a) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -8 & +16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$. Mostre que

6 é um valor próprio de A.

b) Considere a quádrica de equação

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz + 2x - 2y - 24 = 0.$$

Determine uma sua equação reduzida e classifique-a.

a) $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -8-\lambda & 16 & -2 \\ 16 & -8-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-\lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} -8-\lambda & 16 & -2 \\ 16 & -8-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} -8-\lambda & 16 \\ 16 & -8-\lambda \\ -2 & -2 \end{matrix}$$

$$= (-8-\lambda)(-8-\lambda)(10-\lambda) + 16\times(-2)\times(-2) + (-2)\times 16\times(-2) - (-2)^2(-8-\lambda) - (-2)^2(-8-\lambda) - 16^2(10-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 360\lambda - 1728$$

6 é valor próprio de A se e só se 6 é raiz do polinómio característico $-\lambda^3 - 6\lambda^2 + 360\lambda - 1728$

$-6^3 - 6\times 6^2 + 360\times 6 - 1728 = 0$ ∴ 6 é valor próprio de A

b) $-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz + 2x - 2y - 24 = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[x \; y \; z]}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -8 & 16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{[2 \; -2 \; 0]}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^T A X + B X - 24 = 0$$

Vamos diagonalizar a matriz A:

Pela alínea a) sabemos que 6 é valor próprio de A. Vamos fatorizar o polinómio característico de A usando a regra de Ruffini:

	-1	-6	360	-1728
6			-72	1728
	-1	-12	288	0

Portanto, $-\lambda^3 - 6\lambda^2 + 360\lambda - 1728 = (\lambda - 6)(-\lambda^2 - 12\lambda + 288)$

$-\lambda^2 - 12\lambda + 288 = 0 \iff \lambda^2 + 12\lambda - 288 = 0 \iff \lambda = \dfrac{-12 \pm \sqrt{1296}}{2}$

$\iff \lambda = -24 \vee \lambda = 12$

Temos assim que os valores próprios de A são: $-24, 6, 12$.

Determinação de U_{-24}:

Resolução do sistema $(A - (-24)I)X = 0$

$$A - (-24)I = \begin{bmatrix} -8-(-24) & +16 & -2 \\ 16 & -8-(-24) & -2 \\ -2 & -2 & 10-(-24) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 16 & -2 \\ 16 & 16 & -2 \\ -2 & -2 & 34 \end{bmatrix}$$

$$(A - (-24)I)X = 0 \iff \begin{cases} 16x + 16y - 2z = 0 \\ 16x + 16y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 34z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \\ \text{—} \end{cases}$$

Logo, $U_{-24} = \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$

Determinação de U_6:

resolução do sistema $(A-6I)X=0$

$$A-6I=\begin{bmatrix}-14 & 16 & -2\\ 16 & -14 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$(A-6I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-14x+16y-2z=0\\ 16x-14y-2z=0\\ -2x-2y+4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ y=z\\ \text{—}\end{cases}$$

Logo, $U_6=\{(z,z,z): z\in\mathbb{R}\}$

Determinação de U_{12}:

resolução do sistema $(A-12I)X=0$

$$A-12I=\begin{bmatrix}-20 & 16 & -2\\ 16 & -20 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

$$(A-12I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases}-20x+16y-2z=0\\ 16x-20y-2z=0\\ -2x-2y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\ z=-2y\\ \text{—}\end{cases}$$

Logo, $U_{12}=\{(y,y,-2y): y\in\mathbb{R}\}$

Vamos considerar os vetores próprios de A:

$$\frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|}=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},0\right)\in U_{-24}$$

$$\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\left(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)\in U_6$$

$$\frac{(1,1,-2)}{\|(1,1,-2)\|}=\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\left(\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{3}\right)\in U_{12}$$

estes vetores próprios são ortogonais entre si e com norma 1

Logo, $P=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal e

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = D$$

efetuando a mudança de variável $X = PY$, onde $Y=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$,

obtemos

$$X^T A X + BX - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (PY)^T A PY + BPY - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y^T P^T A P Y + BPY - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y^T D Y + BPY - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x' \; y' \; z'] \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [0 \;\; 0 \;\; -2\sqrt{2}] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - 24 = 0$$

cálculo auxiliar:

$$BP = [2 \; -2 \; 0] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; -2\sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow 6x'^2 + 12y'^2 - 24z'^2 - 2\sqrt{2}z' - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x'^2 + 12y'^2 + (-24z'^2 - 2\sqrt{2}z') - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x'^2 + 12y'^2 - 24\left(z'^2 + \frac{2\sqrt{2}}{24}z'\right) - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x'^2 + 12y'^2 - 24\left(z'^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{24}z' + \left(\frac{\sqrt{2}}{24}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{24}\right)^2\right) - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x'^2 + 12y'^2 - 24\left(z'^2 + \frac{2\sqrt{2}z'}{24} + \left(\frac{\sqrt{2}}{24}\right)^2\right) - \frac{287}{288} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x'^2 + 12y'^2 - 24\left(z' + \frac{\sqrt{2}}{24}\right)^2 = \frac{287}{288}$$

Efetuando a mudança de variável

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z + \frac{\sqrt{2}}{24} \end{cases}$$

obtemos

$$6x''^2 + 12y''^2 - 24z''^2 = \frac{287}{288}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''^2}{\frac{287}{6\times 288}} + \frac{y''^2}{\frac{287}{12\times 288}} - \frac{z''^2}{\frac{287}{24\times 288}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x''^2}{\frac{287}{1728}} + \frac{y''^2}{\frac{287}{3456}} - \frac{z''^2}{\frac{287}{6912}} = 1$$

, que é um hiperboloide de uma folha