Tal- og bogstavregning
01 Kvadratsætningerne

Så er vi klar til at starte på matematik i studieretningen, og da I har valgt en studieretning med matematik A, så skal vi have fornøjelsen af hinandens selskab de næste 2½ år.

Vi starter med at kigge lidt på læreplanen (lovteksten) for matematik A, så I kan få en fornemmelse for de emner, vi skal gennemgå, og hvordan vi griber det an.

Vi skal også kigge lidt på de forskellige opgave- og afleveringsformer, I skal udsættes for, og så vil jeg tale lidt om mine forventninger til jeres deltagelse og aktivitet. Her kan I også få lov at komme med jeres egne forventninger til mig og min undervisning.

Teori

I et par af de beviser, vi har gennemgået i grundforløbet, er I stødt på udtrykket *kvadratsætning*. Vi arbejder med tre (3) kvadratsætninger, hvor de to af dem faktisk kan omskrives til én, så der er ikke så meget at huske på – men de er absolut værd at huske, især når vi arbejder med beviser.

1. kvadratsætning

Kvadratet på en to-ledet sum bestemmes som kvadratet på første led plus kvadratet på andet led plus det dobbelte produkt.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$$

2. kvadratsætning

Kvadratet på en to-ledet differens bestemmes som kvadratet på første led plus kvadratet på andet led minus det dobbelte produkt.

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$$

3. kvadratsætning

To leds sum multipliceret med de samme to leds differens bestemmes som kvadratet på første led minus kvadratet på andet led.

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Eksempel 1

1. kvadratsætning

$$(2+5)^2 = 2^2 + 5^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 4 + 25 + 20 = 49$$

$(a+6)^2 = a^2+6^2+2\cdot a\cdot 6 = a^2+12a+36$

2. kvadratsætning

$(6-1)^2 = 6^2+1^2-2\cdot 6\cdot 1 = 36+1-12 = 25$

$(b-5)^2 = b^2+5^2-2\cdot b\cdot 5 = b^2-10b+25$

3. kvadratsætning

$(10+3)\cdot(10-3) = 10^2-3^2 = 100-9 = 91$

$(6+c)\cdot(6-c) = 6^2-c^2 = -c^2+36$

Opgaver 1

Benyt kvadratsætningerne til at gange følgende parenteser ud:

a) $(2a+3)^2$

b) $(4-y)^2$

c) $(p+2q)\cdot(p-2q)$

d) $(b-2)^2$

e) $(3a+x)\cdot(3a-x)$

f) $(3a+2b)^2$

Teori – fortsat

Af og til er det nyttigt at bruge kvadratsætningerne den modsatte vej (som i beviset for løsning af andengradsligningen).

1. og 2. kvadratsætning

Lad os se, om vi kan omskrive udtrykket x^2+6x+9 vha. 1. kvadratsætning. Det kan vi, hvis udtrykket består af de to kvadrater samt det dobbelte produkt.

- Hvis vi kigger på det første led, så er det jo kvadratet af x.
- Hvis vi kigger på det sidste led, så er det jo kvadratet af 3, da $3^2=9$.
- Hvis vi kigger på det midterste led, så kan det skrives som $2\cdot 3\cdot x$, da $2\cdot 3\cdot x = 6x$.

Vi kan derfor omskrive udtrykket:

$$x^2+6x+9 = (x+3)^2$$

3. kvadratsætning

Lad os se, om vi kan omskrive udtrykket x^2-9 vha. 3. kvadratsætning. Det kan vi, hvis udtrykket består af en differens af to kvadrater.

- Hvis vi kigger på det første led, så er det jo kvadratet af x.
- Hvis vi kigger på det sidste led, så er det jo kvadratet af 3, da $3^2 = 9$.

Vi kan derfor omskrive udtrykket:

$$x^2 - 9 = (x+3)\cdot(x-3)$$

Eksempel 2

Reducér brøken $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$ mest muligt.

1. Omskriver tælleren.
   $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
2. Omskriver nævneren.
   $x^2 - 4 = (x+2)\cdot(x-2)$
3. Omskriver brøken.
   $$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

Opgaver 2

Benyt kvadratsætningerne til at omskrive følgende udtryk:

a) $x^2 + y^2 - 2xy$

b) $9 - a^2$

c) $4a^2 - 9b^2$

d) $4x^2 + 1 - 4x$

e) $9x^2 - 6xy + y^2$

f) $4a^2x^2 + 4abx + b^2$

Opgaver 3

Lav opgave 1 og 2 i Maple.