Dicionários / Tabelas de Dispersão II

19/11/2025

Ficheiro ZIP

- Está disponível no Moodle um ficheiro ZIP de suporte aos tópicos de hoje
- O tipo abstrato Hash Table usando Separate Chaining
- Versão “simples”, que permite trabalho autónomo de desenvolvimento e teste

Sumário

- Recap
- Hash Tables – Representação usando Separate Chaining
- Análise detalhada do TAD Hash Table – Separate Chaining
- Desempenho computacional
- Exercícios / Tarefas 

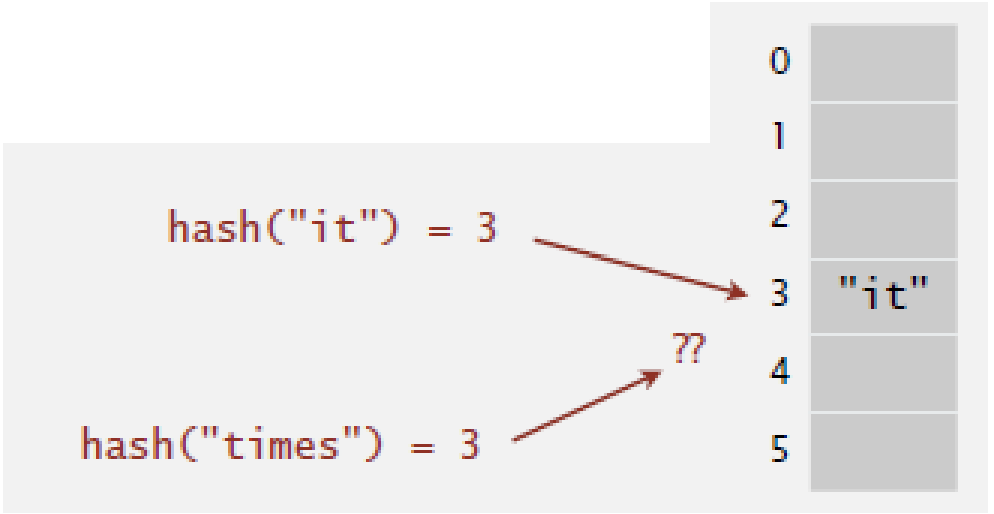
Recapitulação

Hash Table – Tabela de Dispersão

- Estrutura de dados para armazenar pares (chave, valor)
- Sem chaves duplicadas
- **Sem** uma **ordem** implícita !!
- **MAS, com operações (muito) rápidas !!** 
- **Objetivo : O(1)**

Hash Table – Open Addressing

- Armazenar um item numa tabela/array indexada pela chave
  - Índice é função da chave !!
- Função de Hashing : para calcular o índice a partir da chave
  - Rapidez !!
- **Colisão :** 2 chaves diferentes originam o mesmo resultado / índice da tabela



[Sedgewick & Wayne]

Linear Probing – Sondagem Linear

- Aceder ao elemento de índice i
- Se necessário, tentar em (i + 1) % M, (i + 2) % M, etc.

