# Matemática Discreta

Ano Letivo 2024/2025 (Versão: 13 de Maio de 2025)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

# Capítulo V
# Elementos de Teoria dos Grafos

## Parte II
## Caminhos de custo mínimo

# 1. Alguns conceitos métricos

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ (ou um passeio-$(v_0, v_k)$).

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ (ou um passeio-$(v_0, v_k)$). O vértice $v_0$ designa-se por vértice inicial do passeio $P$ e $v_k$ designa-se por vértice final do passeio $P$, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um **passeio** em $G$ é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que $P$ é um passeio entre os vértices $v_0$ e $v_k$ (ou um passeio-$(v_0, v_k)$). O vértice $v_0$ designa-se por vértice inicial do passeio $P$ e $v_k$ designa-se por vértice final do passeio $P$, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

**Nota**

Num grafo simples, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices; isto é, basta considerar

$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_k).$$

**Definição**

Seja $G$ um grafo.

**Definição**

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.

**Definição**

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.

### Definição

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.

**Definição**

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** $P$ em $G$ é um circuito com pelo menos uma aresta onde o vértice inicial e os vértices intermédios são diferentes dois a dois, ou seja:

### Definição

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** $P$ em $G$ é um circuito com pelo menos uma aresta onde o vértice inicial e os vértices intermédios são diferentes dois a dois, ou seja:
    1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou

**Definição**

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** $P$ em $G$ é um circuito com pelo menos uma aresta onde o vértice inicial e os vértices intermédios são diferentes dois a dois, ou seja:
    1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
    2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou

### Definição

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** $P$ em $G$ é um circuito com pelo menos uma aresta onde o vértice inicial e os vértices intermédios são diferentes dois a dois, ou seja:
    1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
    2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
    3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ é um caminho.

**Definição**

Seja $G$ um grafo.

- Um **trajeto** é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se **fechado** quando o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também **circuito**.
- Um **caminho** é um trajeto que não repete vértices.
- Um **ciclo** $P$ em $G$ é um circuito com pelo menos uma aresta onde o vértice inicial e os vértices intermédios são diferentes dois a dois, ou seja:
  1. $P$ é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$ é um caminho.

**Nota**

Num grafo simples, um ciclo tem pelo menos três vértices.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de $G$. Então, o **comprimento de $P$** é

$$\mathrm{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\mathrm{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

### Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de $G$. Então, o **comprimento de $P$** é

$$\mathrm{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\mathrm{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

### Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de $G$. Então, o **comprimento de $P$** é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

**Nota**

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

**Exemplos**

Uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por **distância** entre vértices de $G$ a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

A maior distância entre os vértices de $G$ denota-se por **diâmetro** de $G$, isto é, $\operatorname{diam}(G) = max_{x,y \in V} \operatorname{dist}(x, y)$.

## Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideremos o conjunto

$$\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{os caminhos entre } x \text{ e } y\}.$$

Designa-se por **distância** entre vértices de $G$ a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

A maior distância entre os vértices de $G$ denota-se por **diâmetro** de $G$, isto é, $\operatorname{diam}(G) = max_{x,y\in V} \operatorname{dist}(x, y)$.

## Nota

Tem-se

$$\operatorname{dist}(x, x) = 0, \quad \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z) \geq \operatorname{dist}(x, z),$$

e $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{dist}(y, x)$, para todos os $x, y, z \in V$, com $G$ não orientado.

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que comp$(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que comp$(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

$\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho),

$\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que comp$(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que comp$(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

□

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\operatorname{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$.

$\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo (note-se que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) $\square$

**Teorema**

*Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.*

- *$G$ contém um caminho $P$ tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então $G$ contém um ciclo $C$ tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

**Demonstração.**

Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em $G$.

Portanto, todos os vizinhos de $v_k$ pertencem ao caminho (se não, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

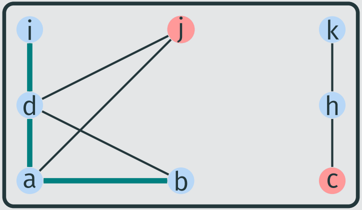
Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo (note-se que $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) de comprimento $d(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. $\square$

# 2. Conexidade

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em $G$.

**Exemplo**

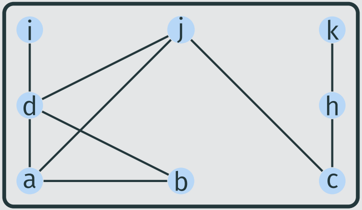



Por exemplo: $i$ e $b$ são conexos, e $j$ e $c$ não são conexos.

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos.

**Exemplo**

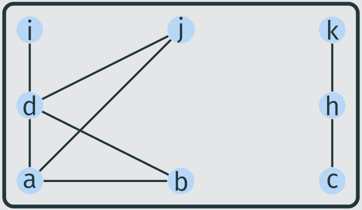



Grafo conexo

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

**Exemplo**




Grafo desconexo

**Definição**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se **conexos** quando existe um caminho entre eles em $G$. O grafo $G$ com pelo menos um vértice diz-se **conexo** quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se **desconexo**.

