# ØV1 - TRIGONOMETRI, KOMPLEKSE TALL OG GEOMETRISKE REKKER

Innleveringsfrist: **fredag 1.sept, 2017**.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til INF3470:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF3470/h17/informasjon-om-ovingsopplegget/`

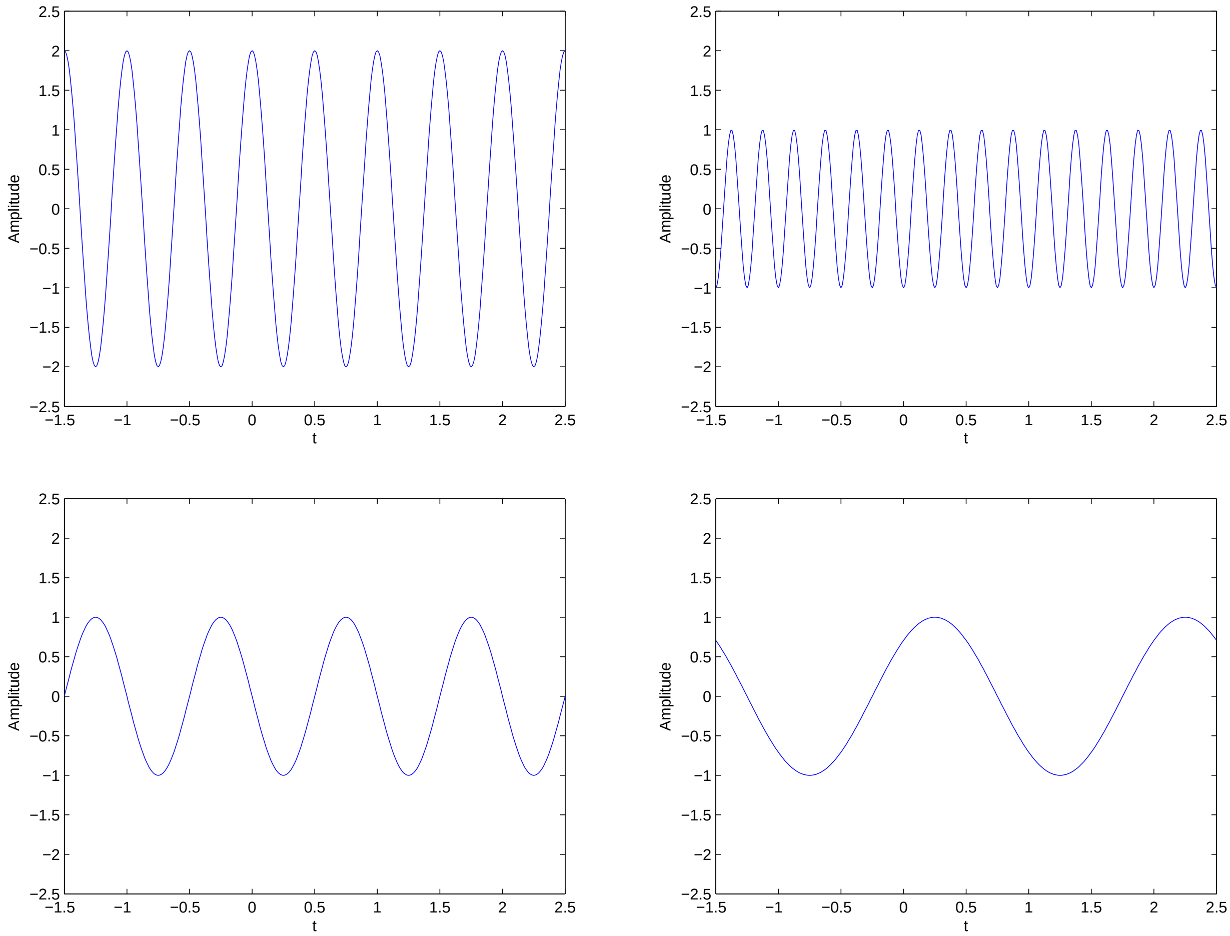
Mål: Kurset INF3470 krever en viss grad av kunnskap om matematikk, både i form av kjennskap til teori og erfaring med bruk og praktisk regning. Oppgavene her oppsummerer en del av de viktigste punktene man bør kjenne til.

## Oppgave 1 Trigonometriske funksjoner 2 Poeng

**a)** Plott følgende trigonometriske funksjoner under hverandre (med parallelle t-akser) for intervallet $-1 \leq t \leq 2.5$, slik at du får vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift.

1. $\cos(2\pi t)$
2. $\cos(2\pi t + \pi)$
3. $\cos(8\pi t)$
4. $\cos(4\pi t - \pi/3)$

**b)** Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur 1.




Figur 1: Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur.

