Álgebra Linear e Geometria Analítica

Distância, Ortogonalidade, Projeção Ortogonal

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Produto interno em $\mathbb{R}^n$

Dados os vetores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- o produto interno (ou produto escalar) de X e Y é o escalar real

$$
\begin{aligned}
X \cdot Y &= X^T Y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n
\end{aligned}
$$

Nota: Pode também utilizar-se a notação $X|Y$ ou $\langle X, Y \rangle$.

- o comprimento ou norma de X é

$$
\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}
$$

Propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^n$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $X \cdot X \geq 0$;
2. $X \cdot X = 0 \iff X = 0$;
3. $X \cdot Y = Y \cdot X$;
4.
   i. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$,
   ii. $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;
5. $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$;
6. $\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\|$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade triangular

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$|X \cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|.$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Ângulo entre vetores

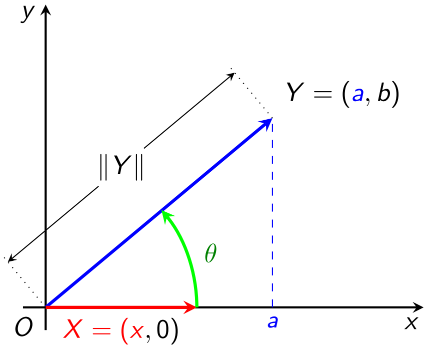
Em $\mathbb{R}^2$, sejam $X = (x, 0)$, $x > 0$

e $Y = (a, b) \neq (0, 0)$

vetores não nulos. Temos:

- $X \cdot Y = xa$ e $\|X\| = x$
- $\dfrac{X \cdot Y}{\|X\|} = a = \|Y\| \cos(\theta)$

Logo, $\cos(\theta) = \dfrac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}$, $\theta \in [0, \pi]$



Em geral, para $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$, o ângulo entre os vetores X e Y é

$$\theta = \angle(X, Y) = \arccos \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|} = \arccos\left(\frac{X}{\|X\|} \cdot \frac{Y}{\|Y\|}\right).$$

Nota: pela desigualdade de Cauchy-Schwarz $\left|\frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}\right| \leq 1$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Vetores ortogonais, colineares, com mesmo sentido e unitários

- Dados os vetores $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X, Y \neq 0$
  - X e Y são ortogonais ou perpendiculares, $X \perp Y$, se $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e. se $X \cdot Y = 0$.
  - X e Y são colineares ou paralelos ou têm a mesma direção, se $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, i.e. se $|X \cdot Y| = \|X\|\|Y\|$.
    - X e Y têm o mesmo sentido, se $\theta = 0$, i.e. se $X \cdot Y = \|X\|\|Y\|$.
    - X e Y têm sentido oposto ou contrário, se $\theta = \pi$, i.e. se $X \cdot Y = -\|X\|\|Y\|$.

Por convenção, se $X = 0$ ou $Y = 0$, então X e Y são colineares e ortogonais.

- Um vetor unitário é um vetor de norma igual a 1.

Se $X \neq 0$, o vetor

$$U = \frac{1}{\|X\|} X$$

é um vetor unitário com a mesma direção e sentido de X.

Conjunto ortogonal e ortonormado em $\mathbb{R}^n$

Um conjunto $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se ortogonal se

$$X_i \cdot X_j = 0, \qquad i \neq j, \qquad i, j = 1, \ldots, k,$$

e diz-se ortonormado (o.n.) se é ortogonal e também se verifica

$$X_i \cdot X_i = 1, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Exemplo: 1. $\{(1,1,0),(2,-2,1)\}$ é ortogonal;
2. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é o.n.

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Corolário: Todo o conjunto o.n. é l.i.

Coordenadas de um vetor de $\mathbb{R}^n$ numa base o.n.

Uma base ortogonal/o.n. é uma base que é um conjunto ortogonal/o.n.

Nota: Todo o conjunto o.n. de n vetores de $\mathbb{R}^n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$. Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é, $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, sendo $a_i = X \cdot X_i,\ i = 1, \ldots, n$.

Exemplo: Determinar as coordenadas do vetor $(1, 5)$ na base o.n. de $\mathbb{R}^2$

$$\left(\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

$Y \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ se $Y \cdot Z = 0$ para cada $Z \in \mathcal{W}$.

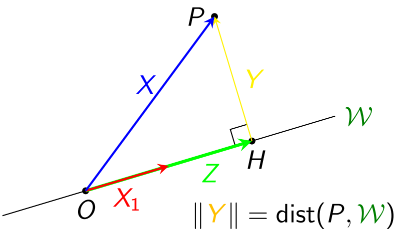
Teorema: Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ uma base de um subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$. Então,
Y é ortogonal a $\mathcal{W}$ se e só se Y é ortogonal a cada vetor de $\mathcal{B}$.

