Aplicações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica -A **Folha Prática 7**

Aplicações lineares

1. Averigue se são aplicações lineares as funções definidas por

   (a) $L(x,y)=(x+1,y,x+y)$; (b) $L(x,y,z)=(x+y,y,x-z)$;
   (c) $L(x,y,z)=(x-y,x^2,2z)$; (d) $L(x,y,z)=(x+y,0,2x-z)$;
   (e) $L(at^2+bt+c)=at+b+1$.

2. Seja $L: M_{n\times n}\to M_{n\times n}$ definida por

$$L(A)=\begin{cases} A^{-1} & \text{se } A \text{ é não-singular}\\ 0 & \text{se } A \text{ é singular}\end{cases}$$

   para $A\in M_{n\times n}$. Averigue se L é uma aplicação linear.

3. Dada A uma matriz $n\times n$, defina-se $L: M_{n\times n}\to M_{n\times n}$ por $L(B)=AB-BA$ para $B\in M_{n\times n}$. Averigue se L é uma aplicação linear.

4. Seja $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma aplicação linear, satisfazendo $L(1,1)=(2,-3)$ e $L(0,1)=(1,2)$. Determine

   (a) $L(3,-2)$; (b) $L(a,b)$.

5. Seja $L: P_2\to P_3$ uma aplicação linear tal que $L(1)=1$, $L(t)=t^2$ e $L(t^2)=t^3+t$. Determine

   (a) $L(2t^2-5t+3)$; (b) $L(at^2+bt+c)$.

Matriz de uma aplicação linear

6. Seja $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$L(x,y,z)=(x+2y+z,2x-y,2y+z).$$

   Seja $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T}=((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz representativa de L relativamente

   i. à base $\mathcal{B}_c$; ii. às bases $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{T}$; iii. às bases $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B}_c$; iv. à base $\mathcal{T}$;

   e determine $L(1,1,-2)$ usando cada uma das matrizes obtidas em i.-iv.

7. Seja $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$L\left(\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}.$$

   Sejam $\mathcal{S}=\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{T}=\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente.

   (a) Determine a matriz representativa de L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine a matriz representativa de L relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.
   (c) Determine $L\left(\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right)$, usando cada uma das matrizes obtidas anteriormente.

8. Seja $L:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por

$$L(at^2+bt+c)=(a+2c)t^2+(b-c)t+(a-c).$$

   Sejam $\mathcal{S}=(t^2,t,1)$ e $\mathcal{T}=(t^2-1,t,t-1)$ bases de $\mathcal{P}_2$.

(a) Encontre a matriz representativa de L relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.

(b) Determine $L(2t^2 - 3t + 1)$, usando a alínea anterior.

9. Dada C uma matriz $n \times n$, considere-se $L : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ definida por $L(A) = CA$ para $A \in M_{n\times n}$.

   (a) Mostre que L é uma aplicação linear.

   (b) Considerando $n = 2$, $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $M_{2\times 2}$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

   uma base de $M_{2\times 2}$, determine a matriz representativa de L relativamente

   i. à base $\mathcal{B}_c$; ii. às bases $\mathcal{B}_c$ e $\mathcal{S}$; iii. às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}_c$; iv. à base $\mathcal{S}$.

10. Sejam $X_1 = t + 1$, $X_2 = t - 1$, $Y_1 = t^2 + 1$, $Y_2 = t$, $Y_3 = t - 1$ e $L : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação linear tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

   é a matriz que representa L relativamente às bases $\mathcal{S} = (X_1, X_2)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Determine

   (a) os vetores das coordenadas de $L(X_1)$ e $L(X_2)$ na base $\mathcal{T}$;

   (b) $L(X_1)$ e $L(X_2)$; (c) $L(2t + 1)$; (d) $L(at + b)$.

11. Determine a matriz representativa da aplicação linear $L : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $L\big(p(t)\big) = p''(t) + p(0)$ relativamente à

   (a) base canónica de $\mathcal{P}_3$;

   (b) base $\mathcal{T} = (t^3, t^2 - 1, t, 1)$ de $\mathcal{P}_3$, diretamente.

12. Se $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é a aplicação identidade definida por $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$ para qualquer $X \in \mathcal{V}$, mostre que a matriz de $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ relativamente a qualquer base de $\mathcal{V}$ é a matriz identidade I_n com $n = \dim \mathcal{V}$.

13. Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(X) = AX$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que a matriz de L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$ é a matriz A.

   (b) Sejam $S = ((1,1,1,0), (1,1,1,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1))$ e $T = ((1,1), (1,-1))$ bases de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente. Determine a matriz de L relativamente

   i. à base S e à base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$, $[L]_{S,B_c}$; ii. às bases S e T, $[L]_{S,T}$.

14. Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear representada relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $L(1,2,3)$ e $L(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Determine a matriz de L relativamente à base $\mathcal{S} = ((1,1,0), (1,1,1), (1,0,0))$:

15. Seja $S = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ e considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$L(1,1,1) = (-1,1), \qquad L(1,1,0) = (1,1), \qquad L(1,0,0) = (0,2).$$

   (a) Determine a matriz de L relativamente à base S de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica B_c de $\mathbb{R}^2$, $[L]_{S,B_c}$.

   (b) Calcule $[L(X)]_{B_c}$ e $L(X)$, sabendo que

$$[X]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (c) Determine a matriz de L relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$, respetivamente.

(d) Determine $L(x, y, z)$ para um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

16. Considere a aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(1, 1) = (3, 0, 2)$ e $L(1, -1) = (1, 0, 2)$.

    (a) Determine $L(x, y)$ para um elemento genérico (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Determine a matriz que representa L relativamente às bases

    $$\mathcal{S} = ((1, 1), (1, -1)) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T} = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1))\,.$$

    (c) Calcule $[X]_{\mathcal{S}}$, sabendo que

    $$[L(X)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

17. Considere a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

    $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

    relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    (a) Indique qual é o transformado $L(x, y, z)$ de um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Calcule a matriz de L relativamente à base $S = ((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.