

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## Aplicações lineares

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

## Definição de aplicação linear

Sejam  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  espaços vetoriais reais.

Uma **aplicação linear** (ou **transformação linear**) de  $\mathcal{V}$  em  $\mathcal{W}$  é uma função

$$\begin{aligned} L: \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{W} \\ X &\mapsto L(X) \end{aligned}$$

tal que

1.  $L(X + Y) = L(X) + L(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{V};$
2.  $L(cX) = cL(X), \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in \mathcal{V}.$

Se  $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ , então  $L$  diz-se um **operador linear** (ou **endomorfismo**) de  $\mathcal{V}$ .

## Exemplos de aplicações lineares

1. A reflexão em relação ao eixo dos  $xx$  é dada pelo operador linear

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned} \cdot$$

2. A aplicação derivada

$$\begin{aligned} L : \mathcal{P}_n &\rightarrow \mathcal{P}_{n-1} \\ p(x) &\mapsto p'(x) \end{aligned}$$

é uma aplicação linear.

3. A rotação em torno do eixo dos  $zz$  de ângulo  $\theta$  é o operador linear

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z) \end{aligned} \cdot$$

### Teorema 1

Seja  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação linear. Então  $L(0_{\mathcal{V}}) = 0_{\mathcal{W}}$ .

### Teorema 2

Se  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  é uma aplicação então

$$L(c_1X_1 + \cdots + c_kX_k) = c_1L(X_1) + \cdots + c_kL(X_k),$$

para quaisquer  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$  e  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ .

### Corolário

Seja  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação linear e  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  uma base de  $\mathcal{V}$ . Para  $X \in \mathcal{V}$ , tem-se que  $L(X)$  é completamente determinado por  $L(X_1), \dots, L(X_n)$ .

Seja  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação linear.

Sejam  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  bases ordenadas de  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$ , respetivamente.

Questão: Dado  $X \in \mathcal{V}$ , qual a relação entre  $[X]_{\mathcal{S}}$  e  $[L(X)]_{\mathcal{T}}$ ?

Exemplo Sejam

$$\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 0)) \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

bases de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação linear tal que

$$L(1, 1) = (2, 3, 1) \quad \text{e} \quad L(1, 0) = (1, 2, 1).$$

Passo 1. Determinação de  $L(X)$

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2) = x_2 (1, 1) + (x_1 - x_2) (1, 0) \\ L(X) &= L(x_1, x_2) = x_2 L(1, 1) + (x_1 - x_2) L(1, 0) \end{aligned}$$

Passo 2. Determinação de  $[L(X)]_{\mathcal{T}}$

$$\begin{aligned} [L(X)]_{\mathcal{T}} &= x_2 [L(1, 1)]_{\mathcal{T}} + (x_1 - x_2) [L(1, 0)]_{\mathcal{T}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} [L(1, 1)]_{\mathcal{T}} & | & [L(1, 0)]_{\mathcal{T}} \end{bmatrix}}_{[L]_{\mathcal{S}, \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{S}}} \end{aligned}$$

Portanto

$$[L(X)]_{\mathcal{T}} = [L]_{\mathcal{S}, \mathcal{T}} [X]_{\mathcal{S}}.$$

$[L]_{\mathcal{S}, \mathcal{T}} \rightarrow$  matriz representativa de  $L$  relativamente às bases  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$

Passo 3. Determinação da matriz  $[L]_{S,\mathcal{T}}$

$$[L(1,1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pois } L(1,1) = 0(1,0,1) + 2(1,1,0) + 1(0,1,1)$$

$$[L(1,0)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{pois } L(1,0) = 0(1,0,1) + 1(1,1,0) + 1(0,1,1)$$

$$[L]_{S,\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Definição de matriz de uma aplicação linear

Seja  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  uma aplicação linear,  
 $\mathcal{S} = (X_1, \dots, X_n)$  uma base de  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{T}$  uma base de  $\mathcal{W}$ .

Matriz representativa de  $L$  relativamente às bases  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$ :

$$[L]_{\mathcal{S}, \mathcal{T}} = [ \ [L(X_1)]_{\mathcal{T}} \mid \cdots \mid [L(X_n)]_{\mathcal{T}} \ ],$$

matriz cujas colunas são os vetores das coordenadas na base  $\mathcal{T}$   
das imagens dos vetores da base  $\mathcal{S}$ .

Para cada  $X \in \mathcal{V}$ ,

$$[L(X)]_{\mathcal{T}} = [L]_{\mathcal{S}, \mathcal{T}} [X]_{\mathcal{S}}.$$