

# Modyfikacje/hybrydyzacje algorytmu PSO w zadaniu optymalizacji globalnej wielowymiarowej funkcji ciągłej

PSO-DE

Jakub Ruszkowski, Mateusz Kaczmarek

## ABSTRACT

Porównanie algorytmów PSO-DE, jego modyfikacji oraz algorytmu Ewolucji Różnicowej.

if the target was not reached, the best  $\Delta f$ -value achieved, measured only up to the smallest number of overall function evaluations for any unsuccessful trial under consideration.

## Categories and Subject Descriptors

G.1.6 [Numerical Analysis]: Optimization—*global optimization, unconstrained optimization*; F.2.1 [Analysis of Algorithms and Problem Complexity]: Numerical Algorithms and Problems

## General Terms

Algorithms

## Keywords

Benchmarking, Black-box optimization

## 1. CPU TIMING

Algorytm był uruchamiany na komputerze z systemem Windows 8 Intel(R) Core(TM) i7-4500U CPU @ 2.39GHz. Czasy ewaluacji funkcji o wymiarach 2, 3, 5, 10, 20 wynosiły odpowiednio  $1,9e^{-10}$ ,  $2,2e^{-10}$ ,  $2,4e^{-10}$ ,  $3,5e^{-10}$  and  $6,1e^{-10}$  sekund.

## 2. RESULTS

Results from experiments according to [?] on the benchmark functions given in [?, ?] are presented in Figures 1, 2 and 3 and in Tables 1 and 2. The **expected running time (ERT)**, used in the figures and tables, depends on a given target function value,  $f_t = f_{\text{opt}} + \Delta f$ , and is computed over all relevant trials as the number of function evaluations executed during each trial while the best function value did not reach  $f_t$ , summed over all trials and divided by the number of trials that actually reached  $f_t$  [?, ?]. **Statistical significance** is tested with the rank-sum test for a given target  $\Delta f_t$  using, for each trial, either the number of needed function evaluations to reach  $\Delta f_t$  (inverted and multiplied by  $-1$ ), or,

