Cálculo I - C

2024/2025

Revisões de alguns conceitos sobre funções reais de variável real (f.r.v.r) estudados no ensino secundário

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Notação

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$ Conjunto dos números reais positivos

$\mathbb{R}^-$ Conjunto dos números reais negativos

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ Conjunto dos números naturais

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ Conjunto dos números inteiros não negativos

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Conjunto dos números racionais

Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Nas definições seguintes considere $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $S \subseteq \mathbb{R}$.

- Chama-se vizinhança de centro a e raio ε ou vizinhança-ε de a ao conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-a| < \varepsilon\} \\ &= \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[. \end{aligned}$$

- a é ponto interior de S se existir uma vizinhança de a contida em S, isto é, se

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \mathcal{V}_\varepsilon(a) \subseteq S.$$

- a é ponto exterior de S se a for ponto interior de $\mathbb{R} \backslash S$.

- a é ponto fronteiro de S se a não for ponto interior nem ponto exterior de S, isto é, se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \left(\mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap S \neq \emptyset \;\wedge\; \mathcal{V}_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \backslash S) \neq \emptyset\right).$$

Noções topológicas em $\mathbb{R}$

Definições:

- $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de S se toda a vizinhança-ε de a contém um ponto de S distinto de a, isto é, se,

$$\forall \varepsilon > 0, (\mathcal{V}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap S \neq \emptyset.$$

- $a \in S$ é um ponto isolado de S se não é ponto de acumulação de S.

Definição: Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de S chamamos de derivado de S e denota-se por S'.

Observação: Todo o ponto interior de S é ponto de acumulação de S.

Exemplos:

- $A = [-2, 1[\cup \{3\}$: 1 é ponto de acumulação de A e 3 é ponto isolado.
- $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$: Todo o ponto de S é isolado e 0 é ponto de acumulação de S.

Domínio, contradomínio, gráfico e restrição de uma f.r.v.r.

Definição: Seja $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Uma função real f definida em A é uma correspondência que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x) \in \mathbb{R}$. Escrevemos $f : A \to \mathbb{R}$ e, sendo $a \in A$, chamamos a $b = f(a)$ a imagem de a por f. O conjunto A é chamado de domínio de f e representa-se habitualmente por D_f. O conjunto das imagens $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ é designado por contradomínio de f e denota-se por CD_f.

Definição: Chama-se gráfico da função $f : D_f \to \mathbb{R}$ ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por $G_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f\}$.

Definição: Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $\emptyset \neq B \subseteq D_f$. Definimos a restrição de f a B como sendo a função $g : B \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$, para todo o $x \in B$, e escrevemos $g = f_{|_B}$

Função composta

Definição: Dadas duas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$, define-se a função composta de g após f como sendo a função

$$g \circ f : D_{g\circ f} \to \mathbb{R}$$

onde

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Limite de uma f.r.v.r

Definição (Definição de limite segundo Cauchy): Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r. Sejam a um ponto de acumulação de D_f e $\ell \in \mathbb{R}$. Dizemos que ℓ é o limite de f no ponto a ou que $f(x)$ tende para ℓ quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in D_f \;\; 0 <| x - a |< \delta \Rightarrow | f(x) - \ell |< \varepsilon,$$

ou, equivalentemente,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D_f \;\; x \in \mathcal{V}_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in \mathcal{V}_\varepsilon(l).$$

Observação: Esta definição traduz que $f(x)$ está tão próximo de ℓ quanto se queira desde que x, distinto de a, esteja suficientemente próximo de a.

Limite de uma f.r.v.r

Teorema (Teorema de Heine): Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de D_f. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

se e só se $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$ para todas as sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $D_f \setminus \{a\}$ convergentes para a.

Observação: O resultado anterior permite concluir que a definição de limite de uma função num ponto apresentada no slide anterior é equivalente à definição de limite segundo Heine estudada no ensino secundário.

Teorema (Unicidade do limite): O limite de uma função num determinado ponto, quando existe, é único.

