On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 9

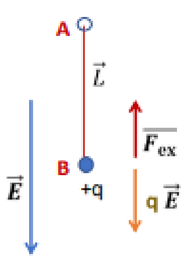
Cap. 3 – Potencial eléctrico. Energia potencial. Teorema de Gauss

- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

Potencial eléctrico

Potencial eléctrico num ponto - é o trabalho externo necessário para trazer uma carga unitária, positiva, da posição de potencial zero até esse ponto, com velocidade constante



DESLOCAMENTO PARALELO AO CAMPO ELÉCTRICO

$W_{ext} = \Delta EP = EP_f - EP_i$ EC é constante

$$\boxed{\Delta V = \frac{\Delta EP}{q}}$$

$W_{ext} = q\Delta V = q(V_f - V_i)$

$V_i = 0$ no infinito

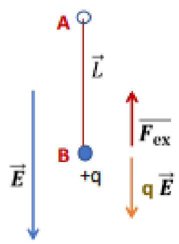
$$\boxed{V_f = \frac{Wext}{q}}$$

Potencial eléctrico

DESLOCAMENTO PARALELO AO CAMPO ELÉCTRICO

$$\Delta V = -\int_A^B \frac{\vec{F}_{ext}}{q}\, d\vec{L} = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{L}$$

O deslocamento de A até B é paralelo ao campo eléctrico constante



$$\Delta V = -E \int_A^B d\vec{L}$$

$$\boxed{\Delta V = -E\,L}$$

A diferença de potencial é negativa (< 0)

A **variação da Energia Potencial** correspondente será dada por

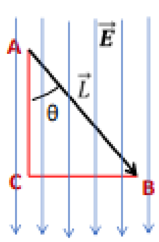
$$\boxed{\Delta EP = EP_B - EP_A = -qEL}$$

i. é, quando uma **carga positiva** se desloca no sentido positivo do campo eléctrico a sua **energia potencial diminui**

Potencial eléctrico

DESLOCAMENTO NÃO PARALELO AO CAMPO ELÉCTRICO

$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{L}$$



$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{CA} + \Delta V_{BC} = -EL + 0$$

$$\Delta V = -E\,L\cos\theta$$

O percurso $\overline{CB}$ é perpendicular ao campo eléctrico = zero

O campo eléctrico é conservativo.
Porquê?

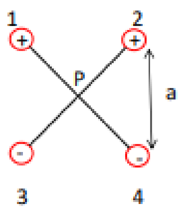
5. Quatro cargas +q,+q, −q,−q estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado **a**.

a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = 0$

a) Potencial eléctrico no centro do quadrado ?

O potencial é uma grandeza escalar.



$$V_P = - \int_{\infty}^{P} \vec{E}.d\vec{L} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

$$V_P = \sum_1^4 V_i = 0$$

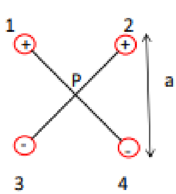
5. Quatro cargas +q,+q, −q,−q estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado **a**.

a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = 0$

a) Campo eléctrico no centro do quadrado ?

Caso 1

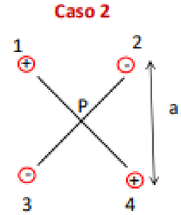


$\vec{E}_P = \sum_1^4 \vec{E}_i$

$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

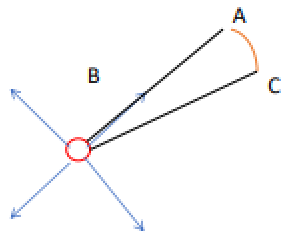
$\vec{E}_P = \vec{0}$

Caso 2



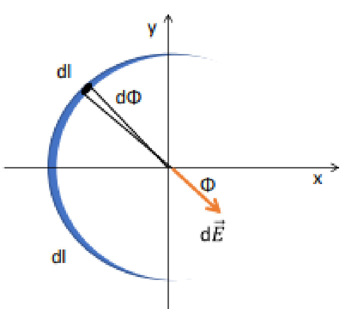
$\vec{E}_P = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a2}\hat{r}$ direcção e sentido de 1 para 4

5. b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} = 0$



$$W = q\,V = q\int_{\infty}^{P} \vec{E}.d\vec{r}$$

8. Um fio semi-circular de raio **R** está uniformemente carregado com uma carga total **Q**. Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{r}$$

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad dq = \lambda\, dl$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\, dl \cos\Phi}{R^2} \qquad dl = R\, d\Phi$$

$$E_x = 2.\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda\, R\, d\Phi \cos\Phi}{R^2}$$