**c)** Bruk fasoraddisjon og vis at følgende funksjoner kan skrives på formen $\hat{A}\cos(\omega t + \hat{\phi})$:

1. $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)$ $\boxed{\hat{A} = 2\cos(\phi/2), \hat{\phi} = ?}$
2. $4\cos(\omega t + \pi/2) + 1.5\cos(\omega t - \pi/3)$ $\boxed{\hat{A} \approx 2.8, \hat{\phi} \approx 1.3}$
3. $\cos(\omega t + 4\pi/3) + \cos(\omega t - 5\pi/3)$

## Oppgave 2 Diskrete trigonometriske funksjoner 2 Poeng

**a)** Hvilke av de følgende *diskrete* funksjonene er periodiske, og hva er periodene deres (dvs. $N$)?

1. $\cos(0.5n + \pi/2)$
2. $\cos(\pi n + \pi/2)$
3. $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n\right)$

**b)** Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta 5 sampler per halve periode av en cosinus i kontinuerlig tid.
**c)** Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 1 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 1.

## Oppgave 3 Regning med komplekse tall 2 Poeng

**a)** Gjør følgende utregninger. Om svaret står oppgitt må mellomregning inkluderes.

1. $|3 + j4|$ = ?
2. $\frac{1}{3+j4}$ til kartesisk form = ? $\boxed{\frac{3}{25} - j\frac{4}{25}}$
3. $\frac{1+j2}{1+e^{j\pi/2}}$ til kartesisk form = ?
4. $(-1)^n + e^{j\pi n}$ = ?, hvor $n$ er et heltall $\boxed{2 \cdot (-1)^n}$

**b)** Vis at

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = (\cos(\theta n) + j\sin(\theta n)) \quad \boxed{\text{Ref. til de Moivres formel}} \tag{1}$$

## Oppgave 4 Komplekse tall og det komplekse tallplanet 2 Poeng

Gitt et komplekst tall på *kartesisk form* $z = a + jb$. Vi kaller $a = \mathfrak{Re}\{z\}$ for *realdelen* til $z$ og $b = \mathfrak{Im}\{z\}$ for *imaginærdelen* til $z$. $j = \sqrt{-1}$ er den såkalte *imaginære enheten*. (Merk at den imaginære enheten kalles ofte $j$ i fysiske fag som dette, og $i$ i matematiske fag som kompleks analyse.)
**a)** Et komplekst tall på kartesisk form kan representeres i det kartesiske koordinatsystemet som punktet $(a,b)$. Et annet koordinatsystem er det polare, der de to koordinatene $(r,\theta)$ angir hhv. avstand fra origo og vinkel mot førsteaksen. Lag en skisse og bruk trigonometri for å finne $r$ og $\theta$ utifra $a$ og $b$.
**b)** En vanlig operasjon på komplekse tall er å *komplekskonjugere*: $z^* = (a + jb)^* = a - jb$. Dette tilsvarer å snu fortegnet på imaginærdelen. Hva slags geometrisk operasjon tilsvarer dette i det kartesiske koordinatsystemet?
**c)** Gi en tolkning av $\left(e^{j\theta}\right)^k$ i koordinatsystemet. Skisser for $k = 1,2,3$ og valgfri $\theta$. Hva må $\theta$ være for at $\left(e^{j\theta}\right)^k = 1$?

## Oppgave 5 Regning med komplekse tall 2 Poeng

**a)** Regn ut følgende for polar ($z = re^{j\theta}$) og/eller kartesisk ($z = a + jb$) form som angitt. Inkluder mellomregning, spesielt når svaret er oppgitt.

1. $z^*$ på polar form

2. $zz^*$ på polar og kartesisk form (hva er dette det samme som?)
3. $z^k$ på polar form
4. $z+z^*$ på polar og kartesisk form $\boxed{2r\cos\phi}$
5. $z-z^*$ på polar og kartesisk form
6. $\frac{1}{2}(z+z^*)$ på polar og kartesisk form
7. $\frac{1}{2j}(z-z^*)$ på polar og kartesisk form
8. $z^{-1}$ på polar og kartesisk form (**Merk:** oppgaven er å finne $c$ og $d$ slik at $c+jd = \frac{1}{a+jb}$, samt $s$ og $\phi$ slik at $se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}}$.)
   $\boxed{\frac{a-jb}{a^2+b^2}, \frac{1}{r}e^{-j\phi}}$
9. Bruk punktene over for å finne et uttrykk for $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ ved komplekse eksponentialer (Euler identitetene).
10. Hva er mengden av alle punkter som kan beskrives med det komplekse eksponentialet $z = e^{j\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$?
11. Hva er forskjellen på $z^{-1}$ og $z^*$? Beskriv $z^{-1}$ utifra $|z|^2$ og $z^*$.

**b)** Skriv følgende tall som komplekse tall på polar form ($k$ er et vilkårlig heltall). Som eksempel kan tallet 1 skrives som $1e^{j\cdot 2\pi k}$.

1. $-1$
2. $(-1)^k$
3. $j^k$

## Oppgave 6 Geometriske rekker 2 Poeng

**a)** Beregn verdien til følgende endelige geometriske rekker:

1. $\sum_{k=0}^{100} 23^k$ = ?
2. $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k$ = ? ( Tips: del opp summen for å endre summasjonsgrensene).

**b)** Bestem hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og beregn verdien til disse:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k, a > 4$
3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$
4. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$

**c)** Finn konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker. Om svaret er oppgitt, vis mellomregning.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k, x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^k, x \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k, z \in \mathbb{C}$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k, x \in \mathbb{R}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}, z \in \mathbb{C}$ $\boxed{|z| > 2}$