

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Espaços Vetoriais

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

Definição de espaço vetorial real

O conjunto \mathcal{V} , munido das operações \oplus (adição) e \odot (multiplicação por escalar real), é um **espaço vetorial (e.v.) real** se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. \mathcal{V} é fechado relativamente a \oplus $X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. \oplus é comutativa $X \oplus Y = Y \oplus X$
3. \oplus é associativa $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de \mathcal{V}) para \oplus $0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a \oplus $\ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$
6. \mathcal{V} é fechado relativamente a \odot $\alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. \odot é distributiva em relação a \oplus $\alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. \odot é “distributiva” em relação a $+$ $(\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de \mathbb{R} e \odot) são “associativos” $(\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o “elemento neutro” para \odot $1 \odot X = X$

Exemplos de espaços vetoriais reais

1. \mathbb{R}^n munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. \mathbb{R}^+ munido das operações:

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. Os conjuntos \mathcal{P} de todos os polinómios (de qualquer grau) e \mathcal{P}_n dos polinómios de grau menor ou igual a n com as operações usuais.

Não é e.v. o conjunto dos polinómios de grau n com as operações usuais.

Propriedades básicas de um espaço vetorial real

Proposição: Seja \mathcal{V} um e.v. real. Então

- (a) $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}, \forall X \in \mathcal{V};$
- (b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (c) $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } X = 0_{\mathcal{V}};$
- (d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus, \forall X \in \mathcal{V}.$

Daqui em diante, escreve-se:

- i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V};$
- ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V};$
- iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}.$

Subespaço vetorial

O subconjunto $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço (vetorial)** do e.v. real \mathcal{V} se, munido das mesmas operações de \mathcal{V} , for ele próprio um e.v. real.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um **subespaço (vetorial)** do e.v. real \mathcal{V} se e só se

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$;
2. \mathcal{S} é **fechado em relação à adição** de \mathcal{V} ;
3. \mathcal{S} é **fechado em relação à multiplicação por escalar** de \mathcal{V} .

Proposição: Se \mathcal{S} é um subespaço de \mathcal{V} , então $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$.

Corolário: Se $0_{\mathcal{V}} \notin \mathcal{S}$, então \mathcal{S} **não** é um subespaço de \mathcal{V} .

Exemplos:

- \mathcal{V} e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os **subespaços triviais** de \mathcal{V} ;
- $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de \mathbb{R}^3 ;
- $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ **não** é subespaço de \mathbb{R}^2 ;
- $\mathcal{N}(A)$, o **espaço nulo** da matriz A $m \times n$, é subespaço de \mathbb{R}^n .

Espaço gerado

Dados os vetores X_1, \dots, X_k de \mathcal{V} e os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, o vetor $X \in \mathcal{V}$ tal que

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$$

é uma **combinação linear** dos vetores X_1, \dots, X_k .

Seja $K = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$. Chama-se **espaço gerado** por K ao conjunto

$$S = \langle K \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle = \{X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

formado por todas as **combinações lineares** de X_1, \dots, X_k . Diz-se também que K **gera** S ou é um **conjunto gerador** de S .

Exercício: Confirme que S é um subespaço vetorial de \mathcal{V} .

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$,

1. $\langle X_1 \rangle$ é a **reta** que passa pela origem e tem vetor director X_1 ;
2. $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o **plano** que passa pela origem e que contém X_1 e X_2 .

Espaço das linhas e das colunas de uma matriz

A matriz $m \times n$ $A = \begin{bmatrix} L_1^T \\ \vdots \\ L_m^T \end{bmatrix} = [C_1 \ \cdots \ C_n]$ tem linhas $L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}^n$ e colunas

$C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$. Logo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A são os subespaços de \mathbb{R}^n e, respetivamente, \mathbb{R}^m

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = \langle L_1, \dots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Lema: Dados $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \dots, k\}$, com $i \neq j$,

- i. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle$;
- ii. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, \alpha X_i, \dots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iii. $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_i + \beta X_j, \dots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

É claro que $\mathcal{C}(A)$ é $\mathcal{L}(A^T)$.

