Cálculo I-C

Slides de apoio às aulas

Equações Diferenciais Ordinárias

Departamento de Matemática
Universidade Aveiro

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos e do Prof. Alexandre Almeida (pág. 51-92) (indicados na bibliografia).

Resumo dos Conteúdos

Equações Diferenciais Ordinárias, o que são?

Equações que envolvem uma função e algumas das suas derivadas, podendo envolver também a variável que é o argumento dessa função. Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

1. Segunda Lei de Kirchhoff:
   Uma das equações básicas usadas em circuitos elétricos é

$$L \cdot I'(t) + R \cdot I(t) = E(t)$$

   onde
   $L =$ indutância $\quad (L \in \mathbb{R})$
   $R =$ resistência $\quad (R \in \mathbb{R})$
   $I(t) =$ intensidade de corrente no tempo t
   $E(t) =$ voltagem no tempo t.

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx$$

$m =$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical
$x(t) =$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola
$k > 0$ constante de mola (Ver figura).

3. Modelo logístico (modelo de crescimento populacional):

$$P'(t) = c\,P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

$P(t) =$ número de indivíduos na população no tempo t
$c =$ constante que traduz o crescimento relativo da população
$K > 0$ constante designada por “capacidade de suporte".

Equação diferencial ordinária

Definição: Chama-se equação diferencial ordinária (EDO), a toda equação do tipo

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

ou, equivalentemente,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, x é a variável independente e $y = y(x)$ é uma função desconhecida que depende de x (variável dependente).

Definição: Chama-se ordem de uma EDO à maior ordem da derivada que aparece na equação.

Definição: Uma EDO diz-se estar na forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Caso contrário, diz-se que a EDO está escrita na forma implícita.

Exemplos:

1. $$-y' + x^3 - 1 = 0$$

   é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente.

2. $$3t\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

   é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente.

3. $$\frac{d^3y}{dx^3} = 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy$$

   é uma equação diferencial de ordem 3, onde x é a variável independente e y a variável dependente. A EDO está na forma normal.

Solução de uma EDO

Definição: Chama-se solução da equação diferencial

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0\,, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo: $\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias;
o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração (ou resolução) da EDO.

Solução particular (ou integral particular): Solução que se obtém a partir do integral geral.

Solução singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral.

Solução geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0.$

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{aligned} (y')^2 - 4y &= 0 \\ (y')^2 &= 4y \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} y' &= 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} &= 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

integrando em ordem a x,

$$\int y'(x)\,(y(x))^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int 2\,dx,\ y > 0\,,$$

determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte integral geral: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$.

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido. Logo, esta solução é uma solução singular da EDO.
- Tomando no integral geral $C = 0$ e $C = 1$, obtem-se duas soluções particulares: $y = x^2$ e $y = (x + 1)^2$, respetivamente.

Problema de valores iniciais

Definição: Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1, \;\; \ldots \;, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo: $y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Existência e unicidade de solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

  admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Problema de valores na fronteira

Definição: Chama-se problema de valores na fronteira (ou problema de fronteira) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo: O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

Equações de variáveis separáveis

Definição: Uma equação de variáveis separáveis é uma EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \qquad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y, respetivamente.

Determinação dum integral geral

1. Escrever a equação na forma (variáveis separadas):

$$q(y)y' = p(x) \qquad (1)$$

   ou, na forma diferencial, $q(y)dy = p(x)dx$.