Exercício: Mostre que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Propriedades dos limites

Proposição: Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D_f e $\ell \in \mathbb{R}$. Então,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}(f(x) - \ell) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0.$$

Proposição (Propriedades operatórias dos limites): Sejam f e g f.r.v.r. e a um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, então

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha\ell_1$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x)) = \ell_1\ell_2$;
4. Se $\ell_2 \neq 0$ então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

Propriedades dos limites

Teorema: Sejam $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ tais que $g(D_g) \subseteq D_f$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e $\lim_{x\to b} f(x) = \ell = f(b)$, então $\lim_{x\to a}(f(g(x)) = f(b)$.

Proposição (Lei do enquadramento): Sejam f, g e h funções r.v.r. e a um ponto de acumulação de $D = D_f \cap D_g \cap D_h$. Se existir $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)\,,\ \text{para todo o } x \in (\mathcal{V}_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D\,,$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell,$$

então

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Propriedades dos limites

Corolário: Sejam $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$. Se

- $\lim_{x \to a} f(x) = 0$
- g é limitada em $(\mathcal{V}_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap D_g$, para algum $\delta > 0$,

então

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.$$

Observações:

- O resultado anterior afirma que o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.
- Observe-se que o facto de g ser limitada no corolário anterior é fundamental para a validade do resultado. Por exemplo, se $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, temos que $\lim_{x \to 0} f(x)g(x) = 1 \neq 0$.

Exercício: Calcule, justificando, $\lim_{x \to 0} x^2 . \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x^5}\right)$.

Limites laterais

Definições: Sejam $S \neq \emptyset$, $S \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

- a é ponto de acumulação à esquerda de S se $]a-\delta, a[\cap S \neq \emptyset$, qualquer que seja $\delta > 0$.
- a é ponto de acumulação à direita de S se $]a, a+\delta[\cap S \neq \emptyset$, qualquer que seja $\delta > 0$.

Definição (Limite lateral à esquerda): Sejam f uma f.r.v.r., a um ponto de acumulação à esquerda de D_f e $\ell \in \mathbb{R}$. Dizemos que ℓ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ a - \delta < x < a \Rightarrow | f(x) - \ell | < \varepsilon.$

Limites laterais

Definição (Limite lateral à direita): Sejam f uma f.r.v.r., a um ponto de acumulação à direita de D_f e $\ell \in \mathbb{R}$. Dizemos que ℓ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$$

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \; a < x < a + \delta \Rightarrow | f(x) - \ell | < \varepsilon.$

Proposição: Sejam f uma f.r.v.r., a um ponto de acumulação à direita de D_f e à esquerda de D_f e $\ell \in \mathbb{R}$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \text{se e só se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Limites laterais

Exercícios: Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:

1. $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ \operatorname{arccotg}\left(\ln(x+e)\right) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Limites no infinito e limites infinitos

Definição: Seja $\ell \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma f.r.v.r.

- Suponhamos que D_f não é majorado. Escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \ \forall x \in D_f\ x > M \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid < \varepsilon.$$
- Suponhamos que D_f não é minorado. Escrevemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ se
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \ \forall x \in D_f\ x < -M \Rightarrow \mid f(x) - \ell \mid < \varepsilon.$$
- Seja a um ponto de acumulação de D_f. Escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ se
$$\forall L > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in D_f\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > L.$$

Limites no infinito e limites infinitos

De modo análogo se definem as noções:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Limites

Proposição:

1. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$;
2. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$;
3. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Função contínua

Definição: Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que f é contínua em a se

$$a \in D_f \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

isto é, se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \; |x - a| < \delta \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \varepsilon.$$

Caso contrário, dizemos que f é descontínua em a.

Definição: Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f \cap (D_f)'$. Dizemos que:

- f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- f é contínua à direita de a se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Propriedades das funções contínuas

Proposição: Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f \cap (D_f)'$. f é contínua em a se e só se f é contínua à esquerda e à direita de a.

