Análise da Complexidade de Algoritmos Recursivos I

08/10/2025

Sumário

- Recap
- Algoritmos recursivos
- Calcular $\boldsymbol{x^n}$
- Inverter a ordem dos elementos de um array
- Calcular o valor de um determinante
- As Torres de Hanói
- Exercícios / Tarefas
- Sugestões de leitura

Recapitulação

Selection Sort

- Número fixo de comparações :

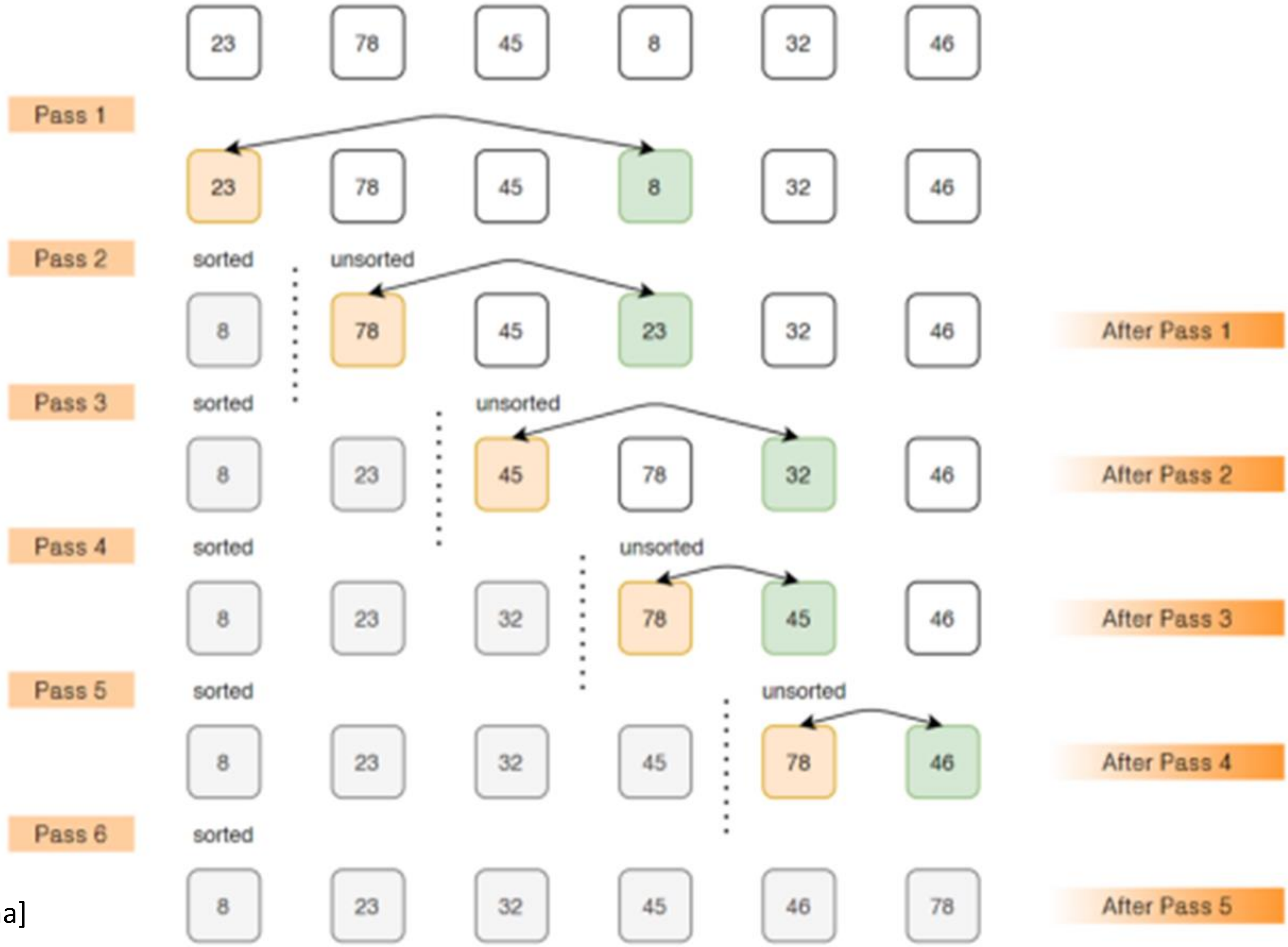
$$C(n) \approx \frac{n^2}{2}$$

- Trocas :