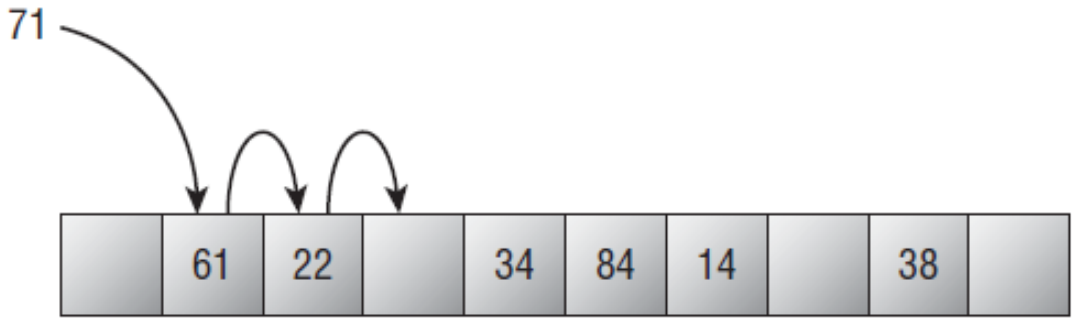


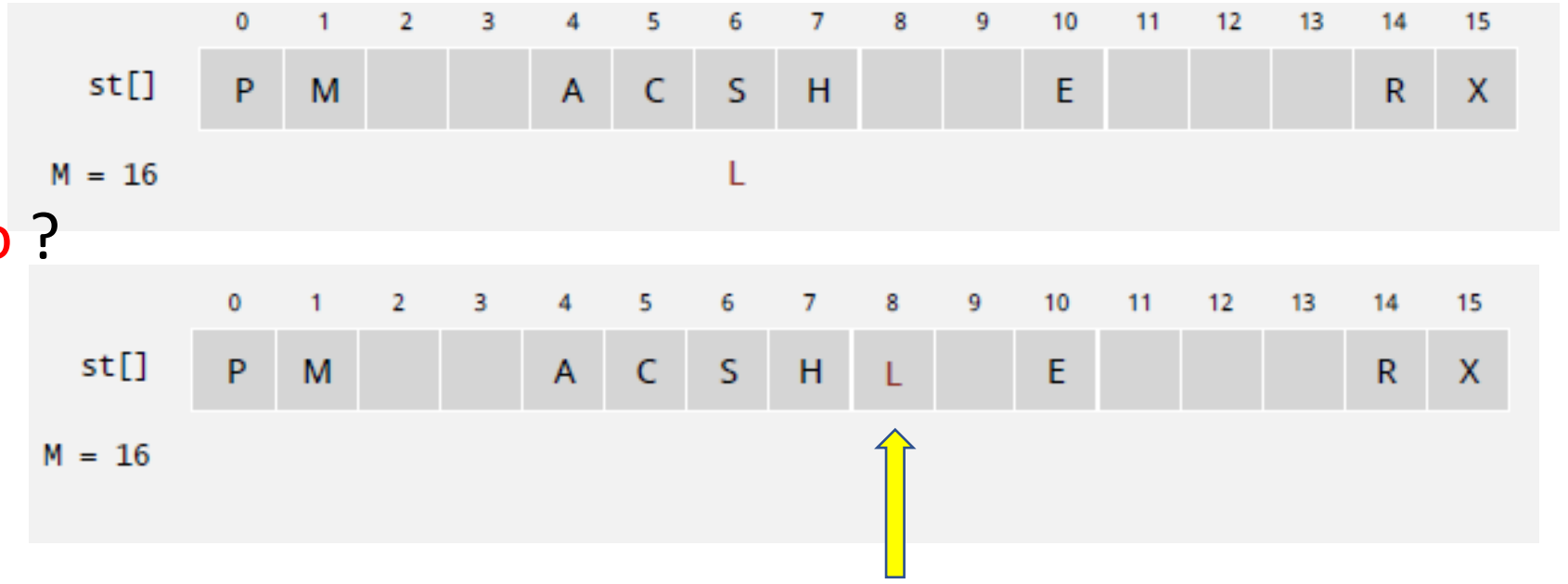
Figure 8-2: In linear probing, the algorithm adds a constant amount to locations to produce a probe sequence.

[Stephens]

Inserir na tabela – Linear Probing

- Guardar na posição i, se estiver disponível
- Caso contrário, tentar (i + 1) % M, (i + 2) % M, etc.

- Inserir L -> índice = 6
- Colisão !!
- Próximo espaço vago ?



[Sedgewick & Wayne]

Exemplo – Meses de Ano – M = 17 – N = 12

```
size = 17 | Used = 12 | Active = 12
 0 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  68, 1st index =  0, (December, The last month of the year)
 1 - Free = 1 - Deleted = 0 -
 2 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  70, 1st index =  2, (February, The second month of the year)
 3 - Free = 1 - Deleted = 0 -
 4 - Free = 1 - Deleted = 0 -
 5 - Free = 1 - Deleted = 0 -
 6 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  74, 1st index =  6, (January, 1st month of the year)
 7 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  74, 1st index =  6, (June, 6th month)
 8 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  74, 1st index =  6, (July, 7th month)
 9 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  77, 1st index =  9, (March, 3rd month)
10 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  77, 1st index =  9, (May, 5th month)
11 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  79, 1st index = 11, (October, 10th month)
12 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  78, 1st index = 10, (November, Almost at the end of the year)
13 - Free = 1 - Deleted = 0 -
14 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  65, 1st index = 14, (April, 4th month)
15 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  65, 1st index = 14, (August, 8th month)
16 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =  83, 1st index = 15, (September, 9th month)
```

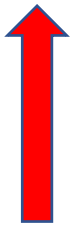
Análise – Linear Probing – Knuth, 1963

- Fator de carga – Load Factor $\lambda = N / M$ 
- Nº médio de tentativas para encontrar um item

  $1/2 \times (1 + 1/(1 - \lambda))$ -> 1.5, se $\lambda = 50\%$ -> 3, se $\lambda = 80\%$

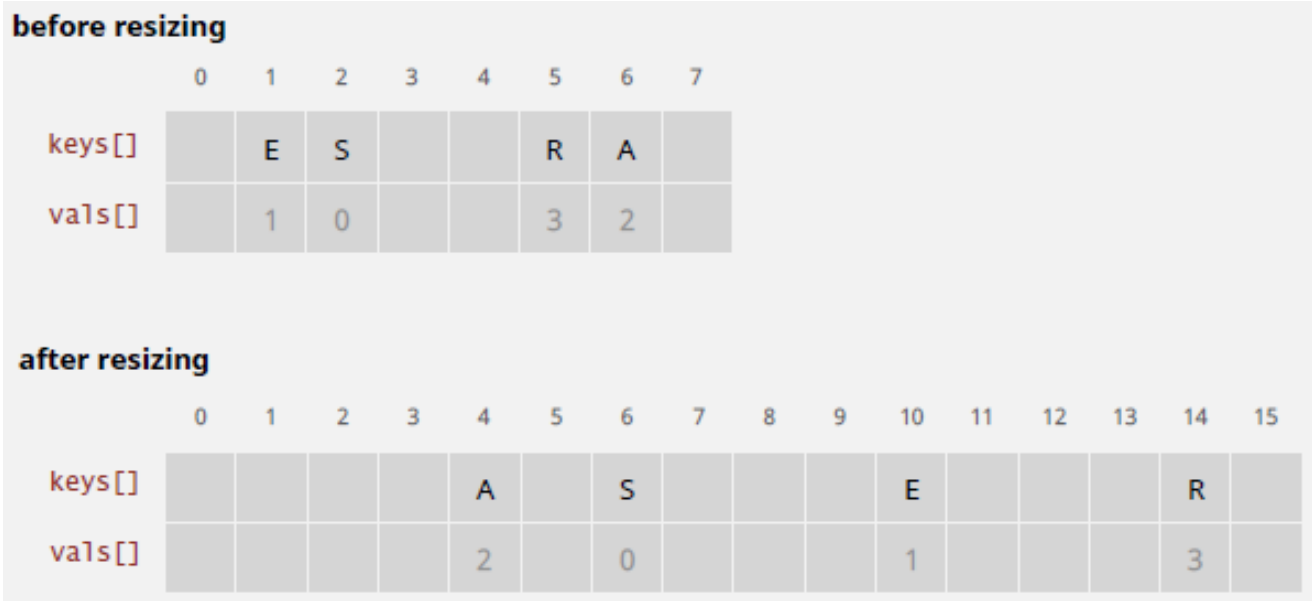
- Nº médio de tentativas para inserir um item ou concluir que não existe