Proposição: Sejam f e g duas funções contínuas num ponto a. Então as funções $f+g$, $\alpha f \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ e fg são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, então f/g é também uma função contínua em a.

Proposição: Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que a função composta $g \circ f$ está definida. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então $g \circ f$ é contínua em a.

Derivada de uma função

Definição: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Chama-se derivada da função f no ponto a ao limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \left(\text{ou} \;\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

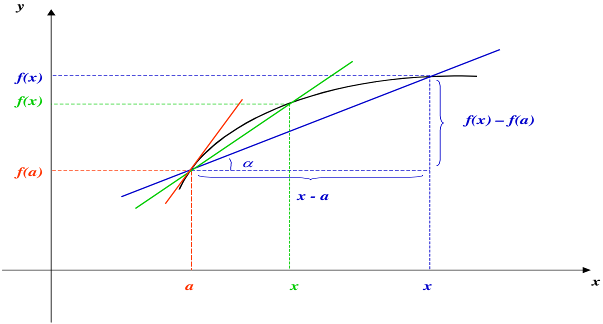
se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

- Notações mais usuais: $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$
- Se uma função admite derivada num ponto dizemos que é derivável nesse ponto.
- Se $f'(a)$ é finita dizemos que f é diferenciável em a.

Interpretação geométrica de derivada

No caso de $f'(a)$ ser finita, $f'(a)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Quando $f'(a) = +\infty$ ou $f'(a) = -\infty$, essa reta tangente é a reta vertical de equação $x = a$.



Reta tangente e reta normal

Definição: Sejam $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \operatorname{int}(D_f)$ um ponto onde f é diferenciável.

- À reta de equação
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$
chamamos reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.
- Chamamos normal à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ à reta que passa nesse ponto e é perpendicular à reta tangente à curva nesse ponto.

Nota: Atendendo à relação que existe entre os declives de duas retas perpendiculares, podemos concluir que a reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $M = (a, f(a))$ é a reta que passa por este ponto e tem declive $-\frac{1}{f'(a)}$, quando $f'(a) \neq 0$. Se $f'(a) = 0$, a reta normal à curva $y = f(x)$ no ponto $M = (a, f(a))$ é a reta de equação $x = a$.

Derivadas laterais

Definição:

- Seja $a \in D_f$ um ponto de acumulação à esquerda de D_f. Chama-se derivada lateral de f à esquerda de a, e denota-se por $f'_-(a)$, ao limite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \left(\text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

- Seja $a \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f. Chama-se derivada lateral de f à direita de a, e denota-se por $f'_+(a)$, ao limite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad \left(\text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

se este limite existir, podendo ser finito, $+\infty$ ou $-\infty$.

Diferenciabilidade

Proposição: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Então f é diferenciável em a sse existem $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$, são finitas e $f'_-(a) = f'_+(a)$.

Exemplo: A função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 + x^4 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$, porque

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3 - 0}{h} = 0$$

e

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + h^4 - 0}{h} = 0.$$

Exercício

Exercício: Considere a função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} x\ln(1+x^2) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{xe^x}{e^x+1} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Estude g quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.

Continuidade e diferenciabilidade

Proposição: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in D_f$ um ponto interior de D_f. Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

Corolário: Se f não é contínua em a, então f não é diferenciável em a.

Nota: Observe-se que uma função pode ser contínua num ponto e não ter derivada nesse ponto. Considere, por exemplo, a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$. A função f é contínua em $x = 0$ e não tem derivada em $x = 0$.

Continuidade e diferenciabilidade

Exemplo: Consideremos a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Uma vez que não existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, f não é contínua em $x = 0$ e, portanto, f não é diferenciável em $x = 0$.

Exercício: Considere a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

(a) Estude h quanto à continuidade em $x = 0$.