$$W_T(n) = n - 1$$

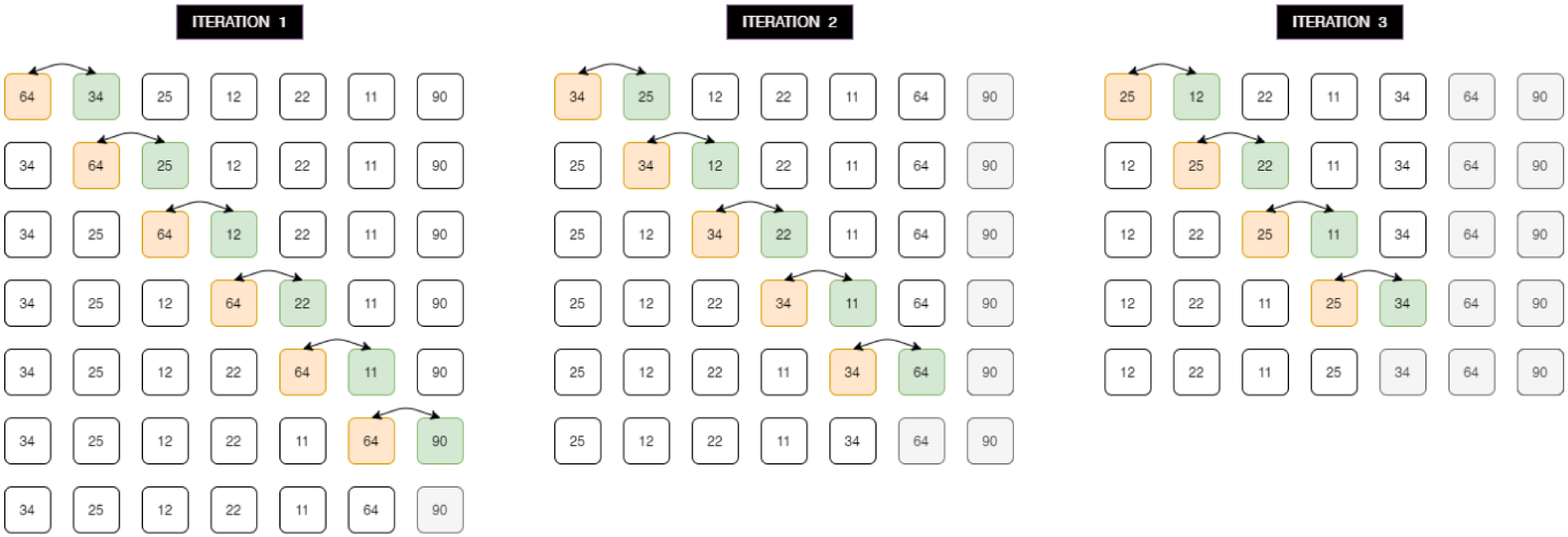
$$A_T(n) \approx n - \ln n$$

$$B_T(n) = 0$$



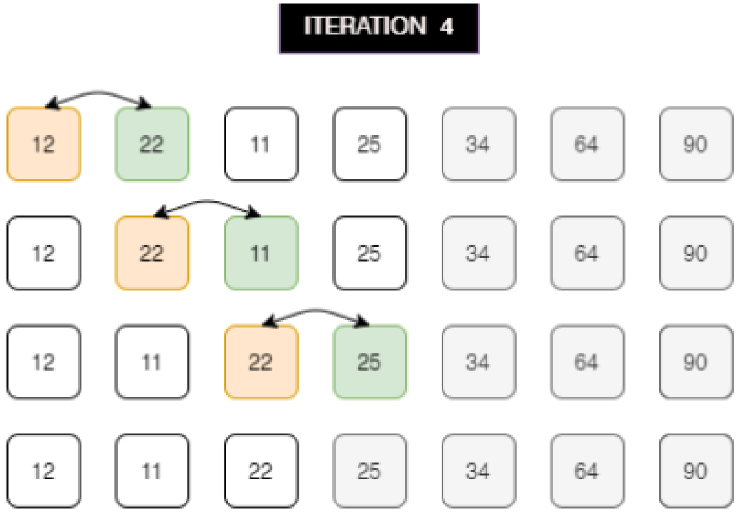
[Adwiteeya Reyna]

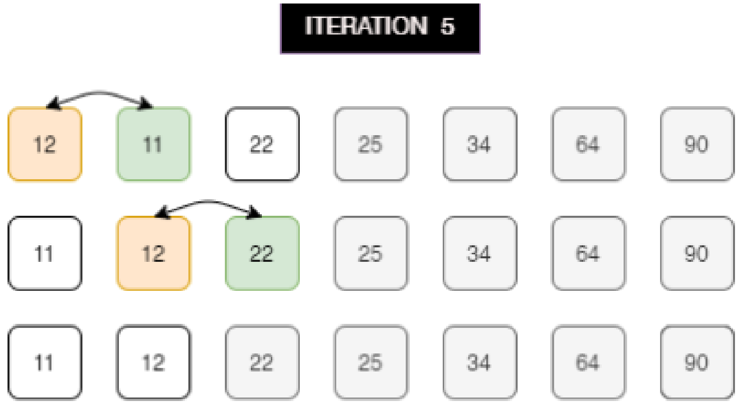
Bubble Sort

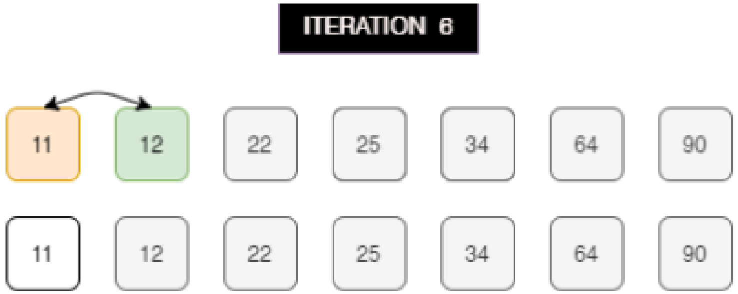


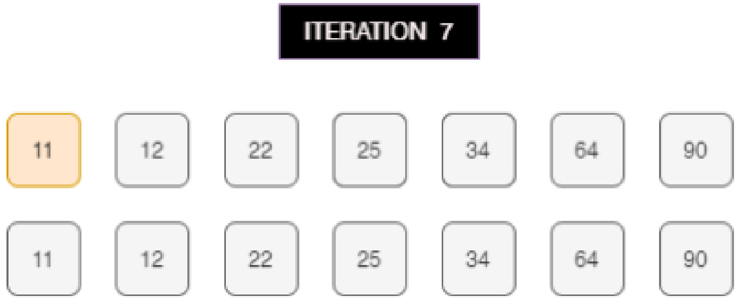
[Adwiteeya Reyna]

Bubble Sort









- Comparações :

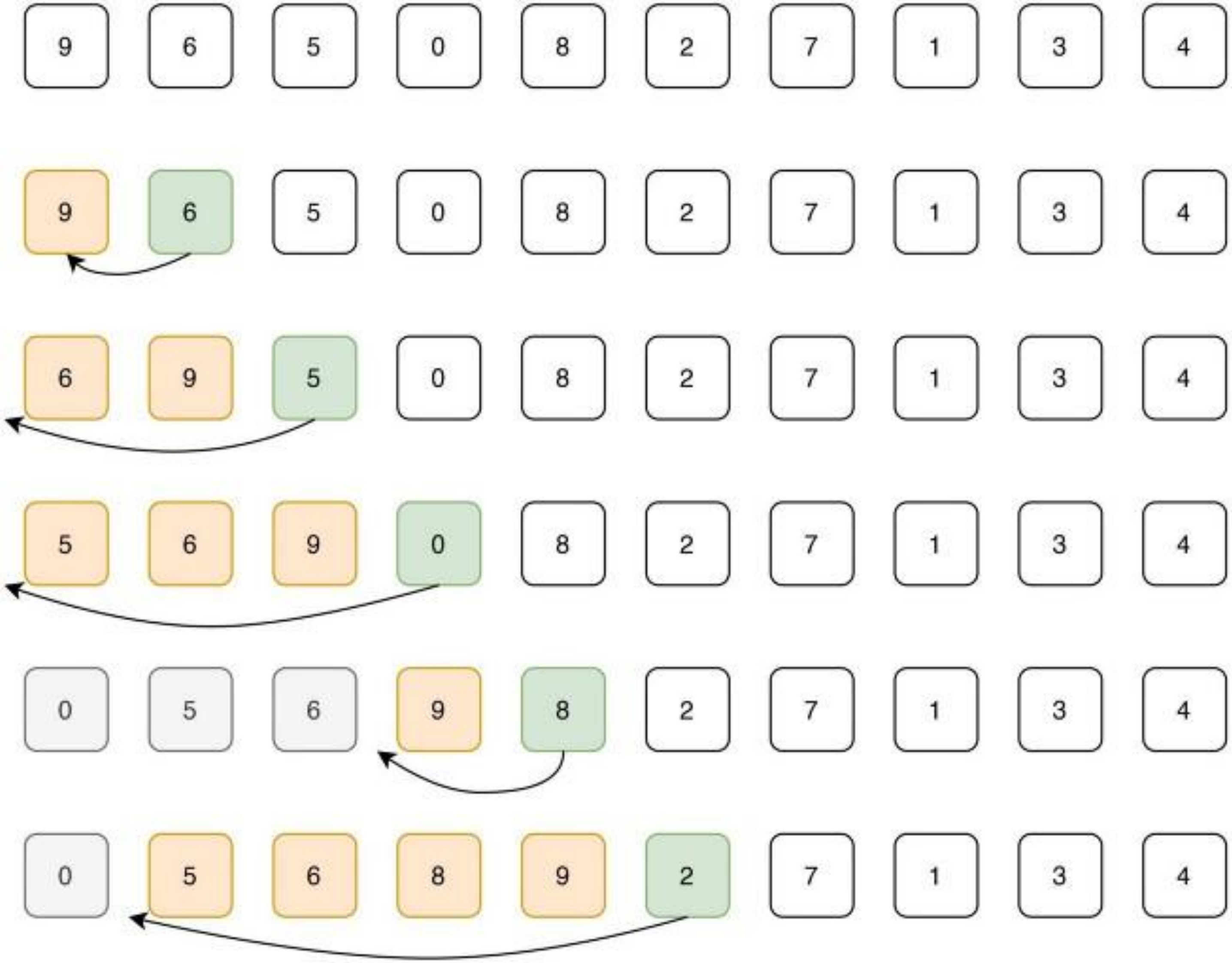
$$W_C(n) \approx \frac{n^2}{2} \quad A_C(n) \approx \frac{n^2}{3} \quad B_C(n) = n - 1$$