A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é o vetor $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X \in \mathcal{W}$ tal que $X = Y + Z$, sendo Y ortogonal a $\mathcal{W}$.

Exemplo: Sejam $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ uma reta, $\{X_1\}$ base o.n. de $\mathcal{W}$ e $X = \overrightarrow{OP}$. Logo, $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1$ e $Y \cdot X_1 = 0$.
Então, se $X = Y + Z = Y + \alpha X_1$,

$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha.$$

Portanto, $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1$.



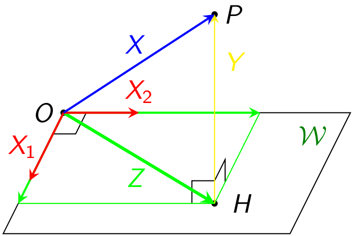
Projeção ortogonal sobre um plano em $\mathbb{R}^3$

Exemplo: Sejam $\mathcal{W}$ um plano gerado pela base o.n. $\{X_1, X_2\}$ e $X = \overrightarrow{OP} = Z + Y$, com $Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ e $Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0$.
Então, sendo

$$X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2,$$

$$X \cdot X_1 = \alpha_1 \text{ e } X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

Logo, $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2$.



$\|Y\| = \text{dist}(P, \mathcal{W})$

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ é

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + \cdots + (X \cdot X_k) X_k \in \mathcal{W},$$

em que $\{X_1, \ldots, X_k\}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Nota: $Y = X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X$ é ortogonal a todos os vetores de $\mathcal{W}$.

Método de ortonormalização de Gram-Schmidt (opcional)

Teorema: Todo o subespaço $\mathcal{W} \neq \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ possui uma base o.n.

Ideia da Demonstração:
Dada $\{X_1, \ldots, X_m\}$ uma base de $\mathcal{W}$, sejam $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$, e

$$X'_k = X_k - \sum_{i=1}^{k-1} (X_k \cdot Y_i) Y_i, \qquad Y_k = \frac{X'_k}{\|X'_k\|},$$

para $k = 2, \ldots, m$. Pode verificar-se que $\mathcal{B} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ é um conjunto o.n., logo l.i. em $\mathcal{W}$. Sendo $\dim \mathcal{W} = m$, conclui-se que $\mathcal{B}$ é uma base o.n. de $\mathcal{W}$.

Exemplo:
Determinar uma base o.n. de $\langle (1,1,1,1), (1,2,-1,3), (2,1,-2,2) \rangle$.

Produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados os vetores $X = (x_1, x_2, x_3)$ e $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

- o produto externo (ou produto vetorial) de X e Y é o vetor de $\mathbb{R}^3$

$$X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1).$$

Nota: Para determinar o produto externo pode utilizar-se COMO AUXILIAR DE CÁLCULO o seguinte "determinante simbólico"

$$X \times Y \leftrightsquigarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{aligned} i &= (1, 0, 0) \\ j &= (0, 1, 0) \\ k &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

fazendo o seu desenvolvimento pela primeira linha.

Propriedades do produto externo em $\mathbb{R}^3$

Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e O o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$

1. $X \times Y = -(Y \times X)$;
2. i. $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$,

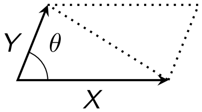
   ii. $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$;
3. $\alpha(X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$;
4. $X \times X = O$;
5. $X \times O = O \times X = O$;
6. $X \times Y$ é ortogonal a X e a Y.
7. $\|X \times Y\| = \|X\|\|Y\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre X e Y.

Uma aplicação do produto externo

Sejam $X,\ Y,\ Z \in \mathbb{R}^3$, então

- a área do paralelogramo com lados correspondentes aos vetores $X,\ Y$ é

  $A_\diamondsuit = \|X \times Y\|$



- a área do triangulo com dois dos seus lados correspondentes aos vetores $X,\ Y$ é

  $A_\triangle = \frac{\|X \times Y\|}{2}$

Aplicações do Produto Interno. Relembrar retas em $\mathbb{R}^3$

Dada uma reta $\mathcal{R}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto P e tem vetor diretor v, temos

$$X \in \mathcal{R} \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R}: \ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v.$$

Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, a partir da qual se obtêm as equações paramétricas de $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

sendo $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Eliminando o parâmetro α do anterior sistema, obtém-se um sistema de grau 1 com 3 incógnitas e 2 equações, ditas as equações cartesianas de $\mathcal{R}$.