(b) h é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

Propriedades das derivadas

Proposição: Sejam f e g duas funções diferenciáveis em a. Então

- $f+g$ é diferenciável em a e
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
- $f-g$ é diferenciável em a e
$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$
- $f \cdot g$ é diferenciável em a e
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
- αf, com $\alpha \in \mathbb{R}$, é diferenciável em a e
$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$$
- se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Derivadas de algumas funções elementares

- $(c)' = 0$, com $c \in \mathbb{R}$
- $(x^p)' = px^{p-1}$, com $p \in \mathbb{R}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$, onde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$
- $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x . \operatorname{tg} x$
- $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x . \operatorname{cotg} x$

Regra da cadeia ou derivada da função composta

Teorema: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que $g \circ f$ está definida. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $f(a)$, então $g \circ f$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Derivadas de algumas funções compostas

Sejam f uma função diferenciável, $p \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

- $(f^p(x))' = p f^{p-1}(x) f'(x)$
- $(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$
- $(a^{f(x)})' = f'(x)\, a^{f(x)} \ln a$
- $(\ln |f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $(\log_a |f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
- $(\operatorname{sen}(f(x)))' = f'(x) \cos(f(x))$
- $(\cos(f(x)))' = -f'(x) \operatorname{sen}(f(x))$
- $(\operatorname{tg}(f(x)))' = f'(x) \sec^2(f(x))$
- $(\operatorname{cotg}(f(x)))' = -f'(x) \operatorname{cosec}^2(f(x))$
- $(\sec(f(x)))' = f'(x) \sec(f(x)) \operatorname{tg}(f(x))$
- $(\operatorname{cosec}(f(x)))' = -f'(x) \operatorname{cosec}(f(x)) \operatorname{cotg}(f(x))$

Exemplos

Exemplos:

- A f.r.v.r. definida por $f(x) = e^{x^2}\cos x$ é diferenciável em todo o $x \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x^2})'\cos x - e^{x^2}\operatorname{sen} x \\ &= 2xe^{x^2}\cos x - e^{x^2}\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

  para todo o $x \in \mathbb{R}$.

- A f.r.v.r. definida por $g(x) = \dfrac{\ln(3x)}{x}$ é diferenciável em todo o $x \in \mathbb{R}^+$ e $g'(x) = \dfrac{1-\ln(3x)}{x^2},\ x \in \mathbb{R}^+$.

Função derivada

Definição: Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Seja $S \subseteq D_f$ o conjunto dos pontos interiores de D_f onde f é diferenciável.
Chamamos função derivada de f à função:

$$\begin{array}{rccc} f' : & S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Exemplo: A função definida por $f(x) = |x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a sua função derivada é

$$\begin{array}{rccl} f' : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{se} & x > 0 \\ -1 & \text{se} & x < 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Derivadas de ordem superior

A f' também é usual chamar função derivada de primeira ordem de f.
A partir de f' podemos determinar a sua função derivada, f'', definida nos pontos onde f' é diferenciável, tal que

$$f''(x) = (f')'(x).$$

A f'' chamamos função derivada de ordem dois ou função derivada de segunda ordem de f.

Dada a função derivada de ordem $n-1$ de f, $f^{(n-1)}$, a função derivada de ordem n é a função $f^{(n)}$, cujo domínio é o conjunto de pontos onde $f^{(n-1)}$ é diferenciável e

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x).$$

Mínimo e máximo de uma função

Definição: Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$.

- a é um maximizante local (resp. minimizante local) de f se existir $\delta > 0$ tal que

  $$f(a) \geq f(x), \ \ \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D_f$$

  $$(\text{ resp. } \ f(a) \leq f(x), \ \ \forall x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D_f) \ .$$

  No caso de a ser um maximizante local (resp. minimizante local) de f, $f(a)$ diz-se um máximo local (resp. mínimo local) de f.

- a é um maximizante global (resp. minimizante global) de f se

  $$\forall x \in D_f \ \ f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } \forall x \in D_f \ \ f(x) \geq f(a)) \ .$$

  Caso a seja um maximizante global (resp. minimizante global) de f dizemos que $f(a)$ é o máximo global (resp. o mínimo global) de f.