- Trocas :

$$W_T(n) = W_C(n) \quad A_T(n) \approx \frac{n^2}{6} \quad B_T(n) = 0$$

[Adwiteeya Reyna]

Insertion Sort



[Adwiteeya Reyna]

Insertion Sort

- Comparações :

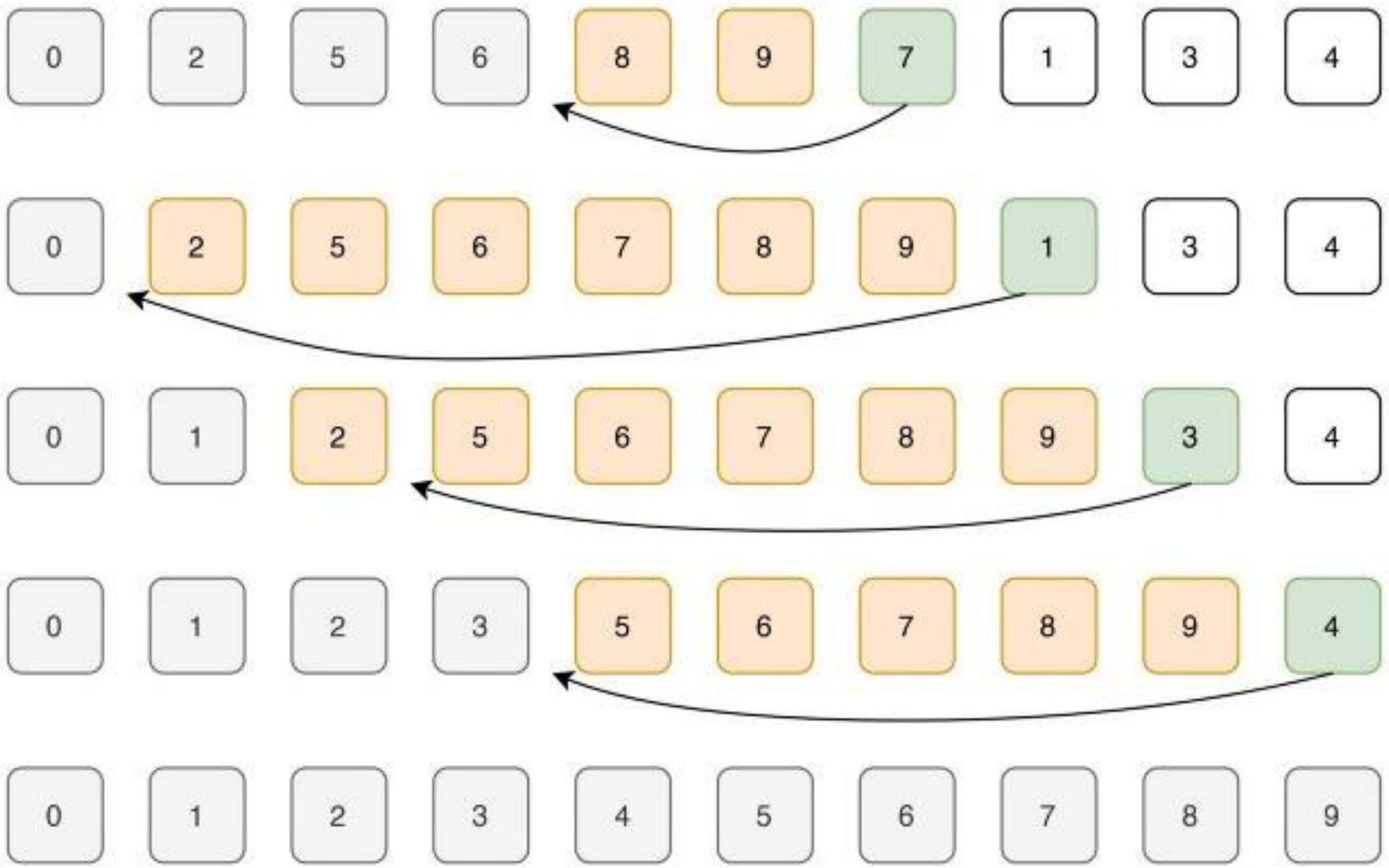
$$W_C(n) \approx \frac{n^2}{2} \quad A_C(n) \approx \frac{n^2}{4}$$

$$B_C(n) = n - 1$$

- Deslocamentos :

$$W_D(n) \approx \frac{n^2}{2} \quad A_D(n) \approx \frac{n^2}{8}$$

$$B_D(n) = 0$$



[Adwiteeya Reyna]

Comparações – Algoritmos Quadráticos

	Pior Caso	Caso Médio	Melhor Caso
Selection Sort	$\approx \frac{n^2}{2}$	$\approx \frac{n^2}{2}$	$\approx \frac{n^2}{2}$
Bubble Sort	$\approx \frac{n^2}{2}$	$\approx \frac{n^2}{3}$	$n - 1$
Insertion Sort	$\approx \frac{n^2}{2}$	$\approx \frac{n^2}{4}$	$n - 1$