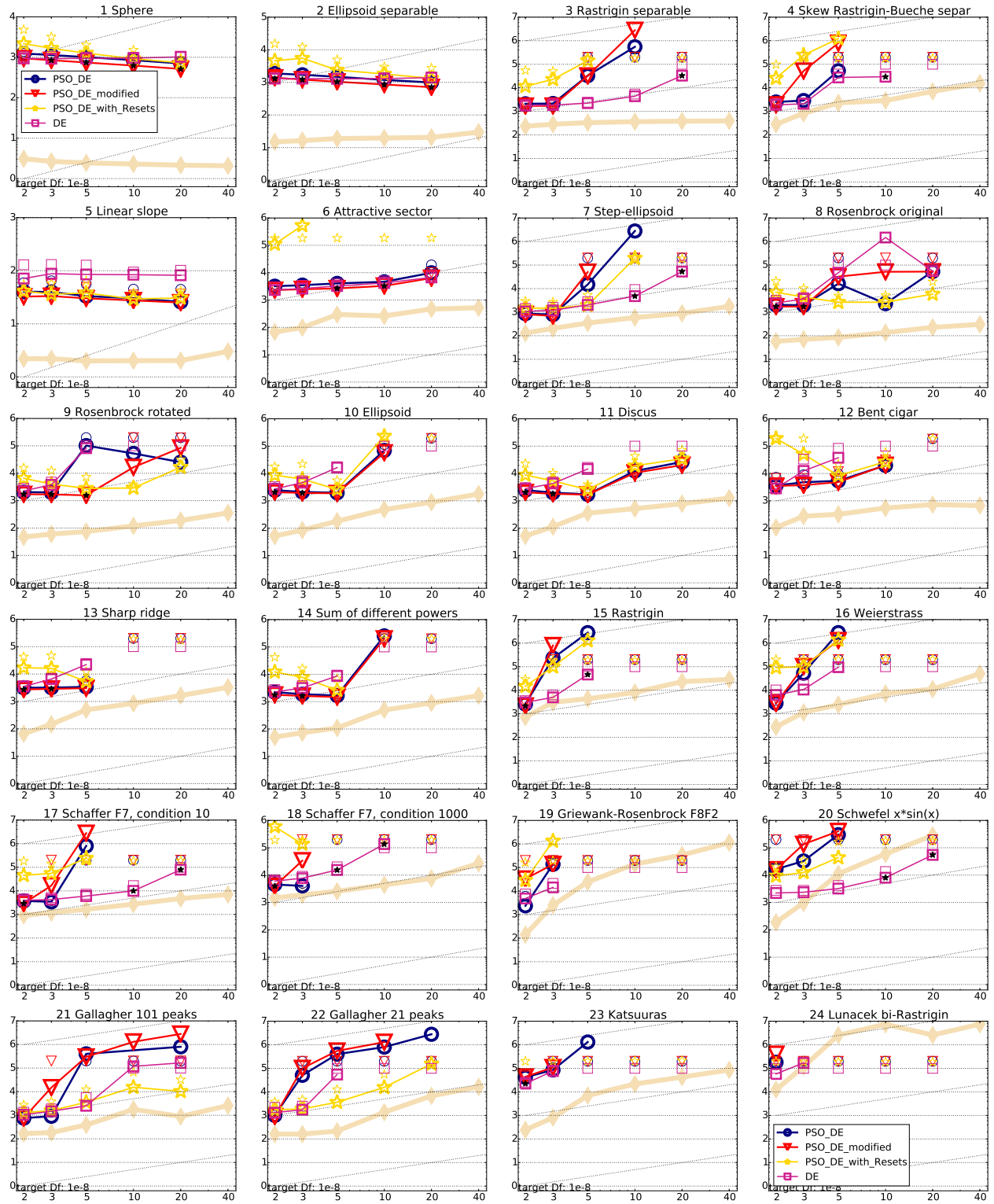


Figure 1: Expected running time (ERT in number of  $f$ -evaluations as  $\log_{10}$  value), divided by dimension for target function value  $10^{-8}$  versus dimension. Slanted grid lines indicate quadratic scaling with the dimension. Different symbols correspond to different algorithms given in the legend of  $f_1$  and  $f_{24}$ . Light symbols give the maximum number of function evaluations from the longest trial divided by dimension. Black stars indicate a statistically better result compared to all other algorithms with  $p < 0.01$  and Bonferroni correction number of dimensions (six). Legend:  $\circ$ :PSO DE,  $\nabla$ :PSO DE modified,  $\star$ :PSO DE with Resets,  $\square$ :DE