Extremos e extremantes

- Aos máximos e mínimos locais chamamos extremos locais.
  Ao máximo e mínimo global chamamos extremos globais.

- Aos maximizantes e minimizantes locais chamamos extremantes locais.
  Aos maximizantes e minimizantes globais chamamos extremantes globais.

Extremos locais

Proposição: Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, excepto possivelmente em $c \in]a, b[$. Então,

(i) se

$$f'(x) > 0, \quad \text{para todo o} \;\; x < c \quad \text{e} \quad f'(x) < 0, \quad \text{para todo o} \;\; x > c$$

então,

$$f(c) \;\; \text{é um máximo local de} \;\; f;$$

(ii) se

$$f'(x) < 0, \quad \text{para todo o} \;\; x < c \quad \text{e} \quad f'(x) > 0, \quad \text{para todo o} \;\; x > c$$

então,

$$f(c) \;\; \text{é um mínimo local de} \;\; f.$$

Concavidades do gráfico de uma função

Definição: Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$.

- Dizemos que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]a\,,\ b[$ se, para todo o $c \in]a, b[$,

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)\,,\ \text{para todo o } x \in]a, b[\setminus \{c\}\,.$$

- Dizemos que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]a\,,\ b[$ se, para todo o $c \in]a\,,\ b[$,

$$f(x) < f(c) + f'(c)(x - c)\,,\ \text{para todo o } x \in]a, b[\setminus \{c\}\,.$$

Concavidades do gráfico de uma função

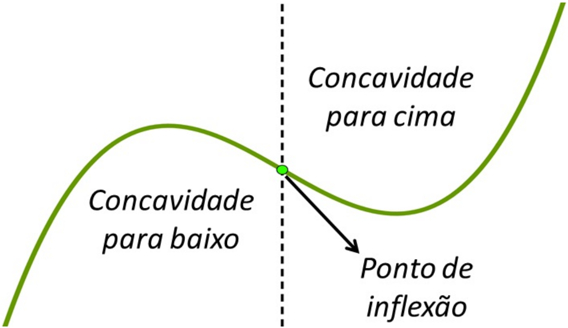
Proposição: Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$ tal que existe e é finita $f''(x)$, para todo o $x \in]a, b[$.

- Se $f''(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]a, b[$.
- Se $f''(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]a, b[$.

Definição: Um ponto $(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f diz-se ponto de inflexão do gráfico de f se existir um intervalo aberto $]a, b[$ contendo c tal que ocorra uma das duas situações:

- $f''(x) > 0$ se $a < x < c$ e $f''(x) < 0$ se $c < x < b$;
- $f''(x) < 0$ se $a < x < c$ e $f''(x) > 0$ se $c < x < b$.

Ilustração gráfica



Assíntotas ao gráfico de uma função

Definição:

- Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a, +\infty[$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota ao gráfico de f à direita ou quando $x \to +\infty$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx - b) = 0$.
- Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $] - \infty, a[$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota ao gráfico de f à esquerda ou quando $x \to -\infty$ se $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$
- A reta de equação $x = a$ diz-se uma assíntota vertical ao gráfico de f se se verificar uma das condições:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \text{ou}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Assíntotas ao gráfico de uma função

Proposição: Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a, +\infty[$ para algum $a \in \mathbb{R}$. A reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota ao gráfico de f à direita se e só se existem e são finitos os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$$

e temos

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx).$$

Proposição: Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]-\infty, a[$ para algum $a \in \mathbb{R}$. A reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota ao gráfico de f à esquerda se e só se existem e são finitos os limites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$$

e temos

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx).$$

Esboço do gráfico de uma função

Devemos ter em conta:

- o domínio da função
- os pontos de intersecção com os eixos OX e OY
- o sinal da função
- os pontos de descontinuidade
- as assíntotas ao gráfico
- os intervalos de monotonia
- os extremantes locais
- os pontos de inflexão e as concavidades.