Planos em $\mathbb{R}^3$ – Equações vetoriais e paramétricas

Dado um plano $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ que passa pelo ponto P e tem vetores diretores u e v (não colineares),

$$X \in \mathcal{P} \iff \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v.$$

Uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

a partir da qual se obtêm as equações paramétricas de $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

com $X(x, y, z)$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$.

Planos em $\mathbb{R}^3$ – Equações cartesianas

Eliminando os parâmetros α e β do anterior sistema, obtém-se uma equação

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dita equação (cartesiana) geral do plano $\mathcal{P}$.

Verifica-se que $w = (a, b, c)$ é um vetor não nulo ortogonal a $\mathcal{P}$. De facto, dois pontos arbitrários deste plano, $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 0, 1$, satisfazem

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 0, 1,$$

donde

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

ou seja, para qualquer vetor $\overrightarrow{P_0P_1}$ do plano $\mathcal{P}$, tem-se

$$w \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0.$$

Distâncias

A distância entre dois pontos P e Q de $\mathbb{R}^n$ é

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Em particular, para $Q(x_1,\ldots,x_n)$ e $P(y_1,\ldots,y_n)$, tem-se

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

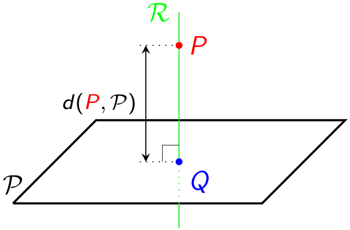
Dados um ponto, reta ou plano $\mathcal{F}$ e um ponto, reta ou plano $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^3$, a distância entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é

$$d(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \min\{\, d(P,Q) : \ P\in\mathcal{F},\ \ Q\in\mathcal{G}\}\,.$$

Nota: Se $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$, então $d(\mathcal{F},\mathcal{G})=0$. Interessa-nos o caso em que $\mathcal{F}$ é um ponto e $\mathcal{G}$ é uma reta ou um plano, respetivamente.

Distância de um ponto a um plano

Dados um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, existe uma única reta $\mathcal{R}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e contendo o ponto P.



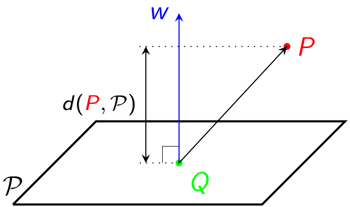
A distância do ponto P ao plano $\mathcal{P}$ é

$$d(P, \mathcal{P}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$.

Distância de um ponto a um plano (equação geral)

Dados um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$, sejam $Q \in \mathcal{P}$ e w um vetor não nulo ortogonal ao plano $\mathcal{P}$.



Então,

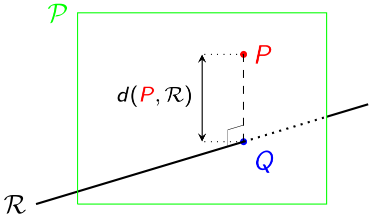
$$d(P, \mathcal{P}) = \| \operatorname{proj}_{\langle w \rangle} \overrightarrow{QP} \| = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot w|}{\|w\|}.$$

Sendo $P(x_0, y_0, z_0)$ e $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral do plano $\mathcal{P}$, tem-se

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distância de um ponto a uma reta

Dada uma reta $\mathcal{R}$ e um ponto $P \notin \mathcal{R}$, existe um único plano $\mathcal{P}$ perpendicular a $\mathcal{R}$ e que contém P.



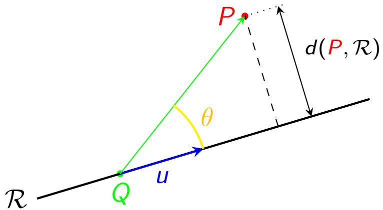
A distância do ponto P à reta $\mathcal{R}$ é

$$d(P, \mathcal{R}) = d(P, Q),$$

em que Q é o ponto de interseção da reta $\mathcal{R}$ com o plano $\mathcal{P}$.

Distância de um ponto a uma reta (equação vetorial)

Dada uma reta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto Q e que tem vetor diretor u,



e um ponto $P \notin \mathcal{R}$, tem-se que

$$d(P, \mathcal{R}) = \|\overrightarrow{QP}\| \, |\sin(\theta)| = \frac{\|u \times \overrightarrow{QP}\|}{\|u\|},$$

sendo θ o ângulo entre os vetores u e $\overrightarrow{QP}$.

