Álgebra Linear e Geometria Analítica

Decomposição LU e LDU

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Decomposição LU e LDU

Matrizes Elementares:

Uma matriz elementar é uma matriz que é obtida fazendo uma operação elementar nas linhas da matriz identidade. O próximo exemplo ilustra os 3 tipos de matrizes elementares.

Exemplo

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Calcule $E_1 A$, $E_2 A$, $E_3 A$ e descreva como estes produtos podem ser obtidos por operações elementares nas linhas de A.

Caso geral

Se uma operação elementar nas linhas é realizada numa matriz $m \times n, A$, a matriz resultante pode ser escrita na forma EA onde a matriz $m \times m, E$ é obtida da identidade fazendo a mesma operação elementar nas linhas de I_m.

Motivação

A fatorização LU (ou LDU) é motivada por problemas da Indústria e Finanças que consistem em resolver uma sequência de equações, todas com a mesma matriz dos coeficientes:

$$Ax = b_1, Ax = b_2, \ldots, Ax = b_p. \tag{1}$$

Quando A é invertível podemos calcular A^{-1} e obter

$$A^{-1}b_1, A^{-1}b_2, \ldots, A^{-1}b_p.$$

No entanto, é mais eficiente resolver a primeira equação na sequência (1) usando operações elementares nas linhas e obter uma fatorização de A ao mesmo tempo. Neste caso, uma fatorização LU. As equações restantes na sequência (1) são resolvidas usando esta fatorização.

Suponhamos que $A(m \times n)$ pode ser reduzida à forma escalonada por linhas (sem trocar linhas). Então

$$A = LU,$$

onde L é uma matriz $m \times m$ triangular inferior com uns na diagonal principal e U é uma matriz $m \times n$ escalonada por linhas de A (ver exemplo abaixo):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \star & 1 & 0 & 0 \\ \star & \star & 1 & 0 \\ \star & \star & \star & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Utilidade das matrizes L e U

Quando $A = LU$, então

$$Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b.$$

Seja $y = Ux$. Podemos então encontrar x resolvendo o par de equações

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Assim, primeiro resolvemos $Ly = b$ para obter y e depois $Ux = y$ para obter x. Os sistemas ficam mais simples porque L é triangular inferior e U é escalonada por linhas.

Exemplo

Podemos verificar que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

Usemos agora esta fatorização para resolver o sistema $Ax = b$ quando $b = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

Assim, resolvendo $Ly = b$,

$$[L \mid b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [I_4 | y]$$

Agora, para $Ux = y$ tem-se

$$[U \mid y] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Logo $x = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}^T$

Algoritmo para a Fatorização LU

Suponhamos que A pode ser reduzida na forma escalonada por linhas U usando apenas operações elementares que somam um múltiplo de uma linha a outra (que está abaixo dela). Assim, existem matrizes elementares (que são triangulares inferiores e com uns na d.p) $E_1, E_2, \ldots, E_p$ tais que

$$E_p \cdots E_1 A = U, \tag{2}$$

então

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU,$$

onde

$$L = (E_p \cdots E_1)^{-1}. \tag{3}$$

Note-se que L é uma matriz triangular inferior com uns na d.p. (resulta do produto de inversas de matrizes elementares)

Note-se que as operações elementares nas linhas da equação (2) que reduz A a U também reduzem L na equação (3) a I porque

$$(E_p \cdots E_1)L = (E_p \cdots E_1)(E_p \cdots E_1)^{-1} = I.$$

Esta é a chave para construir L.
Algoritmo

1. Reduzir A a uma forma escalonada por linhas U por uma sequência de operações elementares nas linhas.
2. Substituir entradas em L tal que, a mesma sequência de operações nas linhas de A reduzem L a I.

Quando o passo 1 é possível, o argumento atrás mostra que uma fatorização LU existe. O exemplo seguinte mostra como implementar o passo 2.
Por construção L tem que satisfazer

$$(E_p \cdots E_1)L = I,$$

usando as mesmas matrizes $E_1, \dots, E_p$ usadas na equação (2). Então L é invertível com

$$L^{-1} = E_p \cdots E_1.$$

De (2), $L^{-1}A = U$ e $A = LU$. Assim, o passo 2 dá-nos uma matriz L.

Exemplo

Encontre a fatorização LU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Como A tem quatro linhas, L é 4×4. A primeira coluna de L é a primeira coluna de A dividida pelo pivot 2,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Compare-se a primeira coluna de A e L. As operações por linhas que irão criar zeros na primeira coluna de A também irão criar zeros na primeira coluna de L. Para ver que a mesma correspondência nas operações nas linhas de A se verifica para o resto de L, vamos olhar para uma forma escalonada por linhas de A, U.
Ou seja, vamos marcar as entradas em cada matriz que é usada para determinar a sequência de operações nas linhas que transforma A em U.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ \boxed{-4} & -5 & 3 & -8 & 1 \\ \boxed{2} & -5 & -4 & 1 & 8 \\ \boxed{-6} & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{-9} & -3 & -4 & 10 \\ 0 & \boxed{12} & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 7 \end{bmatrix} \sim U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

As entradas em coluna dentro de caixas determinam a redução por linhas de A em U. Usando o pivot de cada coluna, divida-se as entradas nas colunas (em caixas) pelo pivot e substitua o resultado em L.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\div 2 \qquad \div 3 \qquad \div 2 \quad \div 5$$

Assim, construindo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil ver que $A = LU$.

Observação: Note-se que, para eliminar as entradas abaixo do pivot 2 na primeira coluna, precisamos multiplicar A à esquerda por

$$E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas então, em L isso corresponde ao fator $(E_3 E_2 E_1)^{-1}$ que fornece a primeira coluna de L(verifique!!).
O mesmo raciocínio pode ser feito em relação às outras colunas de L.

Observação: Se $A = LU$ é quadrada, onde as entradas diagonais de L são 1, então podemos multiplicar a linha i de $U = [u_{ij}]$ por $\frac{1}{u_{ii}}$ (com $u_{ii} \neq 0$) e produzir uma matriz triangular superior U_1 com entradas diagonais iguais a 1. Podemos então obter uma matriz diagonal D com $d_{ii} = u_{ii}$. Então

$$U = DU_1.$$

Temos assim uma nova fatorização de A na forma

$$A = LDU_1$$

onde as entradas diagonais de L e U_1 são iguais a 1.

Podemos assim escrever o teorema:

Teorema

Seja A quadrada. Quando uma fatorização LDU existe tem-se:

1. L é uma matriz quadrada triangular inferior com os elementos da diagonal principal iguais a 1.
2. U é uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.
3. D é uma matriz diagonal com todas as entradas diagonais não nulas e é única.