Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I-C — Exame Final (V1)

16 de janeiro de 2025

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ______________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ____) N. folhas suplementares: _____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3 [10pts]	4a [13pts]	4b [17pts]	5a [10pts]	5b [10pts]	6 [15pts]	7a [10pts]	7b [12pts]	7c [03pts]	8a [12pts]	8b [13pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 8 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^{1-x})$ e f^{-1} a sua inversa. Sendo $D_{f^{-1}}$ o domínio de f^{-1} e $CD_{f^{-1}}$ o contradomínio de f^{-1}, podemos afirmar que:

- ☐ $D_{f^{-1}} = [0, \frac{\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} =]0, \frac{\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} = [1, +\infty[$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [0, \frac{\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} =]1, +\infty[$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}^2(x))}{\ln x}$ é igual a:

- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ $+\infty$
- ☐ 1

(c) Usando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de $f(x) = \operatorname{arctg}(1+x)$, $T_0^2(f(x))$, podemos concluir que um valor aproximado de $\operatorname{arctg}(2)$ é igual a:

- ☐ $\frac{\pi+1}{4}$
- ☐ $\frac{\pi-1}{4}$
- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $\frac{\pi}{4}$

(d) Sendo $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{t^2}\, dt$, podemos afirmar que:

- ☐ F é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.
- ☐ F tem mínimo global atingido em $x = 0$.
- ☐ F é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.
- ☐ F tem máximo global atingido em $x = 0$.

(e) A área da região limitada pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = |x|$, e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = 1$, é dada por:

- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - 2 + x)\, dx + \int_0^1 (x^2 - 2 - x)\, dx.$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^2 - 2 + x)\, dx + \int_0^1 (x - x^2 + 2)\, dx.$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x - x^2 + 2)\, dx.$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x - 2x^2 + 4)\, dx.$

(f) O integral geral da equação diferencial $\frac{1}{x}y' + \frac{1}{y} = 0$, com $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é dado por:

- [ ] $y^4 + x^4 = C,\ C \in \mathbb{R}^+$.
- [ ] $y^2 + x^2 = 3$.
- [ ] $y^2 + 2x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}^+$.
- [ ] $y^2 + x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}^+$.

[15pts] 2. Seja f a função definida por $f(x) = x - \arccos(x-2)$. Mostre que f tem exatamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] 3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Aplicando o Teorema de Lagrange, mostre que

$$|\cos(b) - \cos(a)| \leq b - a.$$

Continua na folha suplementar Nº

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

4. Calcule:

[13pts] (a) $\int_0^1 x \operatorname{arctg}(x^2)\, dx$.

Continua na folha suplementar Nº

[17pts] (b) $\int \frac{2x-9}{x(9+x^2)}\, dx$

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] 5. (a) Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, dx$ é convergente e indique o seu valor.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Sem usar a definição, estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos x}{x^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, dx.$

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 6. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli: $y' - y = \mathrm{e}^{-x}y^2$.

Continua na folha suplementar Nº

7. Considere a equação diferencial: $y'' + 4y = \operatorname{sen}(x)$.

[10pts] (a) Resolva a equação diferencial homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, determine uma solução particular da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

[03pts] (c) Indique a solução geral da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

8. Considere o seguinte problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 6. \end{cases}$

[12pts] (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{3s}{(s+2)(s-4)}, \ \ s > 4.$

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

Continua na folha suplementar Nº

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\frac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$
$u' \sec u \operatorname{tg} u$	$\sec u$	$u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$		

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Função	**Transformada**	**Função**	**Transformada**	**Função**	**Transformada**
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$

Propriedades da Transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = \mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$