**Nota**

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo conexo. Então, $\nu(G) \leq \varepsilon(G) + 1$.

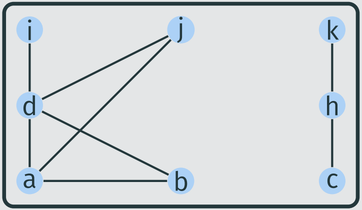
---

Ver exercício 25.

### Definição

As **componentes conexas** de um grafo $G$ são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos **maximais** e o número de componentes conexas de $G$ denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

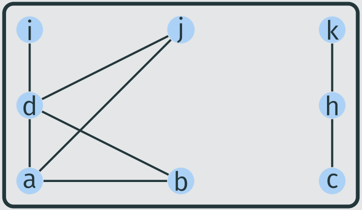
### Exemplo



**Definição**

As **componentes conexas** de um grafo $G$ são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos **maximais** e o número de componentes conexas de $G$ denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**

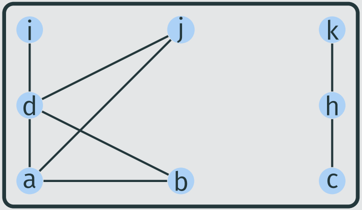



$\mathrm{cc}(G) = 2.$

**Definição**

As **componentes conexas** de um grafo $G$ são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos **maximais** e o número de componentes conexas de $G$ denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

**Exemplo**




$\mathrm{cc}(G) = 2.$

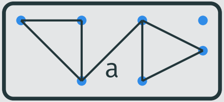
**Nota**

- Um grafo $G$ é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.

**Definição**

Uma aresta $a$ de um grafo $G$ diz-se uma **ponte** (ou uma **aresta de corte**) de $G$ quando os pontos extremos de $a$ são desconexos em $G - a$.

**Exemplo**

$G$: 


A aresta $a$ é uma ponte de $G$.

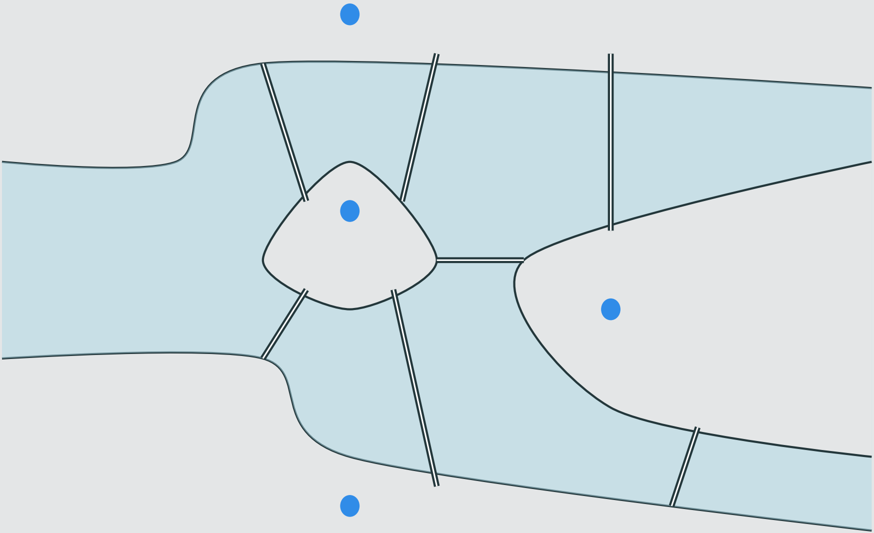
**Nota**

Portanto, num grafo finito $G$, uma aresta $a$ de $G$ é uma ponte se e só se $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$, mais concretamente, se e só se $\mathrm{cc}(G - a) = \mathrm{cc}(G) + 1$.

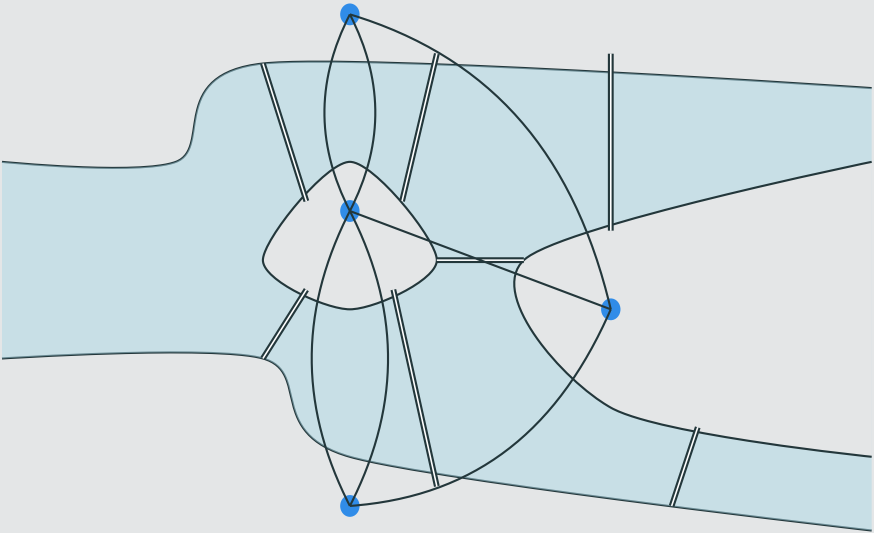
**Teorema**

*Uma aresta $\underline{a}$ de um grafo $G$ é uma ponte se e só se $\underline{a}$ não pertence a nenhum ciclo de $G$.*

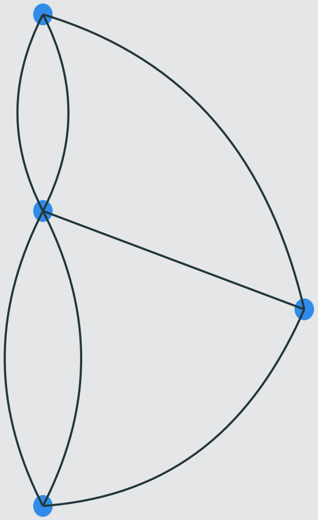
Exemplo



**Exemplo**



**Exemplo**



**Definição**

Seja $G$ um grafo finito. Um circuito em $G$ diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de $G$.

**Definição**

Seja $G$ um grafo finito. Um circuito em $G$ diz-se **circuito de Euler** quando contém todas as arestas de $G$.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Teorema**

*Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G têm grau par.*

**Demonstração.**

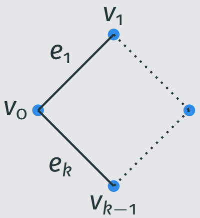
**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ tem um circuito de Euler, digamos

$P$:



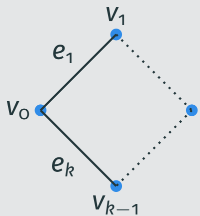
**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ tem um circuito de Euler, digamos

$P$:




Se um vértice $v$ aparece $n$ vezes em $P$, então $d(v) = 2n$ é par (porque todas as arestas são diferentes).

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja

$$P:\quad v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{———}} v_k$$

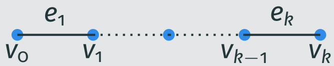
um trajeto de maior comprimento em $G$.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja

$P$: 


um trajeto de maior comprimento em $G$. Logo, $P$ contém todas as arestas com um vértice em $v_k$. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$.

**Teorema**

*Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja

$$P\colon\quad v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \xrightarrow{e_k} v_k$$

um trajeto de maior comprimento em $G$. Logo, $P$ contém todas as arestas com um vértice em $v_k$. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de $P$; neste caso existe uma aresta $v \longrightarrow v_i$ fora de $P$ com $v_i$ em $P$.

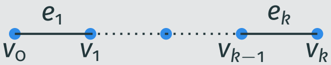
**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de $G$ têm grau par.*

**Demonstração.**

Suponha agora que todos os vértices de $G$ tem grau par. Seja

$P$:

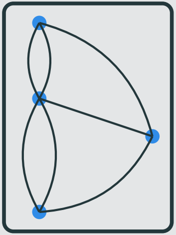



um trajeto de maior comprimento em $G$. Logo, $P$ contém todas as arestas com um vértice em $v_k$. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de $P$; neste caso existe uma aresta $v$ —— $v_i$ fora de $P$ com $v_i$ em $P$. Então,

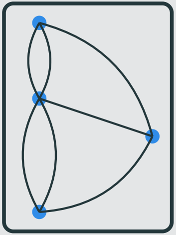
$P$:


é um trajeto mais comprido, uma contradição. □

**Exemplo**

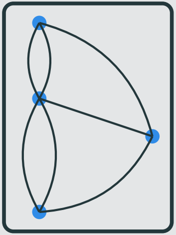


**Exemplo**



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, logo, não existe um circuito de Euler.

**Exemplo**

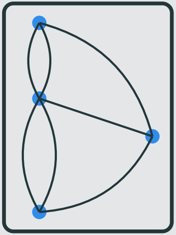


Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, logo, não existe um circuito de Euler.

**Definição**

Seja $G$ um grafo finito. Um trajeto em $G$ diz-se **trajeto de Euler** quando contém todas as arestas de $G$.

**Exemplo**



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, logo, não existe um circuito de Euler.

**Definição**

Seja $G$ um grafo finito. Um trajeto em $G$ diz-se **trajeto de Euler** quando contém todas as arestas de $G$.

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e conexo. Então, $G$ tem um trajeto de Euler se e só o número de vértices de grau ímpar é 0 ou 2.*

# 3. Grafos particulares

**Definição**

Um grafo simples $G$ diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes.

**Definição**

Um grafo simples $G$ diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \varnothing$, ou seja, quando não tem arestas.

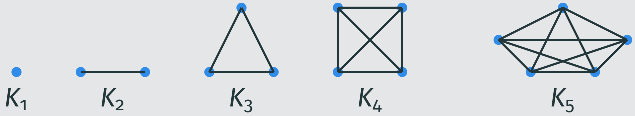
**Definição**

Um grafo simples $G$ diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \varnothing$, ou seja, quando não tem arestas.

**Nota**

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por $K_n$ e tem-se $\varepsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.

**Exemplos (Grafos completos)**



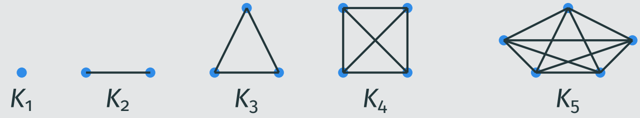
## Definição

Um grafo simples $G$ diz-se **completo** quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **nulo** quando $E = \emptyset$, ou seja, quando não tem arestas.

## Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem $n \in \mathbb{N}$. Denota-se este grafo por $K_n$ e tem-se $\varepsilon(K_n) = \binom{n}{2}$.
- Cada grafo nulo é simples. De facto, os grafos nulos são, precisamente, os grafos complementares dos grafos completos. Portanto, denotamos o grafo nulo com $n$ vértices por $K_n^{\complement}$.

## Exemplos (Grafos completos)



**Definição**

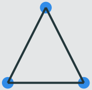
Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se **$k$-regular** quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se **regular** quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Definição**

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se **$k$-regular** quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se **regular** quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Exemplos (Grafos 2-regulares)**

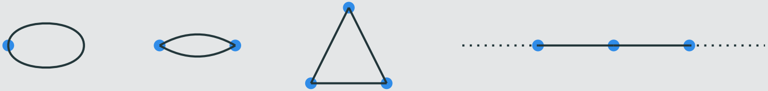





### Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se **$k$-regular** quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se **regular** quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

### Exemplos (Grafos 2-regulares)



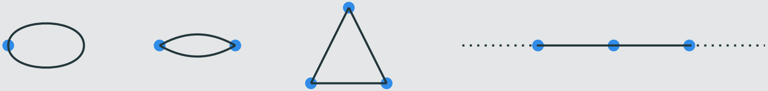
### Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.

**Definição**

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se **$k$-regular** quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se **regular** quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Exemplos (Grafos 2-regulares)**



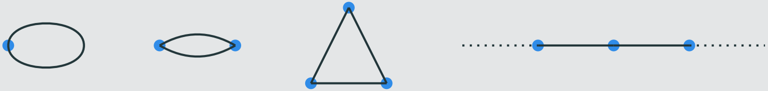
**Nota**

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo $K_n$ é $(n-1)$-regular.

**Definição**

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se **$k$-regular** quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se **regular** quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Exemplos (Grafos 2-regulares)**



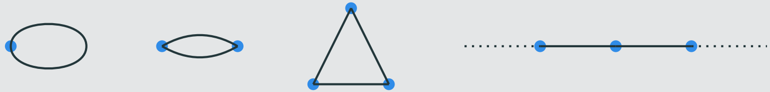
**Nota**

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo $K_n$ é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples $G$ com $n$ vértices é $(n-1)$-regular se e só se $G$ é completo.

### Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo $G$ diz-se **$k$-regular** quando todos os seus vértices têm grau $k$. Um grafo $G$ diz-se **regular** quando $G$ é $k$-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

### Exemplos (Grafos 2-regulares)



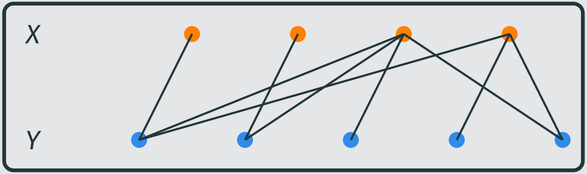
### Nota

- Os grafos 3-regulares designam-se também por grafos cúbicos.
- O grafo $K_n$ é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples $G$ com $n$ vértices é $(n-1)$-regular se e só se $G$ é completo.
- Um grafo $G$ é 0-regular se e só se $G$ é um grafo nulo.

**Definição**

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos $X, Y \subseteq V$ de $V$ com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$, tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

**Exemplo**

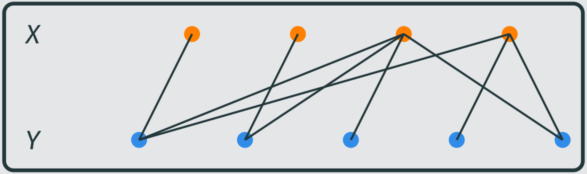


**Definição**

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos $X, Y \subseteq V$ de $V$ com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$, tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de $X$, nem entre qualquer par de vértices de $Y$, ou seja, cada aresta de $G$ tem um extremo em $X$ e outro em $Y$.

**Exemplo**



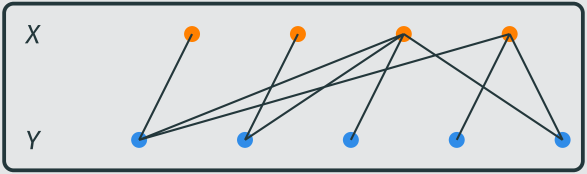
**Definição**

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se **bipartido** quando existem subconjuntos $X, Y \subseteq V$ de $V$ com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$, tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos.

Isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de $X$, nem entre qualquer par de vértices de $Y$, ou seja, cada aresta de $G$ tem um extremo em $X$ e outro em $Y$.

O par $(X, Y)$ designa-se por **bipartição dos vértices**. Neste caso denota-se $G$ por $(X, Y, E, \psi)$ (ou simplesmente $(X, Y, E)$ se $G$ é simples).

**Exemplo**



**Teorema**

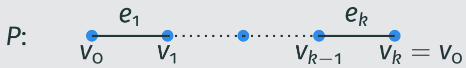
*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Teorema**

*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $(X, Y)$) e seja



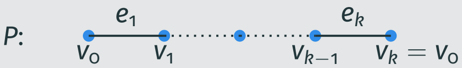

um ciclo em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$.

**Teorema**

*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $(X, Y)$) e seja



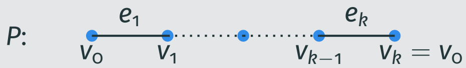

um ciclo em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, $\dots$, $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$.

**Teorema**

*Um grafo G é bipartido se e só se G não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha que $G$ é bipartido (com a partição $(X, Y)$) e seja




um ciclo em $G$. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, $\ldots$, $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices em $P$ e, por isso, um número par de arestas.

**Teorema**

*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem ciclos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo).

e

**Teorema**

*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem ciclos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$, onde

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\}.$$

**Teorema**

*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem ciclos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$, onde

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\}.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$).

**Teorema**

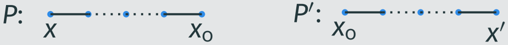
*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem ciclos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$, onde

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\}.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam




caminhos de menor comprimento (necessariamente par).

**Teorema**

*Um grafo $G$ é bipartido se e só se $G$ não tem ciclos de comprimento ímpar.*

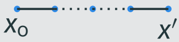
**Demonstração.**

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem ciclos de comprimento ímpar (e $G$ é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideremos $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$, onde

$$X = \{x \in V \mid \operatorname{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in V \mid \operatorname{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\}.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam

$P$: 

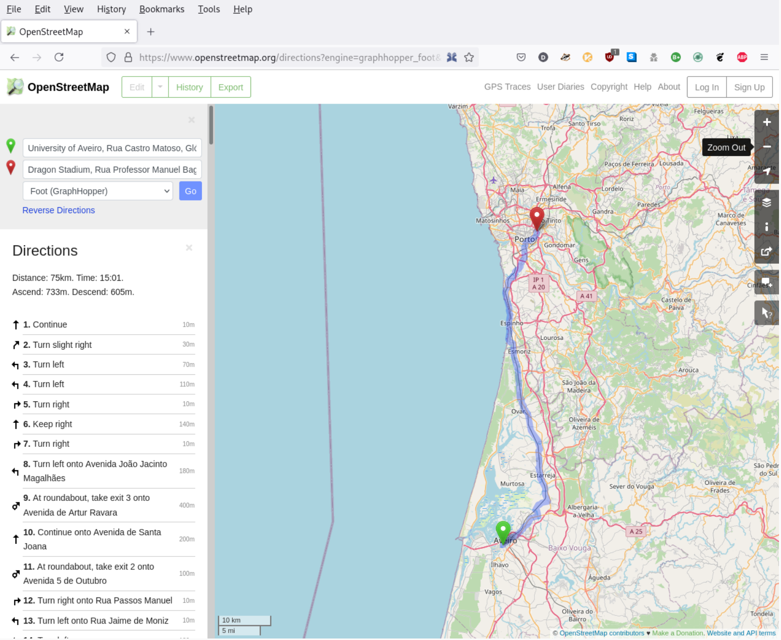

$P'$: 


caminhos de menor comprimento (necessariamente par). Portanto,

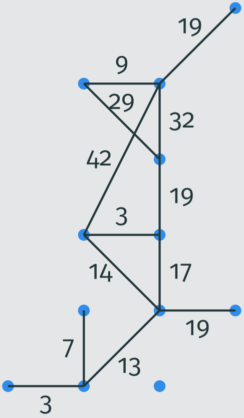

é um passeio fechado de comprimento ímpar, logo existe um ciclo de comprimento ímpar (TPC!!), uma contradição. □

