Árvores Binárias III

10/11/2025

Ficheiro ZIP

- Está disponível no Moodle um ficheiro ZIP de suporte aos tópicos de hoje
- O tipo abstrato Árvore AVL – ABP de altura equilibrada
- Funções incompletas, que permitem trabalho autónomo de desenvolvimento e teste

Sumário

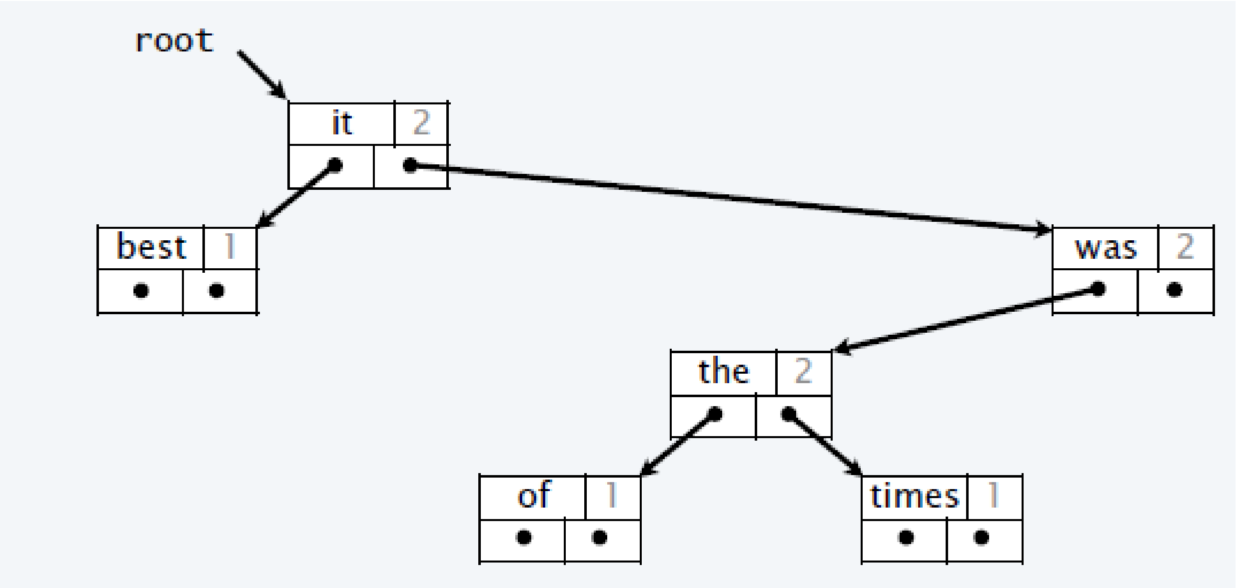
- O TAD Árvore Binária de Procura (conclusão)
- Análise do desempenho das operações habituais sobre ABPs
- Árvores equilibradas em altura – Árvores AVL
- Operações de rotação para manutenção da condição de equilíbrio
- Análise do desempenho: ABPs vs AVLs
- Exercícios / Tarefas

Árvores Binárias de Procura (ABP) – Binary Search Trees (BST)

ABP – Critério de ordem – Definição recursiva

- Para cada nó, os elementos da sua **subárvore esquerda** são **inferiores** a esse nó
- E os elementos da sua **subárvore direita** são **superiores** a esse nó
- **Não** há elementos **repetidos** !!

- A organização da árvore depende da **sequência de inserção** dos elementos



[Sedgewick & Wayne]

- Qual a ordem de inserção dos nós nesta árvore ?

ABP – Procurar elemento – Versão iterativa

```c
int BSTreeContains(const BSTree* root, const ItemType item) {
  while (root != NULL) {
    if (root->item == item) {
      return 1;
    }
    if (root->item > item) {
      root = root->left;
    } else {
      root = root->right;
    }
  }
  return 0;
}
```

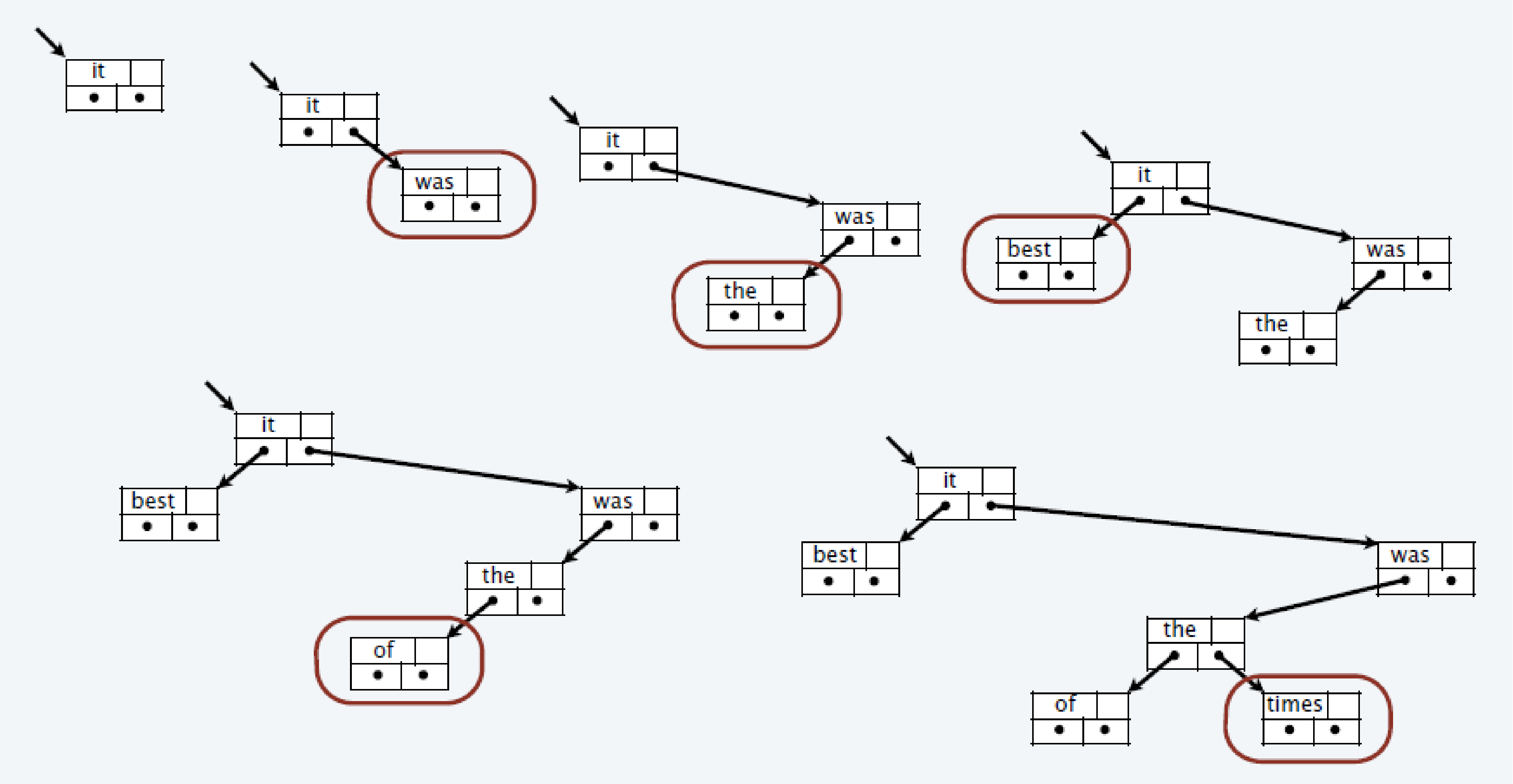
ABP – Adicionar um elemento

ABP – Adicionar um elemento

- Restrição : **não** adicionar **duplicados** !!
- Restrição : manter a **ordem** dos elementos !!

- Como fazer ?
- **Inserir** o novo item como **folha** da árvore, na **posição correta**

ABP – Adicionar como folha, manter a ordem



[Sedgewick & Wayne]

Adicionar – Versão iterativa – Criar o novo nó

```c
int BSTreeAdd(BSTree** pRoot, const ItemType item) {
  BSTree* root = *pRoot;

  struct _BSTreeNode* new = (struct _BSTreeNode*)malloc(sizeof(*new));
  assert(new != NULL);

  new->item = item;
  new->left = new->right = NULL;

  if (root == NULL) {
    *pRoot = new;
    return 1;
  }
```

Adicionar – Procurar a posição da nova folha

```
struct _BSTreeNode* prev = NULL;
struct _BSTreeNode* current = root;

while (current != NULL) {
  if (current->item == item) {
    free(new);
    return 0;
  }  // Not allowed

  prev = current;
  if (current->item > item) {
    current = current->left;
  } else {
    current = current->right;
  }
}
```

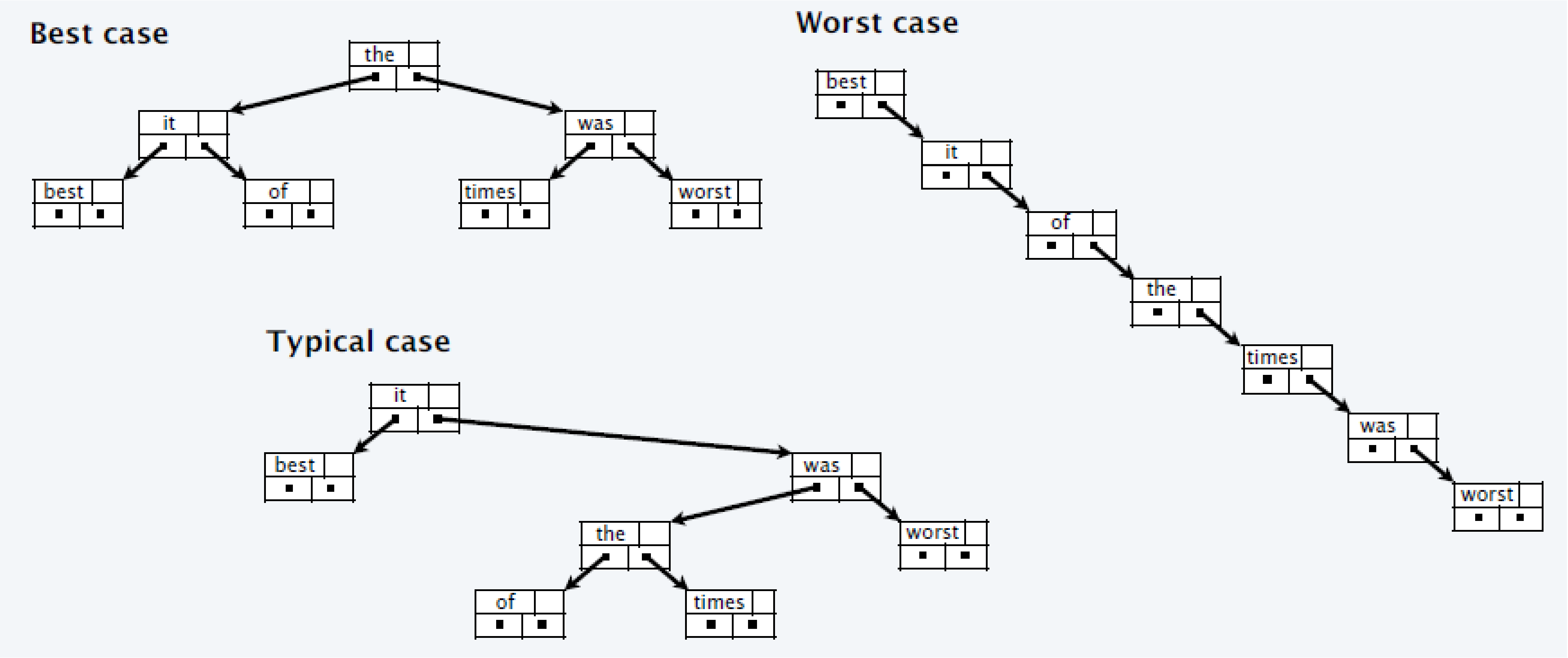
- Usar 2 ponteiros auxiliares para percorrer a árvore
- Se o elemento já pertence à árvore, libertar o nó criado e não fazer nada !
- A que subárvore pertencerá o novo elemento ?

Adicionar – Ancorar a nova folha

```
  if (prev->item > item) {
    prev->left = new;
  } else {
    prev->right = new;
  }
  return 0;
}
```

- A nova folha é menor ou maior do que o seu nó pai ?
- Ancorar como filho esquerdo ou como filho direito !

Altura – Diferentes sequências de adição

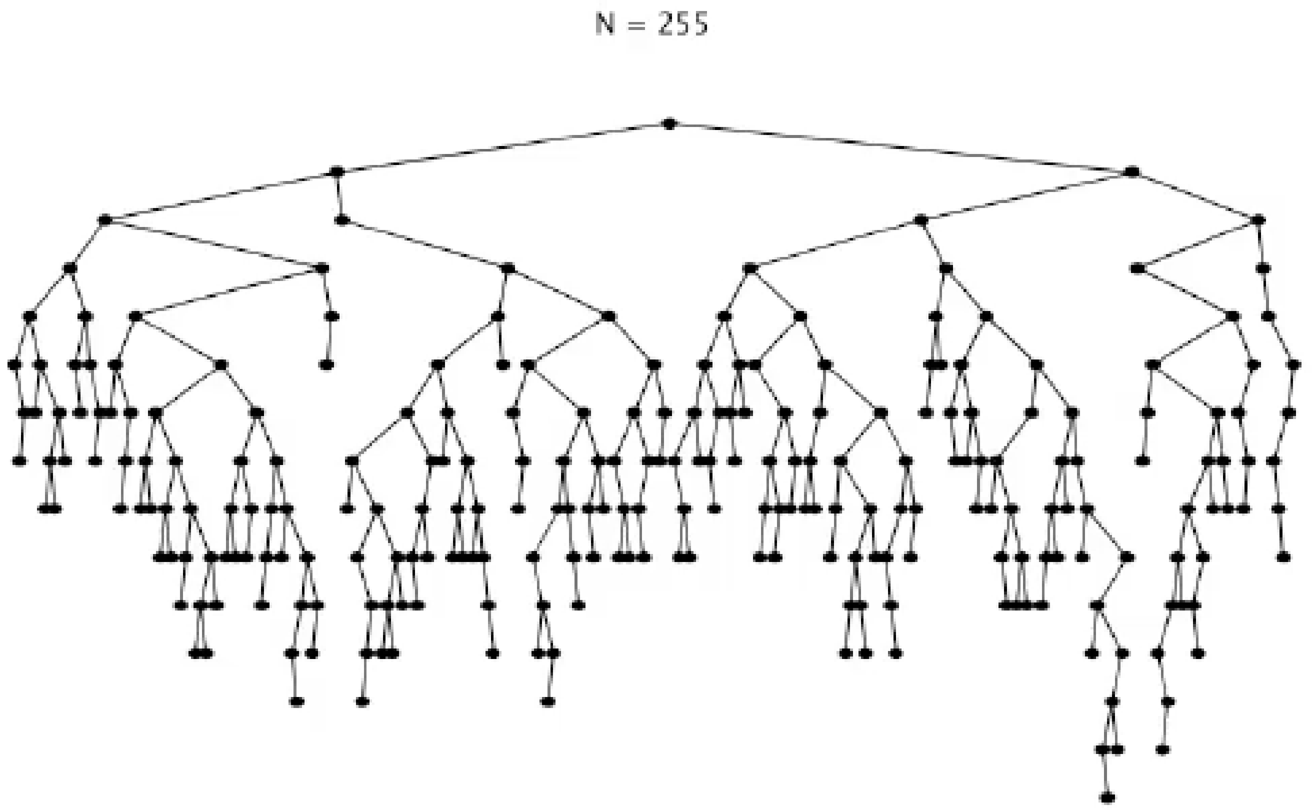


[Sedgewick & Wayne]

Altura – Adição numa ordem aleatória

- Inserir muitos elementos numa ordem aleatória

- Árvore aproximadamente equilibrada em altura !!



[Sedgewick & Wayne]

ABP – Remover um elemento

ABP – Remover um elemento

- Restrição : **manter a ordem** dos elementos após a remoção !!
- Como fazer ?

- Como remover o menor / maior elemento de uma árvore ?
  - Casos simples

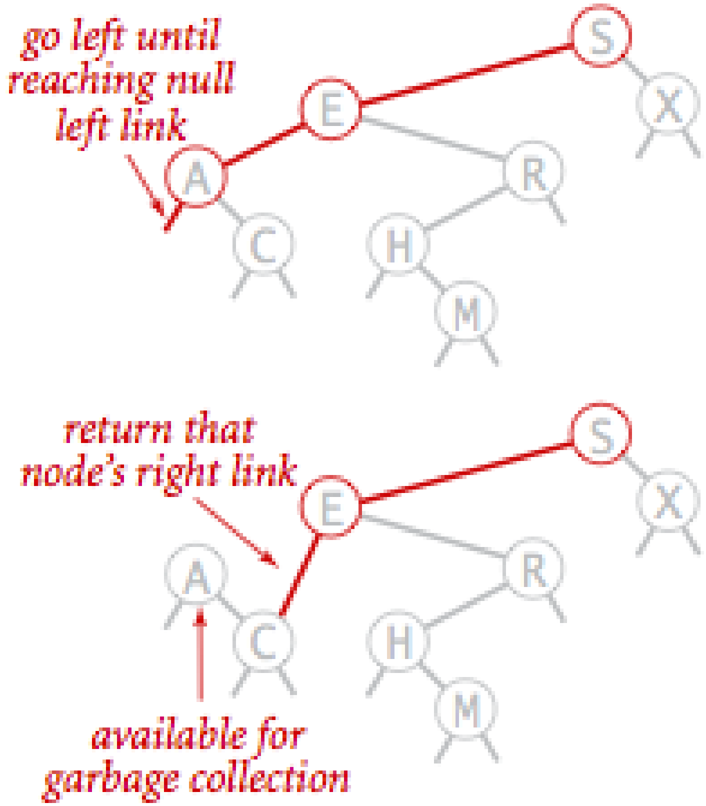
- Remover um qualquer elemento : a estratégia de Hibbard

ABP – Remover o menor elemento

- O menor elemento está no "nó mais à esquerda" !

- Folha ?
- Nó só com subárvore direita ?

- E se for a raiz ?



[Sedgewick & Wayne]

ABP – Remover – A estratégia de Hibbard

- Dado um elemento a remover, **procurar** o respetivo nó
- Caso 1 : é uma **folha** – FÁCIL !!
- Caso 2 : só tem **subárvore esquerda** – FÁCIL !!
- Caso 3 : só tem **subárvore direita** – FÁCIL !!
- Caso 4 : tem **2 subárvores** – caso geral

Procurar recursivamente o nó a remover

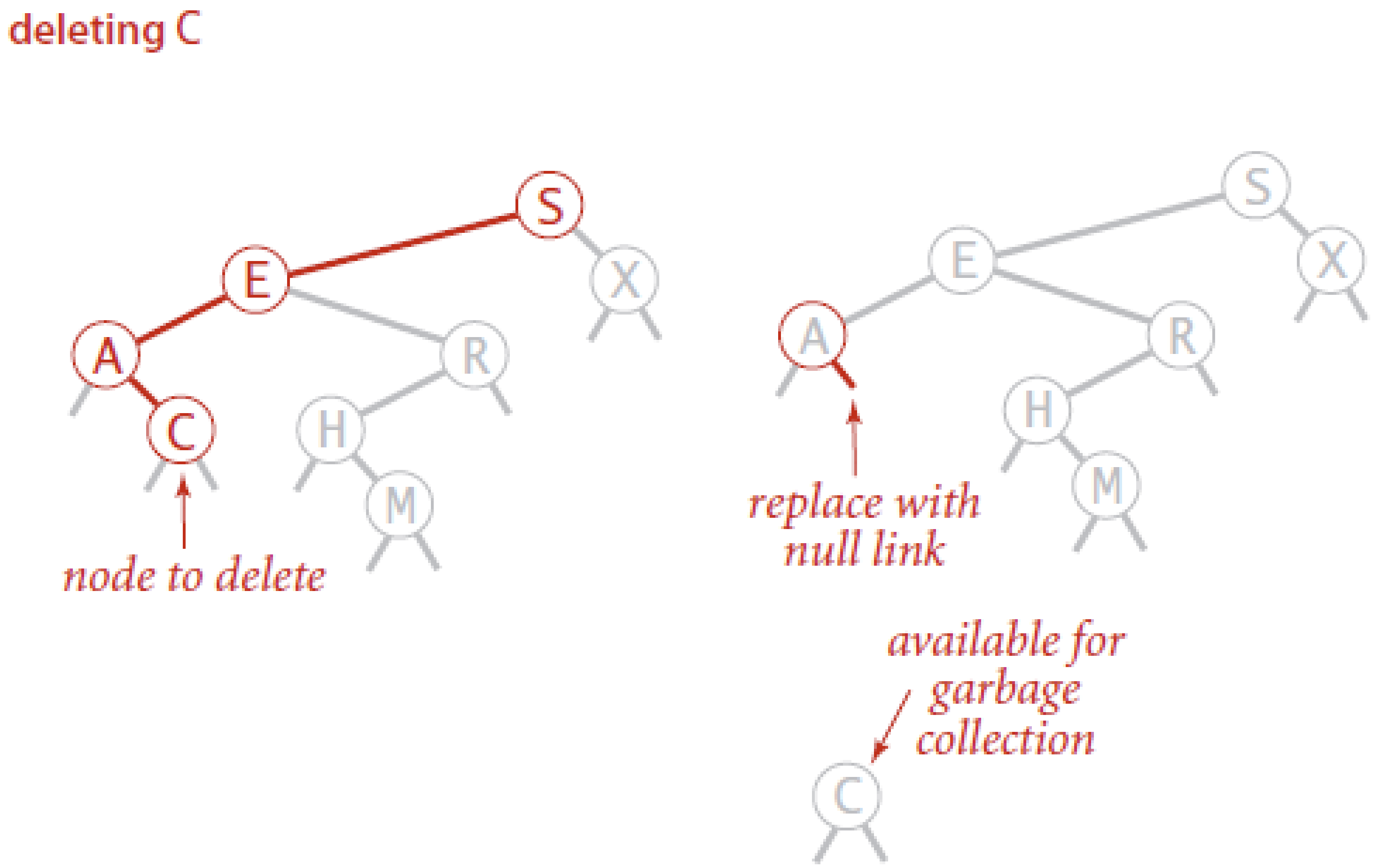
```c
int BSTreeRemove(BSTree** pRoot, const ItemType item) {
  BSTree* root = *pRoot;

  if (root == NULL) {
    return 0;
  }
  if (root->item == item) {
    _removeNode(pRoot);
    return 1;
  }
  if (root->item > item) {
    return BSTreeRemove(&(root->left), item);
  }

  return BSTreeRemove(&(root->right), item);
}
```

- Elemento procurado não pertence a uma (sub-)árvore vazia

- Elemento encontrado
- Remover usando uma função auxiliar

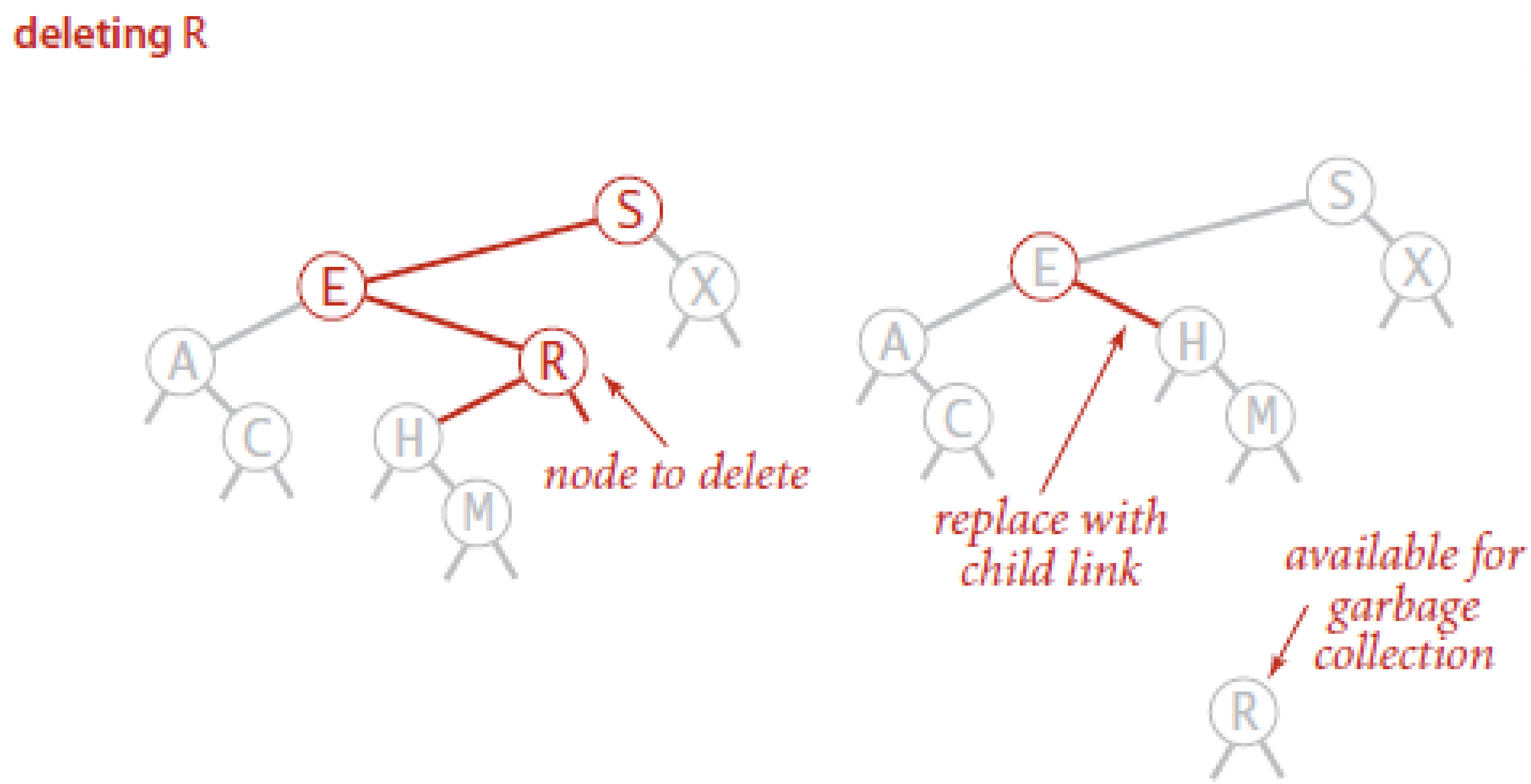
- A que subárvore pertencerá o elemento a remover ?

Caso 1 – Remover um nó que é uma folha



[Sedgewick & Wayne]

Casos 2 e 3 – Remover nó com um só filho

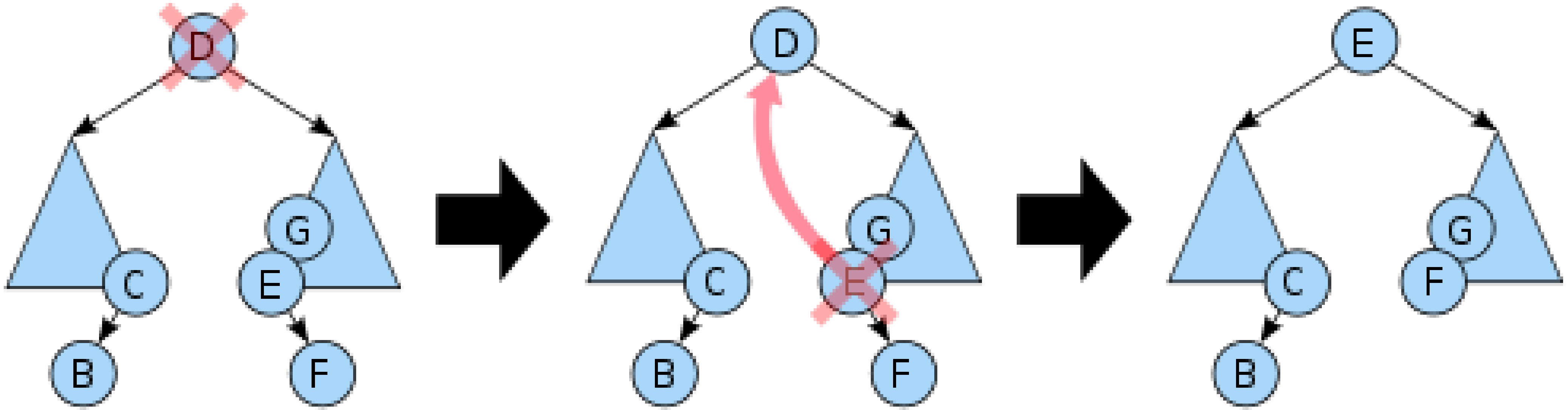


[Sedgewick & Wayne]

Caso 4 – Remover um nó com dois filhos

- Manter a ordem !!
- **Substituir** o **item** do nó pelo seu sucessor OU pelo seu predecessor
  - Vamos usar o **sucessor** !!
- Encontrar o sucessor e copiar o seu valor
- Substituir o valor do item pelo valor do seu sucessor
- Apagar o nó do **sucessor** – é o **menor elemento** da **subárvore direita**

Remover – Substituir pelo sucessor e apagá-lo



[Wikipedia]

Tarefa

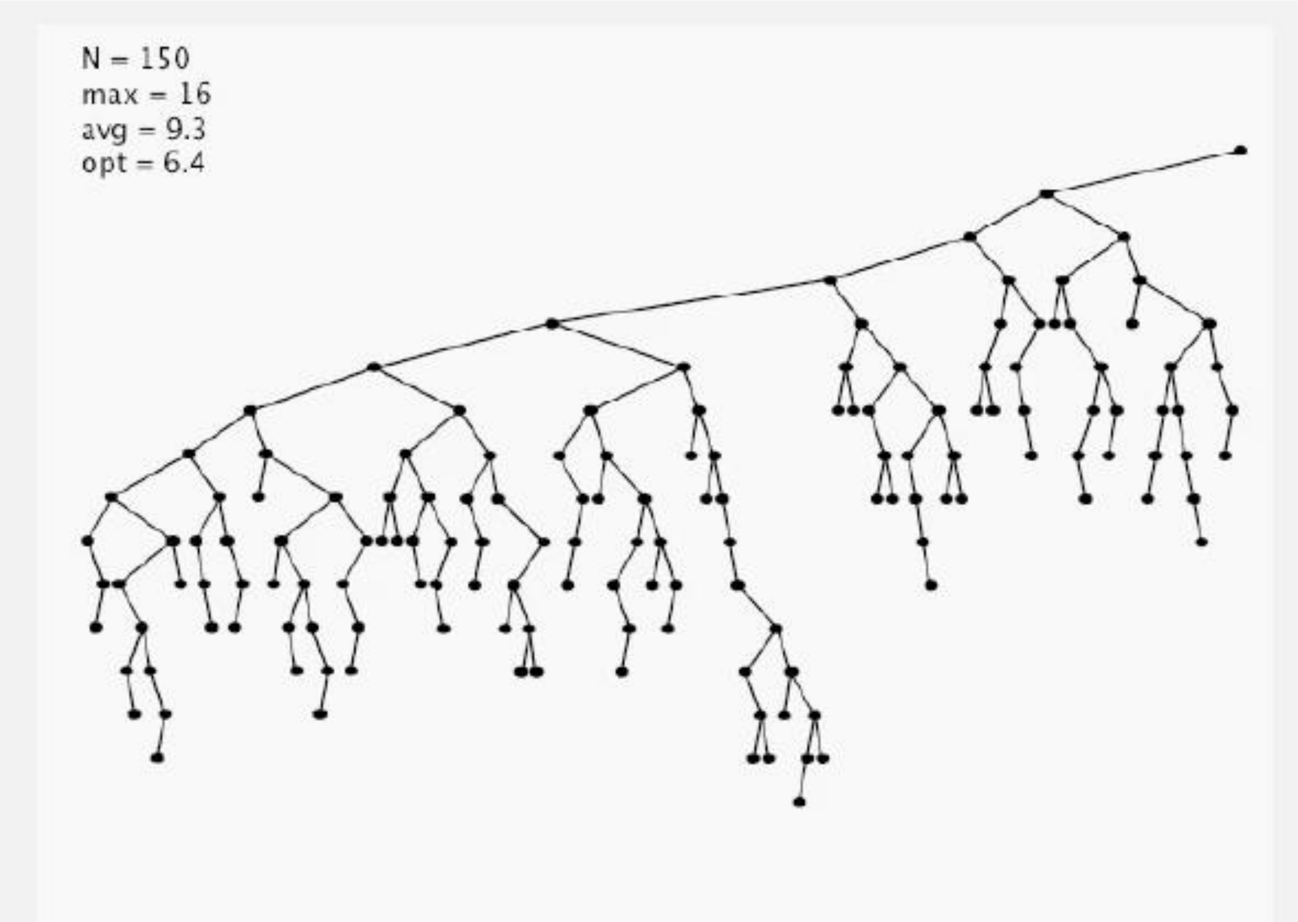
- **Analisar** o código das **funções auxiliares** que permitem remover de uma ABP o elemento procurado

ABP – Após muitos apagamentos

- Remover muitos elementos, numa ordem qualquer

- Árvore perde alguma "simetria" !!

- Consequência ?
- Mais difícil procurar alguns elementos do que outros



[Sedgewick & Wayne]

Eficiência Computacional

Eficiência - Lista ligada / Array ordenado / ABP

search	N	$\lg N$	h
insert	N	N	h
min / max	N	1	h
floor / ceiling	N	$\lg N$	h
rank	N	$\lg N$	h
select	N	1	h
ordered iteration	$N \log N$	N	N

h = height of BST
(proportional to log N
if keys inserted in random order)

[Sedgewick & Wayne]

Eficiência - Lista ligada / Array ordenado / ABP

implementation	guarantee			average case			ordered ops?	operations on keys
	search	insert	delete	search hit	insert	delete		
sequential search (linked list)	N	N	N	$½ N$	N	$½ N$		`equals()`
binary search (ordered array)	$\lg N$	N	N	$\lg N$	$½ N$	$½ N$	✔	`compareTo()`
BST	N	N	N	$1.39 \lg N$	$1.39 \lg N$	$\sqrt{N}$	✔	`compareTo()`

other operations also become √N
if deletions allowed

[Sedgewick & Wayne]

ABP – Problema – Árvores “desequilibradas”

- Os elementos podem não ser adicionados de modo aleatório
  - Por exemplo, adição ordenada !!
- Ou já ter ocorrido um grande número de apagamentos

- Como evitar o pior caso / casos maus ?
- Árvores equilibradas em altura !!
  - São ABPs de altura “aceitável”, com procuras “pouco demoradas”
  - Árvores AVL (1962)
  - Red-black trees – Java TreeMap

Árvores Equilibradas em Altura – Balanced Trees

Árvores equilibradas em altura

- Esforço computacional das operações habituais sobre ABPs depende do comprimento do caminho a partir da raiz da árvore
- Evitar que uma ABP tenha uma altura "exagerada", para assegurar um bom "comportamento" – **Altura Ɛ O(log n)**

- O que fazer ?
- Assegurar que, para cada nó, a altura das suas duas subárvores não é "muito diferente" – **Critério de equilíbrio**

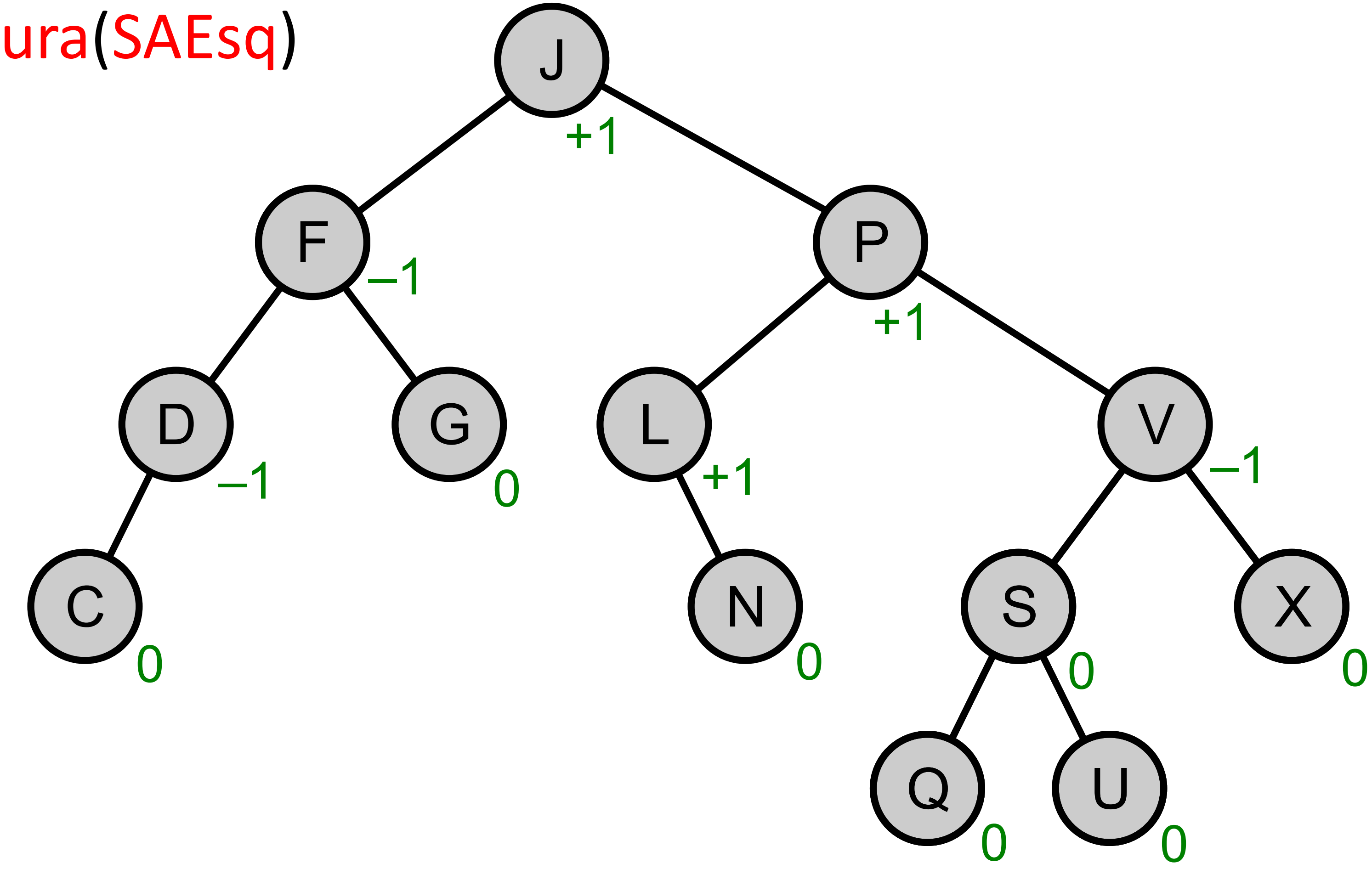
Critério de equilíbrio

- A altura das duas subárvores de cada nó difere, quando muito, de uma unidade (0 ou ±1)

- Boa ideia !!
- Fácil de verificar e de manter
- Adicionar a cada nó um atributo com a altura da (sub-)árvore da qual é raiz

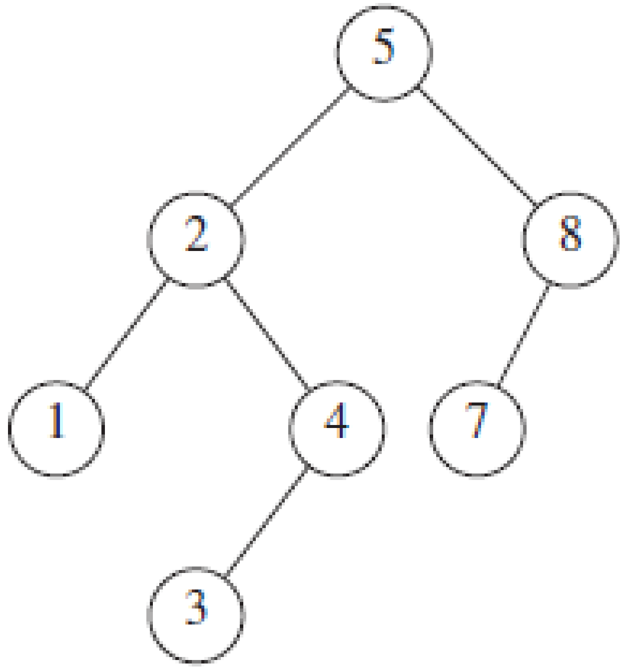
Fator de equilíbrio de um nó

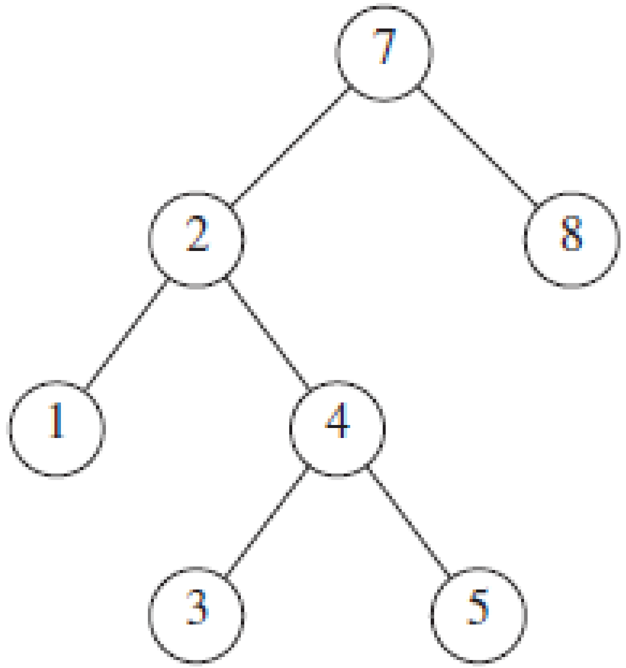
- F = altura(SADir) – altura(SAEsq)



[Wikipedia]

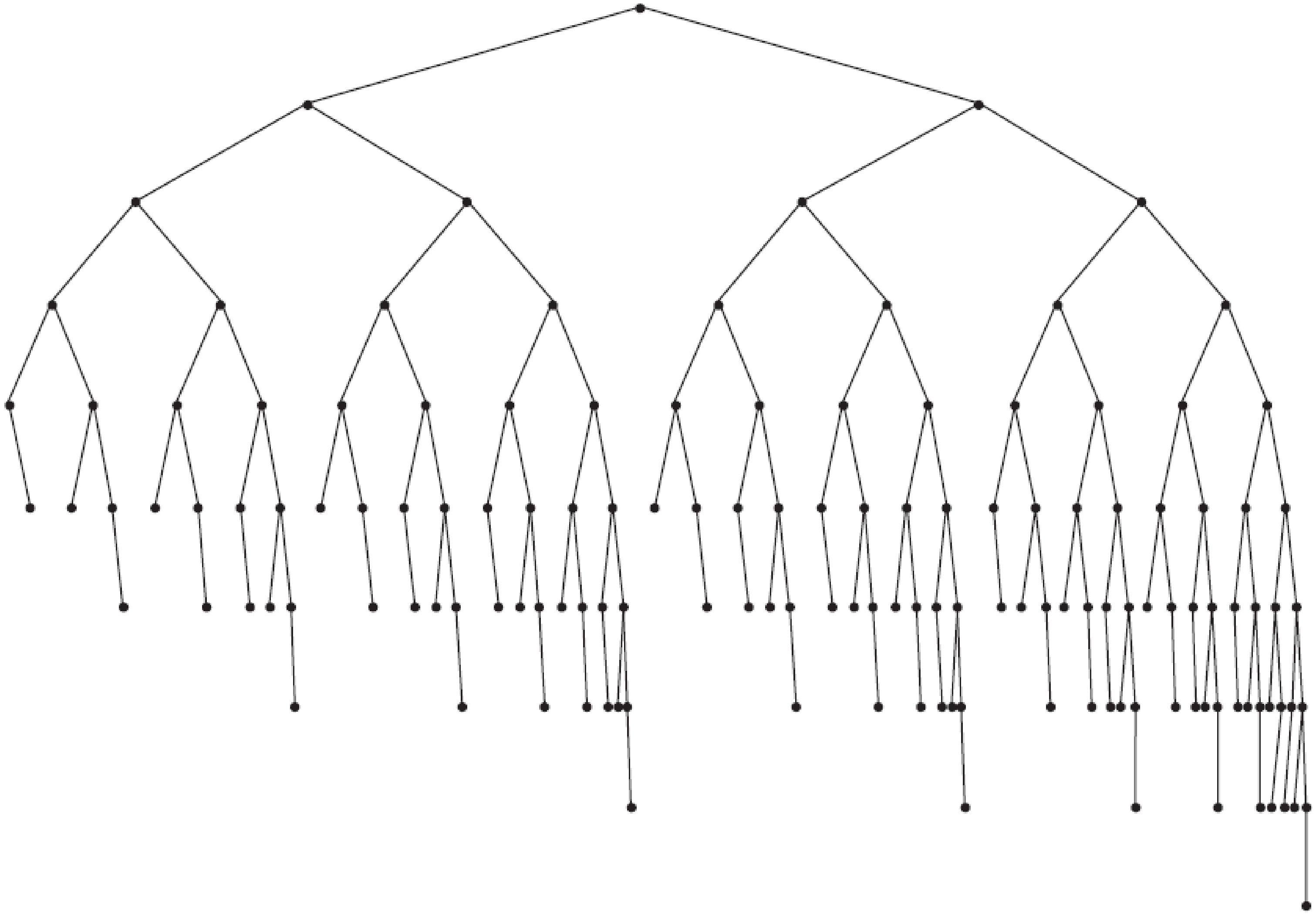
Árvores equilibradas ?