2. O integral geral da equação (1) é dado por $\displaystyle\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx$. Logo, o integral geral é dado por $Q(y) = P(x) + C, C \in \mathbb{R}$, onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Exemplo

Exemplo: $y' = \dfrac{1}{y}e^x, y \neq 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$yy' = e^x.$$

O integral geral é dado por:

$$\int y\,dy = \int e^x\,dx\,.$$

Logo $\dfrac{y^2}{2} = e^x + K$, $K \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$y^2 = 2e^x + C,\ \ C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

Exemplo

Exemplo: $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

Logo
$$\frac{1}{y}y' = -x\,, \qquad \text{para } y \neq 0.$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int x\,dx\,,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\ln|y| &= -\frac{x^2}{2} + K,\ K \in \mathbb{R} \\
|y| &= e^{-\frac{x^2}{2}+K} \\
|y| &= Ae^{-\frac{x^2}{2}},\ A \in \mathbb{R}^+ \\
y &= Be^{-\frac{x^2}{2}},\ B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Como $y = 0$ também é solução da EDO, obtém-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Definição: Uma equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação do tipo

$$a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x)\,y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ (logo $q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Nota: Se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.ª ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.ª ordem incompleta (ou homogénea).

Resolução de uma EDO linear de 1.ª ordem usando um fator integrante

Método de resolução: para resolver a equação

$$y' + p(x)\, y = q(x), \quad x \in I$$

devemos

1. determinar o fator integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$;
2. multiplicar ambos os membros da equação por $\mu(x)$ (no primeiro membro vamos obter $(\mu(x) \cdot y)'$);
3. integrar em ordem a x.

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo: A EDO da página 15,

$$y' + xy = 0,$$

que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.ª ordem.

Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ obtemos

$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0,$$

isto é,

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} y\right)' = 0.$$

Integrando vem

$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é $y = C\, e^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}$.

Resolução de uma EDO Linear de 1.ª Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo:

$$y' - y = -e^x$$

Como uma primitiva de $p(x) = -1$ é $P(x) = -x$, um fator integrante da EDO é e^{-x}. Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x} obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

i.e,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int (-1)\, dx = -x + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)\, e^x\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

PVI associado a EDO linear de primeira ordem

Teorema (Existência e unicidade de solução): Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)\, y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. Porquê?

Equações diferenciais homogéneas

Definição: Chama-se equação diferencial homogénea a toda a EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é homogénea de grau zero, *i.e.*,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \text{tais que } (\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}.$$

Exemplo:

$$y' = \underbrace{\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}}_{f(x,y)}$$

f é homogénea de grau zero pois, desde que $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y).$$

Determinação do integral geral de uma equação diferencial homogénea:

1. Certifique-se que a equação na forma:

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

é homogénea;

2. Em (1), fazer a mudança de variável $y = zx$:

$$z'x + z = g(z), \qquad (2)$$

onde $g(z) = f(1,z)$;

3. Resolver a EDO de variáveis separáveis (2) (nas variáveis x e z);
4. No integral geral obtido fazer $z = \frac{y}{x}$ (regressar às variáveis iniciais).

Exemplo

Exemplo: Voltando ao Exemplo da página 21:

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Ora,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 , \qquad x \neq 0,$$

Através da substituição $y = zx$, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1+z^2}\, z' = \frac{1}{x},$$

com integral geral dado por

$$\operatorname{arctg}\, z = \ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogénea dada tem a forma

$$\operatorname{arctg}\, \frac{y}{x} = \ln|x| + C\,, \qquad i.e., \qquad y = x\ \operatorname{tg}\, \left(\ln|x| + C\right)\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Equação diferencial de Bernoulli

Definição: Uma equação diferencial de Bernoulli é uma EDO da forma:

$$y' + a(x)\,y = b(x)\,y^{\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observações:

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear de 1.ª ordem.
- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a equação é redutível a uma EDO linear de 1.ª ordem, usando a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$.
  De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

  $$y^{-\alpha}y' + a(x)\,y^{1-\alpha} = b(x)$$

  (eventualmente com $y \neq 0$). Com a substituição $z = y^{1-\alpha}$, chegamos à equação linear de 1.ª ordem:

  $$z' + (1-\alpha)a(x)\,z = (1-\alpha)\,b(x).$$

Exemplo

Exemplo: A equação

$$y' + y = e^x y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com $\alpha = 2$). Fazendo $z = 1/y$ $(y \neq 0)$ obtemos

$$z' - z = -e^x,$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x)\, e^x\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ver página 19

