On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 7

Cap.2- Movimento oscilatório (cont.)

- Movimento amortecido
- Movimento forçado
- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

Energia no Movimento Harmónico Simples (MHS)

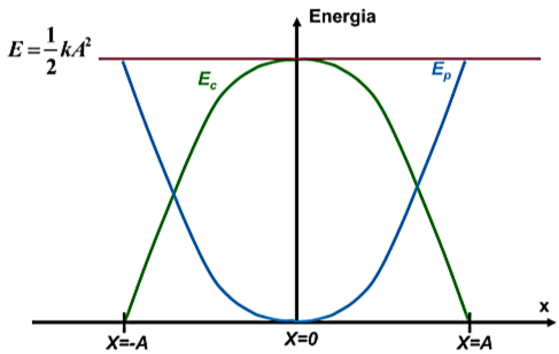
Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante: $E = \frac{1}{2} kA^2$

Energia potencial elástica: $E_{Pe} = \frac{1}{2} kx^2$

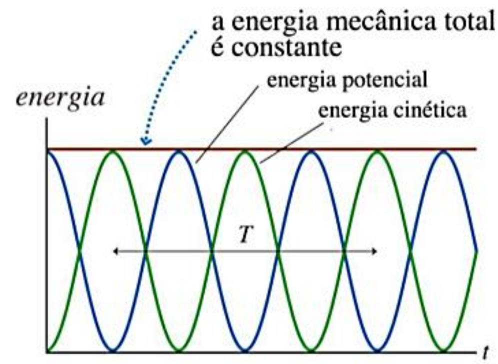
$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

Energia cinética: $E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2} k\left(A^2 - x^2\right)$

Energia no MHS em função de x



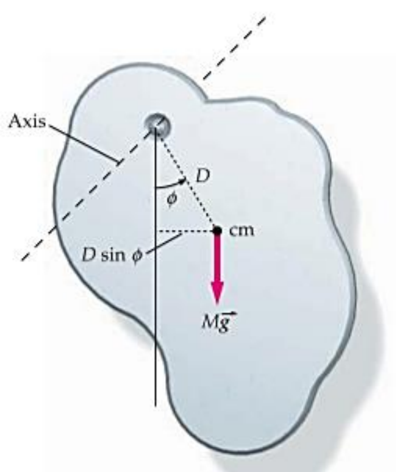
Energia no MHS em função de t



$$E=\tfrac{1}{2}mv_x^{\ 2}+\tfrac{1}{2}kx^2=\tfrac{1}{2}kA^2=\tfrac{1}{2}mv_{max}^{\ 2}=\text{constante}$$

Pêndulo físico ou Pêndulo composto

Para pequenos ângulos
sen ϕ ≈ ϕ



$$\tau = -MgDsen\phi \approx -MgD\phi$$

$$\tau = I\,\alpha = -MgD\phi \qquad \text{com } \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

NB - O período do pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total, M.
O momento de inércia I é proporcional a M, pelo que a razão I/M é independente de M

Oscilador amortecido

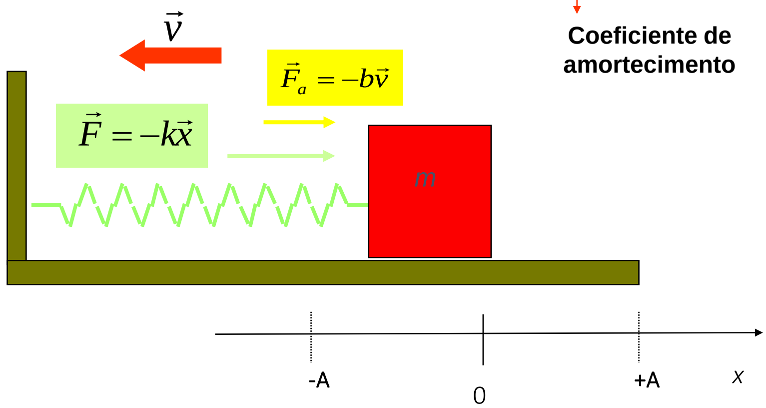
EXEMPLO de força dissipativa: **Força devida à viscosidade de um fluido**

