

1. Jeg starter med at indtegne højden h_b , der er ortogonal (vinkelret) på siden b og går gennem punktet B . Højden h_b inddeler $\triangle ABC$ i to retvinklede trekanter, og dem er I jo eksperter i, så lad os arbejde videre herfra.
2. Jeg kigger nu på de to retvinklede trekanter hver for sig, og ser, om jeg kan finde en sammenhæng mellem de tre stykker i hver af de to trekanter.

- i. Venstre trekant.

$$\sin(A) = \frac{h_b}{c} \Leftrightarrow h_b = c \cdot \sin(A)$$

- ii. Højre trekant.

$$\sin(C) = \frac{h_b}{a} \Leftrightarrow h_b = a \cdot \sin(C)$$

3. Da højden i de to trekanter er identisk, kan vi sætte de to udtryk lig hinanden.

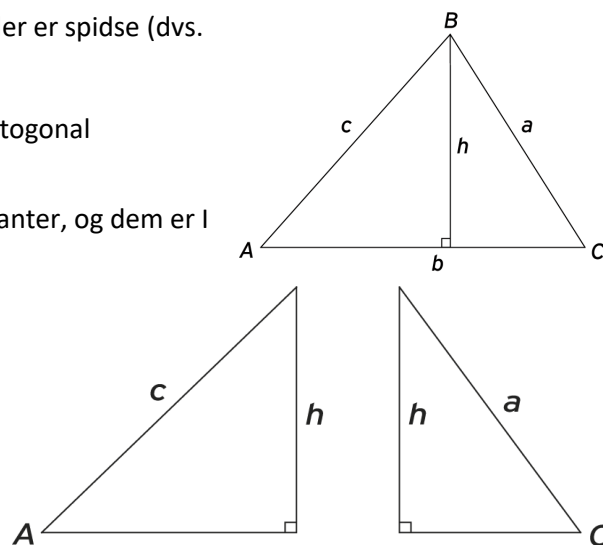
$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C) \Leftrightarrow \frac{c}{\sin(C)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

4. Hvis vi nu nedfælder højden til én af de andre sider (h_a eller h_c) vil siden b og vinkel B indgå, og vi kan derfor opstille følgende sammenhæng, der kaldes *sinusrelationerne*.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \text{ eller } \frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

Sinusrelationerne giver os mulighed for, i nogle tilfælde, at beregne de resterende stykker i den vilkårlige trekant, hvis vi i forvejen kender tre (3) stykker.

Lad os kigge på et par eksempler.



Eksempler

Eksempel 1

I den vilkårlige $\triangle ABC$ er $A = 35^\circ$, $a = 9$ og $B = 87^\circ$.

- a) Bestem trekantens øvrige stykker.

Starter med at skitsere trekanten (på tavlen).

For at anvende sinusrelationerne skal jeg kende en vinkel og den modstående side – og det gør jeg her (vinkel A og siden a).

- i. Bestemmer længden af siden b med sinusrelationen $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \Leftrightarrow b = \frac{a \cdot \sin(B)}{\sin(A)} = \frac{9 \cdot \sin(87^\circ)}{\sin(35^\circ)} = 15.7$$

- ii. Bestemmer vinkel C med formlen for vinkelsum i en trekant $A + B + C = 180^\circ$.
 $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 35^\circ - 87^\circ = 58^\circ$

- iii. Bestemmer længden af siden c med sinusrelationen $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \Leftrightarrow c = \frac{a \cdot \sin(C)}{\sin(A)} = \frac{9 \cdot \sin(58^\circ)}{\sin(35^\circ)} = 13.3$$

Trekantens øvrige stykker $b = 15.7$, $C = 58^\circ$ og $c = 13.3$.

Eksempel 2

I den vilkårlige $\triangle ABC$ er $C = 40^\circ$, $b = 7$ og $c = 8$.

- a) Bestem trekantens øvrige stykker.

Starter med at skitsere trekanten (på tavlen).

For at anvende sinusrelationerne skal jeg kende en vinkel og den modstående side – og det gør jeg her (vinkel C og siden c).

- i. Bestemmer vinkel B med sinusrelationen $\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$.

$$\frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c} \Leftrightarrow \sin(B) = \frac{b \cdot \sin(C)}{c} \Leftrightarrow$$

$$B = \sin^{-1}\left(\frac{b \cdot \sin(C)}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{7 \cdot \sin(40^\circ)}{8}\right) = 34.2^\circ$$

- ii. Bestemmer vinkel A med formlen for vinkelsum i en trekant $A + B + C = 180^\circ$.
 $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - B - C = 180^\circ - 34.2^\circ - 40^\circ = 105.8^\circ$

- iii. Bestemmer længden af siden a med sinusrelationen $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)}$.

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \Leftrightarrow a = \frac{c \cdot \sin(A)}{\sin(C)} = \frac{8 \cdot \sin(105.8^\circ)}{\sin(40^\circ)} = 12.0$$

Trekantens øvrige stykker $a = 12.0$, $A = 105.8^\circ$ og $B = 34.2^\circ$.

Opgaver

Opgave 1

Bestem de ukendte sider og vinkler i den spidsvinklede $\triangle ABC$, når:

- a) $B = 82^\circ$, $b = 7$ og $c = 6.55$
- b) $A = 73^\circ$, $C = 65^\circ$ og $a = 4.5$
- c) $C = 80^\circ$, $a = 8.1$ og $c = 8.44$

Opgave 2

Bestem de ukendte stykker i $\triangle ABC$, når:

- a) $A = 110^\circ$, $a = 6$ og $b = 8$.