Wstep teoretyczny do Apelowego Thue Online

Michał Binda, Krzysztof Kosz, Mateusz Kubita

April 8, 2024

Spis treści

1 Wstep

W grze **Apelowy Thue online** w wariancie **gra komputer kontra człowiek**, gracze buduja słowo składajace sie z liter z ustalonego alfabetu A. Pierwszy gracz pokazuje miejsce w słowie, a drugi wstawia tam litere. Pierwszy gracz chce zmusić drugiego do utworzenia repetycji w sensie abelowym, drugi stara sie tego uniknać. Na razie mamy **dwie strategie**, które wykorzystuja gracze w grze.

W naszym podejściu do programowania chcemy, aby nasza implementacja była czytelna i zrozumiała dla każdego. Kładziemy duży nacisk na prostote kodu, co pozwoli zarówno nam, jak i innym studentom, łatwo zrozumieć działanie gry oraz wprowadzać w niej zmiany w przyszłości. Planujemy wiec rozbudować nasza gre stopniowo, uwzgledniajac nowe pomysły i ewentualne ulepszenia.

2 Definicje

1. **Alfabet:** Zbiór symboli, z których budowane sa słowa w grze. W kontekście gry Apelowego Thue Online jest to ustalony zbiór liter lub innych symboli.

2. **Abelowa repetycja:** W modelu abelowym dwa słowa sa równe, jeżeli ich multizbiory liter sa takie same, czyli jedno słowo jest permutacja drugiego słowa.Repetycja Abelowa wystepuje w słowie, jeśli dwie cześci wystepujace obok siebie sa równe w modelu abelowym. Repetycja w sensie abelowym jest na przykład słowo "abccab".

3. **Słowo:** Ciag symboli z alfabetu, który jest tworzony przez graczy w trakcie gry. W grze Apelowego Thue Online słowo jest konstruowane przez dodawanie liter do pustego słowa w celu osiagniecia określonego celu, np. stworzenia repetycji lub unikniecia jej.

4. **Człowiek:** Gracz, który uczestniczy w grze Apelowego Thue Online i podejmuje decyzje dotyczace dodawania liter do słowa.

5. **Komputer:** Gracz, który również uczestniczy w grze Apelowego Thue Online, ale jego ruchy sa kontrolowane przez algorytm komputerowy.

3 Twierdzenia

3.1 Twierdzenie

Istnieje strategia gwarantujaca dowolnie długa gre w gre Thue online na zbiorze 12 symboli. - "Online version of the theorem of Thue" by Jarosław Grytczuk, Piotr Szafruga, and Michał Zmarz

3.1.1 Lemat

Każdy graf zewnetrzny może być pokolorowany w sposób nierepetetywny przy użyciu 12 kolorów.

3.2 Dowód

Dowód opiera sie na wcześniejszym wyniku Kündgena i Pelsmajera, oraz Baráta i Varjú, dotyczacym nierepetetywnego kolorowania grafów zewnetrznych. Kolorowanie wierzchołków grafu G jest nierepetetywne, jeśli wzdłuż żadnej prostej ścieżki grafu G nie można znaleźć powtórzeń.

Zaczynamy od wprowadzenia równoważnego ustawienia dla gry Thue online, które bedzie bardziej dogodne dla naszych celów. Zauważmy najpierw, że gre te można grać na prostej rzeczywistej w taki sposób, że Komputer wybiera punkty na prostej rzeczywistej, a Człowiek koloruje je, używajac zbioru A jako zbioru kolorów. Nastepnie po n rundach mamy sekwencje punktów $B = b_1 b_2 \dots b_n$, $b_i \in R$, zapisanych w kolejności rosnacej $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, oraz odpowiadajaca sekwencje kolorów $S = c(b_1)c(b_2)\dots c(b_n)$, $c(b_i) \in A$, przypisanych punktom b_i przez Człowieka. Celem Człowieka jest unikanie powtórzeń w S.

Bez utraty ogólności możemy założyć, że Komputer zaczyna od 0, a gdy chce rozszerzyć sekwencje B w lewo lub w prawo, zawsze wybiera najbliższy punkt całkowity. Wiec w drugim ruchu wybiera on albo -1, albo 1. W konsekwencji punkty skrajne b_1 i b_n w B zawsze sa liczbami całkowitymi. Ponadto zakładamy, że gdy Komputer decyduje sie wstawić punkt pomiedzy b_i a b_{i+1}, nowy punkt leży dokładnie po środku tych dwóch. Dlatego jeśli wybrał 1 w drugim ruchu, to teraz może wybrać -1, $\frac{1}{2}$ lub 2. Zbiorem punktów dostepnych w ten sposób jest właśnie zbiór liczb dyadycznych D, który składa sie z wszystkich liczb postaci $\frac{a}{2^k}$, gdzie a jest dowolna liczba całkowita, a k jest dowolna liczba całkowita nieujemna. Zakładamy, że $\gcd(a, 2^k) = 1$, i nazywamy wykładnikiem k głebokość $\frac{a}{2^k}$. Oznaczmy przez D_k zbiór wszystkich liczb dyadycznych głebokości k. Zauważmy, że D_0 to po prostu zbiór wszystkich liczb całkowitych.