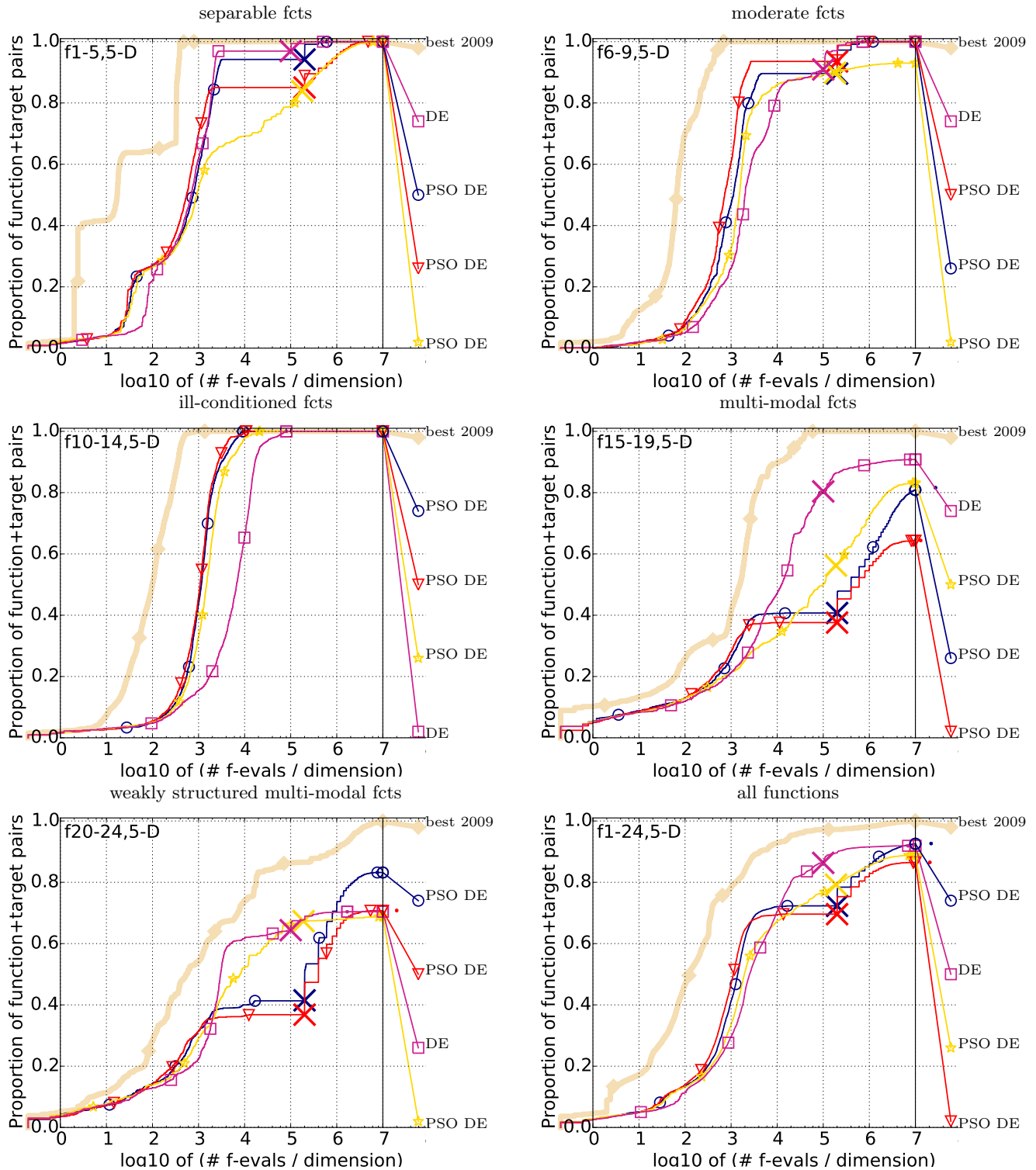


Figure 2: Bootstrapped empirical cumulative distribution of the number of objective function evaluations divided by dimension (FEvals/DIM) for 50 targets in  $10^{[-8..2]}$  for all functions and subgroups in 5-D. The “best 2009” line corresponds to the best ERT observed during BBOB 2009 for each single target.