  $1/2 \times (1 + 1/(1 - \lambda)^2)$ -> 2.5, se $\lambda = 50\%$ -> 13, se $\lambda = 80\%$



Resizing + Rehashing

- Objetivo : **fator de carga < 1/2**
- Duplicar o tamanho do array quando fator de carga ≥ 1/2
- Reduzir para metade o tamanho do array quando fator de carga ≤ 1/8
- Criar a nova tabela e adicionar, um a um, todos os itens



[Sedgewick & Wayne]

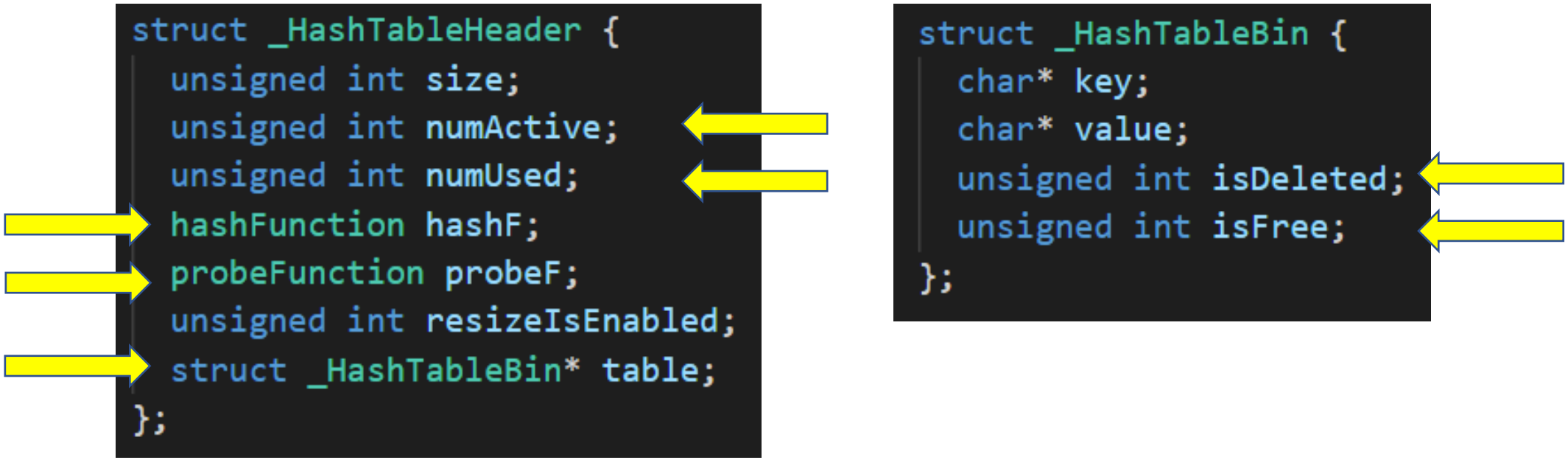
Exemplo
– Hash Table (String, String)

Hash Table – Funcionalidades

```
HashTable* HashTableCreate(unsigned int capacity, hashFunction hashF,
                           probeFunction probeF, unsigned int resizeIsEnabled);

void HashTableDestroy(HashTable** p);
```

```
int HashTableContains(const HashTable* hashT, const char* key);

char* HashTableGet(HashTable* hashT, const char* key);

int HashTablePut(HashTable* hashT, const char* key, const char* value);

int HashTableReplace(const HashTable* hashT, const char* key,
                     const char* value);

int HashTableRemove(HashTable* hashT, const char* key);
```

Hash Table – Cabeçalho e Elemento da Tabela



Hash Table – Procura de uma chave

```
for (unsigned int i = 0; i < hashT->size; i++) {
    index = hashT->probeF(hashKey, i, hashT->size);

    bin = &(hashT->table[index]);

    if (bin->isFree) {
        // Not in the table !
        return index;
    }

    if ((bin->isDeleted == 0) && (strcmp(bin->key, key) == 0)) {
        // Found it !
        return index;
    }
}
```

- Obter índice
- Consultar posição
- Elemento existe ?
- É a chave procurada ?

Hash Table – Consulta dada uma chave

```
char* HashTableGet(HashTable* hashT, const char* key) {
  int index = _searchHashTable(hashT, key);
  if (index == -1 || hashT->table[index].isFree == 1) {
    // NOT FOUND
    return NULL;
  }

  struct _HashTableBin* bin = &(hashT->table[index]);
  char* result = (char*)malloc(sizeof(char) * (1 + strlen(bin->value)));
  strcpy(result, bin->value);

  return result;
}
```