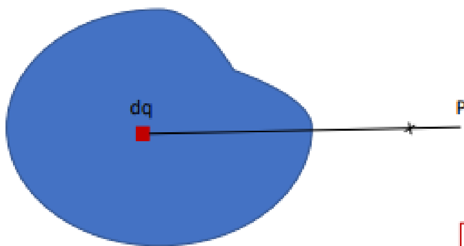
$$\boxed{\overrightarrow{E_{T,x}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\imath}}$$

$$Q = \lambda\, l = \lambda R\, \pi$$

$$\boxed{\overrightarrow{E_{T,x}} = \frac{Q}{2\pi 2\varepsilon_0 R2}\,\hat{\imath}}$$

Função potencial

$$V(x,y,z) = - \int_A^B \vec{E}\,(x,y,z)d\vec{r}$$



O campo eléctrico será dado por

$$E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,V = -\vec{\nabla}\,V}$$

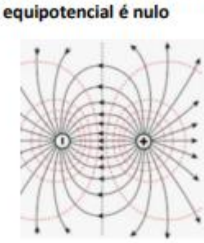
SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

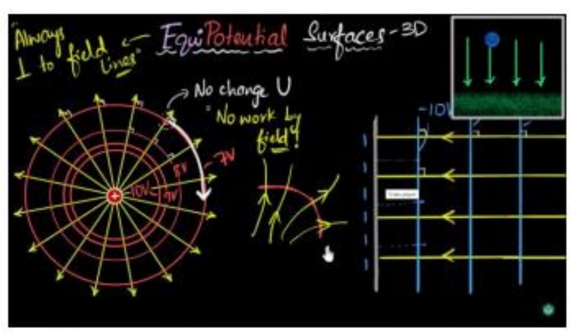
O que são e que propriedades têm?

i. superficies que contêm pontos com potencial igual

ii. as linhas do campo eléctrico são perpendiculars às superficies equipotenciais

iii. o trabalho realizado para deslocar uma carga entre quaisquer pontos de uma superfície equipotencial é nulo





[Equipotential surfaces (& why they are perpendicular to field) | Electric potential | Khan Academy - Bing video]

FLUXO ELÉCTRICO

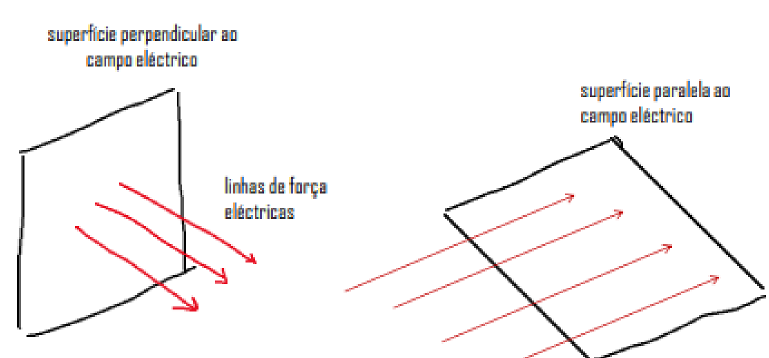
O fluxo eléctrico Φ_E através de uma superfície S é proporcional ao número de linhas de campo eléctrico que atravessam essa superfície

Com um **campo eléctrico uniforme** tem-se $\boxed{\Phi_E = \vec{E}.\vec{S}}$

Com um **campo eléctrico não uniforme, ou com uma superfície não plana** tem-se

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}.\boxed{d\vec{S}}}$$

$d\vec{S}$ é um vector perpendicular a cada elemento de superfície



Fluxo eléctrico máximo

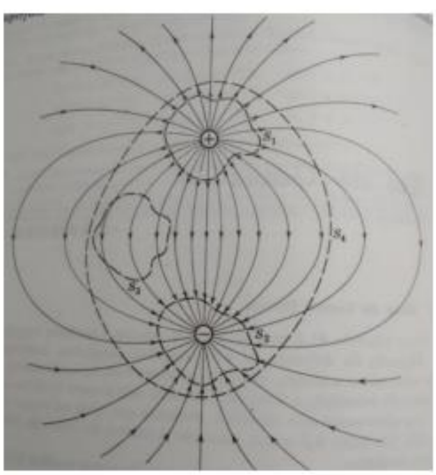
Fluxo eléctrico zero

LEI DE GAUSS

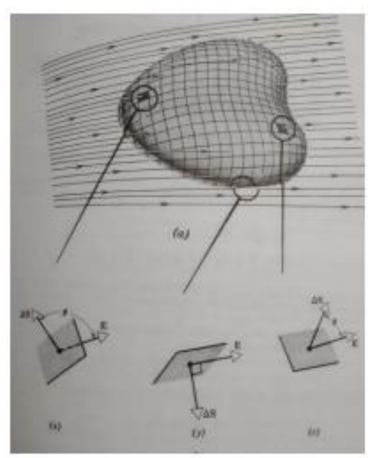
O fluxo total Φ_E através de **uma superfície fechada** é igual à carga total Q encerrada pela superfície vezes $\frac{1}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

A aplicação da lei de Gauss implica que conheçamos primeiramente a superfície em questão.