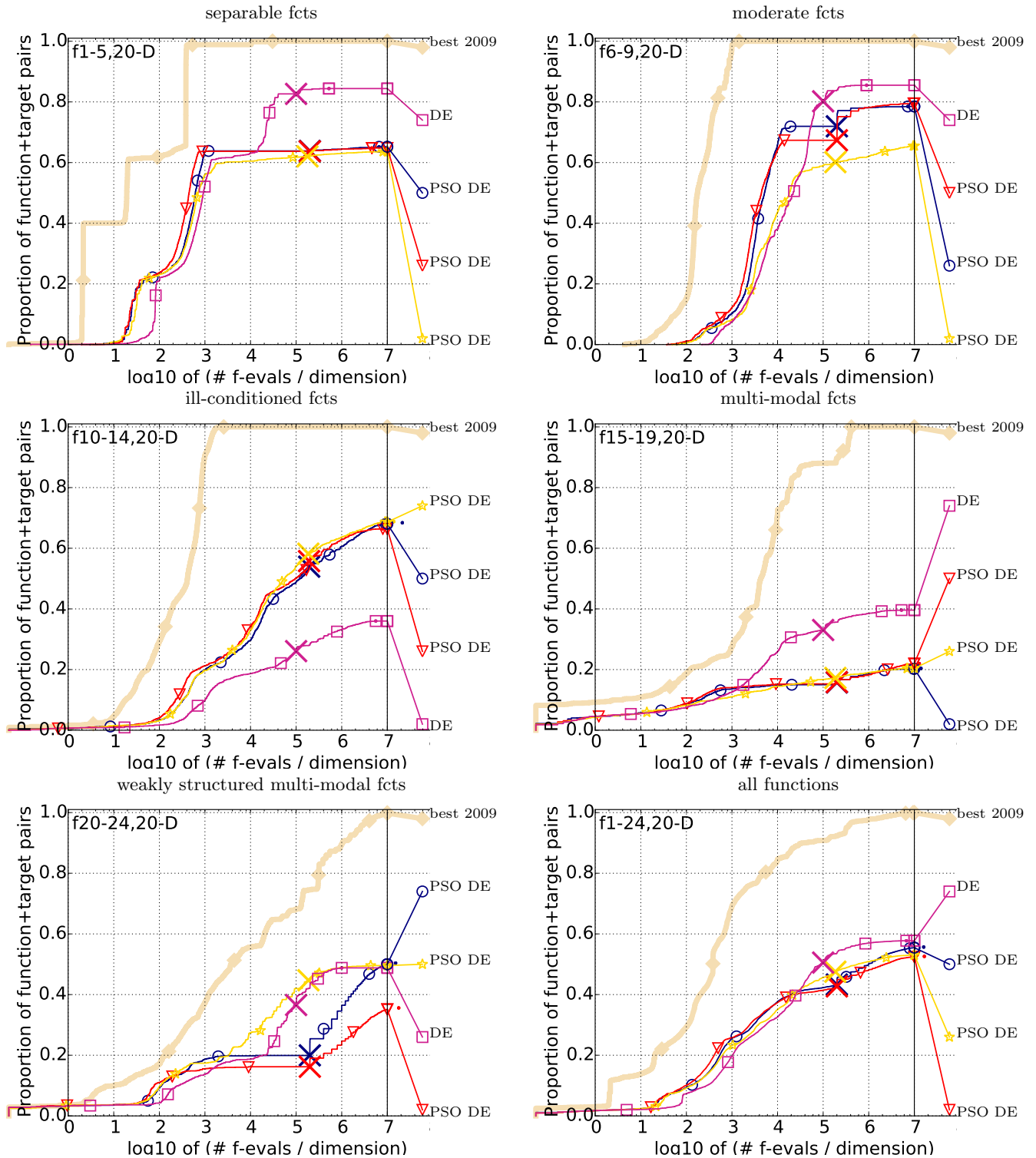


Figure 3: Bootstrapped empirical cumulative distribution of the number of objective function evaluations divided by dimension (FEvals/DIM) for 50 targets in  $10^{[-8..2]}$  for all functions and subgroups in 20-D. The “best 2009” line corresponds to the best ERT observed during BBOB 2009 for each single target.

