# Álgebra Linear e Geometria Analítica

# O Determinante

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

# Determinante de uma matriz quadrada

Existe uma única função que a cada matriz quadrada $A$ de colunas $C_1, \ldots, C_n$ faz corresponder um escalar real $\det(A)$, satisfazendo:

1. $\det(I_n) = 1$,
2. $det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$,
3. $det(C_1, \ldots, \alpha C_i, \ldots, C_n) = \alpha\ det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$,
4. $det(C_1, \ldots, \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i, \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, \widehat{C}_i, \ldots, C_n) + det(C_1, \ldots, \widetilde{C}_i, \ldots, C_n)$,

   para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ e $C_i = \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i$.

À função $\det(A)$ chama-se determinante de $A$, também denotada por $|A|$.

# Determinante das matrizes $2 \times 2$ e $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

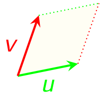
$$A = \begin{bmatrix} C_1 \; C_2 \; C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = &+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Exercício: Verifique as propriedades 1-4 da definição.

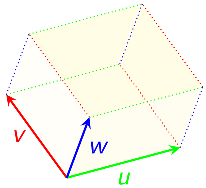
# Significado geométrico do determinante

Área de um paralelogramo




$$\text{Área}(u, v) = |\det(A)| \quad \text{para} \quad A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 2 \times 2$$

Volume de um paralelepípedo




$$\text{Volume}(u, v, w) = |\det(A)| \quad \text{para} \quad A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 3 \times 3$$

# Menor, cofator e adjunta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ $n \times n$, seja $M_{ij}$ a matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtém de $A$ por eliminação da sua linha $i$ e coluna $j$.

O menor de $a_{ij}$ é $\det(M_{ij})$.

O cofator (ou complemento algébrico) de $a_{ij}$ é $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

# Teorema de Laplace

Teorema:

Seja $A = [a_{ij}]$ $n \times n$. Então

$$\det(A) \;=\; a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$

(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da linha $i$)

e

$$\det(A) \;=\; a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

para cada $j = 1, \ldots, n$

(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da coluna $j$)

Corolário: O determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal.

# Teorema de Laplace – exemplo de cálculo

Cálculo do determinante de uma matriz $3 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

pelo Teorema de Laplace por expansão a partir da primeira linha:

$$\det(A) \;=\; a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \;=$$

$$a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

# Regra de Sarrus (só para matrizes $3 \times 3$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = &+a_{11}a_{22}a_{33} \\ &+a_{21}a_{32}a_{13} \\ &+a_{31}a_{12}a_{23} \\ &-a_{31}a_{22}a_{13} \\ &-a_{11}a_{32}a_{23} \\ &-a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

# Propriedades do determinante

1. $\det(A) = \det(A^T)$.

2. Se $A$ tem uma linha (coluna) nula, ou duas linhas (colunas) iguais, então $\det(A) = 0$.

3. Se $B$ resulta de $A$ por uma troca de duas linhas (colunas), $L_i \leftrightarrow L_j$, então $\det(B) = -\det(A)$.

4. Se $B$ resulta de $A$ por multiplicação de uma linha (coluna) de $A$ por um escalar $\alpha$, $L_i := \alpha L_i$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

5. Se $B$ resulta de $A$ substituindo a linha $i$ pela sua soma com um múltiplo da linha $j$, $L_i := L_i + \alpha L_j$, então $\det(B) = \det(A)$.

6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Nota: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

# Determinante, adjunta e inversa de uma matriz

A adjunta de $A$ é a matriz $n \times n$ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$.

**Teorema**

$A$ é invertível $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

**Corolário**

Seja $A$ $n \times n$. O sistema homógeneo $AX = 0$ tem uma solução não trivial se e só se $\det(A) = 0$.

**Teorema**

Seja $A$ invertível. Então

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$.

# Regra de Cramer

Seja $A$ $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

Então o sistema $AX = B$ é possível e determinado e a sua única solução é

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é dada por

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

onde $A_j$ se obtém de $A$ por substituição da sua coluna $j$ pela coluna $B$.

# Regra de Cramer – exemplo de cálculo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Quando $\det(A) \neq 0$, pode usar-se a Regra de Cramer e, nesse caso, a solução do sistema obtém-se da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$