[Weiss]

Árvore equilibrada – Qual é a sua altura ?



[Weiss]

Árvores AVL –
Árvores de Adelson-Velskii e Landis

Árvores AVL – Manter altura equilibrada

- Assegurar o **critério de equilíbrio** sempre que se adiciona ou remove um nó
- Tem de ser fácil de verificar e de manter !!

- **Reposicionar** nós / subárvores quando o critério de equilíbrio falha !!
- MAS, manter o **critério de ordem** da ABP !!

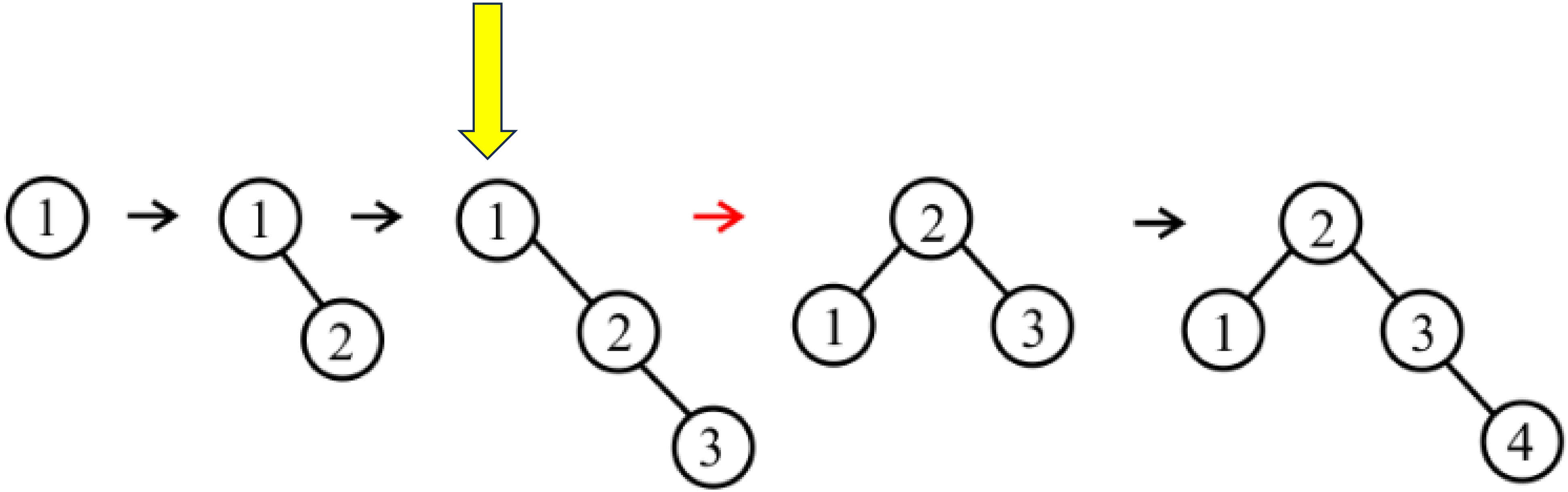
- Basta fazer a verificação / reposicionamento ao longo do **caminho** entre a raiz e um nó que tenha sido "alterado" – traceback

Árvores AVL – Fator de equilíbrio

- Para cada nó de uma árvore AVL equilibrada em altura
- As duas subárvores têm a mesma altura
- Ou a sua altura difere de 1
- **F = Altura(SADireita) – Altura(SAEsquerda)**
- **F = -1, 0, 1**

- Se uma árvore estiver equilibrada, a adição/remoção de um nó pode forçar F a tomar o valor +2 ou -2
- Podemos usar para identificar os nós "desequilibrados" !!

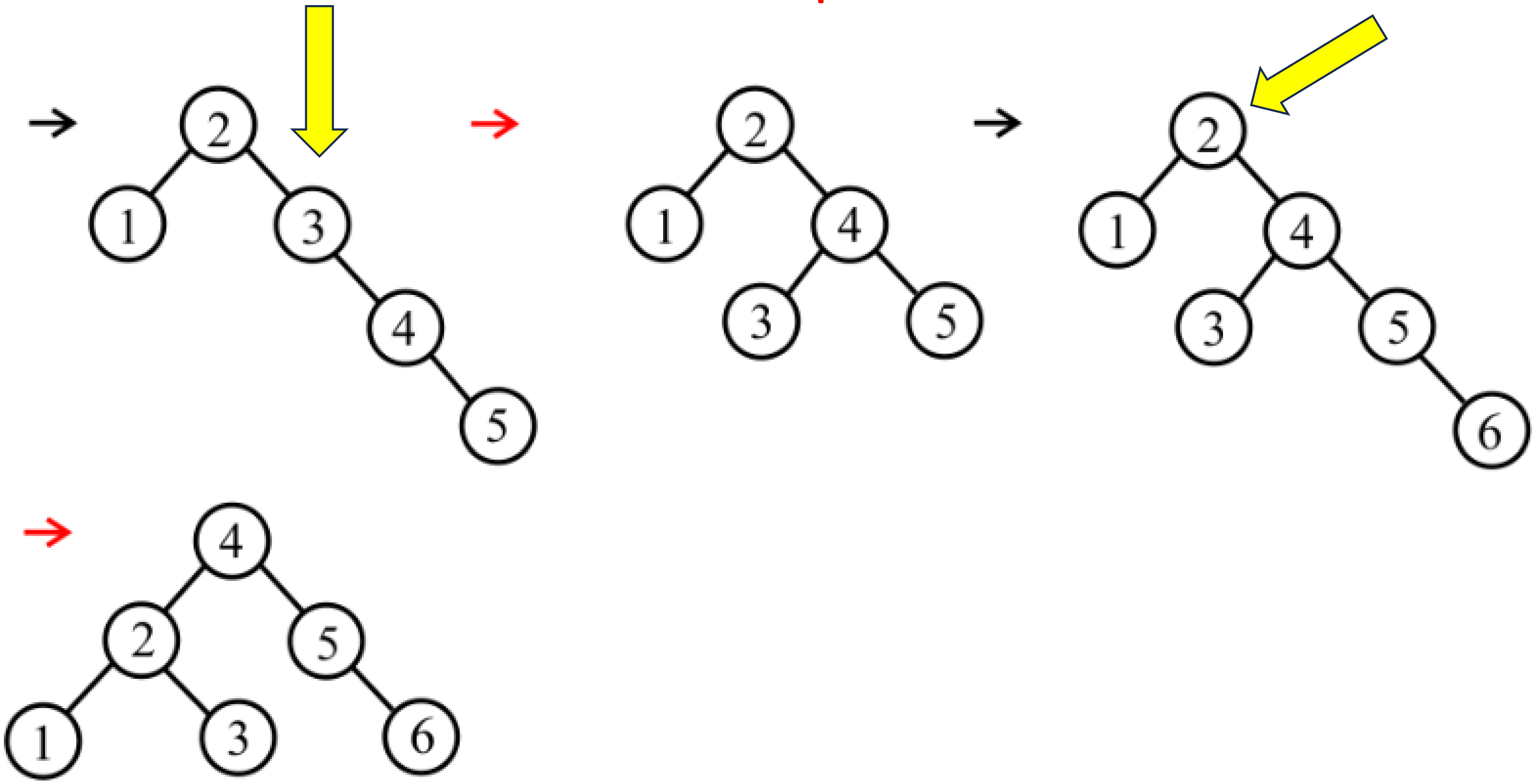
Árvore AVL – Inserir + Equilibrar, se necessário



[cs.ecu.edu]

- Após adicionar o nó 3, o fator de equilíbrio do nó 1 é 2, e esse nó falha o critério de equilíbrio
- O nó 1 é reposicionado !!

Árvore AVL – Inserir + Equilibrar, se necessário



[cs.ecu.edu]

AVL – Altura de um nó da árvore

```c
struct _AVLTreeNode {
  ItemType item;
  struct _AVLTreeNode* left;
  struct _AVLTreeNode* right;
  int height;
};
```

```c
int AVLTreeGetHeight(const AVLTree* root) {
  if (root == NULL) return -1;

  return root->height;
}
```

Atualizar a altura após inserir/remover um nó

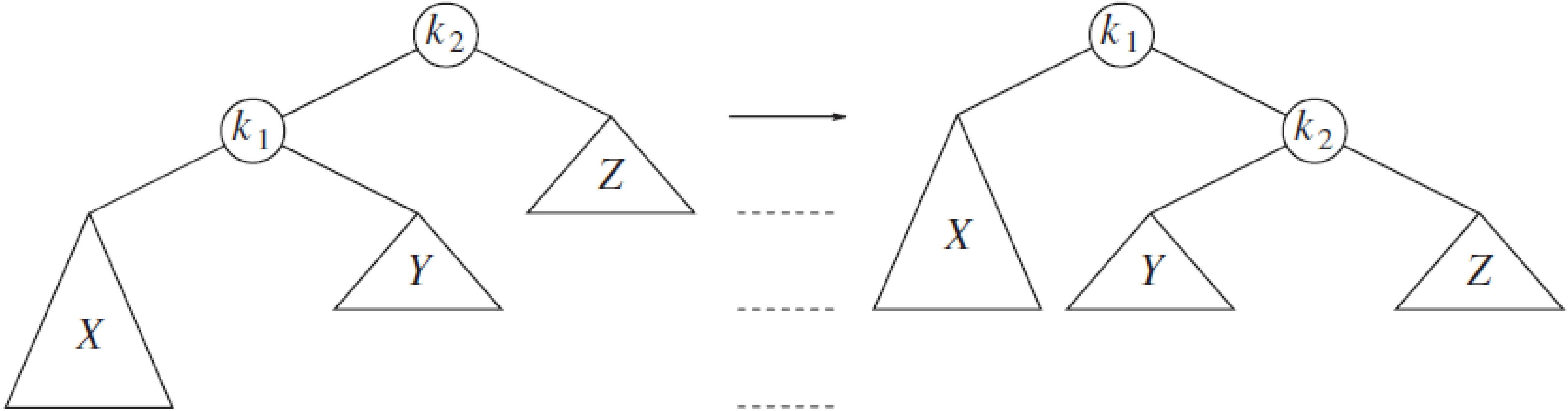
```
static void _updateNodeHeight(AVLTree* t) {
  assert(t != NULL);

  int leftHeight = AVLTreeGetHeight(t->left);

  int rightHeight = AVLTreeGetHeight(t->right);

  if (leftHeight >= rightHeight) {
    t->height = leftHeight + 1;
  } else {
    t->height = rightHeight + 1;
  }
}
```

Como **corrigir** / **equilibrar**, se necessário ?