Problema dos mínimos quadrados

- Em muitas aplicações encontramos sistemas sem solução (impossíveis ou inconsistentes). Ao mesmo tempo gostaríamos de encontrar uma solução. Como fazer?
- Uma situação típica é a chamada regressão linear:
  dada um conjunto de pontos do plano (que muitas vezes é o resultado de uma série de medidas com alguma incerteza), encontre a reta que "melhor se aproxima" desses pontos.
- Este é um caso especial de uma classe maior de problemas de modelos lineares, onde pretendemos encontrar a "melhor aproximação possível".
- Sistemas inconsistentes de equações lineares podem ser pensados como como problemas de mínimos quadrados, onde a (s) solução (ões) é (são) a (as) "melhor (es) possível (eis)" em certo sentido.

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$, onde A é $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Sabemos que o sistema é possível

$$\Leftrightarrow \quad b \in \mathcal{C}(A).$$

Se b *não está* em $\mathcal{C}(A)$, o que podemos fazer?

Em vez de tentar resolver o problema $Ax = b$, podemos tentar fazer com que o erro $\|b - Ax\|$ seja o menor possível, ou seja, quanto menor for a distância entre b e Ax, dada por $\|b - Ax\|$, melhor é a aproximação.
Isto é chamado problema de mínimos quadrados (porque a expressão $\|b - Ax\|^2$ é uma soma de quadrados).

Definição

Seja $A \in m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Dizemos que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução dos mínimos quadrados do sistema $A\,x = b$ se

$$\|b - A\,\hat{x}\| \leq \|b - A\,x\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Nota: Uma vez que $\mathcal{C}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$, $\hat{x}$ é tal que $A\,\hat{x}$ dá a melhor aproximação de b entre todos os vetores em $\mathcal{C}(A)$.

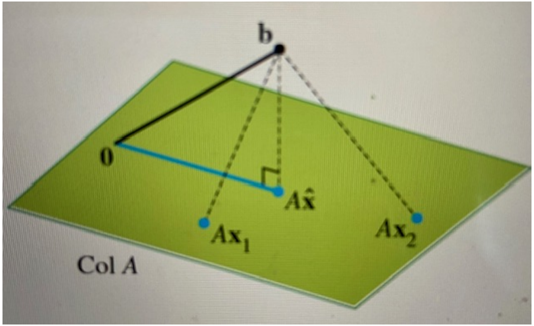


Figure: O vetor b é o mais próximo a $A\hat{x}$ do que a qualquer vetor Ax para qualquer x.

Teorema da melhor aproximação

Seja W um subspaço de $\mathbb{R}^n$ e y qualquer vetor em $\mathbb{R}^n$. Seja $\hat{y}$ a projeção ortogonal de y em W. Então $\hat{y}$ é o vetor em W mais próximo de y, no sentido que

$$\|y - \hat{y}\| < \|y - v\|,$$

para qualquer v em W distinto de $\hat{y}$.

- O vetor $\hat{y}$ é chamado a melhor aproximação para y por elementos de W.
- A distância de y a v, dada por $\|y - v\|$, é encarada como o erro ao usar v em vez de y.
- O teorema anterior diz que esse erro é minimizado quando $v = \hat{y}$.

Do Teorema da melhor aproximação, obtemos que a melhor solução dos mínimos quadrados $\hat{x}$ é determinada usando

$$A\,\hat{x} = \hat{b}$$

onde $\hat{b}$:=$\text{Proj}_W(b)$ com $W := \mathcal{C}(A)$.

Se $\hat{b} \in W = \mathcal{C}(A)$, assim o sistema $A\,\hat{x} = \hat{b}$ é sempre consistente. Logo, existem sempre soluções dos mínimos quadrados e estas são encontradas ao resolvermos os sistema $A\hat{x} = \hat{b}$.

Assim, podemos escrever a seguinte observação básica:

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução dos mínimos quadrados do sistema $A\,x = b$

$$\Updownarrow$$

$\hat{x}$ é uma solução do sistema (possível) $A\,\hat{x} = \hat{b}$
onde $\hat{b} = \text{Proj}_W(b)$ e $W = \mathcal{C}(A)$.