$\vec{F}_a$

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

Coeficiente de amortecimento

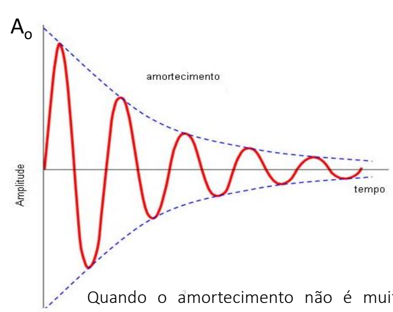
A mola oscila dentro de um fluido:



Oscilador amortecido

A solução é:

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$



Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico (b_c), esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo

E a frequência de oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Esta solução só é válida se:

$$\frac{b}{2m} < \omega_o$$

$$b < 2m\omega_0$$

Coeficiente de amortecimento crítico (b_c)

$$b_c = 2m\omega_0$$

Oscilador amortecido

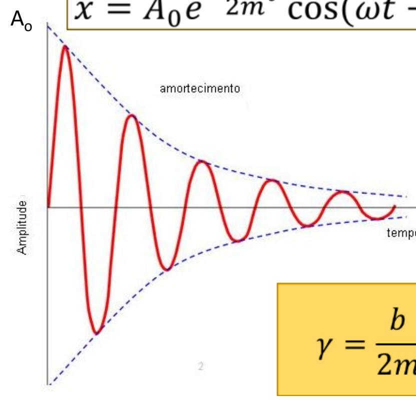
Na ausência de forças externas, a AMPLITUDE de um oscilador DIMINUI no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc)

$$\boxed{\vec{F_a} = -b\vec{v}}$$

Se A diminui, a Energia Mecânica diminui também

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}$$

$$\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)}$$



$$\boxed{\gamma = \frac{b}{2m}}$$

Oscilador amortecido

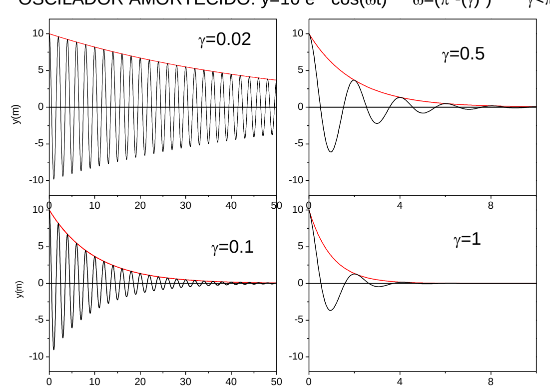
Graus de Amortecimento

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\boxed{\frac{b}{2m}}\right)^2}$$

Para b < b_c

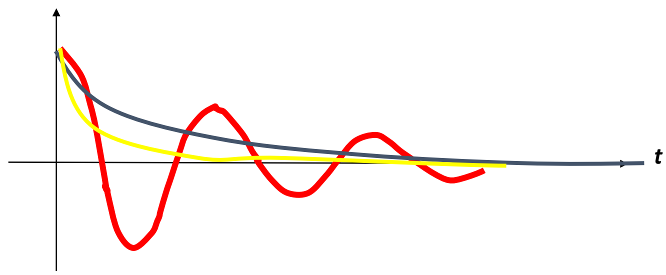
OSCILADOR AMORTECIDO: $y=10\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t)$ $\omega=(\pi^2-(\gamma)^2)^{1/2}$ $\gamma<\pi$



À medida que **b** aumenta, o decréscimo da amplitude das oscilações é cada vez mais rápido.