Teorema: Se as matrizes A e B são equivalentes por linhas, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$.

Observa-se que

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{C}(A) &\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : B = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n \\ &\Leftrightarrow AX = B \text{ é um sistema possível,} \end{aligned}$$

visto que para $X = [\alpha_1 \dots \alpha_n]^T$ se tem

$$AX = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n$$

(vide exercício 13 da Folha Prática 1) .

Independência linear

$\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subseteq \mathcal{V}$ é **linearmente independente (l.i.)** no e.v. real \mathcal{V} se

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Caso contrário, \mathcal{K} é **linearmente dependente (l.d.)** em \mathcal{V} , ou seja,

- ▶ existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}}$;
- ▶ existe $X \in \mathcal{K}$ tal que X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$.

Nota: $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Exemplos:

- ▶ Dois vetores não nulos de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 são colineares se e só se são l.d.
- ▶ Três vetores não colineares de \mathbb{R}^3 definem um plano se e só se são l.d.

Geradores e independência linear

Sejam \mathcal{V} um e.v. real, $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{S} = \langle \mathcal{K} \rangle$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então, as afirmações são equivalentes:

1. X é combinação linear dos vetores de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$;
2. \mathcal{S} é gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X\}$.

Teorema: \mathcal{K} é um conjunto **linearmente**

- ▶ **dependente** \iff existe $X \in \mathcal{K}$ que satisfaz 1. ou 2. do lema anterior;
- ▶ **independente** \iff para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Corolário:

- ▶ Se \mathcal{K} gera \mathcal{V} e não é l.i., o conjunto obtido retirando um oportuno elemento de \mathcal{K} ainda é gerador de \mathcal{V} .
- ▶ Se \mathcal{K} é l.i. e não gera \mathcal{V} , é possível acrescentar um oportuno elemento a \mathcal{K} mantendo a independência linear.

Base de um espaço vetorial

Uma **base de um e.v.** $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um **conjunto** (a) l.i. e (b) **gerador** de \mathcal{V} .

Nota: • Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
• Um conjunto l.i. é base do espaço por ele gerado.

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é a **base canónica de \mathbb{R}^n** .
2. Seja E_{ij} a matriz **$m \times n$** que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m \times n} = \{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ é a **base canónica de $\mathbb{R}^{m \times n}$** .
3. A **base canónica** do e.v. \mathcal{P}_n dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$. O e.v. \mathcal{P} de todos os polinómios não admite uma base com um número **finito** de elementos.

Base de um espaço vetorial

Sejam \mathcal{V} um e.v. real e $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Proposição:

- ▶ Se \mathcal{K} gera \mathcal{V} , então qualquer elemento de \mathcal{V} pode escrever-se como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} , de pelo menos uma maneira.
- ▶ Se \mathcal{K} é l.i., então qualquer elemento de \mathcal{V} pode escrever-se como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} , de no máximo uma maneira.

Proposição: Se \mathcal{K} é uma base de \mathcal{V} , então cada vetor de \mathcal{V} escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de \mathcal{K} .

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema: \mathcal{V} tem uma base de n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ contém r vetores.

i. \mathcal{K} l.i. $\Rightarrow r \leq n$ (ou seja, $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$ linearmente dependente)
Neste caso, existe uma base de \mathcal{V} que contém \mathcal{K} .

ii. \mathcal{K} gera $\mathcal{V} \Rightarrow r \geq n$ (ou seja, $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$ não gera \mathcal{V})
Neste caso, existe um subconjunto de \mathcal{K} que é uma base de \mathcal{V} .

Corolário: Duas bases de \mathcal{V} possuem o mesmo número de elementos.

A dimensão de \mathcal{V} , $\dim \mathcal{V}$, é o número de elementos de qualquer base dele.

Exemplos: $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$ e $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

Teorema: Se $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

i. \mathcal{K} l.i. $\Rightarrow \mathcal{K}$ é base de \mathcal{V} ;

ii. \mathcal{K} gera $\mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{K}$ é base de \mathcal{V} .

