

MATEMÁTICA DISCRETA

Ano Letivo 2024/2025 (Versão: 16 de Março de 2025)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
<https://elearning.ua.pt/>

CAPÍTULO 3
AGRUPAMENTOS E IDENTIDADES
COMBINATÓRIAS

INTRODUÇÃO

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Nomenclatura

Falamos de

- **arranjos** quando a ordem das escolhas interessa,
- e de **combinações** quando a ordem das escolhas não interessa.
- Utilizamos o adjetivo **simples** para indicar que não permitimos repetições.

1. Arranjos

2. Combinações

3. Permutações com repetição

4. Identidades Combinatórias

1. ARRANJOS

Definição

Um **arranjo com repetição de n elementos k a k** é uma «maneira» de escolher k elementos entre n com repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos com repetição de n elementos k a k denota-se por **$A^r(n, k)$** .

Como calcular?

$$A^r(n, k) = n^k \quad (\text{pelo princípio da multiplicação}).$$

Nota (o caso de $k = 0$)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $A^r(n, 0) = n^0 = 1$. Em particular, $A^r(0, 0) = 0^0 = 1$.

Exemplo

Supondo que temos 6 pessoas, e fazemos a cada uma a pergunta «Qual é o dia da semana do seu aniversário?». Qual é o número de possíveis respostas?

Resposta: $A^r(7, 6) = 7^6 = 117649$.

Exemplo

Supondo que se encontra disponível um número não limitado de bolas *vermelhas, azuis e verdes* e sabendo que as bolas da mesma cor são indistinguíveis, determine o número de sequências de 5 bolas que é possível formar?

Ou seja, fazer uma sequência de $k = 5$ escolhas em $\{\text{●}, \text{●}, \text{●}\}$.

Resposta: $A^r(3, 5) = 3^5 = 243$.

Definição

Um **arranjo sem repetição** (ou **arranjo simples**) de n elementos k a k é uma «maneira» de escolher k elementos entre n sem repetição e dependente da ordem; ou seja, é uma função **injetiva** do tipo

$$f: \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}.$$

O número de arranjos sem repetição de n elementos k a k denota-se por $A^s(n, k)$.

Como calcular?

$$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(pelo princípio da multiplicação generalizada).

Nota (o caso de $n = k$)

$A^s(n, n) =$ o número de permutações de n elementos $= n!$.

Exemplo

Determinamos o número de formas distintas^a de sentar k pessoas retiradas de um grupo de n pessoas

- num banco corrido.

Resposta: $A^s(n, k)$.

- numa mesa redonda.

Aqui identificamos as maneiras que se obtém (uma a partir da outra) por *rotação*. Portanto, a resposta é

$$\frac{A^s(n, k)}{k}.$$

^aduas «formas» são iguais se envolve as mesmas pessoas e cada pessoa tem os mesmos vizinhos nos mesmos lados.

Exemplo

Qual o número de alinhamentos possíveis de 12 escuteiros de tal modo que dois deles (fixos) sejam sempre vizinhos um do outro?

Sejam A e B estes dois escuteiros, e tiramos A do grupo. O número de todos os alinhamentos dos restantes 11 é

$$11! = 39916800.$$

Em cada destes alinhamentos, podemos inserir A ou à esquerda ou à direita de B ; portanto, o número de alinhamentos onde A e B são vizinhos é

$$2 \cdot 11! = 79833600.$$

2. COMBINAÇÕES

Definição

Uma **combinação sem repetição** (ou **combinação simples**) de **n elementos k a k** é um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos.

$\binom{n}{k}$ denota o número de combinações simples de n elementos k a k .

Como calcular?

$$\binom{n}{k} = \frac{A^s(n, k)}{k!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}.$$

Ideia

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

213	321	214	421	324	423	314	413
132	312	142	412	243	432	143	431
123	231	124	241	234	342	134	341

Exemplo

Há 6 tipos de bilhetes da lotaria. Quantas maneiras existem de comprar 3 bilhetes de tipos diferentes?

