



On White II, Wassily Kandinsky 1923

MCE_IM_2025-2026

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 10

Cap. 3 – Capacidade e condensadores.

Corrente eléctrica, resistência, resistividade

- Exemplos

Isabel Malaquias

imalaquias@ua.pt

Gab. 13.3.16

1



Capacidade e condensadores

A **CAPACIDADE ELÉCTRICA** (C) de um condutor define-se como a relação entre a carga acumulada e o potencial na superfície de um condutor

$$C = \frac{Q}{V}$$

Unidade S.I.
1 farad = 1
coulomb/volt, i. é,
1 F = 1C/V

Para cada material, existe um potencial de ruptura, i.é, o potencial a partir do qual não se pode aumentar mais a carga na superfície, sem que aconteça uma descarga brusca do condutor

Chama-se **CONDENSADOR** a qualquer dispositivo com 2 armaduras metálicas que podem manter-se a potenciais diferentes.

A **CAPACIDADE DE UM CONDENSADOR** define-se de forma análoga à capacidade de um condutor

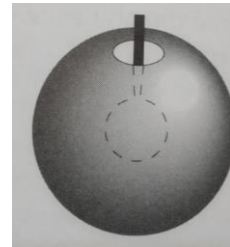
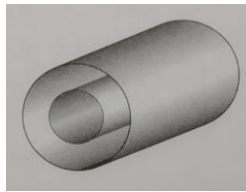
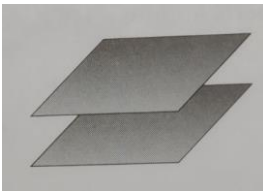
$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

MCE_IM_2025-2026

2

Tipos mais comuns de condensador:

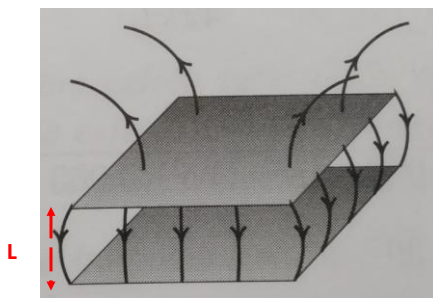
- de placas paralelas
- cilíndrico
- esférico



MCE_IM_2025-2026

3

Condensador de placas paralelas



L = distância entre as placas

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Na região central, i. é, no interior das placas, as linhas de campo são aproximadamente paralelas e o campo elétrico produzido por cada placa pode ser aproximado PELO CAMPO DE UM PLANO INFINITO COM CARGA

$$E = 2 \pi k \sigma = \sigma / \epsilon_0$$

Para calcular a d.d.p., usamos um percurso perpendicular às placas, seguindo o sentido do campo, do ponto A de maior potencial até ao ponto B, com menor potencial

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2 \pi k \sigma L$$

$$C = \frac{Q}{2 \pi k \sigma L} \quad k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0}$$

$$C = \frac{\epsilon_0}{L} A$$

MCE_IM_2025-2026

4

da Aula passada

LEI DE GAUSS



PLANO INFINITO CARREGADO UNIFORMEMENTE, com densidade superficial de carga, σ

Q1. Achar uma expressão para o valor de E a uma distância r do plano

1º - arranjar uma superfície gaussiana apropriada

cilindro de raio r

2º O campo eléctrico é perpendicular ao plano das bases do cilindro

não há contribuição para o fluxo da superfície lateral

A carga abrangida pela superfície gaussiana é igual a $\sigma \cdot A$

$$Q = \sigma \cdot A$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



$$2. E \cdot A = \sigma \cdot A / \epsilon_0$$

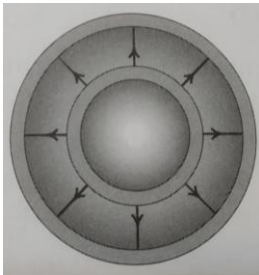
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

O valor de E é o mesmo para todos os pontos, de ambos os lados do plano da chapa.

MCE_IM_2025-2026

5

Condensador esférico



Este condensador é formado por 2 esferas condutoras concêntricas, com raios a e b , em que $a < b$.

O campo eléctrico entre as duas esferas é radial, e é dado por:

$$\vec{E} = \frac{k Q}{r^2} \hat{r}$$



$$\Delta V = V_A - V_B = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

MCE_IM_2025-2026

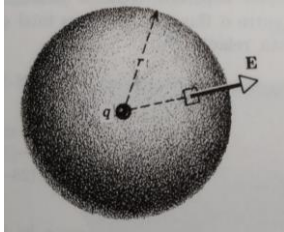
6

da Aula passada

LEI DE GAUSS



Superfície gaussiana esférica de raio r , envolvendo uma CARGA PONTUAL Q



Superfície gaussiana esférica de raio r envolvendo uma carga puntiforme. In Halliday & Resnick, *Física*, II-1, 1974

A lei de Coulomb pode ser obtida a partir da Lei de Gauss

Escolhamos uma superfície esférica, de raio r , centrada na carga pontual.

