Álgebra Linear e Geometria Analítica

Modelo input-output de Leontief

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Modelo Económico de Leontief

- Suponhamos que uma economia de uma nação tem n setores produtivos que produzem bens e serviços não só para si mas também para os outros setores da economia.
- seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor de produção que lista o output (produção) de cada setor por ano.
- Existe outra parte da economia (os setores abertos) que não produz bens e serviços mas que apenas consome.
- Cada setor precisa de consumo intermédio (input) para produzir os seus próprios produtos.
- Seja d um vetor de consumo que lista os valores dos bens e serviços que são solicitados pelos vários setores abertos.

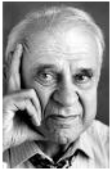

Figura: Wassily Leontief (prémio Nobel em 1973).

Os setores que produzem bens para satisfazer as necessidades do consumidor final necessitam de input dos outros setores e, eventualmente, dos próprios setores, na produção desses bens para a sua própria produção. Leontief mostrou que o output de um setor é input de outro (ou de si próprio), mostrando uma interrelação entre eles, ou seja, o seguinte equilíbrio é válido para os níveis de produção do vetor x:

$$x = Cx + d \tag{1}$$

onde

- Cx= vetor dos consumos intermédios (inputs) dos setores correspondentes aos níveis de produção do vetor x.
- d = vetor de consumo final

A hipótese básica do modelo input-output de Leontief é que, para cada setor existe um vetor de consumo $c_i \in \mathbb{R}^n$ que lista os inputs necessários de cada setor para produzir uma unidade de output.

A matriz

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

é a matriz de consumo ou matriz dos consumos intermédios (inputs).

Exemplo

Suponhamos que uma economia é constituída por três setores: Manufaturação, Agricultura e Serviços com vetores de consumo por unidade c_1, c_2, c_3 como mostra a tabela.

Comprado de:		input consumido por unidade de output	
	Manufaturação	Agricultura	Serviços
Manufaturação:	0.50	0.40	0.20
Agricultura:	0.20	0.30	0.10
Serviços:	0.10	0.10	0.30
	c_1	c_2	c_3

Que quantidade será consumida pelo setor da Manufaturação se este decidir produzir 100 unidades de produto?
Note-se que c_1 é o vetor de consumo por unidade.

$$100c_1 = 100 \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.20 \\ 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Assim, para produzir 100 unidades de output o setor da Manufaturação consome 50 unidades da Manufaturação, 20 unidades da agricultura e 10 unidades dos serviços.

Se a manufaturação decide produzir x_1 unidades de output, então $x_1 c_1$ representa as necessidades de consumo (input) da Manufaturação. Da mesma forma, se x_2 e x_3 denotam o output planeado para os setores da Agricultura e Serviços, então $x_2 c_2$ e $x_3 c_3$ são os vetores que correspondem às respetivas necessidades de consumo (input).
O total dos consumos é dado por:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = Cx, \tag{2}$$

onde C é a matriz de consumo

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

As equações (1) e (2) ilustram o modelo de Leontief (sem o consumo final).

Modelo de Leontief ou equação de produção

$$x = Cx + d$$

onde

- x é o vetor de produção
- C é chamada matriz do consumo
- Cx é o vetor dos consumos intermédios (inputs)
- d vetor de consumo final

A matriz de consumo é construída a partir dos vetores de consumo. A sua j- ésima coluna é o j-ésimo vetor de consumo e contém o input necessário de cada um dos setores para o setor j produzir uma unidade de output.
A equação anterior pode ser escrita na forma

$$Ix - Cx = d \Leftrightarrow (I - C)x = d. \tag{4}$$

Exemplo

Considere a economia cuja matriz de consumo é dada por (3). Suponhamos que o consumo final é de produzir 50 unidades da manufaturação, 30 unidades da agricultura, e 20 unidades dos serviços. Encontre o vetor de produção x que satisfaz estes níveis de consumo.
Solução:

$$I - C = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

Ora

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 & |50 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 & |30 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & |20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & |500 \\ -2 & 7 & 1 & |300 \\ -1 & -1 & 7 & |200 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & |226 \\ 0 & 1 & 0 & |119 \\ 0 & 0 & 1 & |78 \end{bmatrix}$$

A última coluna foi arredondada à unidade mais próxima. A Manufaturação deve produzir 226 unidades, a agricultura 119 unidades e os serviços 78 unidades de produto para satisfazer o consumo final.

Se $I - C$ é invertível então
$$x = (I - C)^{-1}d.$$

O teorema seguinte mostra que na maior parte dos casos $I - C$ é invertível e o vetor de produção é economicamente viável no sentido em que as entradas em x são não negativas.

Teorema
Seja C a matriz de consumo para uma economia e d o vetor de consumo final. Se C e d têm entradas não negativas e, se a soma das entradas em cada coluna de C é menor do que 1 então $(I - C)^{-1}$ existe e o vetor de produção $x = (I - C)^{-1}d$ tem entradas não negativas e é a única solução para $x = Cx + d$.

Exemplo

Suponhamos que uma economia tem 2 setores: bens e serviços. Uma unidade de output de bens requer 0.2 unidades de bens e 0.5 unidades de serviços. Uma unidade de output de serviços requer 0.4 unidades de bens e 0.3 unidades de serviços. O consumo final é de 20 unidades de bens e de 30 unidades de serviços. Escreva o modelo económico de Leontief para esta situação.

Solução:

Comprado de:		input consumido por unidade de output	
	bens	serviços	consumo final
bens:	0.2	0.4	20
Serviços:	0.5	0.3	30

O modelo económico de Leontief é então:

$x = Cx + d$ onde

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$