Resposta: $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Exemplo

Num grupo de 16 raparigas e 15 rapazes, quantos grupos de 5 pessoas com pelo menos 3 rapazes se pode formar?

Resposta:

$$\begin{aligned} \binom{15}{3} \cdot \binom{16}{2} + \binom{15}{4} \cdot \binom{16}{1} + \binom{15}{5} \cdot \binom{16}{0} &= 54600 + 21840 + 3003 \\ &= 79443. \end{aligned}$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).
3. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Ideia

Sejam $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Sobre 1: A função

$$f: \{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{B \subseteq X \mid |B| = n - k\}$$
$$A \longmapsto A^c$$

é invertível e por isso bijetiva.

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).
3. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Ideia

Sejam $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Sobre 2: Temos:

$$\begin{aligned}\{A \subseteq X \mid |A| = k\} &= \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \notin A\} \cup \{A \subseteq X \mid |A| = k, n \in A\} \\ &= \{A \subseteq Y \mid |A| = k\} \cup \{B \cup \{n\} \mid B \subseteq Y, |B| = k-1\}\end{aligned}$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n$. Então:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ (suponhamos $n > 0$ e $k > 0$).
3. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Ideia

Sejam $X = \{1, 2, \dots, n\}$ e $Y = \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Sobre 3: Temos:

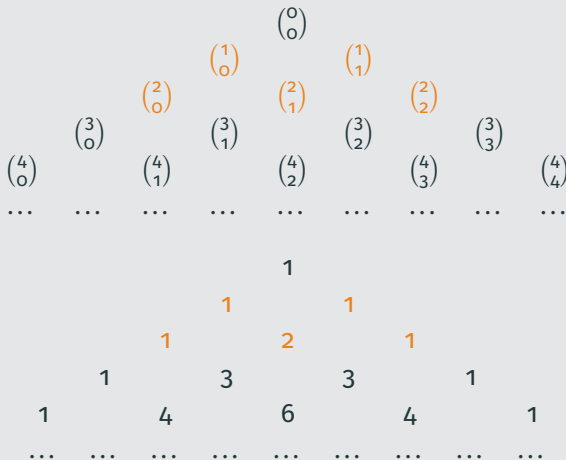
$$\begin{aligned} P(X) &= \bigcup_{i=0}^n \{A \subseteq X \mid |A| = i\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \cup \dots \cup \{X\} \end{aligned}$$

(dois a dois disjunta).

Recordamos:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

A recorrência



Teorema

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

2. Em particular, com $x = 1$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

3. Em geral, para todos os $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

(a fórmula binomial de Newton).

O número $\binom{n}{k}$ diz-se também **coeficiente binomial**.

Exemplo (Recordamos de «Enumeração Combinatória»)

O número de sequências binárias com k uns e m zeros coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k + m$ elementos.

Logo, há $\binom{k+m}{k}$ tais sequências binárias.

Ideia. De facto, com $X = \{1, \dots, k + m\}$, a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_{k+m} \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k+m} \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Exemplo (Recordamos de «Enumeração Combinatória»)

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$, $n > 0$) coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros. Portanto, o número de soluções é $\binom{n+k-1}{k}$.

Ideia

A uma tal solução (s_1, \dots, s_n) corresponde à sequência

$$\underbrace{1 \dots 1}_{s_1 \text{ vezes}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s_2 \text{ vezes}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s_n \text{ vezes}} .$$

Exemplo: Consideremos a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

$$(2, 3, 0) \longmapsto 1101110, \quad (2, 2, 1) \longmapsto 1101101.$$

Definição

Seja X um conjunto finito. Um **multiconjunto** M em X é um par (X, ν) onde $\nu: X \rightarrow \mathbb{N}$. Aqui $\nu(x)$ representa «o número de repetições» de x ou «a multiplicidade» de x .

O número $\sum_{x \in X} \nu(x)$ designa-se por **tamanho de M** ou **número de elementos de M** ou **cardinalidade de M** .

Nota

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Com $a_i = \nu(x_i)$, representamos o multiconjunto M da forma mais intuitiva por

$$M = \{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}\} \quad \text{ou} \quad M = \{\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{a_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{a_n \text{ vezes}}\}.$$

Definição

Uma **combinação com repetição de n elementos k a k** é um multiconjunto de k elementos num conjunto de n elementos.

O número de combinações com repetição de n elementos k a k denota-se por $\binom{n}{k}$.

Exemplo

Escolher 3 elementos em $\{1, 2, 3, 4\}$: *Intuição:* «114» = «141» \neq «143».

Teorema

O número de combinações com repetição de n elementos k a k é igual ao número de soluções de $x_1 + \cdots + x_n = k$ com $x_i \in \mathbb{N}$. Portanto, se $n > 0$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Exemplo

Vamos determinar o número de possibilidades de colocação de 20 bolas indistinguíveis em 5 caixas numeradas, com pelo menos duas bolas em cada caixa.

Começamos por pôr duas bolas em cada caixa. Depois, para cada uma das restantes bolas, escolhemos uma das 5 caixas; ou seja, fazemos uma sequência de 10 escolhas entre 5 elementos

(por exemplo: 13353 . . . 2)

mas o resultado final é independente da ordem das escolhas (no fim, apenas podemos observar quantas bolas estão em cada caixa).

Portanto, temos uma combinação com repetição de 5 elementos 10 a 10:

$$\left(\binom{5}{10} \right) = \binom{10 + 5 - 1}{4} = \binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001.$$

Teorema

Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Então:

1. $\binom{n}{0} = 1$.
2. Para $k > 0$, $\binom{0}{k} = 0$.
3. Para $n > 0$ e $k > 0$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Ideia.

Consideremos $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Então,

$$\begin{aligned}\{k\text{-multiconjuntos em } X\} &= \{k\text{-multiconjuntos em } X \text{ com } \nu(x_n) > 0\} \\ &\quad \cup \{k\text{-multiconjuntos em } X \text{ com } \nu(x_n) = 0\}.\end{aligned}$$



Escolher k elementos entre n elementos:

	com repetição	sem repetição (simples)
dependente da ordem (arranjos)	$A^r(n, k) = n^k$	$A^s(n, k) = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ fatores}}$
independente da ordem (combinações)	$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$ se $(n > 0)$	$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ fatores}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$ (coeficiente binomial)

Algumas igualdades:

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m},$$

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (n, k > 0).$$

3. PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Exemplo

Quantos números de telefones da rede fixa podem ser atribuídos com dois 2 (incluindo já o 2 inicial), quatro 3, dois 6 e um 9?

Os números tem a forma 2 — — — — — — —; ou seja, temos 8 lugares onde podemos «permutar 2, 3, 6 e 9 com repetição». Para obter o número de tais «permutações», aplicamos o seguinte:

- Entre os 8 lugares, escolhemos o lugar do 2; depois,
- entre os restantes $8 - 1 = 7$ lugares, escolhemos 4 lugares onde deve estar o 3; depois,
- entre os restantes $7 - 4 = 3$ lugares, escolhemos 2 lugares onde deve estar o 6; depois
- resta $3 - 2 = 1$ lugar para o 9.

Portanto, o número de tais números é:

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 840.$$

Definição

Seja $M = (X, \nu)$ um multiconjunto de tamanho n . Uma **permutação de M** (ou **permutação com repetição**) é uma sequência $s = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de X tal que cada $x \in X$ ocorre $\nu(x)$ vezes em s .