$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f1</b>	11	12	12	12	12	12	12	15/15
PSO DE	5.1(4)	35(17)	77(18)	122(10)	171(19)	261(21)	363(30)	15/15
PSO DE	5.1(2)	39(10)	68(18)	103(10)*3	134(9)*4	199(10)*4	271(17)*4	15/15
PSO DE	6.0(5)	43(7)	85(14)	126(6)	196(50)	303(117)	416(91)	15/15
DE	5.5(7)	45(17)	90(7)	129(10)	174(17)	259(6)	343(9)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f2</b>	83	87	88	89	90	92	94	15/15
PSO DE	25(3)	31(0.8)	37(2)	43(2)	49(3)	62(3)	72(4)	15/15
PSO DE	18(2)	22(1)*2	26(1)*3	31(3)*3	35(2)*4	43(2)*4	51(2)*4	15/15
PSO DE	31(17)	38(21)	47(34)	53(10)	69(40)	88(53)	102(60)	15/15
DE	20(2)	26(3)	31(4)	37(3)	42(2)	53(2)	62(1)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f3</b>	716	1622	1637	1642	1646	1650	1654	15/15
PSO DE	2.4(1)	3.7(1.0)	98(305)	98(0.9)	98(152)	99(152)	99(302)	13/15
PSO DE	2.1(1.0)	2.7(0.8)*	97(153)	97(0.6)	97(455)	97(1)	97(302)	13/15
PSO DE	4.5(4)	107(73)	192(170)	219(219)	306(614)	428(686)	428(524)	10/15
DE	2.1(0.5)	3.9(0.3)	4.6(0.4)	4.9(0.3)	5.2(0.4)	5.8(0.2)	6.4(0.3)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f4</b>	809	1633	1688	1758	1817	1886	1903	15/15
PSO DE	2.8(0.9)	4.8(0.3)	153(443)	147(142)	143(412)	139(265)	138(393)	12/15
PSO DE	1.9(0.6309)	306	2368	2956	274(2413)	200(2883)	2121(3307)	102(1573)
PSO DE	10(15)	558(458)	1338	1475	1289	1267	218(2560)	3247(5873)
DE	2.6(0.8)	4.4(0.5)	79(74)	76(213)	74(138)	72(133)	72(131)	12/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f5</b>	10	10	10	10	10	10	10	15/15
PSO DE	11(3)	16(7)	17(8)	17(9)	17(5)	17(6)	17(9)	15/15
PSO DE	11(3)	15(3)	15(6)	15(4)	15(5)	15(6)	15(4)	15/15
PSO DE	13(3)	19(10)	19(8)	19(8)	19(10)	19(9)	19(6)	15/15
DE	25(4)	39(10)	43(15)	43(12)	43(17)	43(14)	43(11)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f6</b>	114	214	281	404	580	1038	1332	15/15
PSO DE	6.5(3)	11(5)	15(2)	17(3)	15(3)	13(2)	13(1)	15/15
PSO DE	5.6(2)	7.8(3)	10(3)*2	11(2)*3	10(2)*3	8.4(0.8)*	8.9(1)*2	15/15
PSO DE	7.3(6)	21(13)	75(49)	181(291)	610(1084)	5950(6625)	$\infty$ 9e5	0/15
DE	13(3)	14(3)	17(3)	16(3)	13(2)	11(2)	11(2)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f7</b>	24	324	1171	1451	1572	1572	1597	15/15
PSO DE	13(10)	3.1(0.5)	62(214)	51(345)	47(159)	47(1)	47(1)	14/15
PSO DE	10(4)	2.5(0.3)	133(214)	108(173)	160(477)	160(636)	158(626)	12/15
PSO DE	12(8)	4.1(1)	2.6(2)	4.0(3)	4.5(2)	4.5(2)	4.7(2)	15/15
DE	20(20)	6.6(4)	4.0(0.8)	5.1(1)	5.4(0.9)	5.4(1)	5.7(2)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f8</b>	73	273	336	372	391	410	422	15/15
PSO DE	16(7)	273(918)	226(3)	206(1342)	199(1280)	193(1828)	191(2370)	14/15
PSO DE	12(3)	572(2)	467(1)	424(672)	405(640)	389(610)	381(1776)	13/15
PSO DE	20(7)	21(5)	22(6)	22(19)	23(7)	27(5)	30(7)	15/15
DE	21(5)	23(7)	115(64)	312(454)	557(30)	550(938)	554(1189)	11/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f9</b>	35	127	214	263	300	335	369	15/15
PSO DE	34(10)	3959(1e4)	2356(1171)	1916(4741)	1683(1664)	1512(2981)	1378(2)	10/15
PSO DE	23(6)*2	18(6)*2	15(3)*3	14(2)*3	15(3)*3	17(3)*3	19(3)*3	15/15
PSO DE	36(20)	32(16)	26(11)	24(9)	24(7)	32(6)	35(37)	15/15
DE	45(9)	57(13)	266(265)	1239(2467)	1307(862)	1195(1499)	1105(1357)	9/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f10</b>	349	500	574	607	626	829	880	15/15
PSO DE	8.3(1)	7.4(2)	7.8(2)	8.7(1)	10(2)	9.0(2)	10(2)	15/15
PSO DE	8.5(2)	7.4(1)	7.6(2)	8.2(2)	9.3(1)	8.8(0.8)	10(0.9)	15/15
PSO DE	11(6)	9.1(2)	9.4(0.8)	10(5)	12(2)	11(4)	13(4)	15/15
DE	47(15)	48(6)	54(9)	63(5)	73(8)	73(6)	85(6)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f11</b>	143	202	763	977	1177	1467	1673	15/15
PSO DE	13(3)	13(2)	4.6(0.7)	4.3(0.6)	4.2(0.4)	4.4(0.2)	4.7(0.2)	15/15
PSO DE	11(3)	12(2)	4.2(0.3)	4.0(0.7)	4.0(0.5)	4.2(0.4)	4.5(0.4)	15/15
PSO DE	25(15)	28(16)	8.4(4)	8.1(5)	7.3(2)	6.9(4)	7.4(3)	15/15
DE	55(14)	74(11)	28(4)	29(5)	30(3)	34(3)	39(5)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f12</b>	108	268	371	413	461	1303	1494	15/15