# 4. Problemas de caminho de custo mínimo em grafos

# O PROBLEMA


File Edit View History Bookmarks Tools Help
OpenStreetMap
https://www.openstreetmap.org/directions?engine=graphhopper_foot&
OpenStreetMap
Edit
History
Export
GPS Traces User Diaries Copyright Help About
Log In
Sign Up
University of Aveiro, Rua Castro Matoso, Glc
Dragon Stadium, Rua Professor Manuel Bag
Foot (GraphHopper)
Go
Reverse Directions
Directions
Distance: 75km. Time: 15:01.
Ascend: 733m. Descend: 605m.
1. Continue 10m
2. Turn slight right 30m
3. Turn left 70m
4. Turn left 110m
5. Turn right 10m
6. Keep right 140m
7. Turn right 10m
8. Turn left onto Avenida João Jacinto Magalhães 180m
9. At roundabout, take exit 3 onto Avenida de Artur Ravara 400m
10. Continue onto Avenida de Santa Joana 200m
11. At roundabout, take exit 2 onto Avenida 5 de Outubro 100m
12. Turn right onto Rua Passos Manuel 10m
13. Turn left onto Rua Jaime de Moniz 10m
Zoom Out
Porto
Matosinhos
Gondomar
Espinho
Esmoriz
Ovar
Estarreja
Murtosa
Aveiro
Ílhavo
Vagos
Águeda
Arouca
Oliveira de Azeméis
São João da Madeira
Albergaria-a-Velha
Sever do Vouga
10 km
5 mi
© OpenStreetMap contributors ♥ Make a Donation. Website and API terms

## Na linguagem de grafos




- Os vértices representam cruzamentos
- As arestas representam estradas com distância/tempo/preço/ ...

**Definição**

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma **matriz de custos**

$$W \colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$.

**Definição**

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma **matriz de custos**

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar $E$.)

**Definição**

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma **matriz de custos**

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar $E$.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em $G$, o **custo de $P$** é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

**Definição**

Um **grafo com custos não negativos nas arestas** $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples $(V, E)$ e uma **matriz de custos**

$$W \colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, podemos dispensar $E$.)

Para um caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em $G$, o **custo de $P$** é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

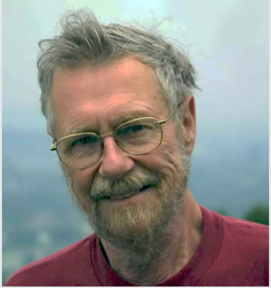
(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

**Objetivo**

Encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices.

## Considerações iniciais

Se $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ é o caminho de menor custo entre $v_0$ e $v_k$, então $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ é o caminho de menor custo entre $v_0$ e $v_{k-1}$.

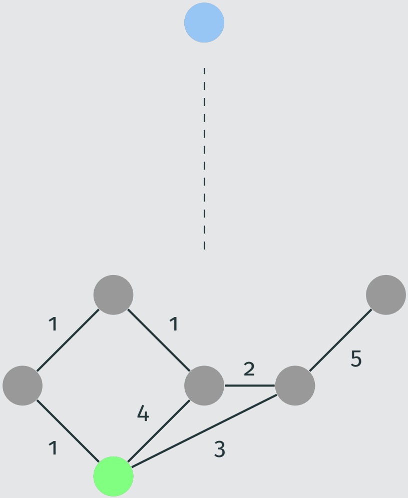


---

Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002), matemático e cientista da computação holandês.

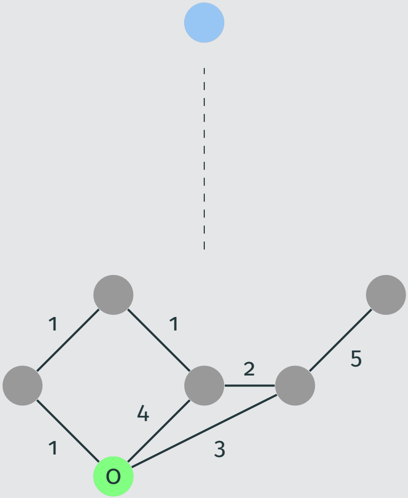
Ver também `https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/welcome.html`.

## A ideia



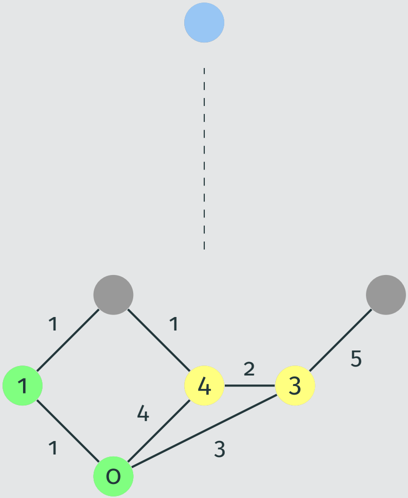

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia



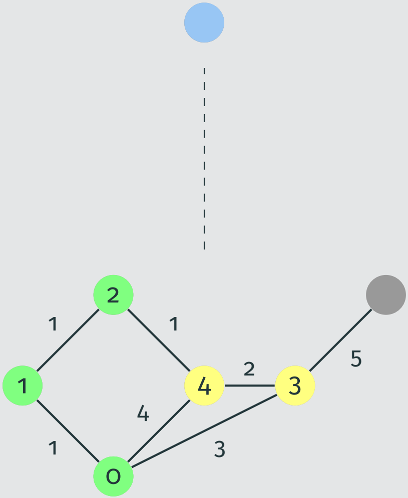

Procuramos o caminho de menor custo entre ● e ●.