Trocas / Deslocamentos – Algs. Quadráticos

	Pior Caso	Caso Médio	Melhor Caso
Selection Sort	$n - 1$	$\approx n - \ln n$	0
Bubble Sort	$\approx \frac{n^2}{2}$	$\approx \frac{n^2}{6}$	0
Insertion Sort	$\approx \frac{n^2}{2}$	$\approx \frac{n^2}{8}$	0

Bubble Sort – Testes computacionais

- Arrays Ordenados

n	# Comparações	Rácio	# Atribuições
2500	2499		0
5000	4999	2.000	0
10000	9999	2.000	0
20000	19999	2.000	0

Bubble Sort – Testes computacionais

- Arrays por Ordem Inversa

n	# Comparações	Rácio	# Atribuições	Rácio
2500	3123750		9371250	
5000	12497500	4.001	37492500	4.001
10000	49995000	4.000	149985000	4.000
20000	199990000	4.000	599970000	4.000

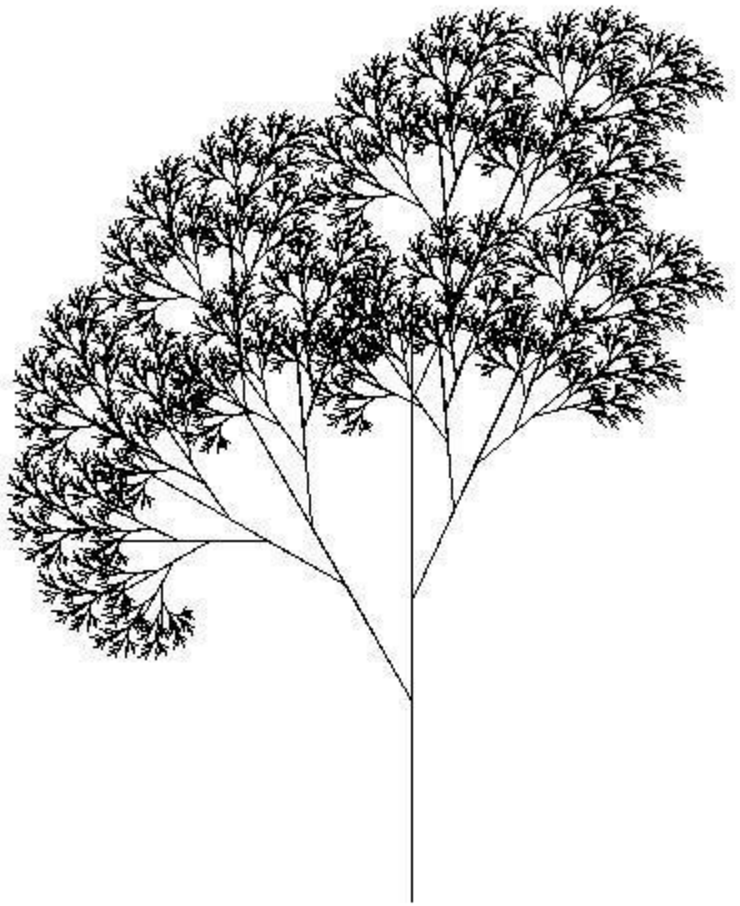
Bubble Sort – Testes computacionais

- Arrays Aleatórios

n	# Comparações	Rácio	# Atribuições	Rácio
2500	3119285		4536945	
5000	12496939	4.006	18496980	4.077
10000	49993515	4.000	74646285	4.036
20000	199969699	4.000	300555000	4.026

- Valores maiores do que os obtidos pela análise formal !!
- Cenário considerado é demasiado simples…

Algoritmos recursivos



[Wikipedia]

Algoritmos recursivos

- Oferecem soluções concisas e elegantes
- MAS, nem sempre podem ser usados – EFICIÊNCIA
- Podem ser um primeiro passo para o desenvolvimento de um posterior algoritmo iterativo

- Decomposição do problema inicial em subproblemas mais simples e do mesmo tipo
  - Desenvolvimento Top-Down

Estratégia de decomposição

- Identificar o(s) caso(s) recursivo(s)
  - Problemas do mesmo tipo
  - Diminuição da "dificuldade"

- Identificar o(s) caso(s) de base / de paragem
  - São atingíveis ?

$$n! = n \times (n - 1)!$$

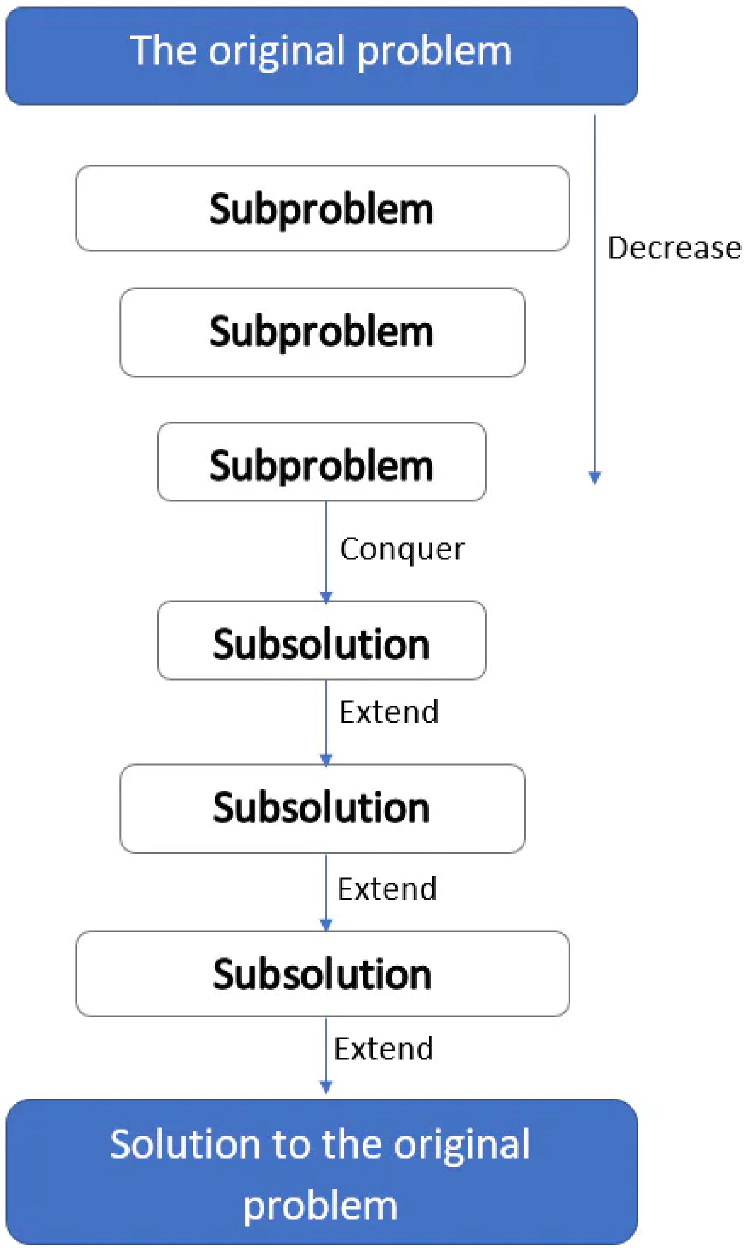
$$0! = 1$$

Decomposição em subproblemas

- Diminuir-para-Reinar / Decrease-and-Conquer
  - Resolver 1 só subproblema em cada passo do processo recursivo
  - Lista / cadeia de chamadas recursivas

- Dividir-para-Reinar / Divide-and-Conquer
  - Resolver 2 ou mais subproblemas em cada passo do processo recursivo
  - Árvore de chamadas recursivas

Decrease-and-Conquer



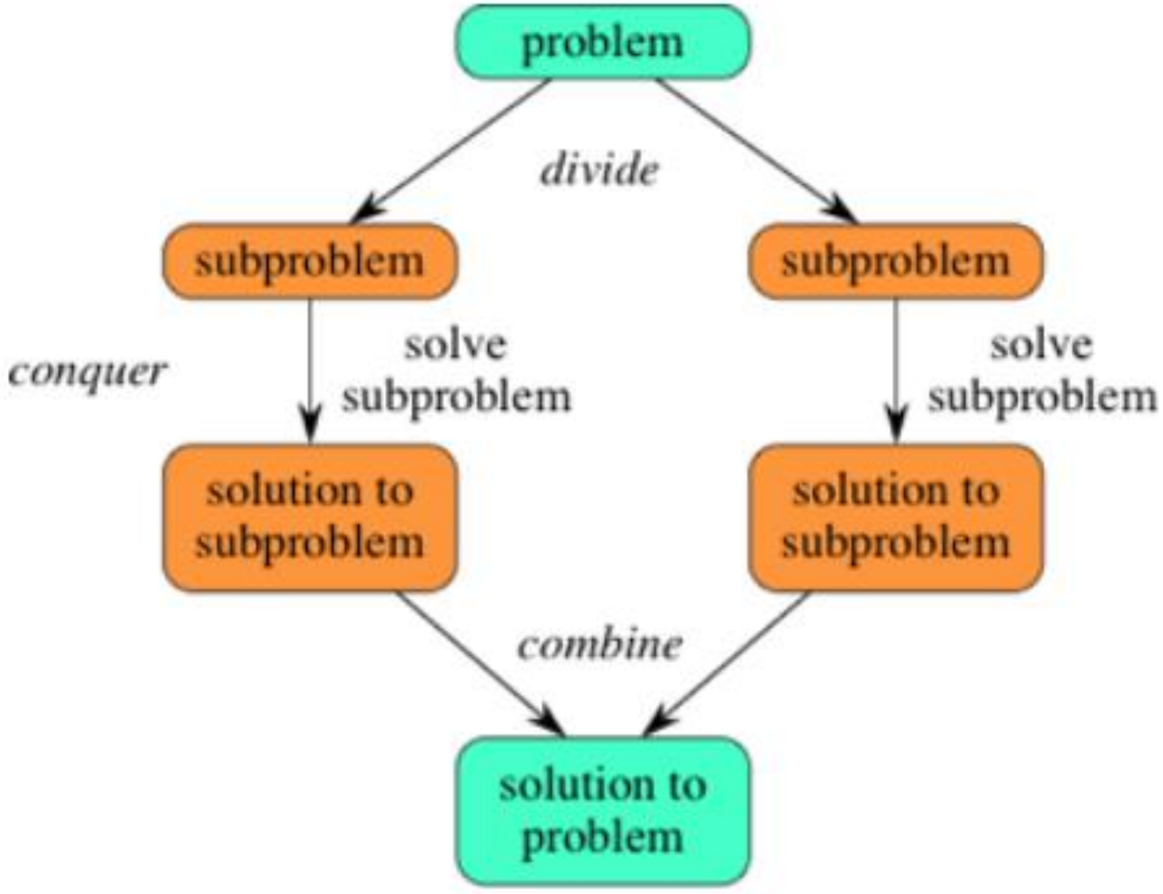
[hyperskill.org]

Diminuir-para-Reinar

- Executada 1 só chamada recursiva em cada passo
- Fatorial, mdc, travessia de um array / uma lista, procura binária, …
- Facilmente transformável num algoritmo iterativo, usando um ciclo

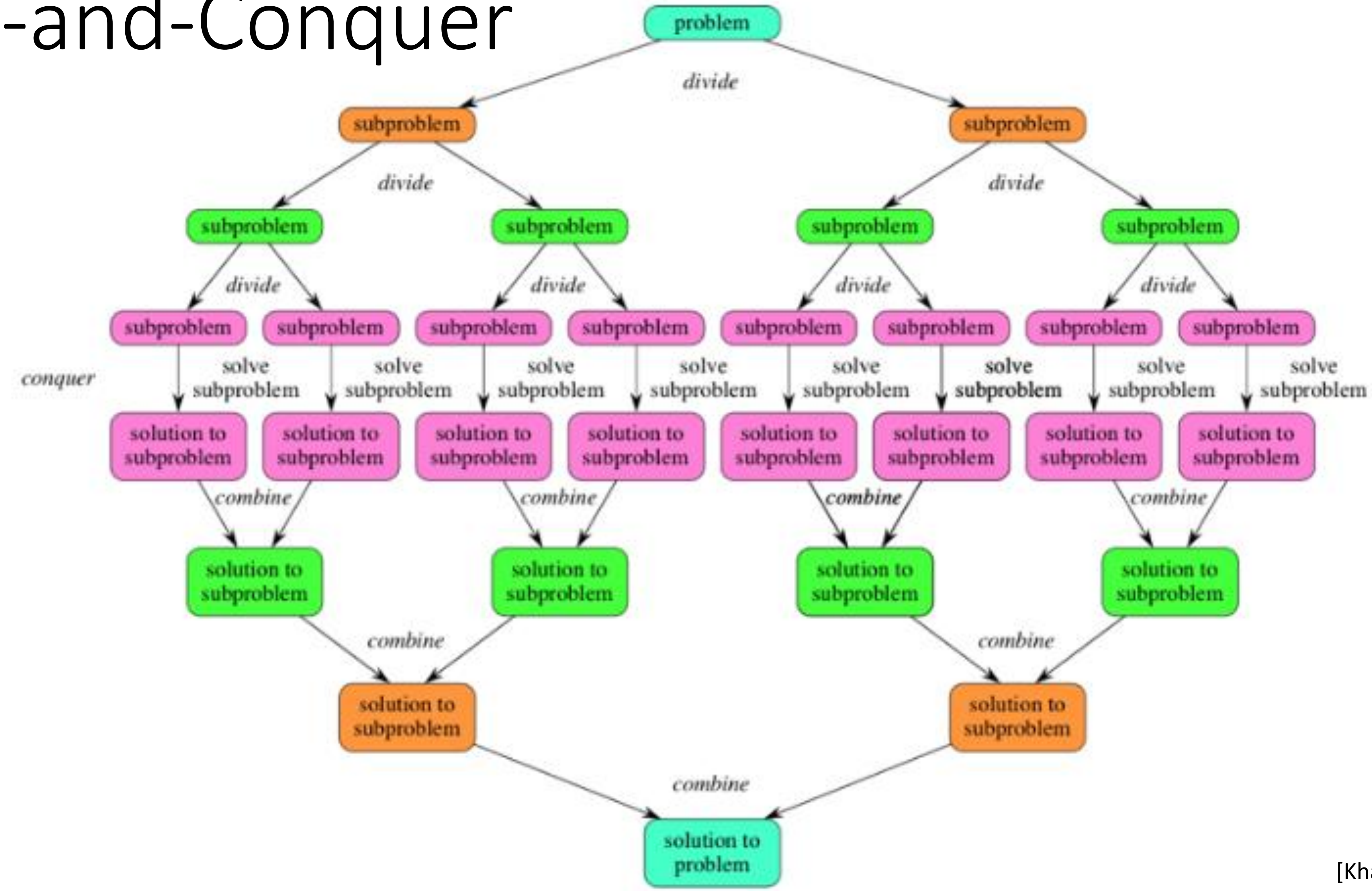
- Sugestão: implementar alguns destes algoritmos

Divide-and-Conquer –Estratégia



[Khan Academy]

Divide-and-Conquer



[Khan Academy]

Dividir-para-Reinar

- Executadas 2 ou mais chamadas recursivas em cada passo
- Sucessão de Fibonacci, Combinações, …
- Usar STACK/PILHA para transformar num algoritmo iterativo
- Sugestão: implementar alguns destes algoritmos

Eficiência computacional

- Overhead associada a cada chamada recursiva
  - Salvaguarda do contexto
  - …

- MAS, nalguns casos, também ineficiência intrínseca
  - Recalcular inúmeras vezes os mesmos valores
  - Repetir as mesmas operações

- A estratégia de Programação Dinâmica é uma possível alternativa, para determinados problemas

Análise Formal da Complexidade

- Identificar a operação mais relevante
- Obter uma expressão recorrente para o número de operações efetuadas
- Se possível, desenvolver a expressão para obter uma “fórmula fechada”
- Vamos ilustrar / aprender analisando exemplos

Calcular $\boldsymbol{x^n}$

Calcular $\boldsymbol{x^n}$

$$x^n = x \times x^{n-1}, n > 0$$
$$x^0 = 1$$

```
double p(double x, unsigned int n) {
        if(n > 0) return x * p(x, n – 1);
        return 1;
}
```

Contar o número de multiplicações

$$M(0) = 0$$
$$M(n) = 1 + M(n-1), n > 0$$

- Desenvolvimento telescópico – Quando parar ?

$$M(n) = 1 + M(n-1) = 2 + M(n-2) = \cdots = k + M(n-k)$$
$$M(n) = n + M(0) = n$$

$$\boldsymbol{M(n) \in \mathcal{O}(n)}$$

Inverter a ordem dos elementos de um array com n elementos

Inverter a ordem dos elementos

```
void inverter(int*  v, int esq, int dir) {
        if(esq < dir) {
                trocar(&v[esq], &v[dir]);
                inverter(v, esq + 1, dir – 1);
        }
}
```

Nº de trocas de elementos ?

$$T(0) = 0$$
$$T(1) = 0$$
$$T(n) = 1 + T(n-2), n > 2$$

$$T(n) = 1 + T(n-2) = 2 + T(n-4) = \cdots = k + T(n\ - 2k)$$

- Nº par de elementos vs Nº impar de elementos

Nº de trocas de elementos ?

$$T(n) = k + T(n - 2k)$$

- Seja o nº de elementos par e maior do que 2

$$n - 2k = 0 \implies T(n) = \frac{n}{2} + T(0) = \frac{n}{2}$$

- Seja o nº de elementos impar e maior do que 1

$$n - 2k = 1 \implies T(n) = \frac{n-1}{2} + T(1) = \frac{n-1}{2}$$

- Para ambos os casos: $\boldsymbol{T(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$

Calcular o valor de um determinante usando o Teorema de Laplace

Exemplo – Desenvolver pela 1ª coluna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times [5 \times 9 - 8 \times 6] - 4 \times [2 \times 9 - 8 \times 3] + 7 \times [2 \times 6 - 5 \times 3]$$

$$= 0$$

- Estratégia recursiva: decomposição em determinantes de menor dimensão

Um possível algoritmo recursivo

```
double Laplace( matriz A, unsigned int n ) {
        …
        if( n == 1 ) return A[0][0];
        sinal = -1; soma = 0;
        for( i = 0; i < n; i++ ) {
                aux = subMatriz(A, i, 0);   // retira a 1ª coluna e a linha i
                sinal *= -1;
                soma += sinal * A[i][0] * Laplace(aux, n - 1);
        }
        return soma;
}
```

Nº de multiplicações efetuadas ?

- $M(n) = \begin{cases} 0, \;\; n = 1 \\ 2 \times n + n \times M(n-1), \;\; n \geq 2 \end{cases}$

