



Ficha de Exercícios 2 - Parte II

Integral de Riemann. Teorema Fundamental do Cálculo integral. Cálculo de áreas.

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis.

(a) $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

(b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

(c) $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [-2, 0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0, 1]. \end{cases}$

(d) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \ln |x| & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

(e) $f : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \ln x + e^x & \text{se } x \in [1, 6] \setminus \mathbb{N} \\ x^3 + \sqrt{x} & \text{se } x \in [1, 6] \cap \mathbb{N}. \end{cases}$

2. Determine $F'(x)$ sendo F a função real de variável real dada por

(a) $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$

Resolução: A função f definida por $f(t) = e^{t^2}$ é contínua em \mathbb{R} e as funções g_1 e g_2 dadas por $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = 0$ são diferenciáveis em \mathbb{R} . Então, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, tem-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x - e^{0^2} \cdot 0 = 2xe^{x^4}.$$

(b) $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + 1} dt$ (c) $F(x) = \int_x^0 e^{-s^2} ds$ (d) $F(x) = \int_1^x (\operatorname{sen} t^2 + e^{-t^2}) dt$

(e) $F(x) = x^3 \int_1^x e^{-s^2} ds$ (f) $F(x) = \int_{x^2}^{1+e^{3x}} \operatorname{sen} t^2 dt$

(g) $F(x) = \int_x^2 \cos t^4 dt$ (h) $F(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2 + 1) dt$ (i) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{x+t^2} dt$

3. Seja F uma função definida por $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \cdot \operatorname{arcsen} t dt$, para todo o $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Determine $F'(x)$.

4. Seja $f(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t^2 dt$. Calcule $f'\left(\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}\right)$.

5. Seja F a função definida por $F(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

6. Considere a função G definida em \mathbb{R} por $G(x) = \int_0^x e^{3t^4+4t^3} dt$.

- (a) Estude a função G quanto à monotonia.
- (b) Determine, se existirem, os pontos de inflexão ao gráfico de G .

7. Considere a função F definida em \mathbb{R} por

$$F(x) = \int_1^{x^2} (1 + e^{t^2}) dt.$$

- (a) Determine $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

8. Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{x^2} t \cos(1 - e^{1-t}) dt}{x^2 - 1}.$$

9. Considere as funções F e G definidas em \mathbb{R} , respetivamente, por

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt \quad \text{e} \quad G(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} dt$$

Usando a Regra de Cauchy calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)}.$$

10. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t+1} dt$ é estritamente crescente.

11. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{x-1}$ sendo F a função dada por $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t^2+1} dt$.

12. Calcule

(a) $\int_0^2 6x^4 dx$

Resolução:

$$\int_0^2 6x^4 dx = 6 \int_0^2 x^4 dx = 6 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 6 \left(\frac{2^5}{5} - 0 \right) = \frac{192}{5}$$

(b) $\int_3^2 \left(\frac{t^2}{3} - \sqrt{t} \right) dt$ (c) $\int_{-4}^{-3} \frac{e^x}{3} dx$ (d) $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ (f) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \operatorname{tg} x dx$ (g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

(h) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (i) $\int_{-\pi}^0 \sin(3x) dx$ (j) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

(k) $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$ (l) $\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$ (m) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1) dx$

(n) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ (o) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$ (p) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+5} dx$

13. Calcule

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 4} dx & \text{(b)} \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx & \text{(c)} \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \\ \text{(d)} \int_1^e x \ln x dx & \text{(e)} \int_1^e \ln^2 x dx & \end{array}$$

14. Calcule

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^2 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ \text{(b)} \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 7 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases} \\ \text{(c)} \int_{-1}^3 f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases} \\ \text{(d)} \int_0^{2\pi} f(x) dx \text{ onde } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \cos x & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \sin x & \text{se } x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases} \end{array}$$

15. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

(a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$.

Resolução: Uma vez que

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ tem de verificar a igualdade

$$\ln |\ln(e^2)| + C = 0.$$

Logo

$$C = -\ln 2$$

e a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ é a função F definida por $F(x) = \ln |\ln x| - \ln 2$.