## A ideia



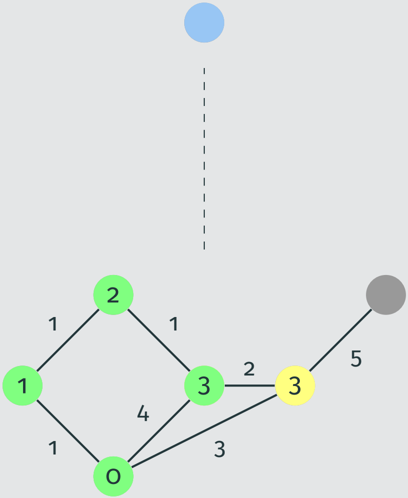

Procuramos o caminho de menor custo entre  e .

## A ideia



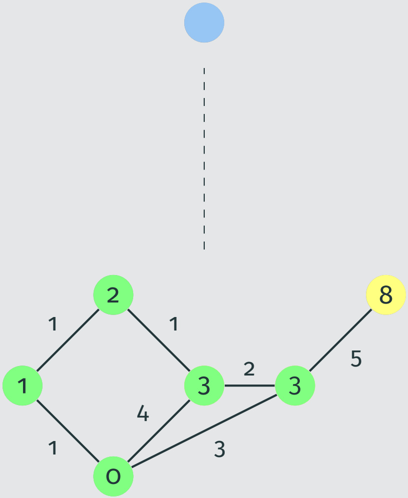

Procuramos o caminho de menor custo entre  e .

## A ideia



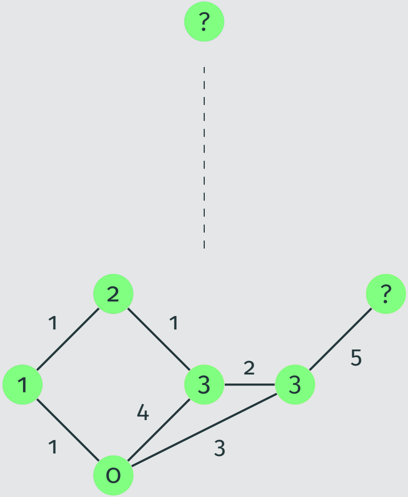

Procuramos o caminho de menor custo entre  e .

## A ideia




Procuramos o caminho de menor custo entre  e .

## A ideia




Procuramos o caminho de menor custo entre  e .

**As variáveis**

- `start` = vértice inicial.

**As variáveis**

- `start` = vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:

**As variáveis**

- `start` = vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**($v$) = custo do caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).

**As variáveis**

- `start` = vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**$(v)$ = custo do caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).
  - **ant**$(v)$ = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).

**As variáveis**

- `start` = vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
    - **marca**$(v)$ = custo do caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).
    - **ant**$(v)$ = antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.

**As variáveis**

- `start` $=$ vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **marca**$(v)$ $=$ custo do caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).
  - **ant**$(v)$ $=$ antecessor de $v \neq$ `start` no caminho de menor custo entre `start` e $v$ (até ao momento).
- **temp** $=$ lista dos vértices com valores temporários.
- `menor` $=$ vértice de menor custo (no momento).

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.

**O desenvolvimento**

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: **marca**$(v) = \infty$, **ant**$(v) = \varnothing$.
  - **marca**$(\texttt{start}) = 0$.
  - **temp** $= V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:

Até que: $\texttt{menor} =$ vértice final.

### O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\mathbf{marca}(v) = \infty$, $\mathbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\mathbf{marca}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\mathbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o $v$ em **temp**:
    - Se $\mathbf{marca}(v) > \mathbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

$$\mathbf{marca}(v) = \mathbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v),$$
$$\mathbf{ant}(v) = \texttt{menor}\,.$$

Até que: $\texttt{menor} =$ vértice final.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
    - Para cada $v \in V$: $\mathbf{marca}(v) = \infty$, $\mathbf{ant}(v) = \varnothing$.
    - $\mathbf{marca}(\mathtt{start}) = 0$.
    - $\mathbf{temp} = V \setminus \{\mathtt{start}\}$ e $\mathtt{menor} = \mathtt{start}$.
- Repetir:
    - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
    - Para todo o $v$ em **temp**:
        - Se $\mathbf{marca}(v) > \mathbf{marca}(\mathtt{menor}) + W(\mathtt{menor}, v)$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{marca}(v) &= \mathbf{marca}(\mathtt{menor}) + W(\mathtt{menor}, v),\\ \mathbf{ant}(v) &= \mathtt{menor}\,.\end{aligned}$$

        - Se $\mathbf{marca}(v) < c_{\mathrm{aux}}$ então $c_{\mathrm{aux}} = \mathbf{marca}(v)$ e $v_{\mathrm{aux}} = v$ (memorizar menor custo).