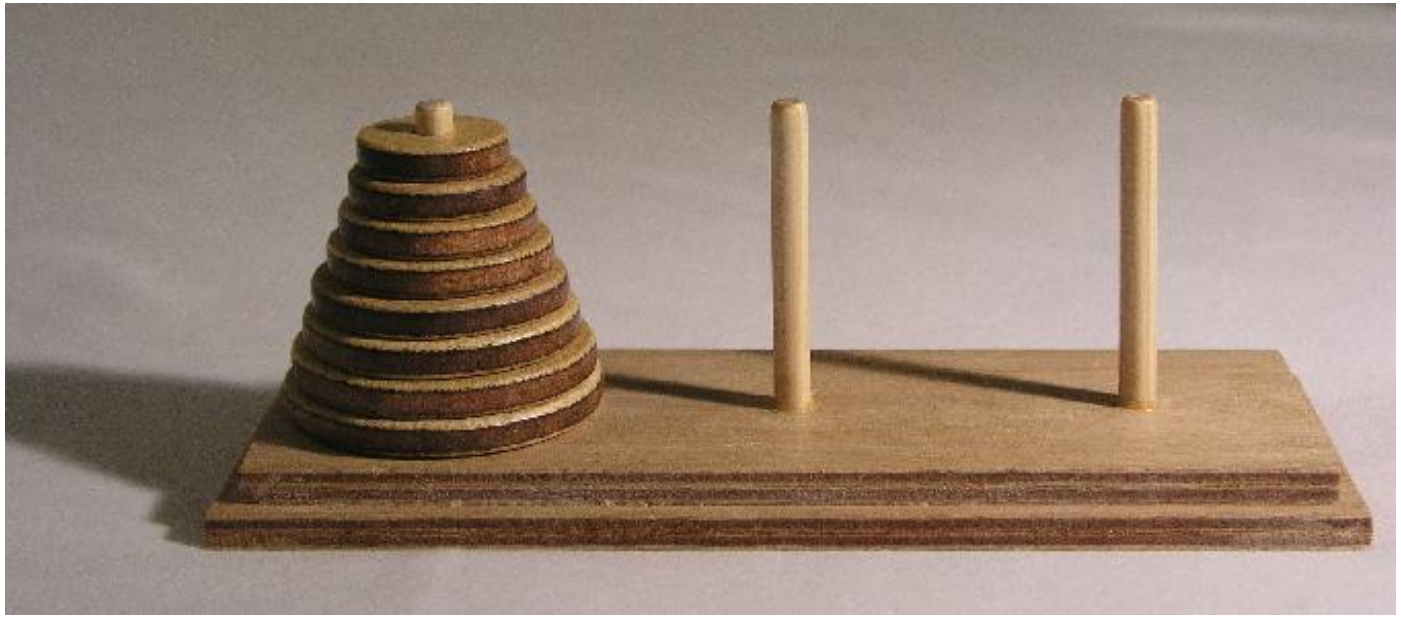
- n iterações do ciclo
- $2 \times n$ multiplicações explícitas
- n chamadas recursivas, com determinantes de menor dimensão

Nº de multiplicações efetuadas ?

- $M(n) = \begin{cases} 0, \; n = 1 \\ 2 \times n + n \times M(n-1), \; n \geq 2 \end{cases}$

- Não há uma “fórmula fechada” !!
- Verificar a rapidez com que cresce usando o Wolfram Alpha

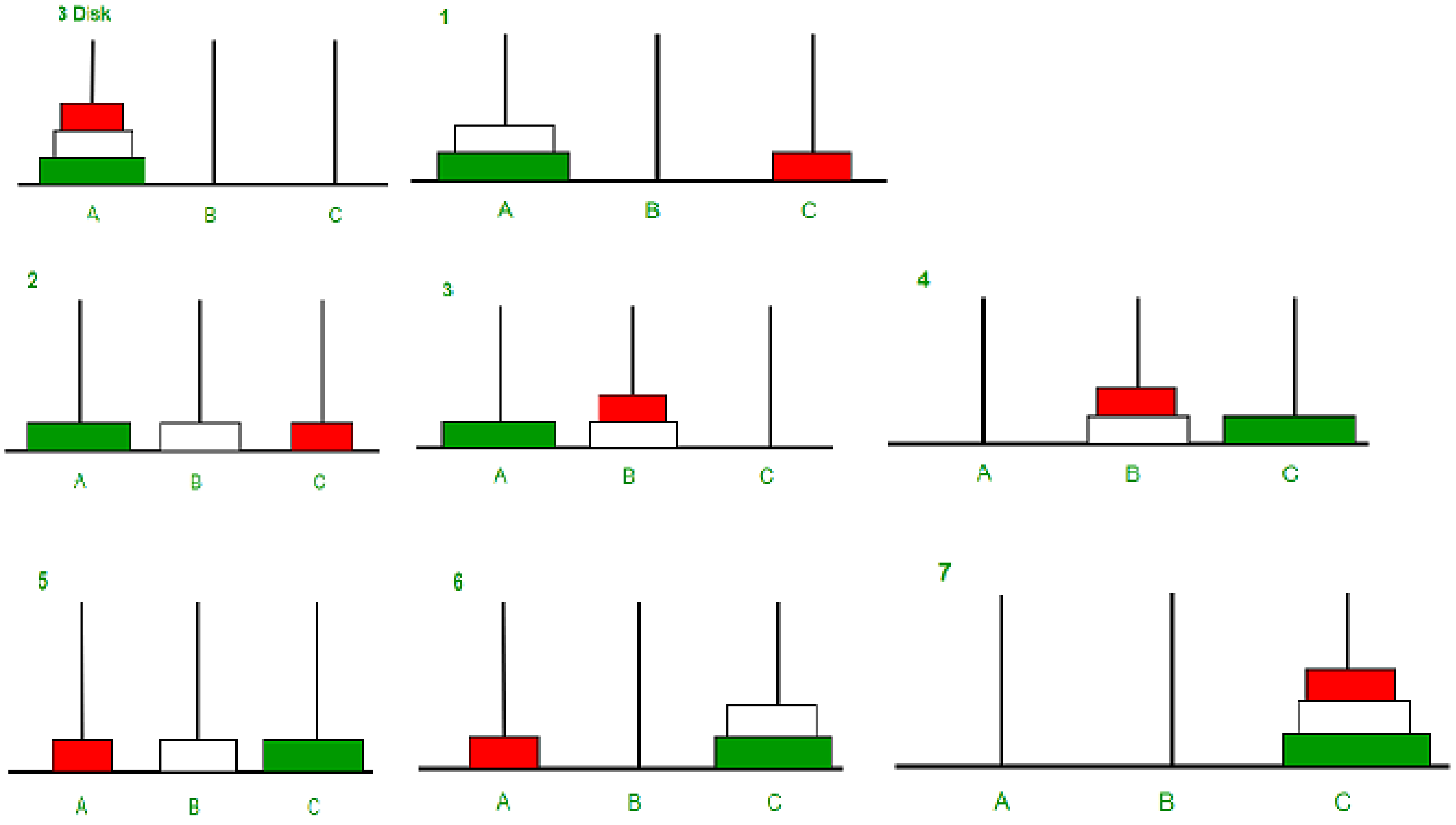
- $\boldsymbol{M(n) \approx 2(e-1)n!} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M(n) \in O(n!)}$



[Wikipedia]