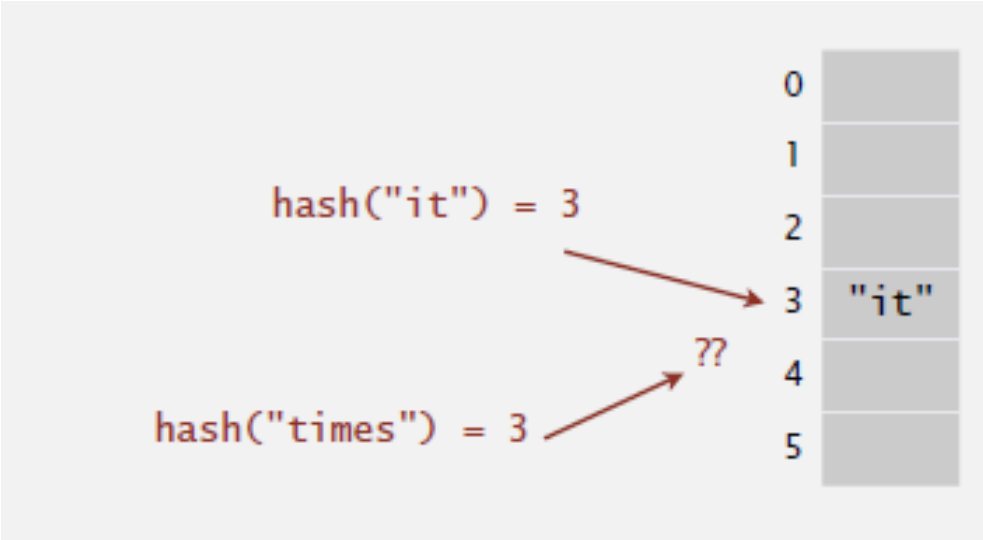
Hash Tables
– Separate Chaining

Hash Table – Colisões – Como proceder ?

- Duas chaves distintas são mapeadas no mesmo índice da tabela !!

- Como gerir de modo eficiente ?
- Sem usar "demasiada" memória !!

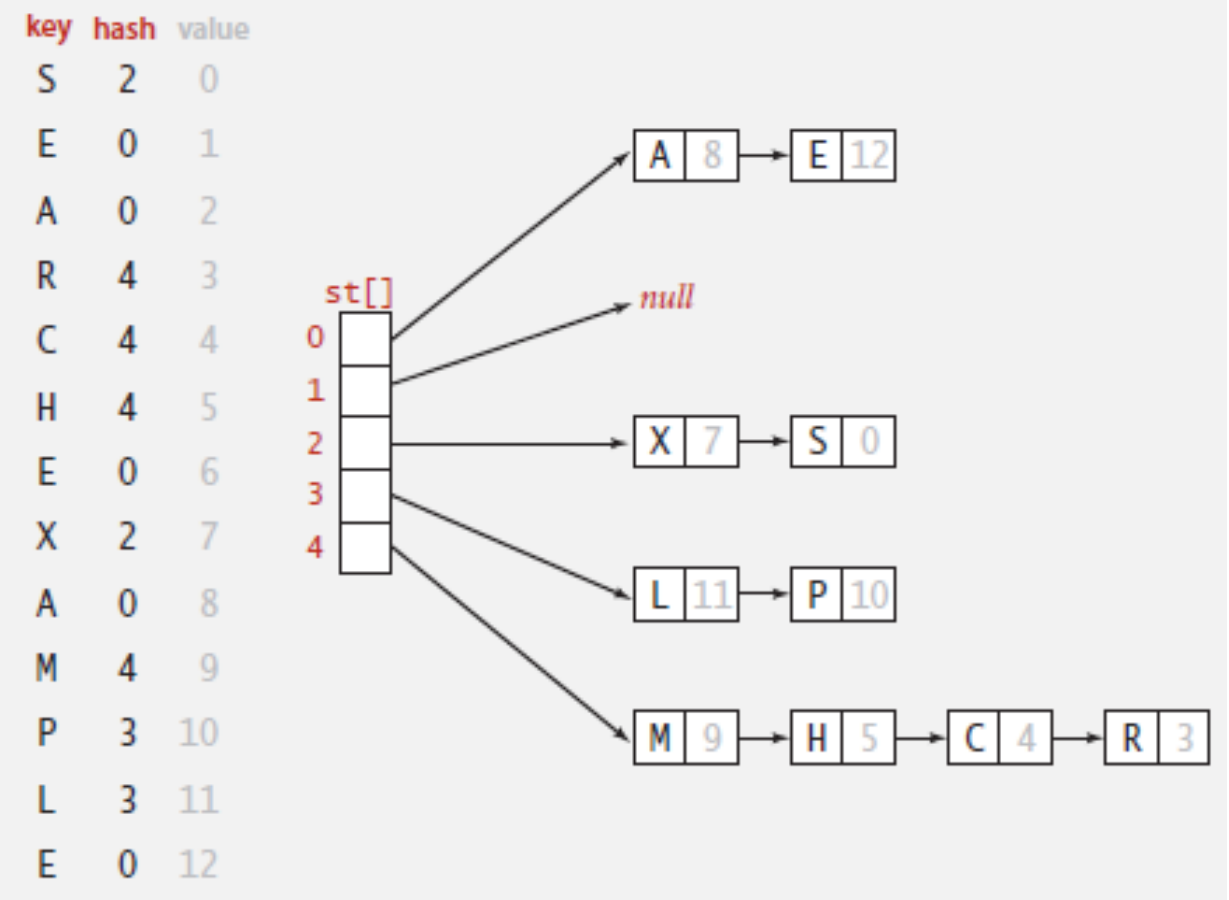
- **Alternativa ao Open Addressing ?**



[Sedgewick & Wayne]

Hash Table – Separate Chaining (IBM, 1953)

- Array de M ponteiros (**M < N**)
- Mapear a chave em [0..(M – 1)]
- Inserir no início de uma lista, se não existir
- Procurar apenas numa lista



[Sedgewick & Wayne]

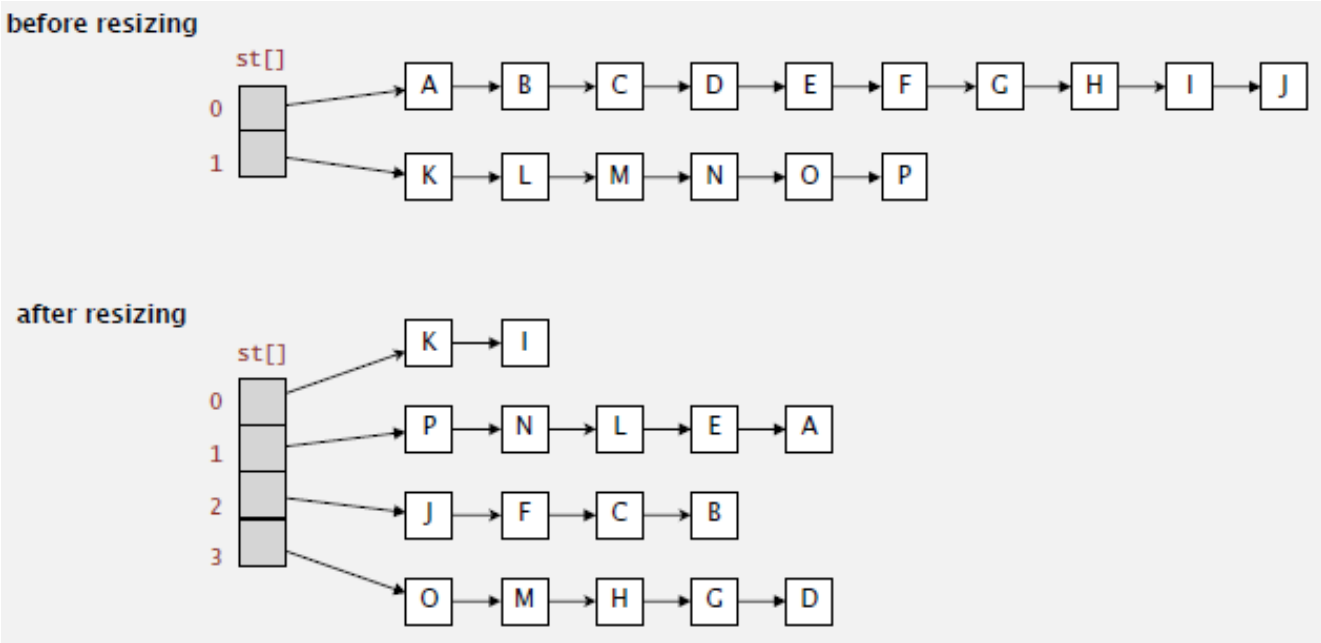
Eficiência Computacional

- Em média, N/M elementos em cada lista – **Load Factor**
- Procurar / inserir -> nº de comparações é proporcional a N/M
  - M vezes mais rápido que na procura sequencial !

- M é muito grande -> demasiadas listas vazias
- M é demasiado pequeno -> listas muito longas
- Escolha habitual : M ≈ N/4 **-> O(1)**

Resizing + Rehashing

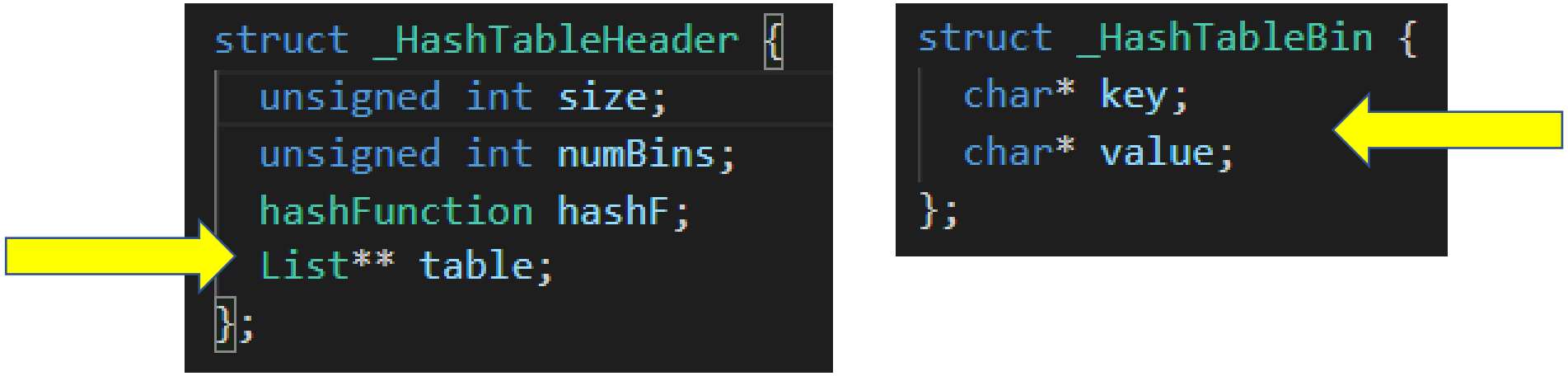
- Objetivo : fator de carga aprox. constante
- Duplicar o tamanho do array quando **N/M ≥ 8**
- Reduzir para metade o tamanho do array quando **N/M ≤ 2**
- Criar a nova tabela e adicionar, um a um, todos os itens



[Sedgewick & Wayne]

Exemplo
– Hash Table (String, String)

Hash Table – Cabeçalho e Par (chave, valor)



```
struct _HashTableHeader {
  unsigned int size;
  unsigned int numBins;
  hashFunction hashF;
  List** table;
};
```

```
struct _HashTableBin {
  char* key;
  char* value;
};
```

- Usar o **TAD Sorted List** para instanciar cada uma das listas da tabela
  - Reutilização – Para facilitar o desenvolvimento
- Cada nó de uma lista referencia um par (chave, valor) **– HT bin**

HashTable – Construtor – Criar listas vazias

```
HashTable* hTable = (HashTable*)malloc(sizeof(struct _HashTableHeader));
assert(hTable != NULL);
hTable->table = (List**)malloc(size * sizeof(List*));
assert(hTable->table != NULL);

hTable->size = size;
hTable->numBins = 0;
hTable->hashF = hashF;

for (int i = 0; i < size; i++) {
  hTable->table[i] = ListCreate(comparator);
}
```

HashTable – Destrutor

```
for (int i = 0; i < t->size; i++) {
  List* l = t->table[i];
  // Free the HT bins of each list
  while (ListIsEmpty(l) == 0) {
    struct _HashTableBin* bin = ListRemoveHead(l);
    free(bin->key);
    free(bin->value);
    free(bin);
  }
  // Destroy the list header
  ListDestroy(&(t->table[i]));
}
free(t->table);
free(t);
```

- Percorrer cada lista
- Libertar o espaço de memória atribuído a cada HT bin e nó
- Libertar o espaço de memória atribuído ao cabeçalho da lista
- Libertar o espaço de memória atribuído à tabela

HashTable – Procurar

- Procurar a chave na correspondente lista de HT bins
- A lista está vazia ?
- Procurar a partir do início da lista

```
// Search for the key
// If found, the list current node is updated
//
static int _searchKeyInList(List* l, char* key) {
  if (ListIsEmpty(l)) {
    return 0;
  }

  // Needed for the comparator
  // Shallow copy of the key: just the pointer
  struct _HashTableBin searched;
  searched.key = key;

  ListMoveToHead(l);
  return ListSearch(l, &searched) != -1;
}
```

Inserir

- Calcular o índice da tabela
- Procurar na lista usando a chave
- Ainda não existe ?

- Criar novo HT bin
- Copiar a chave e o valor

- Inserir na lista

```c
int HashTablePut(HashTable* hashT, char* key, char* value) {
  unsigned int index = hashT->hashF(key) % hashT->size;
  List* l = hashT->table[index];

  if (_searchKeyInList(l, key) == 1) {
    // FOUND, cannot be added to the table
    return 0;
  }

  // Does NOT BELONG to the table
  // Insert a new bin in the list

  struct _HashTableBin* bin = (struct _HashTableBin*)malloc(sizeof(*bin));
  bin->key = (char*)malloc(sizeof(char) * (1 + strlen(key)));
  strcpy(bin->key, key);
  bin->value = (char*)malloc(sizeof(char) * (1 + strlen(value)));
  strcpy(bin->value, value);

  ListInsert(l, bin);
  hashT->numBins++;

  return 1;
}
```

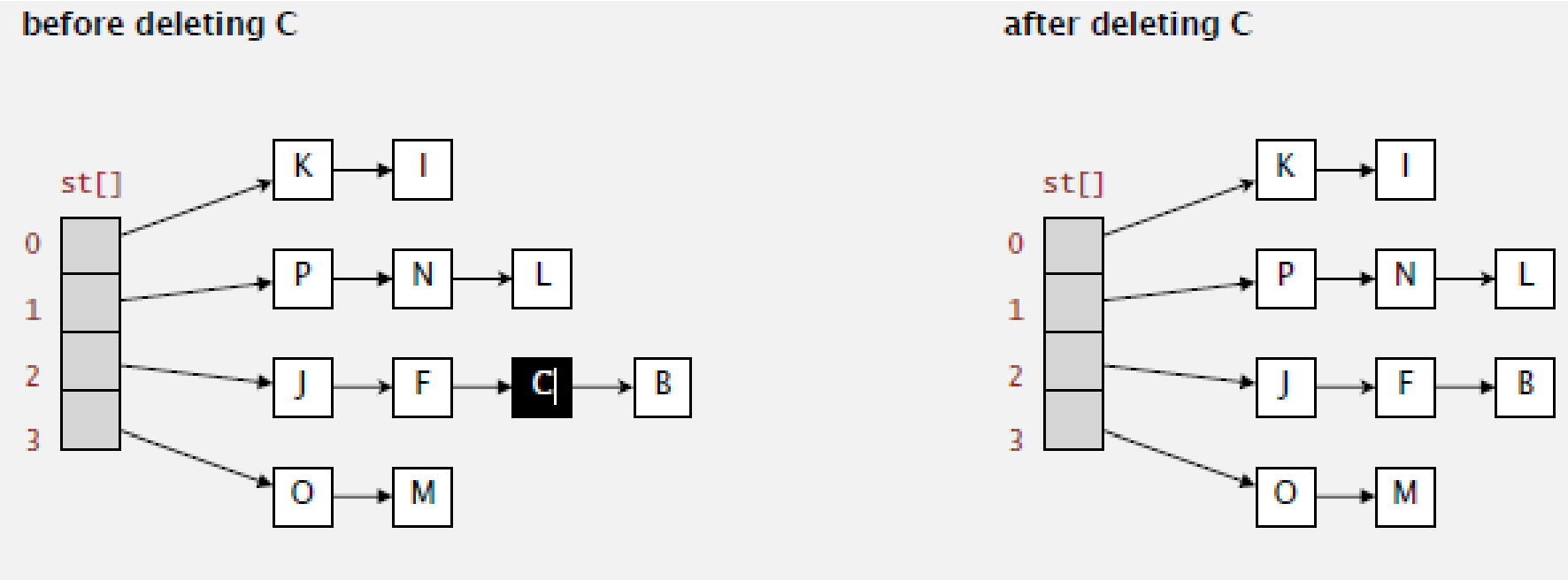
Substituir

- Calcular o índice da tabela
- Procurar na lista usando a chave
- Existe ?

- Aceder ao HT bin
- Atualizar o valor

```c
int HashTableReplace(const HashTable* hashT, char* key, char* value) {
  unsigned int index = hashT->hashF(key) % hashT->size;
  List* l = hashT->table[index];

  // Search and update current, if found
  if (_searchKeyInList(l, key) == 0) {
    return 0;
  }

  struct _HashTableBin* bin = ListGetCurrentItem(l);

  free(bin->value);
  bin->value = (char*)malloc(sizeof(char) * (1 + strlen(value)));
  strcpy(bin->value, value);

  return 1;
}
```

Hash Table – Apagar é fácil !



[Sedgewick & Wayne]

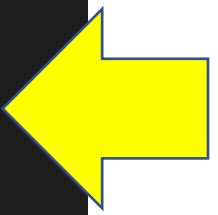
Apagar

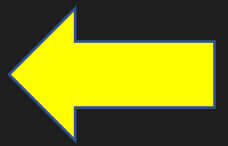
- Calcular o índice da tabela
- Procurar na lista usando a chave
- Existe ?

- Libertar a memória atribuída à chave e ao valor
- E ao HT bin

- Remover o nó da lista

```
int HashTableRemove(HashTable* hashT, char* key) {
  unsigned int index = hashT->hashF(key) % hashT->size;
  List* l = hashT->table[index];

  // Search and update current, if found
  if (_searchKeyInList(l, key) == 0) {
    return 0;
  }

  // Get rid of the bin
  struct _HashTableBin* bin = ListGetCurrentItem(l);
  free(bin->key);
  free(bin->value);
  free(bin);

  // Get rid of the list node
  ListRemoveCurrent(l);
  hashT->numBins--;

  return 1;
}
```





Separate Chaining vs Open Addresssing

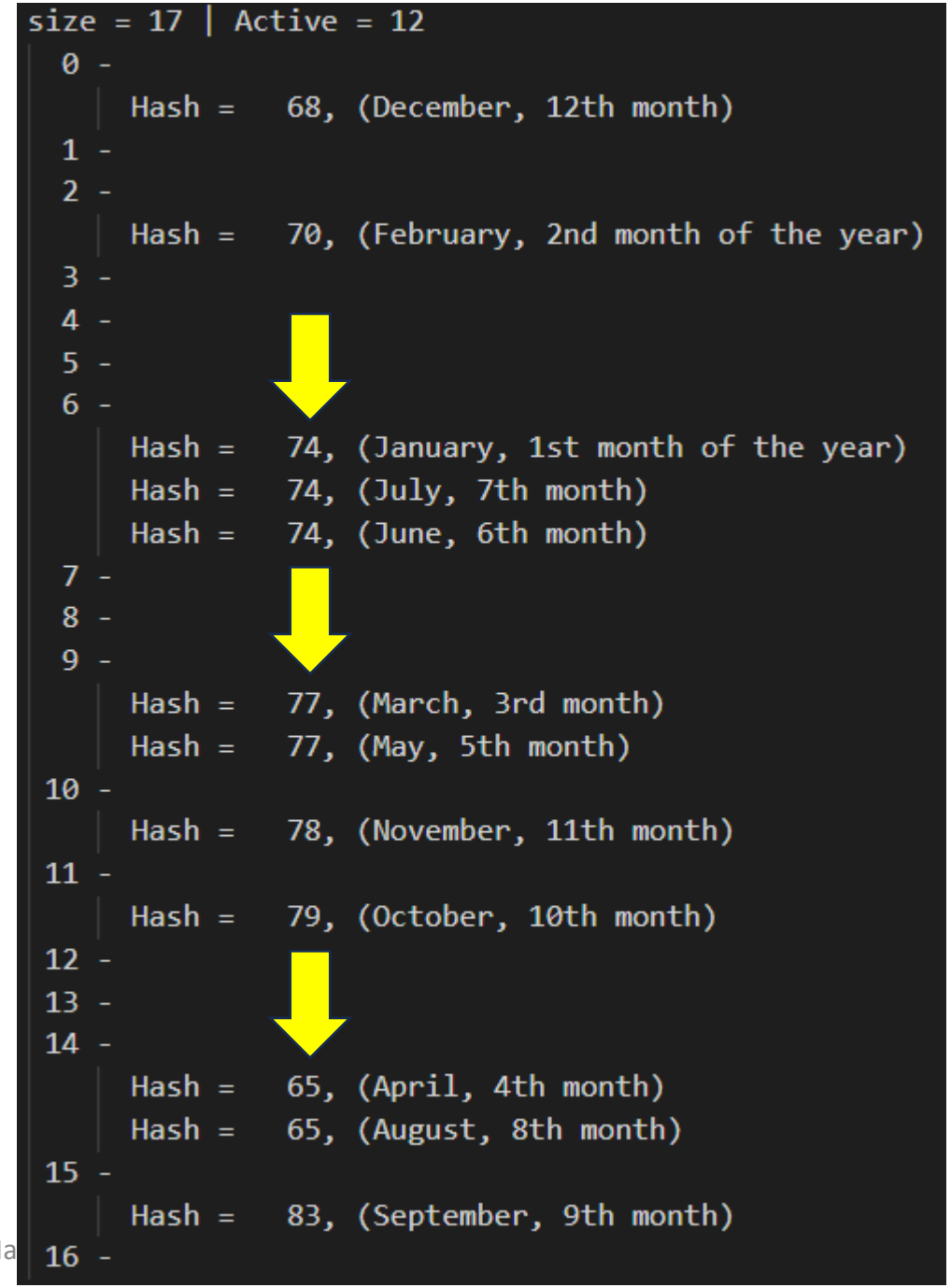
Separate Chaining

- Tamanho da tabela : M = 17
- Número de items : N = 12

- 4 colisões !