PSO DE	46(12)	35(27)	36(21)	38(27)	38(23)	17(12)	17(8)	15/15
PSO DE	55(32)	35(57)	31(23)	32(22)	32(36)	15(10)	15(14)	15/15
PSO DE	65(40)	50(33)	51(29)	55(32)	53(34)	27(26)	26(14)	15/15
DE	131(43)	93(12)	100(44)	129(51)	163(108)	101(29)	115(88)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f13</b>	132	195	250	319	1310	1752	2255	15/15
PSO DE	15(3)	16(2)	19(5)	19(3)	5.8(0.6)	6.2(1)	6.4(0.6)	15/15
PSO DE	12(2)	13(1)*	16(2)	17(2)*2	5.1(0.4)*2	5.5(0.6)	6.0(1)	15/15
PSO DE	16(3)	18(4)	19(2)	21(6)	6.8(2)	7.8(4)	10(8)	15/15
DE	26(7)	48(8)	70(16)	90(19)	32(5)	39(4)	43(3)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f14</b>	10	41	58	90	139	251	476	15/15
PSO DE	1.6(2)	10(1)	18(2)	22(3)	21(1)	19(2)	15(2)	15/15
PSO DE	2.2(2)	10(3)	16(2)	16(2)*3	16(3)*2	16(2)*3	13(1)	15/15
PSO DE	1.6(1)	10(4)	19(4)	24(3)	28(17)	29(3)	24(18)	15/15
DE	2.5(2)	15(6)	23(5)	25(4)	30(8)	69(7)	72(2)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f15</b>	511	9310	19369	19743	20073	20769	21359	14/15
PSO DE	5.1(1)	1502(4504)	722(657)	708(822)	697(647)	673(1767)	655(830)	1/15
PSO DE	144(492)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 1e6	0/15
PSO DE	18(9)	59(65)	213(241)	209(186)	318(423)	307(394)	299(351)	2/15
DE	9.0(5)	9.4(3)*	12(13)*2	12(13)*2	11(7)*2	11(31)*2	11(12)*2	12/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f16</b>	120	612	2662	10163	10449	11644	12095	15/15
PSO DE	4.1(4)	418(822)	1033(1595)	639(909)	622(406)	558(493)	1157(413)	1/15
PSO DE	5.6(6)	602(820)	1034(1031)	271(712)	383(430)	558(858)	538(392)	2/15
PSO DE	5.3(2)	128(131)	117(109)	51(23)	76(99)	248(241)	571(878)	2/15
DE	3.7(3)	90(67)	91(30)	39(17)	44(28)	40(25)	39(15)	11/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f17</b>	5.2	215	899	2861	3669	6351	7934	15/15
PSO DE	4.0(6)	4.7(0.9)	3.3(0.7)	1.8(0.2)	44(68)	80(79)	254(535)	5/15
PSO DE	3.3(1)	3.5(0.9)	82(278)	26(88)	100(204)	181(275)	820(975)	2/15
PSO DE	4.0(3)	4.9(4)	4.4(3)	4.5(2)	7.7(10)	31(36)	109(195)	10/15
DE	3.7(6)	6.1(3)	4.5(1)	2.6(0.6)	3.1(0.5)	3.1(0.4)	3.5(0.4)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f18</b>	103	378	3968	8451	9280	10905	12469	15/15
PSO DE	3.0(2)	5.5(2)	127(315)	237(355)	701(861)	1284(1442)	$\infty$ 1e6	0/15
PSO DE	4.3(2)	4.6(0.9)	64(315)	104(148)	216(296)	$\infty$	$\infty$ 1e6	0/15
PSO DE	2.5(0.3)	8.0(8)	3.7(4)	7.0(5)	21(20)	612(494)	$\infty$ 9e5	0/15
DE	5.2(4)	9.1(3)	2.6(0.4)	2.3(0.6)	3.3(0.9)	5.0(0.7)	5.7(1)*4	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f19</b>	1	1	242	1.0e5	1.2e5	1.2e5	1.2e5	15/15
PSO DE	23(34)	4629(2925)	5.8e4(5e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 1e6	0/15
PSO DE	35(37)	3883(2420)	8329(1e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 1e6	0/15
PSO DE	46(48)	8915(1e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 9e5	0/15
DE	37(47)	6135(4174)	1603(753)	69(161)	62(72)	$\infty$	$\infty$ 5e5	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f20</b>	16	851	38111	51362	54470	54861	55313	14/15
PSO DE	11(7)	3.5(2)	39(52)	29(39)	28(46)	27(55)	27(45)	6/15
PSO DE	8.9(6)	2.9(0.6)	52(118)	39(34)	37(64)	36(55)	36(54)	5/15
PSO DE	13(9)	10(11)	3.8(4)	3.0(5)	3.3(3)	3.5(5)	3.9(6)	15/15
DE	12(6)	4.3(2)	0.27(0.1)	0.24(0.1)	0.24(0.0)	0.26(0.1)	0.28(0.0)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f21</b>	41	1157	1674	1692	1705	1729	1757	14/15
PSO DE	2.7(4)	433(432)	1194(1044)	1181(2213)	1172(1172)	1157(1733)	1139(1279)	5/15
PSO DE	2.8(4)	756(432)	895(1938)	886(1918)	879(1757)	868(1155)	854(1279)	6/15
PSO DE	3.0(3)	4.8(5)	6.2(6)	8.4(11)	8.5(17)	10(7)	10(10)	15/15
DE	2.1(2)	3.5(4)	4.2(2)	5.4(3)	5.7(5)	6.4(3)	6.8(2)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f22</b>	71	386	938	980	1008	1040	1068	14/15
PSO DE	3.7(3)	943(1939)	1131(3194)	1040(2548)	1983(2971)	1923(2400)	1874(3039)	5/15
PSO DE	3.9(3)	2957(2585)	2931(2396)	2804(3058)	2726(5697)	2643(960)	2576(2339)	4/15
PSO DE	3.8(2)	15(8)	16(2					