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM

Variáveis separáveis

$q(y)y' = p(x)$

Integral geral:

$\int q(y)dy = \int p(x)dx$

Linear

$y' + p(x)y = q(x)$

Fator integrante

$\mu(x) = e^{\mathcal{P}(x)}$, onde $\mathcal{P}(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Homogénea

$y' = f(x,y)$, onde $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$

Mudança de variável: $y = zx$

Reduz-se a uma EDO de variáveis separáveis, nas variáveis x e z.

Bernoulli

$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$

* Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a EDO é linear.

* Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$:
Mudança de variável: $z = y^{1-\alpha}$

Reduz-se a uma EDO linear, nas variáveis x e z.

Equações diferenciais lineares de ordem arbitrária

Definição: Uma equação diferencial linear de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, é uma equação da forma:

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

onde

$b \colon I \to \mathbb{R}$;

$a_i \colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

$\downarrow$

coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se incompleta (ou homogénea); caso contrário, a equação diz-se completa (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de linear de coeficientes constantes.

Exemplos

1.
$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$
EDO linear homogénea de segunda ordem.

2.
$$e^x\, y' - \cos x\, y = x$$
EDO linear completa de primeira ordem.

3.
$$y^{(5)} + 2y' = 0$$
EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

Equação homogénea associada a uma EDO linear

Nota: Se na equação

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada equação homogénea associada.

Exemplo: A equação homógenea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0\,.$$

Solução geral de uma EDO linear completa

Teorema: A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplo:

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0,$$

cuja solução geral é dada por $y_h = C\,e^{2x}$, com $C \in \mathbb{R}$.

Uma solução da EDO completa é $y_p = \dfrac{1}{3}\,e^{5x}$ [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C\,e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3}\,e^{5x}}_{y_p},\ C \in \mathbb{R}.$$

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0 \qquad (1)$$

onde $a_i\colon I \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema: Sejam $y\colon I \to \mathbb{R}$, $w\colon I \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $y \equiv 0$ é solução de (1);

(ii) Se y e w são soluções de (1), então $y + w$ é solução de (1);

(iii) Se y é solução de (1), então αy é solução de (1);

Isto é, o conjunto das soluções de (1) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em I.

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0,$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ contínuas em I; $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearmente independentes e qualquer sua solução, y, pode escrever-se como sua combinação linear, *i.e.*,

$$y = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n, \text{ para } C_j \in \mathbb{R}\ .$$

Definição: Qualquer conjunto de n soluções linearmente independente de uma EDO linear homogénea de ordem n é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação.

Nota: De acordo com o teorema anterior, um sistema fundamental de soluções é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDO linear homógenea.

Conjunto fundamental de soluções— matriz Wronskiana

Proposição: Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soluções de uma EDO linear homogénea de ordem n, nas condições do slide anterior. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ é um conjunto fundamental de soluções se e só se a matriz

$$\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

é invertível, para todo o $x \in I$.

Nota: A matriz $\mathcal{W}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ é designada por matriz Wronskiana e ao seu determinante chama-se Wronskiano.

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \tag{2}$$

Observe-se que $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \operatorname{sen} x$ são soluções desta equação. Ver página 7.

Como $\mathcal{W}(\operatorname{sen} x, \cos x) = \begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ é invertível (porque o Wronskiano tem determinate não nulo), podemos concluir que:

$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ é sistema fundamental de soluções de (2).

Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Observações:

1. As funções do tipo

$$x^k e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{e} \quad x^k e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$$

com $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, são linearmente independentes (em particular, as funções seno, cosseno, exponencial e do tipo potência são linearmente independentes).

2. A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe um método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.

3. Se a EDO linear homogénea tiver coeficientes constantes, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do polinómio caraterístico (ver slides seguintes).

EDO linear homogénea com coeficientes constantes

Uma EDO linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.

Polinómio caraterístico (ou polinómio associado) :

$$P(r) = a_0\, r^n + a_1\, r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, r + a_n.$$

Observação: As n raízes do polinómio caraterístico $P(r)$ permitem determinar n soluções linearmente independentes da equação homógenea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homógenea associada.

Construção de um sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) de uma EDO linear com coeficientes constantes e homogénea

Considerem-se as raízes de $P(r)$ identificadas e, para cada uma delas, proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-á n soluções linearmente independentes):

- 1.º Caso: A raíz r é real simples.
  Solução: e^{rx}
- 2.º Caso: A raíz r é real de mutiplicidade k.
  Soluções: $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$
- 3.º Caso: As raízes são complexas conjugadas simples: $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$.
  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$
- 4.º Caso: As raízes são complexas conjugadas: $\alpha+\beta i$ e $\alpha-\beta i$, com multiplicidade k.
  Soluções: $e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x\,e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$,
  $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),\ x\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$.

Exemplo

Exemplo: $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico: $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8.$

Raízes do polinómio característico:

-2 (simples); $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$, raízes duplas.

Sistema fundamental de soluções:

$$SFS = \{e^{-2x}\,,\ \cos(\sqrt{2}x)\,,\ x\cos(\sqrt{2}x)\,,\ \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\,,\ x\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = B\,e^{-2x} + \big(C_1 + C_2x\big)\cos(\sqrt{2}x) + \big(D_1 + D_2x\big)\ \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\,,$$

com $B, C_1, C_2, D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

Método dos coeficientes indeterminados

Método para determinar uma solução particular, aplicável às
EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b(x) \tag{3}$$

com $b(x)$ da forma:

$$b(x) = B_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = B_m(x)\, e^{\alpha x}\, \text{sen}\,(\beta x),$$

onde $B_m(x)$ denota um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Prova-se que existe uma solução particular da equação (3) do tipo

$$y_p(x) = x^k\, e^{\alpha x}\, \left(Q(x) \cos(\beta x) + R(x)\ \text{sen}\,(\beta x)\right) \tag{4}$$

onde:

(i) k é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$, se $\alpha + i\beta$ for raiz do polinómio caraterístico da equação homogénea associada a (3); senão, $k = 0$;

(ii) $Q(x)$, $R(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (3) e a expressão para a solução (4).

Exemplo

Exemplo: $y' - 3y = e^{3x}$. Como

$$e^{3x} = P_m(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) \equiv 1$ (grau zero), $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x\; e^{3x} A\,, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituíndo y_p e y_p' na equação:

$$\underbrace{A\, e^{3x} + 3Ax\, e^{3x}}_{y_p'} - 3(\underbrace{A\, x\, e^{3x}}_{y_p}) = e^{3x}$$

obtemos $(A-1)e^{3x} = 0$, e portanto $A = 1$. Assim, $y_p = xe^{3x}$.

PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

Teorema (Existência e unicidade de solução): Se $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num intervalo I, $a_0(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x) \\ \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}\,, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e β_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, são números reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em $\mathbb{R}$. Porquê? Qual?

Exemplo de aplicação das transformadas de Laplace na resolução de um PVI

Exemplo: Vamos determinar a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada (admitindo que $y(t)$ tem transformada de Laplace, $Y(s)$), conclui-se que:

$$s^2 Y(s) + 2s\, Y(s) + 10\, Y(s) = \mathcal{L}\{1\}. \qquad \text{[Porquê?]}$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s}\ , \ i.e., \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

Uma vez que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+10)} \quad (s>0)\,,$$

a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10}\,\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\,\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t)\ s>0 \\
&= \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+9}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{(s+1)^2+9}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}(t) - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\,e^{-t}\,\cos(3t) - \frac{1}{30}\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\,(3t), \quad t\geq 0.
\end{aligned}$$