Cálculo I-C — 1º Teste (V1)

20 de novembro de 2024

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2a [20pts]	2b [10pts]	3a [12pts]	3b [08pts]	4a [20pts]	4b [20pts]	5a [15pts]	5b [15pts]	6 [20pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

Sempre que necessitar de continuar uma resposta numa folha suplementar, indique, no sítio assinalado para o efeito, o número da folha suplementar que usou.

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua ($a < b$). O Teorema de Bolzano-Cauchy, ou Teorema dos valores intermédios, permite concluir que:

- [ ] se $f(a) \cdot f(b) = 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.
- [ ] se $f(a) < f(b)$, então f não pode assumir valores fora do intervalo $[f(a), f(b)]$.
- [ ] se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então f tem um único zero em $]a,b[$.
- [ ] se $f(a) < 0, f(b) < 0$ e existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) > 0$ então f tem, pelo menos, dois zeros em $]a,b[$.

(b) Sendo $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio e $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = g(1-x^2)$, podemos afirmar que:

- [ ] a função φ tem mínimo global mas não tem máximo global.
- [ ] a função φ tem máximo global mas não tem mínimo global.
- [ ] a função φ tem mínimo e máximo globais.
- [ ] a função φ não tem mínimo nem máximo globais.

(c) Seja $h(x) = (x+1)\,\mathrm{arcsen}(\sqrt{x}-1)$, com $x \in [0,4]$. Pelo Teorema de Lagrange, podemos afirmar que existe $c \in]0,4[$ tal que:

- [ ] $h'(c) = \frac{3\pi}{2}$
- [ ] $h'(c) = \frac{3\pi}{4}$
- [ ] $h'(c) = \frac{\pi}{4}$
- [ ] $h'(c) = -\frac{\pi}{4}$

(d) Seja $g(x) = x^{21} - x + a$, onde $a \in \mathbb{R}$. Qual o número máximo de zeros de g?

- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4

(e) O limite $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^4+1\right)^{\frac{1}{x^2}}$ é igual a:

- [ ] $+\infty$
- [ ] e
- [ ] 0
- [ ] 1

(f) Para $x \in [2,4]$, considere $G(x) = \int_{2x+1}^{2} \ln(t)\, dt$. Então,

- [ ] $G'(x) = -2\ln(x)$.
- [ ] $G'(x) = \ln(2) - 2\ln(2x+1)$.
- [ ] $G'(x) = -2\ln(2x+1)$.
- [ ] $G'(x) = 2\ln(2x+1)$.

2. Considere a função f real de variável real definida por $f(x) = \ln(\arccos x)$.

[20pts] (a) Caracterize a função inversa de f, f^{-1}, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Determine uma equação de reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto de abcissa $\ln \frac{\pi}{2}$.

Continua na folha suplementar Nº

N° Mec: ____________ **Nome:** ____________

3. Considere a função g dada por $g(x) = x - \cos(x)$.

[12pts] (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 da função g centrado em $c = \pi$, $T_\pi^3 g$.

Continua na folha suplementar Nº

[08pts] (b) Justifique que o erro absoluto na aproximação de $g(3)$ por $T_\pi^3 g(3)$ é inferior a $\dfrac{(3-\pi)^4}{4!}$.

Continua na folha suplementar Nº

4. Determine os seguintes integrais:

[20pts] (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-3}}\,dx$. (Sugestão: utilize a mudança de variável dada por $x=\sqrt{3}\sec t$, indicando o domínio adequado a esta substituição). Deve simplicar o mais possível o resultado.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (b) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(1+x^2)(x+3)}\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{arctg}(x)| & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(2x) & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$

[15pts] (a) Determine $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Justifique que a função f é integrável em $[-1, 1]$ e calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) \, dx$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 6. Sejam $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = e^{-x}$. Esboce a região do plano delimitada pelo gráfico das funções f e g, pelo eixo das abcissas e pelas retas verticais $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$, e determine a sua área.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u'\operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u'\operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u'\sec u$	$\ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert$
$u'\operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$
$u'\sec u \operatorname{tg} u$	$\sec u$	$u'\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$		

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$