(b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre as retas de equações $x = e$ e $x = e^3$, limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f .

Resolução: Uma vez que para todo o $x \geq e$,

$$\ln x \geq \ln e \Leftrightarrow \ln x \geq 1$$

podemos concluir que para todo o $x \in [e, e^3]$, $x \ln x > 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{x \ln x} > 0.$$

Como f é contínua e positiva em $[e, e^3]$, a área pedida é dada por

$$\int_e^{e^3} f(x)dx = \left[\ln |\ln x| \right]_e^{e^3} = \ln |\ln(e^3)| - \ln |\ln e| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

16. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = x \ln(x+1)$.
17. Calcule o valor da área da região (limitada) do plano situada entre $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$.
18. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Calcule a área da região limitada do plano situada entre as retas de equação $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo Ox .
19. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \frac{4 + \sin^2 x}{1 + 4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + 4x^2}$$

e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Resolução: Uma vez que as funções f e g são contínuas em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{4 + \sin^2 x}{1 + 4x^2} > \frac{\sin^2 x}{1 + 4x^2} = g(x)$$

podemos afirmar que a área pedida é dada pelo seguinte integral de Riemann:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2} dx.$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2} dx = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1 + (2x)^2} dx = 2 \left[\arctg(2x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 (\arctg(1) - \arctg(0)) = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que a área é igual a $\frac{\pi}{2}$.

20. Calcule a área da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.
21. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = xe^{2x+1}$, e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.
22. Calcule a área da região (limitada) de \mathbb{R}^2 delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respectivamente, por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.
23. Determine a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x \cos x$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.
24. Exprima, em termos de integrais definidos, o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -\pi$ e $x = \pi$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, respectivamente.

25. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - 3)^2, y \geq x - 1, y \leq 4\}$.

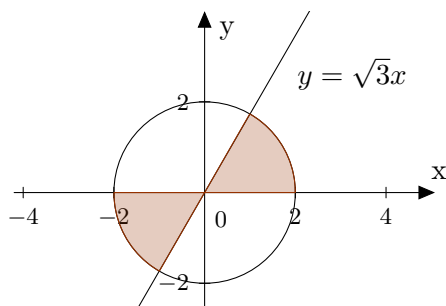
- (a) Represente geometricamente a região A .
- (b) Calcule o valor da área da região A .

26. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abscissas e pelo gráfico da função h definida por

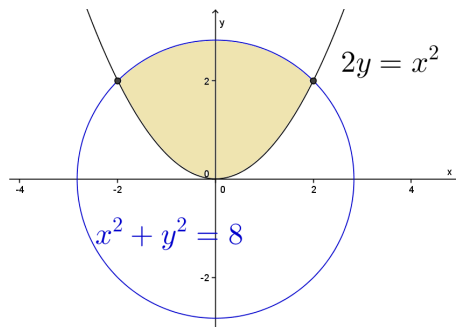
$$h(x) = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

27. Recorrendo ao cálculo integral, determine o valor da área da região sombreada representada nas figuras seguintes:

(a)



(b)



Exercícios de revisão

28. Diga, justificando, se a função h definida por

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(x^2 - 4) & \text{se } x < 2 \\ \pi & \text{se } x = 2 \\ \cos(1 - e^{x-2}) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-1, 4]$.

29. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$.

- (a) Determine $\int f(x) dx$.
- (b) Calcule o valor da área da região delimitada pelo gráfico da função f , pelo eixo das abscissas e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$.