Nota:

- Assuma-se que o sistema $Ax = b$ é consistente, ou seja, $b \in W = \mathcal{C}(A)$. Então $\hat{b} = \text{Proj}_W(b) = b$. Assim, soluções dos mínimos quadrados são as mesmas soluções usuais do sistema.
- Suponhamos que as colunas de A são linearmente independentes (por outras palavras, a forma escalonada de A tem pivots em todas as colunas).
  Então o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$ tem uma solução única. Isto significa que $Ax = b$ tem uma única solução dos mínimos quadrados.
- Se A tem colunas linearmente dependentes, segue de um modo semelhante que $Ax = b$ tem um número infinito de soluções dos mínimos quadrados.
- $\|b - A\hat{x}\| = \|b - \hat{b}\|$ é chamado o erro dos mínimos quadrados: dá a mínima distância entre b e vetores da forma Ax.

O método que apresentámos para calcular a solução dos mínimos quadrados é eficiente mas é necessário usar muitos cálculos.

Para calcular $\hat{b} = \mathrm{Proj}_W(b)$ precisamos primeiro de uma base ortogonal para $W = \mathcal{C}(A)$ (ver método Gram-Schmidt).
Depois precisamos de calcular $\hat{b}$. E finalmente resolver o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$.

Existe um método mais simples!

Teorema

Considere o sistema $Ax = b$ onde A é $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ and $b \in \mathbb{R}^m$. Então

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$

$$\Updownarrow$$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é a solução (do sistema possível)

$$A^T Ax = A^T b.$$

Nota:
$A^T Ax = A^T b$ são muitas vezes chamadas equações normais para $Ax = b$.

Exemplo 1 Encontre uma solução dos mínimos quadrados do sistema inconsistente $Ax = b$ para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Solução Para usar as equações normais calculemos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Então a equação $A^T Ax = A^T b$ fica:

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Operações nas linhas podem ser usadas para resolver este sistema mas como $A^T A$ é invertível e 2×2, é fácil calcular:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$$

e, portanto, para resolver $A^T Ax = A^T b,$ vem

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{84} \begin{bmatrix} 84 \\ 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Em muitas situações $A^T A$ é invertível mas isso nem sempre acontece. Veja-se o próximo exemplo.

Encontre uma solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A^T b = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada para $A^T Ax = A^T b$ é:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral é

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_4 \\ x_2 &= -5 + x_4 \\ x_3 &= -2 + x_4 \end{aligned}$$

e x_4 é livre. A solução geral dos mínimos quadrados de $Ax = b$ é então:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Critério para solução única dos mínimos quadrados

Teorema

Seja A $m \times n$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. A equação $Ax = b$ tem um única solução dos mínimos quadrados, para cada $b \in \mathbb{R}^n$.
2. As colunas de A são l.i.
3. a matriz $A^T A$ é invertível.

Se o anterior for verdadeiro, a solução dos mínimos quadrados é dada por

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Exemplo 2: Dado um conjunto de pontos $(2,1),(2,2),(-2,0),(-2,-1)$ em $\mathbb{R}^2$ será que existe uma reta que contém estes pontos?
A reta será da forma $y = \alpha x + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Portanto, α e β têm de obedecer as seguintes equações

$$\begin{aligned} 1 &= 2\alpha + \beta \\ 2 &= 2\alpha + \beta \\ 0 &= -2\alpha + \beta \\ -1 &= -2\alpha + \beta \end{aligned}$$

o que é impossível!

Queremos determinar a reta "mais próxima" destes pontos. Note-se que facto de o sistema acima ser impossível quer dizer que

$$(1,2,0,-1) \notin \langle (2,2,-2,-2),(1,1,1,1) \rangle.$$

O vetor de $U = \langle (2,2,-2,-2),(1,1,1,1)\rangle$ mais próximo de $(1,2,0,-1)$ é $\text{proj}_U\,(1,2,0,-1)$.

Note-se que

$$((\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}))$$

é uma base ortonormada de $\langle (2,2,-2,-2),(1,1,1,1)\rangle$ (verifique!).

Logo,

$$\begin{aligned}
\text{proj}_U\,((1,2,0,-1)) &= ((1,2,0,-1)\cdot(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}))(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})+ \\
&\quad +((1,2,0,-1)\cdot(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}))(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \\
&= (\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Temos que $(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ é o vetor de $\langle (2,2,-2,-2),(1,1,1,1)\rangle$ mais próximo de $(1,2,0,-1)$.

Como $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in \langle (2,2,-2,-2), (1,1,1,1) \rangle$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= 2\alpha + \beta \\ \frac{3}{2} &= 2\alpha + \beta \\ -\frac{1}{2} &= -2\alpha + \beta \\ -\frac{1}{2} &= -2\alpha + \beta \end{aligned}$$

que tem solução $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

A reta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ é a equação da reta mais próxima dos pontos $(2,1), (2,2), (-2,0), (-2,-1)$.

A Reta: