

# Determinantes

## Álgebra Linear e Geometria Analítica A

## Folha Prática 3

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7,$$

determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Determine todos os valores de  $\lambda$  para os quais

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Mostre que se  $c$  é um número real e  $A$  é uma matriz do tipo  $n \times n$ , então  $\det(cA) = c^n \det(A)$ .
5. Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $5 \times 5$  tais que  $|A| = 3$  e  $|B| = -5$ , determine, justificando, os seguintes determinantes:  
 (a)  $|A^T|$ ; (b)  $|AB|$ ; (c)  $|A^4|$ ; (d)  $|B^{-1}|$ ; (e)  $|2A|$ ; (f)  $|2A^{-1}|$ ; (g)  $|(2A)^{-1}|$ ; (h)  $|AB^{-1}A^T|$ .
6. Seja  $A$  uma matriz  $4 \times 4$  tal que  $\det(A) = 3$ . Diga, justificando, qual é o valor de  $\det(2(A^{-1})^T)$ .
7. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $5 \times 5$ , com  $B$  invertível. Sabendo que  $\det(AB) = 24$  e  $\det(B^{-1}) = 4$ , calcule  $\det(A)$ .
8. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

$$(a) \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0;$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & a_3 + 2b_3 \\ 3c_1 + b_1 & 3c_2 + b_2 & 3c_3 + b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 + a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 + b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$(c) \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$(d) \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_1 & 2a_3 + 5a_1 \\ b_1 + b_2 & b_1 & 2b_3 + 5b_1 \\ c_1 + c_2 & c_1 & 2c_3 + 5c_1 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$$

10. Calcule os determinantes seguintes, usando o Teorema de Laplace:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine a matriz adjunta de  $A$ ,  $\text{adj } A$ .
- (b) Calcule o determinante de  $A$ .
- (c) Mostre que  $A(\text{adj } A) = \det(A)I_3$ .
- (d) Calcule a matriz inversa de  $A$ .

12. Calcule a adjunta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e efetue o produto  $A(\text{adj } A)$ . Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de  $A$ .

13. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

14. Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e calcule o elemento (1,2) da inversa de  $A$ .

15. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o determinante de  $A$ .
- (b) Calcule o elemento (2,3) da adjunta de  $A$  e o elemento (2,3) da inversa de  $A$ .

16. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule o elemento (4,1) da inversa de  $A$ ,  $A^{-1}$ , sem determinar a matriz  $A^{-1}$ .

17. Determine todos os valores de  $\alpha$  para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha - 4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha + 5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha - 3 \end{bmatrix}$$

é singular.

18. Se

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix}$$

determine todos os valores de  $\beta$  para os quais o sistema homogêneo  $AX = 0$  apenas admite a solução trivial.

19. Diga em que condições se pode usar a Regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares.

20. Se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares, usando a Regra de Cramer:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} 4x - 3z = -2 \\ 2x - y = -2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases} \\ \text{(c)} \quad \begin{cases} -2x - y + z = -3 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} & \text{(d)} \quad \begin{cases} x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ 3x - z + 3w = 9 \end{cases} \end{array}$$

21. Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes tais que  $AB = AC$ . Mostre que se  $\det(A) \neq 0$ , então  $B = C$ . Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se  $\det(A) = 0$ .

22. Mostre que :

- (a) Se  $A$  é uma matriz do tipo  $n \times n$ , então  $\det(AA^T) \geq 0$ ;
- (b) Se  $AB = I_n$ , então  $\det(A) \neq 0$  e  $\det(B) \neq 0$ ;
- (c) Sendo  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ , se  $A$  é singular, então  $AB$  também é uma matriz singular;
- (d) Se  $A$  é uma matriz não singular tal que  $A^2 = A$ , então  $\det(A) = 1$ ;
- (e) Se  $A = A^{-1}$ , então  $\det(A) = \pm 1$ ;
- (f) Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem 3 invertível, então  $\det(\text{adj } A) = \det(A^2)$ .

23. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

- (a)  $\det(AA^T) = \det(A^2)$ ;
- (b)  $\det(-A) = -\det(A)$ ;
- (c) Se  $A^T = A^{-1}$ , então  $\det(A) = 1$ ;
- (d) Se  $\det(A) = 0$ , então  $A = O$ ;
- (e) Se  $\det(A) = 7$ , então o sistema  $AX = 0$  tem apenas a solução trivial;
- (f) Se  $A^4 = I_n$ , então  $\det(A) = 1$ ;
- (g) Se  $A^2 = A$  e  $A \neq I_n$ , então  $\det(A) = 0$ ;
- (h) Se  $\det(AB) = 0$ , então  $\det(A) = 0$  ou  $\det(B) = 0$ ;
- (i) Se  $AB \neq BA$  então  $\det(AB) \neq \det(BA)$ ;
- (j) Se  $A, B$  e  $C$  são matrizes  $n \times n$  tais que  $AC = BC$  então  $A = B$ .

24. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com determinante não nulo. Mostre que  $\det(\text{adj } A) = [\det(A)]^{n-1}$ .

## Modelo Leontief

25. Considere uma economia dividida em 3 setores: manufaturação, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufaturação requer 0.1 unidades de outras companhias do mesmo setor, 0.3 unidades da agricultura e 0.3 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.2 do seu próprio output, 0.6 unidades da manufaturação e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.1 unidades dos serviços, 0.6 unidades da manufaturação e nada da agricultura.
- (a) Construa a matriz de consumo para esta economia e determine que consumo intermédio (necessidades intermédias) é necessária se a agricultura planejar produzir 100 unidades de output.
  - (b) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de 18 unidades para a agricultura (sem nenhum consumo final para os outros setores) (não calcule uma inversa).
  - (c) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de 18 unidades para a manufaturação sem qualquer consumo final para os outros setores (não calcule uma inversa).
  - (d) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de 18 unidades para a manufaturação, 18 unidades para a agricultura e 0 unidades para os serviços.
26. Considere o modelo de produção  $x = Cx + d$  para uma economia com dois setores, onde

$$C = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Use uma matriz invertível para determinar os níveis de produção para satisfazer o consumo final.

27. Repita o exercício anterior com

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix}$$

28. Seja  $C$  e  $d$  como em (1).

- (a) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de uma unidade de output do setor 1.
  - (b) Use uma matriz invertível para determinar os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de  $\begin{bmatrix} 51 \\ 30 \end{bmatrix}$ .
29. Um indivíduo que se dedicava à caça como atividade secundária terá redigido um contrato com um talho no qual este comprava os produtos do caçador e garantia todas as suas despesas com o material de caça em troca de uma pequena percentagem do que este produzisse. Assim, de cada euro produzido pelo caçador, 0,2 euros são para consumo próprio, 0,1 são para o talho, pela garantia das suas despesas. Por sua vez, de cada euro produzido pelo talho, 0,4 euros são para o caçador. Numa determinada semana, tanto o caçador com o talho recebem um pedido na quantia de 76 euros de entidades exteriores ao sistema. Quanto é que cada um deles terá de produzir nessa semana a fim de garantir as procuras interior e exterior do sistema?