Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I-C — 2º Teste (V1)

16 de janeiro de 2025

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ______

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2a [15pts]	2b [15pts]	3 [17pts]	4 [18pts]	5 [15pts]	6a [15pts]	6b [16pts]	6c [04pts]	7a [12pts]	7b [13pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 7 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Sendo $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ e $g(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$, escolha a afirmação verdadeira:

- ☐ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente.
- ☐ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes.
- ☐ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente e $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente.
- ☐ $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ são divergentes.

(b) A transformada de Laplace $\mathcal{L}\left\{e^{5t}(t^3+\cosh(2t))\right\}$ é igual a:

- ☐ $\dfrac{3}{(s-5)^4} + \dfrac{s-5}{(s-5)^2-4},\ s>7.$
- ☐ $\dfrac{6}{(s-5)^4} + \dfrac{s-5}{(s-5)^2-4},\ s>7.$
- ☐ $\dfrac{6}{(s+5)^4} + \dfrac{s+5}{(s+5)^2-4},\ s>5.$
- ☐ $\dfrac{3}{(s+5)^4} + \dfrac{s+5}{(s+5)^2-4},\ s>5.$

(c) Usando a Transformada de Laplace, podemos concluir que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t)\,dt$

- ☐ tem valor $\frac{1}{4}$.
- ☐ tem valor $\frac{1}{2}$.
- ☐ tem valor $\frac{1}{8}$.
- ☐ diverge.

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s+3)^2+1}\right\}(t)$ é igual a:

- ☐ $2\mathrm{e}^{-3t}\cos t + 6\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{sen}\,t,\ t\geq 0.$
- ☐ $2\mathrm{e}^{-3t}\cos t - 6\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{sen}\,t,\ t\geq 0.$
- ☐ $\mathrm{e}^{-3t}\cos t + 6\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{sen}\,t,\ t\geq 0.$
- ☐ $\mathrm{e}^{3t}\cos t - 6\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{sen}\,t,\ t\geq 0.$

(e) Qual das seguintes funções é um fator integrante da EDO linear $y' + \dfrac{3}{x}y = \mathrm{sen}\,x$, com $x>0$?

- ☐ $\mu(x) = 3\ln x$
- ☐ $\mu(x) = x^3$
- ☐ $\mu(x) = \frac{x}{3}$
- ☐ $\mu(x) = x^2$

(f) O integral geral da equação diferencial $\frac{1}{x}y' + \frac{1}{y} = 0$, com $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é dado por:

- ☐ $y^4 + x^4 = C,\ C \in \mathbb{R}^+$.
- ☐ $y^2 + x^2 = 5$.
- ☐ $y^2 + 2x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}^+$.
- ☐ $y^2 + x^2 = C,\ C \in \mathbb{R}^+$.

[15pts] 2. (a) Mostre que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, dx$ é convergente e indique o seu valor.

Continua na folha suplementar Nº ☐

[15pts] (b) Sem usar a definição, estude a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos x}{x^2}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, dx$.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

[17pts] 3. Resolva a seguinte equação diferencial homogénea: $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

Continua na folha suplementar Nº

[18pts] 4. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli: $y' - y = \mathrm{e}^{-x} y^2$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 5. Considere a EDO $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=b(x)$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_n$ são funções contínuas num dado intervalo I e a_0 não é a função nula. Mostre que se y_h é a solução geral da equação homogéna associada e y_p uma solução da equação completa, então $y = y_h + y_p$ é solução da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

6. Considere a equação diferencial: $y'' + 4y = \mathrm{sen}(x)$.

[15pts] (a) Resolva a equação diferencial homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[16pts] (b) Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, determine uma solução particular da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

[04pts] (c) Indique a solução geral da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

7. Considere o seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 6. \end{cases}$$

[12pts] (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{3s}{(s+2)(s-4)}, \quad s > 4.$

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

Continua na folha suplementar Nº

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$
$u' \sec u \operatorname{tg} u$	$\sec u$	$u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$		

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Função	**Transformada**	**Função**	**Transformada**	**Função**	**Transformada**
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$

Propriedades da Transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\}(s) = F(s) + G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$