Exemplo – Espaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo A_e e A_r as formas escalonada e, respetivamente, reduzida de A .

Teorema: As linhas não nulas de A_e e A_r formam bases de $\mathcal{L}(A)$.

Seja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Então, $X \in \mathcal{N}(A) \iff AX=0 \iff A_r X=0 \iff$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Os vetores na combinação linear de X (N_2 e N_4) são uma base de $\mathcal{N}(A)$.

Teorema: Assim, chamando nulidade de A , $\text{nul}(A)$, à dimensão do espaço nulo, tem-se $\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A) = n^\circ$ de inc. livres do sistema $AX=0$.

Exemplo – Espaço $\mathcal{C}(A)$

$B = (a, b, c) \in \mathcal{C}(A) \iff$ o sistema $AX = B$ é possível. Logo, sendo $[A|B] =$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 2 & -4 & -7 & 5 & b \\ 1 & -2 & -3 & 2 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{array} \right], \quad B \in \mathcal{C}(A) \iff a - b + c = 0.$$

Assim, $\mathcal{C}(A) = \langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$.

Mas, ainda podemos usar o resultado:

Teorema: $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$ (coincidente com $\text{car}(A)$) e as **colunas de A** que correspondem às **colunas dos pivots** da sua forma escalonada, formam uma **base de $\mathcal{C}(A)$** .

Assim, as **colunas 1 e 3** de A são l.i. e $\mathcal{C}(A) = \langle (1, 2, 1), (-4, -7, -3) \rangle$.

Nota: Se A é $m \times n$, $\text{car}(A) + \text{nul}(A) = n$.

Corolários:

- A característica de uma matriz é o máximo número de linhas (colunas) l.i.
- Uma **matriz quadrada é invertível** se e só se o conjunto das suas **linhas (colunas)** é l.i.

Coordenadas de um vetor numa base

Seja $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ uma **base ordenada** de um e.v. \mathcal{V} .

Teorema: Cada vetor $X \in \mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de \mathcal{B} , ou seja, existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n.$$

Estes coeficientes a_1, \dots, a_n dizem-se as **coordenadas** de X na **base** \mathcal{B} .

O **vetor das coordenadas** de X na **base** \mathcal{B} é $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Exemplo: Verifique que, relativamente à base $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1, -1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Mudança de base

Nota: Para $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{V}$, \mathcal{S} base ordenada de \mathcal{V} e $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$,
 $[a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_r [Y_r]_{\mathcal{S}}$.

Sejam $\mathcal{S}, \mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ duas bases ordenadas de \mathcal{V} e $X \in \mathcal{V}$.
Qual a relação entre $[X]_{\mathcal{S}}$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$\begin{aligned} [X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &\Rightarrow X = a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n \\ &\Rightarrow [X]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_n [Y_n]_{\mathcal{S}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

Matriz de mudança de base

Teorema: Sejam \mathcal{S} e $\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ duas bases ordenadas de \mathcal{V} .

Para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$[X]_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} [X]_{\mathcal{T}}$$

onde

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}} = \begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \cdots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}$$

é a **Matriz de mudança de base de \mathcal{T} para \mathcal{S}**

cujas colunas são os vetores das
coordenadas na base \mathcal{S} dos elementos da base \mathcal{T}

Mudança de base – Exemplo

Sejam $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$ e $\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 .

Dado $X \in \mathbb{R}^2$ tal que $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tem-se que

$$X = a(0, 1) + b(1, -1).$$

Logo, $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0, 1)]_{\mathcal{S}} + b[(1, -1)]_{\mathcal{S}}$. Pelo exemplo anterior,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

Invertibilidade de uma matriz de mudança de base

Teorema: Sejam \mathcal{S} e \mathcal{T} duas bases de \mathcal{V} . Então $M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}$ é invertível e

$$M_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{T}}^{-1} = M_{\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{S}}.$$