30. Seja $F :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}} dt$.

- (a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 x}}$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

31. Considere as funções g e h definidas por $g(x) = -x$ e $h(x) = \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x$. Determine, justificando, o valor da área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções g e h e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$.
32. Calcule a área da região do plano

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \wedge x \operatorname{sen} x \leq y \leq x\}.$$

Soluções

1. (a) f é integrável em $[0, 4]$;
 (b) Como f não é limitada, não podemos aplicar a definição de integral de Riemann apresentada nas aulas, que utiliza somas de Darboux.
 (c) f é integrável em $[-2, 1]$.
 (d) Como f não é limitada, não podemos aplicar a definição de integral de Riemann apresentada nas aulas, que utiliza somas de Darboux.
 (e) f é integrável em $[1, 6]$.
2. (a) Resolvido
 (b) $F'(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
 (c) $F'(x) = -e^{-x^2}$
 (d) $F'(x) = \sin x^2 + e^{-x^2}$
 (e) $F'(x) = 3x^2 \int_1^x e^{-s^2} ds + x^3 e^{-x^2}$
 (f) $F'(x) = -2x \sin x^4 + 3e^{3x} \sin(1 + e^{3x})^2$
 (g) $F'(x) = -\cos x^4$
 (h) $F'(x) = 3x^2 \ln(x^6 + 1) + \operatorname{sen} x \ln(\cos^2 x + 1)$
 (i) $F'(x) = F(x) + xe^x(3xe^{x^6} - 2e^{x^4})$.
3. $F'(x) = 2(x+1) \int_0^{\operatorname{sen} x} \arcsen t dt + x(x+1)^2 \cos x$.
4. $\sqrt[4]{\pi}$
5. $F''(x) = e^{-x^2}$.
6. (a) G é estritamente crescente em \mathbb{R} .
 (b) $(-1, G(-1))$
7. (a) $F'(x) = (1 + e^{x^4})2x, \forall x \in \mathbb{R}$
 (b) F é estritamente decrescente em \mathbb{R}^- e F é estritamente crescente em \mathbb{R}^+ .
 $F(0) = \int_1^0 (1 + e^{t^2}) dt$ é mínimo local de F .
8. 1
9. -1
10. —
11. 1

12. (a) Resolvido
 (b) $-\frac{19}{9} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
 (c) $\frac{e-1}{3e^4}$
 (d) $\frac{2}{7}(27\sqrt{3} - 1)$
 (e) $\frac{\pi}{4}$
 (f) 1
 (g) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$
 (h) $\frac{\pi}{6}$
 (i) $-\frac{2}{3}$
 (j) $\ln 2$
 (k) $\ln 2$
 (l) 2
 (m) $-\frac{9}{28}$
 (n) $\frac{1}{2}$
 (o) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
 (p) $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$
13. (a) $\frac{\ln 3}{4}$
 (b) $\frac{\pi}{8}$
 (c) $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 (d) $\frac{e^2+1}{4}$
 (e) $e - 2$
14. (a) $2 + \ln 2$
 (b) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$
 (c) $\frac{1}{2} \ln 5$
 (d) $-\pi - 3$
15. Resolvido
16. $\frac{3\ln 3}{2}$
17. $e^2 + 1 - 2\ln \frac{1+e^2}{2}$
18. $\frac{1}{2}$
19. Resolvido
20. $\frac{1}{6}$
21. $1 - \frac{5}{4e}$
22. $\frac{1}{3} + \ln 2$
23. $\frac{-4\pi+8+\pi^2}{8}$
24. $\int_{-\pi}^{-3\pi/4}(\operatorname{sen} x - \cos x) dx + \int_{-3\pi/4}^{\pi/4}(\cos x - \operatorname{sen} x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi}(\operatorname{sen} x - \cos x) dx$
25. (a) —

(b) $\frac{37}{6}$

26. $\frac{\pi^2}{72}$

27. (a) $\frac{4\pi}{3}$

(b) $\frac{4}{3} + 2\pi$

28. h é integrável em $[-1, 4]$ porque h é limitada em $[-1, 4]$ e descontínua apenas num ponto de $[-1, 4]$ (em $x = 2$).

29. (a) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}.$

30. (a) — (Sugestão: Usar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral)

(b) $\frac{1}{2}$ (Sugestão: Usar a Regra de Cauchy e a alínea anterior)

31. $\frac{8+\pi^2}{32}.$

32. $\frac{\pi^2-8}{8}.$