Teraz, dla każdej liczby całkowitej $k \geq 0$, rozważmy graf P_k, którego zbiorem wierzchołków jest suma $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_k$, a dwa punkty sa połaczone krawedzia wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma innego punktu z sumy miedzy nimi na linii. Jasne jest, że P_k jest dwukrotnie nieskończona ścieżka. Ostatecznie rozważmy graf G na zbiorze wierzchołków D, którego zbiór krawedzi jest suma zbiorów krawedzi wszystkich ścieżek P_k. Nie jest trudno zauważyć, że G jest grafem zewnetrznie planarnym. W rzeczywistości możemy narysować krawedzie każdej ścieżki P_k jako półokregi o średnicy $\frac{1}{2^k}$ leżace powyżej linii. Wtedy żadne dwie krawedzie G sie nie przecinaja, a wszystkie wierzchołki G dotykaja zewnetrznej ściany tego osadzenia.

Prosta (ale kluczowa) obserwacja polega na tym, że dowolna sekwencja $B = b_1 b_2 \dots b_n$, która może zostać utworzona przez Komputer podczas gry, jest ścieżka w G. Właściwie, B jest ścieżka w podgrafie G_n z G, który jest suma ścieżek P_0, P_1, ..., P_n. Faktycznie, zakładajac indukcyjnie, że to zachodzi dla n, rozważmy sekwencje B z nastepnej rundy. Załóżmy najpierw, że nowy punkt x jest umieszczony na poczatku B, czyli $B' = xB$. Nastepnie, zgodnie z zasadami, x musi być najbliższym punktem całkowitym do b_1, który sam jest liczba całkowita. Stad xb_1 jest krawedzia w P_0, a wiec B' jest ścieżka w G_{n+1}. To samo zachodzi dla $B' = Bx$. Teraz załóżmy, że x został wstawiony pomiedzy b_i i b_{i+1}. Zgodnie z hipoteza indukcyjna te dwa punkty leża kolejno na pewnej ścieżce P_j, $0 \leq j \leq n$. Stad b_i, x, b_{i+1} leża kolejno na ścieżce P_{j+1}. Innymi słowy, krawedź $b_i b_{i+1}$ została podzielona, a zatem B jest ścieżka w G_{n+1}.

Aby ukończyć dowód, wystarczy wykazać, że graf G ma nierepatytywne kolorowanie za pomoca 12 kolorów. Ale wynika to łatwo z Twierdzenia 2, korzystajac z zasady zwartości.

4 Strategie

4.1 Strategia prosta

Patrzymy od lewej strony, czy jest jakieś miejsce, które od razu wygrywa. Jeśli nie, wybieramy pole 2 od lewej, w które bedziemy wstawiać w każdej kolejnej iteracji, jeśli krok 1 sie nie spełni.

4.2 Strategia złożona

Podczas gdy gracz dodaje nowa literke do słowa (czyli taka, której jeszcze nie użył wcześniej), zapisujemy ja w nowych alfabetach A' oraz A''. Dażymy do tego, aby stawiać zawsze nowe pole po środku, ale w taki sposób, że literki z alfabetu A' sa w pierwszej cześci słowa, a z alfabetu A'' po prawej.

Przykład:

1. a (A' = $\{a\}$, A" = $\emptyset$)
2. $a \to ab$ (A' = $\{a\}$, A" = $\{b\}$)
3. $a\,b \to acb$ Człowiek wstawia literke "b" z alfabetu A", wiec wybieramy pole na lewo od nowej literki (przegrana dla $\{a, b\}$) (A' = $\{a, c\}$, A" = $\{b\}$)
4. $ac\,b \to acab$ Człowiek wstawia literke "c" z alfabetu A', wiec wstawiamy pole na prawo od tej literki (A' = $\{a, c, b\}$)

5. $aca\,b \rightarrow acadb$ Człowiek wstawia literke z alfabetu A', wiec znowu wybieramy miejsce na prawo od nowej literki (przegrana dla $\{a, b, c\}$) (dodajemy "d" do alfabetu A", teraz A' = $\{a, c\}$, A" = $\{b, d\}$)

6. $aca\,db \rightarrow acabdb$ Człowiek wstawia literke z alfabetu A", wiec wybieramy pole na lewo od nowej literki

7. $aca\,bdb \rightarrow acaebdb$ (Przegrana dla $\{a, b, c, d\}$)

5 Podsumowanie

W prezentowanym wstepie teoretycznym omówiliśmy gre Apelowego Thue Online w wariancie gra komputer kontra człowiek oraz przedstawiliśmy 2 strategie. Gra polega na budowaniu słowa z ustalonego alfabetu, gdzie pierwszy gracz stara sie zmusić drugiego do utworzenia repetycji w sensie abelowym, a drugi próbuje uniknać takiej sytuacji. Przedstawiliśmy dwie strategie: strategie prosta oraz strategie oparta na wyborze pól w zależności od dodawanych liter. Naszym celem jest dalsze rozwijanie gry, uwzgledniajac nowe pomysły i ewentualne ulepszenia.