$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f1</b>	43	43	43	43	43	43	43	15/15
PSO DE	36(4)	67(5)	97(9)	129(11)	163(8)	230(10)	295(17)	15/15
PSO DE	<b>28(5)*</b>	<b>52(4)*3</b>	<b>76(9)*4</b>	<b>98(8)*4</b>	<b>122(11)*4</b>	<b>168(10)*4</b>	<b>217(6)*4</b>	15/15
PSO DE	34(7)	68(3)	100(9)	140(7)	172(34)	240(15)	306(12)	15/15
DE	53(5)	101(5)	149(9)	196(9)	243(10)	335(15)	428(19)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f2</b>	385	386	387	388	390	391	393	15/15
PSO DE	19(0.8)	22(1)	26(1)	30(1)	33(0.8)	40(1)	47(2)	15/15
PSO DE	<b>13(0.7)*4</b>	<b>16(0.8)*4</b>	<b>18(1)*4</b>	<b>21(1)*4</b>	<b>23(1)*4</b>	<b>29(2)*4</b>	<b>34(2)*4</b>	15/15
PSO DE	20(2)	24(4)	27(2)	33(11)	39(3)	48(18)	64(19)	15/15
DE	25(1)	30(1)	35(1)	41(1)	45(2)	56(2)	66(1)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f3</b>	5066	7626	7635	7637	7643	7646	7651	15/15
PSO DE	1186(1971)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	5128(3943)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	<b>89(30)</b>	<b>64(31)*4</b>	<b>84(20)*4</b>	<b>84(26)*4</b>	<b>85(84)*4</b>	<b>85(74)*4</b>	<b>86(196)*4</b>	14/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f4</b>	4722	7628	7666	7686	7700	7758	1.4e5	9/15
PSO DE	1.2e4(8670)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	<b>74(31)*2</b>	<b>455(734)*4</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f5</b>	41	41	41	41	41	41	41	15/15
PSO DE	11(4)	13(6)	13(3)	13(4)	13(2)	13(3)	13(2)	15/15
PSO DE	<b>11(2)</b>	<b>12(3)</b>	<b>12(5)</b>	<b>12(4)</b>	<b>12(5)</b>	<b>12(4)</b>	<b>12(4)</b>	15/15
PSO DE	13(5)	15(5)	15(4)	15(3)	15(4)	15(4)	15(3)	15/15
DE	30(3)	38(4)	40(6)	40(2)	40(6)	40(6)	40(2)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f6</b>	1296	2343	3413	4255	5220	6728	8409	15/15
PSO DE	18(17)	16(2)	16(5)	16(3)	17(4)	20(8)	21(6)	15/15
PSO DE	<b>12(3)*</b>	<b>12(5)</b>	<b>11(2)</b>	<b>12(8)</b>	<b>13(2)</b>	<b>13(8)</b>	<b>14(3)</b>	15/15
PSO DE	612(751)	2761(1191)	1.6e4(2e4)	1.3e4(6994)	1.4(2)	14(1)	14(2)	0/15
DE	19(3)	15(2)	14(3)	14(2)	14(2)	14(1)	14(1)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f7</b>	1351	4274	9503	16523	16524	16524	16969	15/15
PSO DE	5925(2e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	1.2e4(9620)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>19(23)</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	29(8)	<b>37(13)*4</b>	<b>81(122)*4</b>	<b>63(62)*4</b>	<b>63(156)*4</b>	<b>63(63)*4</b>	<b>62(64)*4</b>	11/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f8</b>	2039	3871	4040	4148	4219	4371	4484	15/15
PSO DE	11(2)	267(518)	257(249)	252(241)	249(2)	242(457)	238(447)	12/15
PSO DE	<b>7.5(1)</b>	265(258)	255(495)	249(242)	246(474)	239(230)	234(668)	12/15
PSO DE	10(5)	<b>21(44)</b>	<b>22(35)</b>	<b>22(35)</b>	<b>23(7)</b>	<b>24(37)</b>	<b>25(18)</b>	15/15
DE	94(10)	129(3)	167(5)	205(20)	223(24)	239(42)	244(42)	15/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f9</b>	1716	3102	3277	3379	3455	3594	3727	15/15
PSO DE	18(2)	113(640)	112(305)	114(298)	118(291)	126(283)	131(271)	14/15
PSO DE	<b>17(7)</b>	483(320)	462(1510)	454(586)	450(574)	447(551)	446(1328)	11/15
PSO DE	24(20)	<b>57(42)</b>	<b>59(50)</b>	<b>63(53)</b>	<b>67(45)</b>	<b>76(39)</b>	<b>84(49)</b>	15/15
DE	143(12)	258(26)	390(26)	2197(3255)	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f10</b>	7413	8661	10735	13641	14920	17073	17476	15/15
PSO DE	151(88)	294(168)	537(356)	2053(2279)	<b>3834(5044)</b>	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>131(63)</b>	<b>241(73)</b>	<b>518(262)</b>	<b>810(733)</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	211(119)	486(212)	5252(5483)	4202(2476)	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f11</b>	1002	2228	6278	8586	9762	12285	14831	15/15
PSO DE	28(18)	35(24)	22(15)	24(13)	27(9)	30(8)	33(10)	15/15
PSO DE	28(18)	<b>32(13)</b>	<b>18(8)</b>	<b>18(8)</b>	<b>20(7)</b>	<b>23(6)</b>	<b>24(4)</b>	15/15
PSO DE	<b>27(13)</b>	37(35)	24(13)	22(10)	25(13)	32(21)	41(20)	15/15
DE	964(81)	728(97)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f12</b>	1042	1938	2740	3156	4140	12407	13827	15/15
PSO DE	286(0.6)	1145(1360)	3496(3055)	1.6e4(1e4)	<b>1.3e4(1e4)</b>	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	612(248)	1664(2860)	<b>1679(2393)</b>	<b>3316(6432)</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>225(648)</b>	<b>899(1250)</b>	2216(1694)	8442(1e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	343(1444)	1217(1552)	2102(3185)	8892(7130)	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15