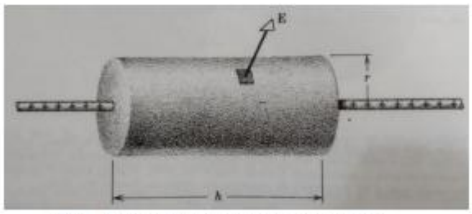
As superfícies a tracejado representam superfícies idealizadas imersas na região do campo eléctrico. In Halliday & Resnick, *Física*, II-I, 1974



Superfície idealizada imersa num campo eléctrico e visão ampliada de 3 elementos da área da superfície. In Halliday & Resnick, *Física*, II-I, 1974

LEI DE GAUSS

FIO INFINITO CARREGADO UNIFORMEMENTE, com densidade linear de carga, λ



Fio infinito carregado, mostrando uma superfície gaussiana cilíndrica In Halliday & Resnick. *Física* II-1, 1974

Q1. Achar uma expressão para o valor de E a uma distância *r* do fio

1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada cilindro de raio *r*

A carga abrangida pela superfície gaussiana é igual a **λ.h**

Q = **λ.h**

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

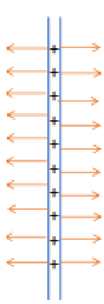
E. 2π *r* h = λ.h/ ε_0

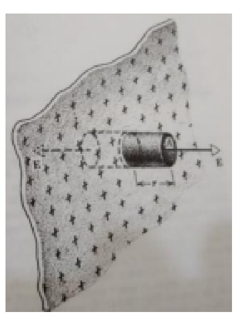
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

E aponta para fora da linha de cargas, se estas forem positivas

LEI DE GAUSS

PLANO INFINITO CARREGADO UNIFORMEMENTE, com densidade superficial de carga, σ





Q1. Achar uma expressão para o valor de E a uma distância *r* do plano

1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada

cilindro de raio *r*

2º O campo eléctrico é perpendicular ao plano das bases do cilindro

não há contribuição para o fluxo da superfície lateral

A carga abrangida pela superfície gaussiana é igual a **σ.A**

Q = **σ.A**

$$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

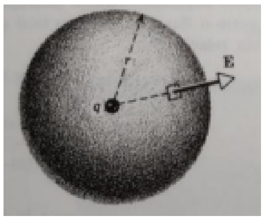
2. E. A= σ.A / ε_0

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

O valor de E é o mesmo para todos os pontos, de ambos os lados do plano da chapa.

LEI DE GAUSS

Superfície gaussiana esférica de raio r, envolvendo uma CARGA PONTUAL Q



Superfície gaussiana esférica de raio r envolvendo uma carga puntiforme. In Halliday & Resnick, *Física*, II-1, 1974

A lei de Coulomb pode ser obtida a partir da Lei de Gauss

Escolhamos uma superfície esférica, de raio r, centrada na carga pontual.

<u>Vantagem desta escolha</u>: - o campo eléctrico, por simetria, tem a mesma intensidade e direcção normal em todos os pontos da superfície

$\vec{E} \;//\; d\vec{S}$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0{}^2}\cdot\frac{Q}{r^2}$

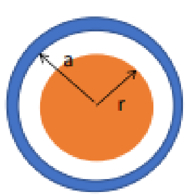
$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

E. $4\pi r^2 = Q / \varepsilon_0$

LEI DE GAUSS

ESFERA NÃO CONDUTORA CARREGADA UNIFORMEMENTE, com densidade volúmica de carga, ρ

Q1. Achar uma expressão para o valor de E a uma distância *a* da esfera carregada



1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada

esfera de raio *a*

$Q = \rho\, 4/3\, \pi\, r^3$

$\Phi_E = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\vec{E} \;//\; d\vec{S}$

$E\, 4\, \pi\, a^2 = \frac{\rho\, 4\pi\, r3}{3\, \varepsilon_0}$

$\boxed{E = \frac{\rho\, r3}{3\, \varepsilon_0\, a^2}}$