Vantagem desta escolha: - o campo eléctrico, por simetria, tem a mesma intensidade e direcção normal em todos os pontos da superfície

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} // d\vec{S}$$

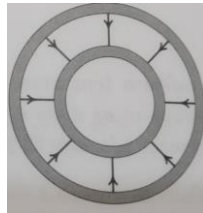
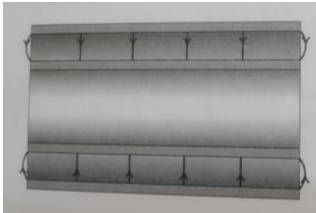
$$E \cdot 4\pi r^2 = Q / \epsilon_0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

MCE_IM_2021-2022
MCE_IM_2025-2026

7

Condensador cilíndrico



As linhas de campo são aproximadamente radiais e paralelas.

Se o comprimento L dos cilindros for maior que a distância entre as armaduras, poderemos admitir que as linhas de campo na região central são paralelas e radiais.

Assim sendo, um cilindro de raio r ($a < r < b$) e comprimento $l < L$ é uma superfície gaussiana

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

A carga dentro do cilindro gaussiano é dada por

$$q_{int} = Q \frac{l}{L}$$

Usando a lei de Gauss obtém-se:

$$E = \frac{2kQ}{Lr}$$

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{2kQ}{L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{L}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

MCE_IM_2025-2026

8

ENERGIA ARMAZENADA NUM CONDENSADOR

Esta energia é igual ao trabalho necessário para carregar o condensador



O trabalho infinitesimal (dW) para transportar uma carga infinitesimal (dq) da placa negativa do condensador até à placa positiva é dado por

$$dW = \frac{Q}{C} dq \quad \Rightarrow \quad W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dq$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

e também

$$\Delta V = \frac{Q}{C}$$

$$W = \frac{1}{2C} Q^2$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

ENERGIA POTENCIAL ELÉCTRICA, U

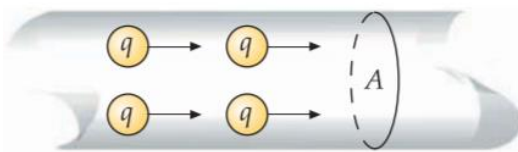
MCE_IM_2025-2026

9

CORRENTE ELÉCTRICA

Estudaremos agora **CARGAS EM MOVIMENTO – CORRENTE CONTÍNUA**

Uma corrente eléctrica corresponde a um fluxo de cargas, cuja **INTENSIDADE** é dada por **I**



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Unidade S.I.
1 ampère = 1
coulomb/segundo,
i. é, **1 A = 1C/s**

Segmento de fio que transporta corrente, sendo ΔQ a quantidade de carga que se desloca através da área da secção recta do fio (A) no tempo Δt

Uma **corrente eléctrica** pressupõe que haja um **campo eléctrico** a actuar sobre as cargas e, portanto, uma **diferença de potencial aplicada (ddp)**.

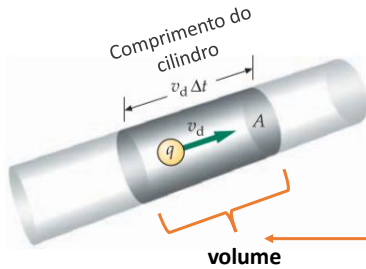
A corrente flui do potencial mais alto para o potencial mais baixo (chamado sentido convencional da corrente).

NB _ O verdadeiro sentido da corrente é o oposto (fluxo das cargas negativas)

MCE_IM_2025-2026

10

DENSIDADE DE CORRENTE



$$\Delta Q = n q v_d \Delta t A$$

v_d = velocidade de arrastamento (drift)

Poderemos, então, calcular a intensidade da corrente, I , através da integração da densidade de corrente (uniforme ou variável) através da superfície, i. é,

Durante o intervalo Δt , todas as cargas livres que se encontravam no volume sombreado atravessaram a secção A .

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q v_d A$$

A intensidade da corrente, I , é uma grandeza escalar.

DENSIDADE DE CORRENTE, \vec{j}

$$J = \frac{I}{A} \iff \vec{j} = n q \vec{v}_d$$

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

MCE_IM_2025-2026

11

DENSIDADE DE CORRENTE

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Se estivermos perante uma **superfície fechada**, S , o integral de superfície de \vec{j} será igual à carga total que sai da superfície, por unidade de tempo.