$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f13</b>	652	2021	2751	3507	18749	24455	30201	15/15
PSO DE	3074(1e4)	7904(8392)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	1540(7657)	3955(4939)	9439(1e4)	1.6e4(2e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	42(52)	<b>70(106)</b>	<b>190(166)*</b>	<b>553(495)*2</b>	<b>275(346)</b>	$\infty$	$\infty$ 3e6	0/15
DE	<b>32(1)</b>	394(991)	3006(3667)	8016(7130)	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f14</b>	75	239	304	451	932	1648	15661	15/15
PSO DE	13(3)	12(3)	16(2)	17(2)	15(2)	136(40)	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>11(4)</b>	<b>9.2(0.9)*1</b>	<b>11(0.8)*1</b>	<b>12(1)*4</b>	<b>12(3)*</b>	<b>113(70)</b>	<b>1236(1334)</b>	3/15
PSO DE	14(6)	12(2)	16(4)	18(6)	17(4)	136(47)	$\infty$ 4e6	0/15
DE	45(19)	31(5)	37(6)	86(15)	1249(1334)	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f15</b>	30378	1.5e5	3.1e5	3.2e5	3.2e5	4.5e5	4.6e5	15/15
PSO DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f16</b>	1384	27265	77015	1.4e5	1.9e5	2.0e5	2.2e5	15/15
PSO DE	5776(4329)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	5778(5054)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>290(411)</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f17</b>	63	1030	4005	12242	30677	56288	80472	15/15
PSO DE	8.8(5)	2549(5749)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>8.6(7)</b>	2570(4824)	1.4e4(7187)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	10(12)	364(388)	6291(7936)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	16(9)	11(2)	<b>7.3(1)*4</b>	<b>4.0(3)*2</b>	<b>7(0.3)*1</b>	<b>14(14)*4</b>	<b>20(25)*4</b>	9/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f18</b>	621	3972	19561	28555	67569	1.3e5	1.5e5	15/15
PSO DE	6.4(2)	2748(3248)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>4.8(1)</b>	1.4e4(1e4)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	17(16)	1728(2439)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	13(4)	11(3)	<b>8.3(5)*4</b>	<b>32(37)*4</b>	<b>54(32)*4</b>	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f19</b>	1	1	3.4e5	4.7e6	6.2e6	6.7e6	6.7e6	15/15
PSO DE	798(272)	<b>1.5e6(2e6)</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>628(270)</b>	4.5e6(1e7)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	961(265)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	1411(211)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 2e6	0/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f20</b>	82	46150	3.1e6	5.5e6	5.5e6	5.6e6	5.6e6	14/15
PSO DE	20(5)	347(303)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	<b>16(5)</b>	563(649)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
PSO DE	21(6)	11(20)	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$ 4e6	0/15
DE	37(6)	18(5)	<b>0.30(0.2)*2</b>	<b>0.20(0.1)*2</b>	<b>0.20(0.1)*2</b>	<b>0.19(0.1)*2</b>	<b>0.19(0.1)*2</b>	14/15
$\Delta f_{\text{opt}}$	1e1	1e0	1e-1	1e-2	1e-3	1e-5	1e-7	#succ
<b>f21</b>	561	6541	14103	14318				