- 9 listas vazias
- 8 listas com elementos

- Lista mais longa tem 3 nós



Open Addressing + Linear Probing – Clusters

```
size = 17 | Used = 12 | Active = 12
  0 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   68, 1st index =   0, (December, The last month of the year)
  1 - Free = 1 - Deleted = 0 -
  2 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   70, 1st index =   2, (February, The second month of the year)
  3 - Free = 1 - Deleted = 0 -
  4 - Free = 1 - Deleted = 0 -
  5 - Free = 1 - Deleted = 0 -
  6 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   74, 1st index =   6, (January, 1st month of the year)
  7 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   74, 1st index =   6, (June, 6th month)
  8 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   74, 1st index =   6, (July, 7th month)
  9 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   77, 1st index =   9, (March, 3rd month)
 10 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   77, 1st index =   9, (May, 5th month)
 11 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   79, 1st index =  11, (October, 10th month)
 12 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   78, 1st index =  10, (November, Almost at the end of the year)
 13 - Free = 1 - Deleted = 0 -
 14 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   65, 1st index =  14, (April, 4th month)
 15 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   65, 1st index =  14, (August, 8th month)
 16 - Free = 0 - Deleted = 0 - Hash =   83, 1st index =  15, (September, 9th month)
```

Hash Tables – Eficiência Computacional

Hash Table – Eficiência Computacional

implementation	guarantee			average case			ordered ops?	key interface
	search	insert	delete	search hit	insert	delete		
separate chaining	N	N	N	3-5 *	3-5 *	3-5 *		equals() hashCode()
linear probing	N	N	N	3-5 *	3-5 *	3-5 *		equals() hashCode()

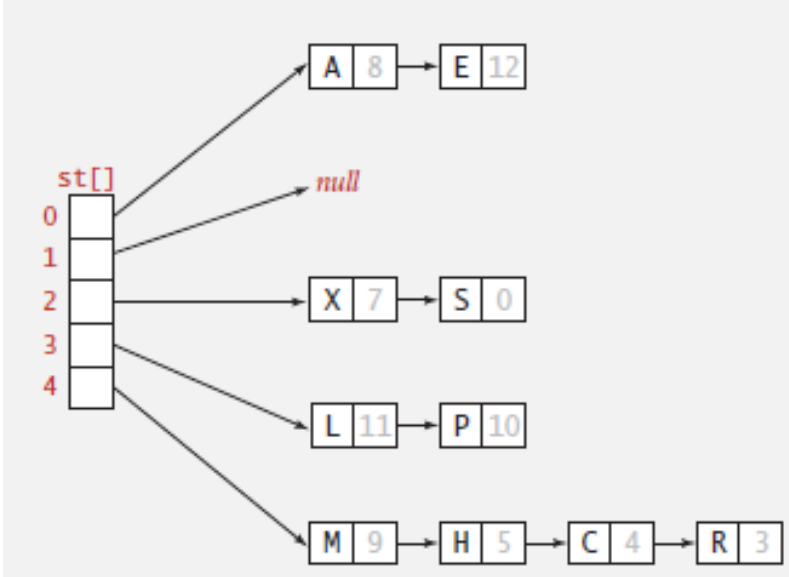
* under uniform hashing assumption

[Sedgewick & Wayne]

Separate Chaining vs Linear Probing

- **Separate Chaining**
- Desempenho não se degrada abruptamente
- Pouco sensível a funções de hashing menos boas

- **Open Addressing + Linear Probing**
- Menos espaço de memória "desperdiçado"



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
keys[]	P	M			A	C	S	H	L		E				R	X
vals[]	10	9			8	4	0	5	11		12				3	7

[Sedgewick & Wayne]

Hash Tables vs Balanced Search Trees

- **Tabelas de Dispersão**
- Código mais simples
- Melhor alternativa, se não pretendermos ordem
- Mais rápidas, para chaves simples

- **Árvores Binárias Equilibradas**
- Pior caso : O(log N) vs O(N)
- Suportam ordem
- compareTo() vs equals() + hashCode()

Exercícios / Tarefas

Exercício 1 – Escolha múltipla

Numa tabela de dispersão (***"Hash Table"***) implementada usando endereçamento direto **(*"Separate Chaining"***),

a) se ocorrer uma colisão, durante a inserção de um novo elemento, i.e., par (chave, valor), este é inserido na lista de elementos que partilham o mesmo endereço (***"hash-address"***).

b) após a inserção de um grande número de pares (chave, valor), o fator de carga (***"Load Factor"***) poderá tornar-se **superior à unidade**.

c) Ambas estão corretas.

d) Nenhuma está correta.

Tarefa 1 – HashTable(String, String)

- Analisar o simples programa de teste
- Executá-lo e analisar o output
- Analisar as funções do TAD HashTable(String, String)

Tarefa 2 – HashTable(String, String)

- Implementar uma função para fazer Resizing + Rehashing
- Adaptar o tamanho da tabela à evolução do fator de carga

Tarefa 3 – HashTable – Nova Versão

- A implementação do TAD Hash Table usa o TAD Sorted List
- Essa decisão tornou rápido o desenvolvimento da solução
- MAS, torna-a demasiado "pesada", sem necessidade, pois as listas deverão ser curtas

- Desenvolva uma solução "mais leve", em que as funções do TAD Hash Table operam diretamente sobre os nós das listas, que são apenas constituídos pelos campos key, value, e next