Seminarski rad – zadaća ravninske elastičnosti

Matko Brandić, Fran Špigel

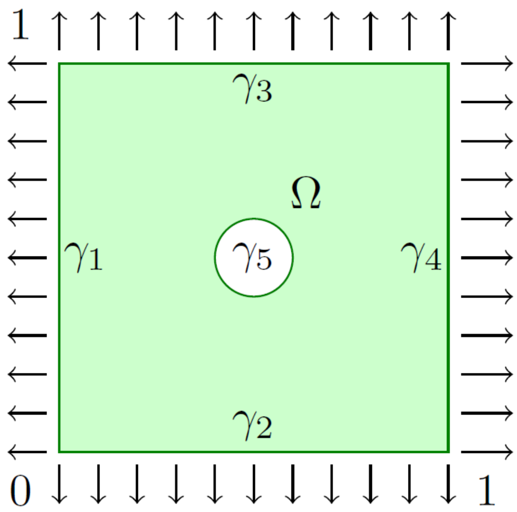
U Zagrebu, 19. kolovoza 2020.

1 Opis problema

Zadana je homogena kvadratna ploča s rupom u sredini promjera d=0.2, Youngovim modulom elastičnosti $E = 5 \cdot 10^9$ Pa, te Poissonovim omjerom $\nu = 0.3$. Treba riješiti zadaću ravninske elastičnosti

$$-\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{u } \Omega, \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sigma_{i,j}(\mathbf{u}) n_j = g_i \quad \text{na } \partial\Omega, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$



Slika 1: Skica domene i smjera sile naprezanja

Pri tome je smjer sile naprezanja na $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ zadan na slici, a modul sile naprezanja iznosi

$$g = 2(\mu + \lambda) \cdot 10^{-2}.$$

Na unutarnjoj granici γ_5 naprezanje je jednako 0. Simetrizirani gradijent vektorske funkcije $\mathbf{u}$ je

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\tau)$$

materijal je izotropan pa je $\sigma(\mathbf{u})$

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda \,\mathrm{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}),$$

a λ i μ su pripadne Laméove konstante, definirane kao

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

2 Opis diskretizacije zadaće

Pokažimo kako ćemo doći do varijacijske jednadžbe stacionarne zadaće linearne elastičnosti (1). No, najprije, zapišimo cijeli sustav jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)&=0,\\
-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)&=0.
\end{aligned}
$$

Budući da ni na jednom rubu domene nemamo Dirichletov rubni uvjet, uzimamo vektorsku funkciju $\mathbf{v}=(v_1,v_2)\in\left(\mathrm{H}^1(\Omega)\right)^2$, prvu jednadžbu množimo s v_1, a drugu s v_2, integriramo po domeni Ω te dobivamo:

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)v_1-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)v_1&=0,\\
-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)v_2-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)v_2&=0.
\end{aligned}
$$

Sada primjenom Gauss–Greenovog teorema iz [1] dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)-\int_{\partial\Omega}v_1\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\cdot n_1+\\
&\qquad\int_\Omega\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)-\int_{\partial\Omega}v_1\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)\cdot n_2=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)-\int_{\partial\Omega}v_2\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)\cdot n_1+\\
&\qquad\int_\Omega\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\int_{\partial\Omega}v_2\left(\lambda\operatorname{div}(\mathbf{u})+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\cdot n_2=0,
\end{aligned}
$$

Promotrimo li integrale po rubu iz obje jednadžbe, koristeći (2) vidimo

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\left(\lambda\operatorname{div}(u)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)&=\int_{\partial\Omega}g_1\cdot v_1\\
\int_\Omega\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\left(\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\right)+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\left(\lambda\operatorname{div}(u)+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)&=\int_{\partial\Omega}g_2\cdot v_2
\end{aligned}
$$

što je zapravo

$$
\int_\Omega\nabla v\cdot\sigma(\mathbf{u})=\int_{\partial\Omega}g\cdot v. \tag{3}
$$

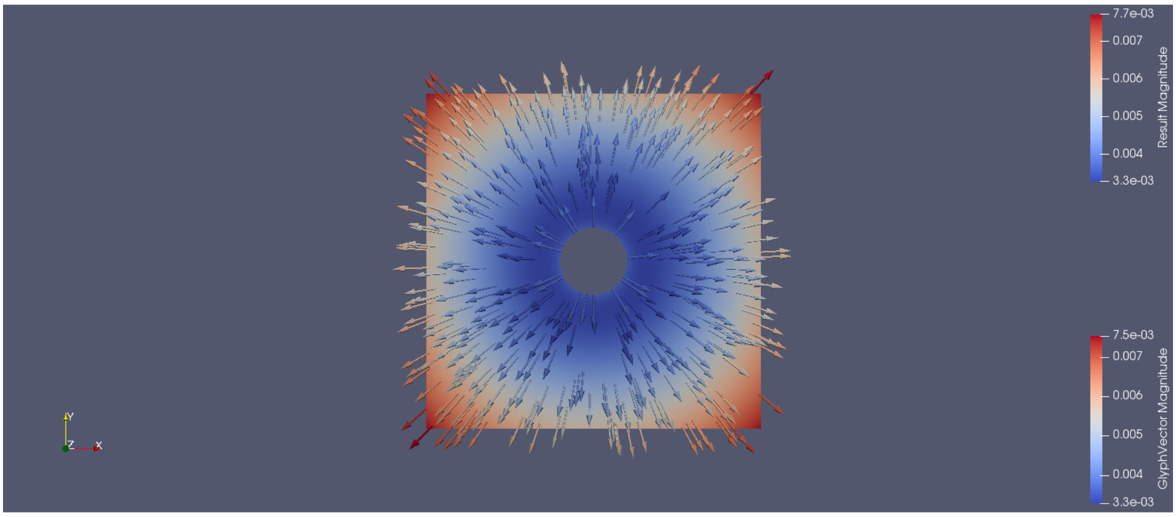
3 Implementacija koda

Za implementaciju koda te njegovo testiranje koristit ćemo `dune-pdelab` `DUNE` modulom. Koristit ćemo *Taylor-Hoodove elemente*, tj. uzimamo P_2 elemente za aproksimaciju pomaka – koristeći `PkLocalFiniteElementMap`. Pomoću `GridFunctionSpace` konstruiramo prostor mrežnih funkcija za jednu pa za drugu dimenziju te ih objedinjujemo u jedan produktni prostor pomoću `PowerGridFunctionSpace`. Također, potreban nam je `ElasticityLocalOperator`, lokalni operator za stacionarnu zadaću ravninske elastičnosti (1), koju smo sveli na jednadžbu (3). Potrebno je konstruirati vektorski mrežni operator, pomoću `GridOperator` te odabrati linearni rješavač – koristimo `ISTLBackend_SEQ_CG_ILU0` za `StationaryLinearProblemSolver`.

Rubovi domene definirani su u `domain.geo` datoteci i pomoću nje kreirana je `msh` datoteka kojom dobivamo diskretizacijske točke i koju čitamo u samom programu.

4 Rezultati testova

Budući da našu domenu možemo zamisliti kao neku elastičnu ploču koju povlačimo prema van na svakom dijelu ruba osim unutarnjoj kružnici, za pretpostaviti je da će na vrhovima domene biti najveći pomak. Doista, na slici 2 vidimo da smo dobro pretpostavili te da je u rubovima domene najveći pomak, a što smo bliže unutarnjem rubu domene, to je naprezanje manje.



Slika 2: Ilustracija dobivenog rješenja u programu *Paraview*

Literatura

[1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.