- Efetuando **operações de rotação** – há 4 possibilidades
- MAS, assegurando o critério de ordem das ABPs
- Apenas **troca de ponteiros** para termos operações rápidas !

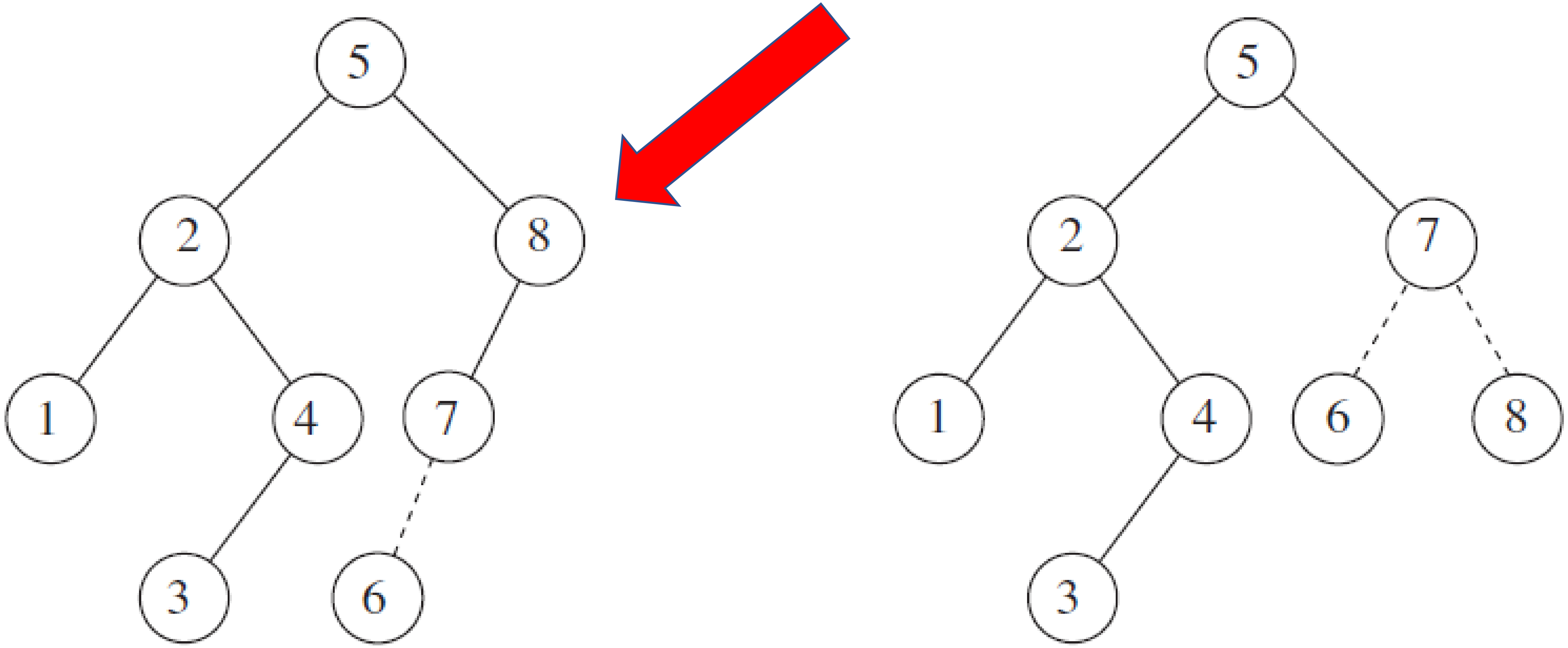
- **Rotações simples** à esquerda ou à direita
- **Rotações duplas** à esquerda ou à direita
  - Sequência de duas rotações simples

Rotação simples à esquerda : $F(k_2) = -2$



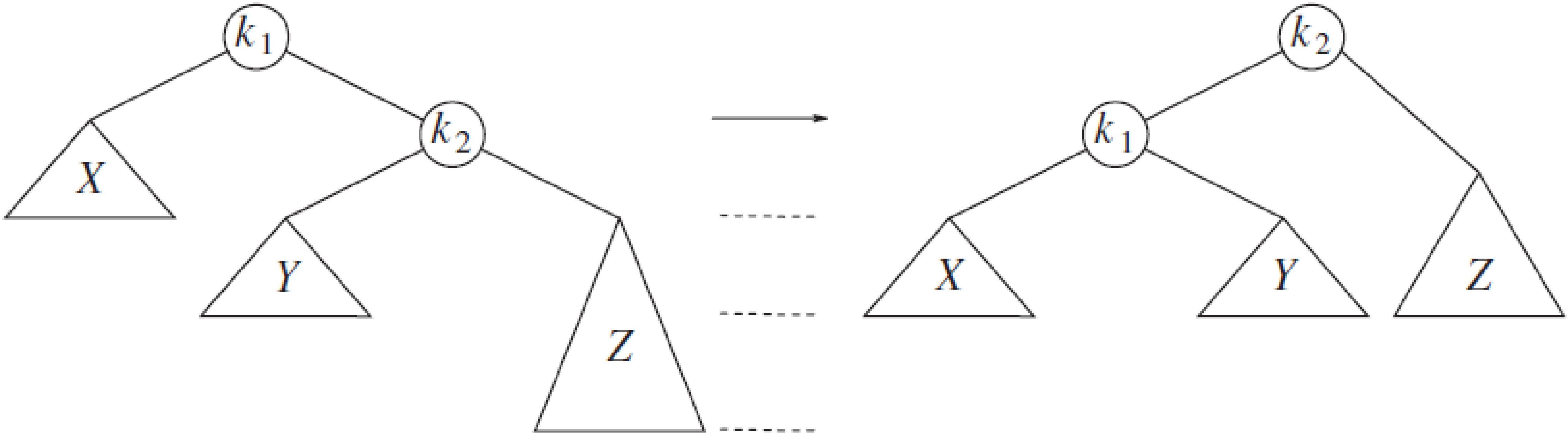
[Weiss]

Rotação simples à esquerda : F(8) = -2



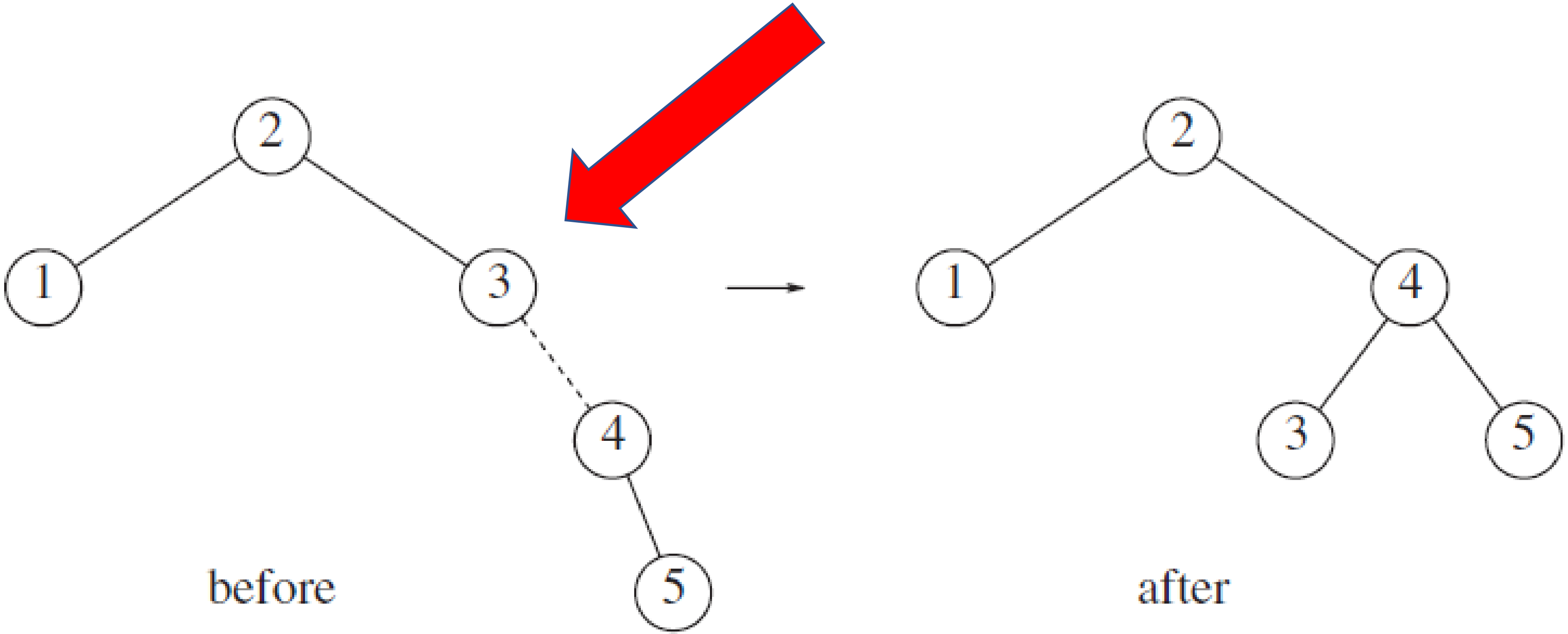
[Weiss]