Teorema

O número de permutações do multiconjunto $\{x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k}\}$ de tamanho n é

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Exemplo

Pelo exemplo anterior, o número de permutações do multiconjunto $\{2, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 9\}$ de 8 elementos é

$$\frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 840.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Ideia

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{\text{(escolher } A_1)}} \cdot \underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{\text{(escolher } A_2)}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}=n_k}{n_k}}_{\text{(escolher } A_k)}} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-n_1+1) \cdot \dots \cdot 1}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Definição

Seja X um conjunto de n elementos e sejam n_1, n_2, \dots, n_k números naturais com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. O número de sequências (A_1, A_2, \dots, A_k) de k subconjuntos de X dois a dois disjuntos e com $|A_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, designa-se por **coeficiente multinomial** e denota-se por

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}.$$

Teorema

$$\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Nota

- Se $k = 2$, obtemos o coeficiente binomial: $\binom{n}{m \ (n-m)} = \binom{n}{m}$.
- Se $n_1 = \dots = n_k = 1$ (e por isso $k = n$): $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = n!$.

Teorema

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}.$$

Ideia

- Desenvolvendo o produto de n fatores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

- obtêm-se os termos da forma

$$a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k},$$

com $n_1 + \dots + n_k = n$, que correspondem à escolha de a_1 em n_1 dos fatores, a_2 em n_2 dos restantes fatores,

- Logo, existem $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k}$ termos da forma $a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k}$.

4. IDENTIDADES COMBINATÓRIAS

Já aprendemos:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

No caso das últimas duas identidades, na prova conta-se os elementos do mesmo conjunto de **duas maneiras diferentes**.

Exemplo

Para todos os $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Justificação: Consideremos X e Y com $|X| = n$, $|Y| = m$ e $X \cap Y = \emptyset$.

- Assim, há $\binom{n+m}{l}$ subconjuntos de $X \cup Y$ com l elementos.
- Por outro lado, podemos obter estes subconjuntos escolhendo k elementos em X e $l - k$ elementos em Y , para cada número k entre 0 e l .

Exemplo

Em particular, para $m = n = k$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Exemplo

Para cada $n \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 1$ com $n_1 + \dots + n_k = n$,

$$\binom{n}{n_1 \dots n_k} = \sum_{i=1}^k \binom{n-1}{n_1 \dots (n_i-1) \dots n_k}.$$

Justificação: No que se segue, uma sequência (A_1, \dots, A_k) de subconjuntos de um conjunto finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$ dois a dois disjuntos, com $|A_i| = n_i$ ($i \in \{1, \dots, k\}$), é designada por **partição de X do tipo (n_1, \dots, n_k)** .

Por definição, $\binom{n}{n_1 \dots n_k}$ é o número de elementos do conjunto

$\{\text{as partições } (A_1, \dots, A_k) \text{ de } X \text{ do tipo } (n_1, \dots, n_k)\}.$

Podemos representar este conjunto como a união dos seguintes conjuntos (dois a dois disjuntos).

Exemplo (continuação)

- o conjunto das sequências $(B_1 \cup \{n\}, B_2, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1-1, n_2, \dots, n_k) ;
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2 \cup \{n\}, \dots, B_k)$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1, n_2-1, \dots, n_k) ;
- ...
- o conjunto das sequências $(B_1, B_2, \dots, B_k \cup \{n\})$ onde (B_1, B_2, \dots, B_k) é uma partição de $\{1, \dots, n-1\}$ do tipo (n_1, n_2, \dots, n_k-1) .

Logo:

$$\binom{n-1}{(n_1-1) \ n_2 \ \dots \ n_k} + \binom{n-1}{n_1 \ (n_2-1) \ \dots \ n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1 \ n_2 \ \dots \ (n_k-1)} = \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k}.$$

Exemplo

Para todos os $n, m \in \mathbb{N}$ ($n \leq m$),

$$\binom{m+1}{n+1} = \sum_{k=n}^m \binom{k}{n}.$$

O número binomial $\binom{m+1}{n+1}$ é igual ao tamanho do conjunto

$$Y = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid |A| = n+1\}.$$

Para cada $k \in \{n, \dots, m\}$, consideremos

$$Y_k = \{A \subseteq \{1, \dots, m+1\} \mid \max A = k+1, |A| = n+1\};$$

assim, $Y = Y_n \cup Y_{n+1} \cup \dots \cup Y_m$ (dois a dois disjuntos). Portanto,

$$|Y| = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m}{n}.$$