Oscilador amortecido

Graus de Amortecimento



Sub-Amortecido (Amortecimento fraco)

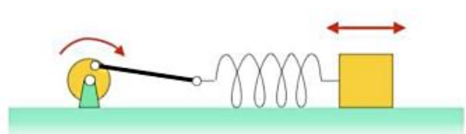
Amortecido criticamente (Amortecimento forte)

Sobre Amortecido (Amortecimento muito forte)

$$b < 2m\omega_0$$

$$b_c = 2m\omega_0$$

Oscilador Forçado



"mola" ligada a um "motor"

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Equações do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência angular da força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

amortec.

força elástica

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t}$$

com $\boxed{\gamma = \frac{b}{2m}}$

Solução geral

$$\boxed{\text{solução:} \quad x(t) = x_t(t) + x_p(t)}$$

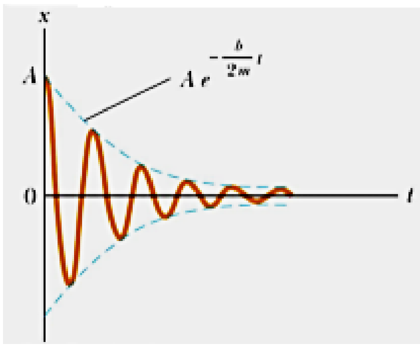
solução transiente:

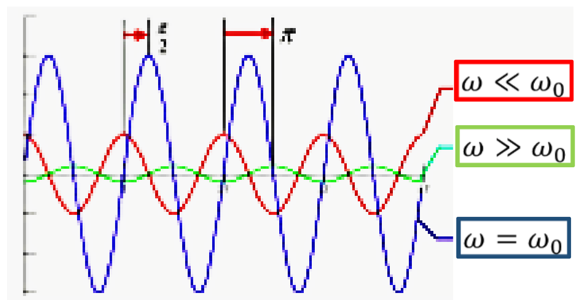
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

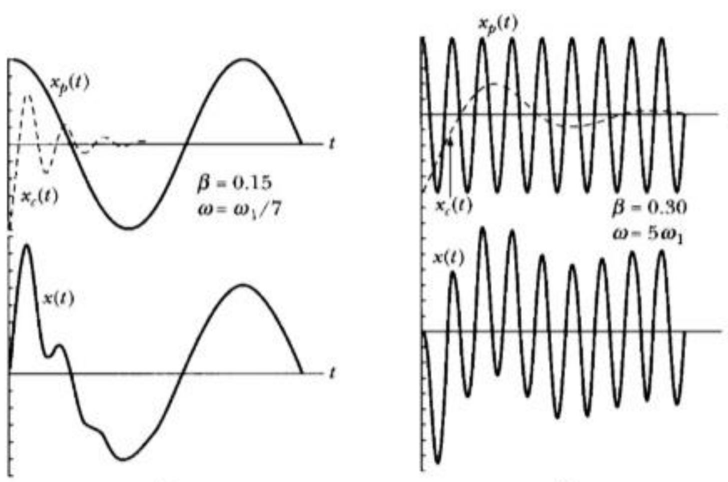
solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$





Solução transiente + solução permanente



(a) (b)

Solução permanente

$$\boxed{x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

com $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ amplitude

$\delta = \arctan \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ desfasamento entre a posição x e a força

$0 \le \delta \le \pi$

OSCILADOR FORÇADO

Força externa: $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

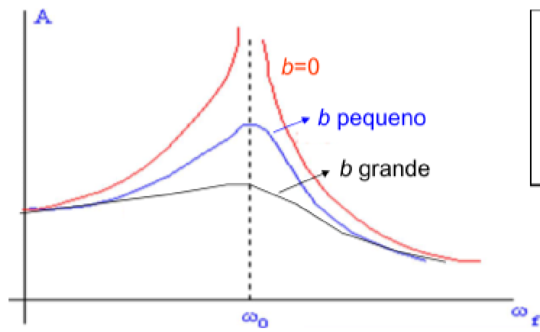
Mesma frequência!

Amplitude: $A = \dfrac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2}}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \Rightarrow A \text{ é máximo quando } \omega \approx \omega_0 \Rightarrow \textbf{ressonância}$$



Na ausência de amortecimento
$A \longrightarrow \infty$
quando $\omega \longrightarrow \omega_0$

Sobre a energia

<u>Considerando a solução permanente</u>,
NA RESSONÂNCIA, verifica-se:

- energia máxima dissipada
- trabalho máximo realizado pelo motor
- energia mecânica máxima do oscilador

NUM PERÍODO:
energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

The Tacoma
Narrows Bridge Collapse

1940

https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!