  Até que: $\mathtt{menor} =$ vértice final.

## O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{marca}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{marca}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o $v$ em **temp**:
    - Se $\textbf{marca}(v) > \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

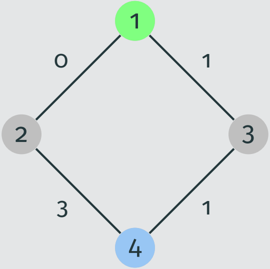
$$\begin{aligned} \textbf{marca}(v) &= \textbf{marca}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v), \\ \textbf{ant}(v) &= \texttt{menor}\,. \end{aligned}$$

    - Se $\textbf{marca}(v) < c_{\mathrm{aux}}$ então $c_{\mathrm{aux}} = \textbf{marca}(v)$ e $v_{\mathrm{aux}} = v$ (memorizar menor custo).
  - $\textbf{temp} = \textbf{temp} \setminus \{v_{\mathrm{aux}}\}$ e $\texttt{menor} = v_{\mathrm{aux}}$.

  Até que: $\texttt{menor} =$ vértice final.

## Exemplo

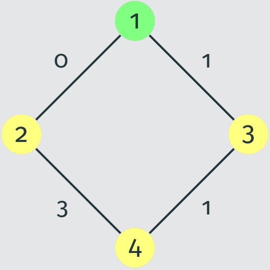
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

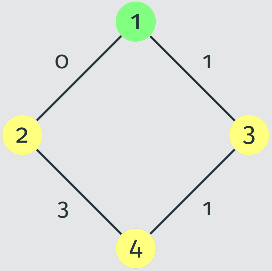
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

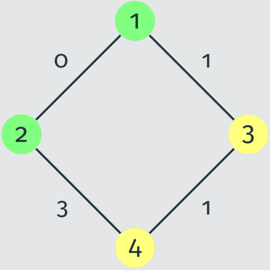
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | 1 | $\{2,3,4\}$ |
| | $(0,1)$ | $(1,1)$ | $(\infty,-)$ | | |
| | | | | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

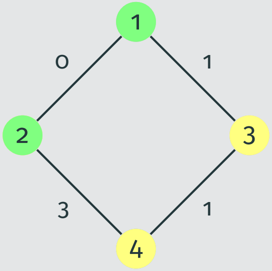
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | | | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

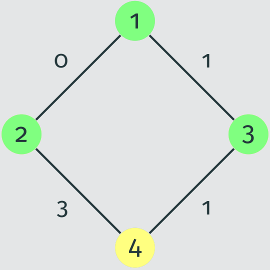
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | | |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

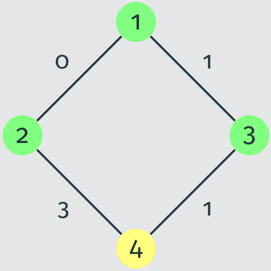
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

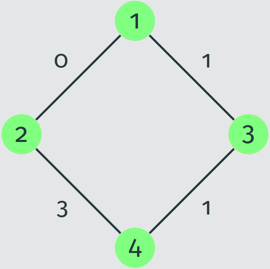
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2, 3)$ | | |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

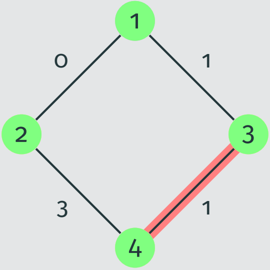
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | $(\infty,-)$ | 1 | $\{2,3,4\}$ |
| | $(0,1)$ | $(1,1)$ | $(\infty,-)$ | 2 | $\{3,4\}$ |
| | | $(1,1)$ | $(3,2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2,3)$ | 4 | $\varnothing$ |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

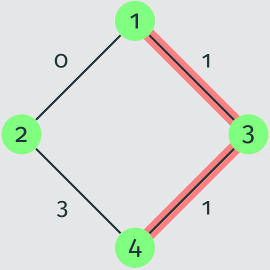
| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2, 3)$ | 4 | $\varnothing$ |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

## Exemplo

| 1 | 2 | 3 | 4 | menor | **temp** |
|---|---|---|---|---|---|
| $(0, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | $(\infty, -)$ | 1 | $\{2, 3, 4\}$ |
| | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\infty, -)$ | 2 | $\{3, 4\}$ |
| | | $(1, 1)$ | $(3, 2)$ | 3 | $\{4\}$ |
| | | | $(2, 3)$ | 4 | $\varnothing$ |




- vértice inicial: 1.
- vértice final: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).