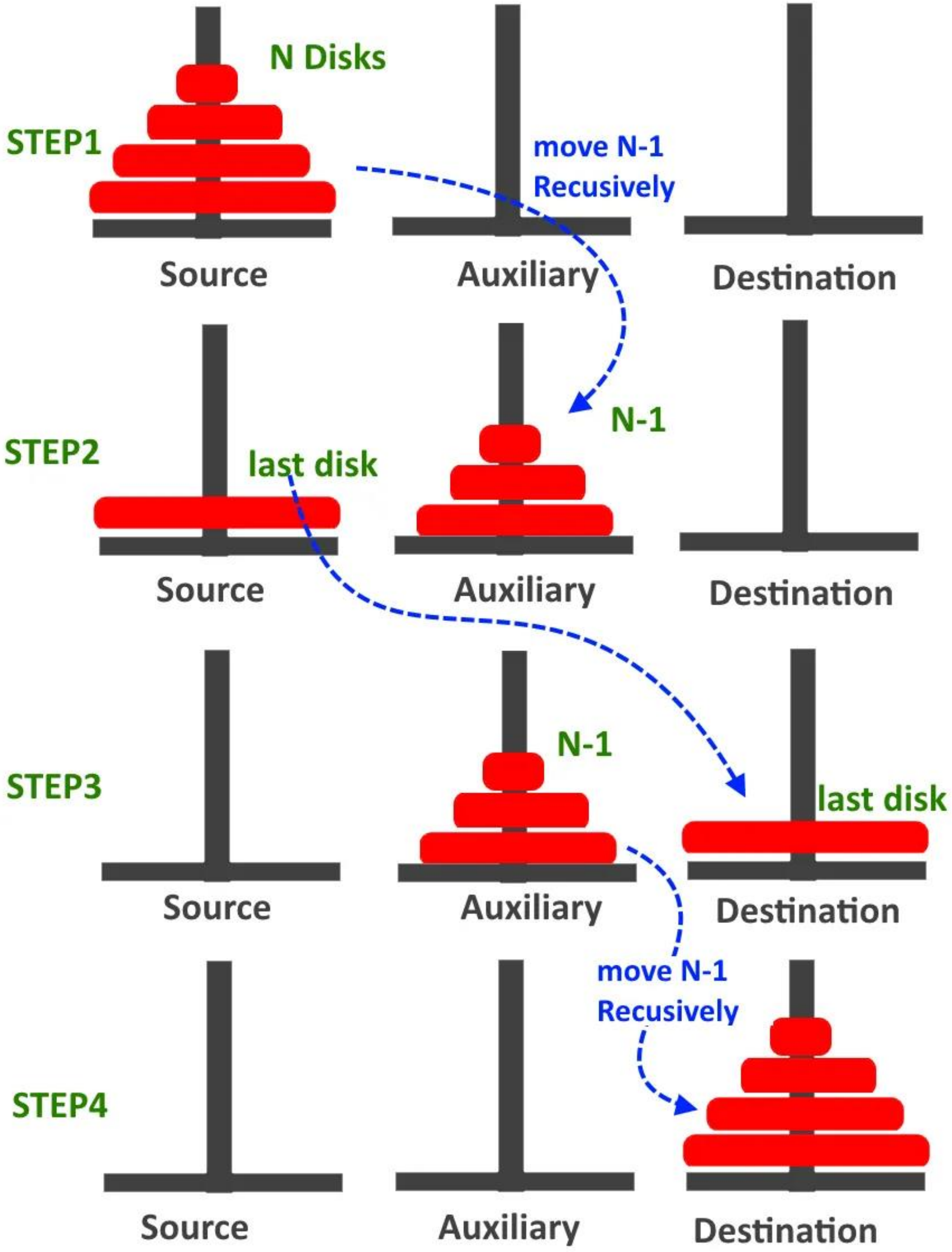
As Torres de Hanói

Torres de Hanói – Como fazer ?



[GeeksforGeeks]

Decomposição



[medium.com]

Função recursiva

```c
// torresDeHanoi('A', 'B', 'C', 8);

void torresDeHanoi(char origem, char auxiliar, char destino, int n) {
  if (n == 1) {
    contadorGlobalMovs++;
    moverDisco(origem, destino);  // Imprime o movimento
    return;
  }
  // Divide-and-Conquer
  torresDeHanoi(origem, destino, auxiliar, n - 1);

  contadorGlobalMovs++;
  moverDisco(origem, destino);

  torresDeHanoi(auxiliar, origem, destino, n - 1);
}
```

Nº de movimentos realizados ?

- $M(1) = 1$
- $M(n) = M(n-1) + 1 + M(n-1) = 1 + 2\ M(n-1)$

- **Tarefa:** Fazer o desenvolvimento telescópico e obter “fórmula fechada”
- Confirmar usando o Wolfram Alpha

- Verificar que é um algoritmo EXPONENCIAL

Exercícios / Tarefas

Tarefa 1 – Algoritmos de Ordenação

- toptal.com/developers/sorting-algorithms
- Analisar as animações disponibilizadas
- Comparar :
- Diferentes arrays para um mesmo algoritmo
- O mesmo array para diferentes algoritmos

Tarefa 2 – Algoritmos de Ordenação

- Fazer testes computacionais idênticos aos apresentados para os algoritmos Selection Sort e Insertion Sort

- Ficheiros com os dados de teste estão disponíveis no Moodle

Tarefa 3 – Desenvolver funções recursivas

- Função recursiva para calcular o **mdc(a, b)**, usando o Algoritmo de Euclides

- Função recursiva para **procurar um valor** num array de n elementos inteiros, usando a estratégia de Procura Sequencial

- Função recursiva para calcular **C(n, p)**, usando a recorrência subjacente ao Triângulo de Pascal

Tarefa 4 – Desenvolver função recursiva

- Há outros algoritmos recursivos para o cálculo de potências de expoente natural
- Por exemplo:

$$x^n = x^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \times x^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$$

- Quais são os casos de base ?
- Qual é o número de multiplicações efetuadas ?
- Sugestão: implementar e comparar

Tarefa 5 – Análise formal

- Considere as funções recursivas do próximo slide

- Obtenha uma expressão para o resultado de cada função
- Obtenha uma expressão para o nº de chamadas recursivas efetuadas

- Confirme os resultados obtidos com o Wolfram Alpha

https://www.wolframalpha.com/

Resultado ? – Nº de chamadas recursivas ?

```
unsigned int
r1(unsigned int n) {
   if(n == 0) return 0;
   return 1 + r1(n – 1);
}
```

```
unsigned int
r2(unsigned int n) {
   if(n == 0) return 0;
   if(n == 1) return 1;
   return n + r2(n – 2);
}
```

```
unsigned int
r3(unsigned int n) {
   if(n == 0) return 0;
   return 1 + 2 * r3(n – 1);
}
```

```
unsigned int
r4(unsigned int n) {
   if(n == 0) return 0;
   return 1 + r4(n – 1) + r4(n – 1);
}
```

Sugestões de leitura

Sugestões de leitura

- J. J. McConnell, Analysis of Algorithms, 1st Edition, 2001
  - Capítulo 1: secções 1.5 e 1.6
- A. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2012
  - Capítulo 2: secções 2.4 e 2.5
  - Apêndice B