Rotação simples à direita : $F(k_1) = +2$



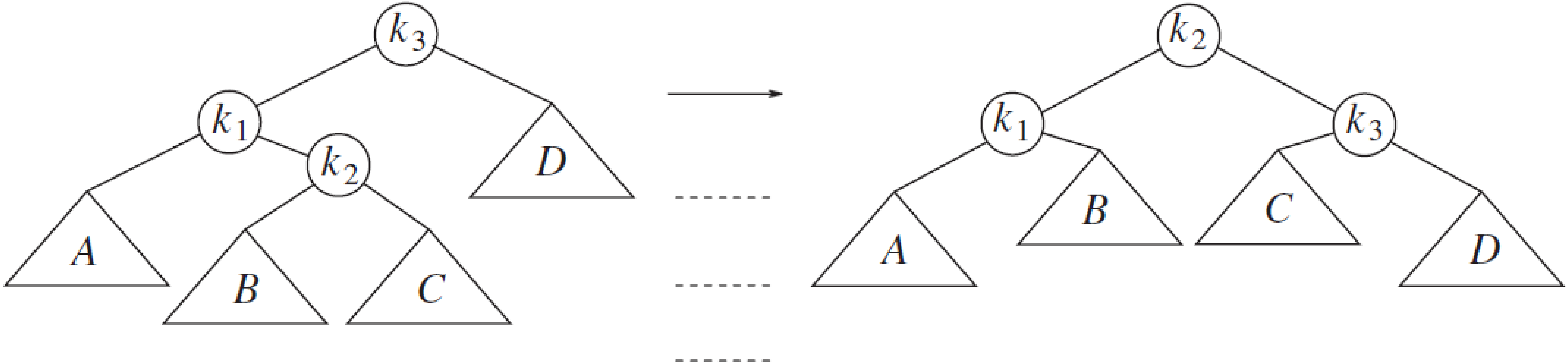
[Weiss]

Rotação simples à direita : F(3) = +2



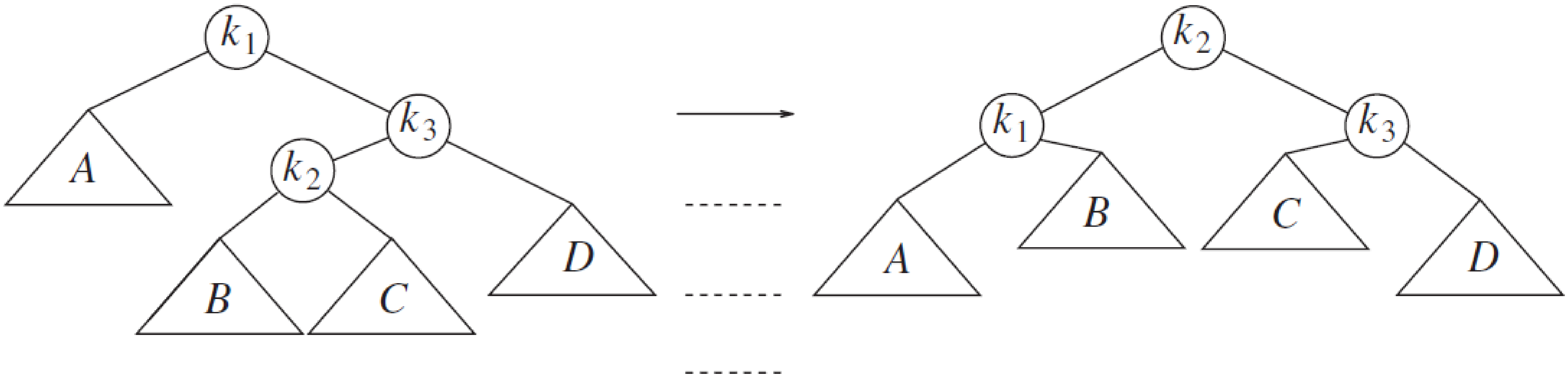
[Weiss]

Rotação dupla à esquerda – Como identificar?



[Weiss]

Rotação dupla à direita – Como identificar?



[Weiss]

AVL – Inserir um novo nó e equilibrar

- O novo nó é adicionado como uma **folha**
- Respeitando o **critério de ordem**
- Ao fazer o **traceback** das chamadas recursivas, verificar se há algum **nó desequilibrado** ao longo do caminho de retorno à raiz
- Identificar que **tipo de rotação** é necessário efetuar

- **TAREFA:** analisar o código da função que adiciona um novo nó

AVL – Remover um nó e equilibrar

- O nó é removido usando o algoritmo desenvolvido para as ABPs
- Mantendo o **critério de ordem**
- Ao fazer o **traceback** das chamadas recursivas, verificar se há algum **nó desequilibrado** ao longo do caminho de retorno à raiz
- Usar uma **função auxiliar** para efetuar o equilíbrio
  - Estratégia distinta neste caso

- **TAREFA:** analisar o código – onde é chamada a função auxiliar ?

Árvores ABP vs Árvores AVL – Experiências computacionais

Eficiência – 1ª experiência computacional

- Criar uma árvore vazia
- **Inserir ordenadamente** sucessivos números pares: 2, 4, 6, ...
- Procurar cada um desses números pares na árvore
- Procurar sucessivos inteiros positivos (impares + pares) na árvore
- Contar o número de comparações efetuadas em cada nó
  - 1 ou 2 comparações por nó visitado

Procurar os sucessivos números pares

nós	Altura ABP	Nº médio comps	Altura AVL	Nº médio comps
5000	4999	5001	12	17,69
10000	9999	10001	13	19,19
20000	19999	20001	14	20,69
40000	39999	40001	15	22,19

Procurar sucessivos números ímpares e pares

nós	Altura ABP	Nº médio comps	Altura AVL	Nº médio comps
5000	4999	5000,5	12	18,19
10000	9999	10000,5	13	19,69
20000	19999	20000,5	14	21,19
40000	39999	40000,5	15	22,69

Eficiência – 2ª experiência computacional

- Criar uma árvore vazia
- Inserir uma sequência de **números aleatórios**
- Procurar cada um desses números na árvore
- Contar o número de comparações efetuadas em cada nó
  - 1 ou 2 comparações por nó visitado

Procurar os sucessivos números aleatórios

nós	Altura ABP	Nº médio comps	Altura AVL	Nº médio comps
2500	27	19,64	12	16,18
5000	25	22,10	14	17,66
10000	30	25,72	15	18,85
20000	28	25,83	16	19,83
40000	32	26,73	16	20,91

Exercícios / Tarefas

Exercício 1 – Escolha múltipla

Seja dada uma árvore binária armazenando, de modo **não-ordenado**, *n* números inteiros.

a) Determinar o menor elemento armazenado na árvore é uma operação de complexidade ***O(log n)***.

b) No pior caso, verificar se um dado número pertence à árvore é uma operação de complexidade ***O(n)***.

c) Determinar a altura da árvore é uma operação de complexidade ***O(log n)***.

d) Todas estão corretas.

Exercício 2 – Escolha múltipla

Seja dada uma **árvore binária** de altura **equilibrada** que armazena, de modo **ordenado**, *n* números inteiros.

a) No pior caso, determinar o valor do menor elemento armazenado na árvore é uma operação de complexidade ***O(log n)***.

b) No pior caso, concluir que um dado número não pertence à árvore é uma operação de complexidade ***O(log n)***.

c) Ambas estão corretas.

d) Nenhuma está correta.

Tarefa 1 : ABP – Adicionar um elemento

- Desenvolva uma função recursiva que adiciona um novo elemento a uma Árvore Binária de Procura (ABP) / Binary Search Tree (BST) que armazena números inteiros
- Se esse elemento já pertence à árvore, deve ser indicado que a operação falhou

Tarefa 2 : ABP – Remover o menor elemento

- Desenvolva uma função recursiva que remove o menor elemento de uma Árvore Binária de Procura (ABP) / Binary Search Tree (BST) que armazena números inteiros

Tarefa 3 : ABP – Remover o maior elemento

- Desenvolva uma função recursiva que remove o maior elemento de uma Árvore Binária de Procura (ABP) / Binary Search Tree (BST) que armazena números inteiros