Devido à **conservação da carga**, a carga que sai através da superfície fechada S será igual à **diminuição da carga interna** dentro do volume delimitado por S

$$-\frac{dq_{int}}{dt} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

E, portanto,

$$\text{div } \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}$$

Esta equação é consequência directa da conservação da carga, e é chamada **EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE**

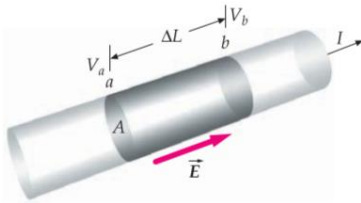
Quando a **divergência da densidade da corrente for zero**, a corrente é **ESTACIONÁRIA**; neste caso, não existe acumulação de carga em nenhum ponto, pelo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \text{ i. é, } \text{div } \vec{j} = 0$$

MCE_IM_2025-2026

12

LEI DE OHM



O segmento do fio é atravessado por uma corrente I . A diferença de potencial $V_a - V_b$ relaciona-se com o campo eléctrico, ficando

$$V = V_a - V_b = E \Delta L$$

A existência de uma **diferença de potencial aplicada (ddp)** obriga a um fluxo contínuo de cargas.

A razão entre a ddp e a corrente mede a resistência oferecida à passagem da corrente

$$V / I = R$$

Unidade S.I.
1 ohm = 1
volt/ampère, i. é,
1 Ω = 1V/ A

aceleração

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m} \Delta t \rightarrow \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m} \tau$$

sendo τ o tempo médio entre colisões

NB - O campo electrostático não é a única causa da corrente. Esta pode ser o resultado de reacções químicas ou de processos mecânicos

MCE_IM_2025-2026

13

CONDUTIVIDADE E RESISTIVIDADE

$$\vec{J} = n q \vec{v}_d$$

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m} \tau$$

τ = tempo médio entre colisões

$$\vec{J} = n q \frac{q\vec{E}}{m} \tau$$

se $q = e$, obtém-se:

$$\vec{J} = n e^2 \tau \frac{\vec{E}}{m} = \sigma \vec{E}$$

σ = CONDUTIVIDADE
do material

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

ρ = RESISTIVIDADE do
material

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

> TEMPERATURA \rightarrow > nº choques entre os
portadores de carga \rightarrow > RESISTIVIDADE

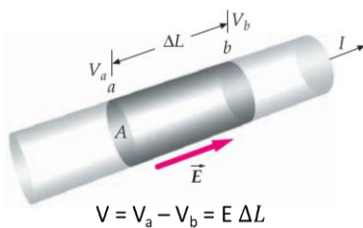
$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

Tabela de resistividades - [1596295307 \(768x1024\)](https://www.scribdassets.com)
([scribdassets.com](https://www.scribdassets.com))

MCE_IM_2025-2026

14

RESISTÊNCIA E FORMA DO CONDUTOR



$$V = V_a - V_b = E \Delta L$$

campo eléctrico uniforme

$$E = V / \Delta L$$

$$J = \frac{I}{A} = \sigma E$$

$$I = \sigma V A / \Delta L$$

$$I = V A / \rho \Delta L$$

$$V = I \rho \Delta L / A$$

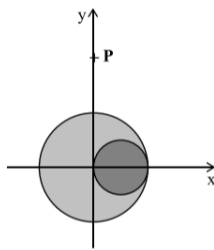
Pela lei de Ohm, obtemos a expressão seguinte para a RESISTÊNCIA DO CONDUTOR

$$R = \rho \Delta L / A$$

MCE_IM_2025-2026

15

16. Considere uma esfera isoladora de raio R que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica ρ , exceto numa região esférica de raio $R/2$, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é 2ρ .



- Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto do eixo xx . Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
- Calcule o campo eléctrico no ponto P do eixo yy , à distância $2R$, do centro da esfera.

Usar o **Princípio de Sobreposição** depois de considerar 2 esferas separadas

Esfera grande

$$\left\{ \begin{array}{l} r < R \\ r > R \end{array} \right.$$

LEI DE GAUSS

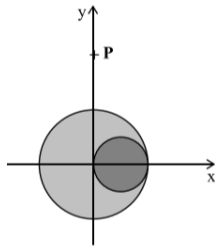
$$E_g \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$E_g \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

MCE_IM_2025-2026

16

16. Considere uma esfera isoladora de raio R que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volumica ρ , exceto numa região esférica de raio $R/2$, como se representa na figura. Nessa região a densidade volumica é 2ρ .



- a) Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do eixo xx . Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
- b) Calcule o campo elétrico no ponto P do eixo yy , à distância $2R$, do centro da esfera.

Esfera pequena

$$r \equiv r_1$$

$$R_1 \equiv \frac{R}{2}$$

Usar o **Princípio de Sobreposição** depois de **considerar 2 esferas separadas**

Esfera pequena

$r_1 < R_1$

$r_1 > R_1$

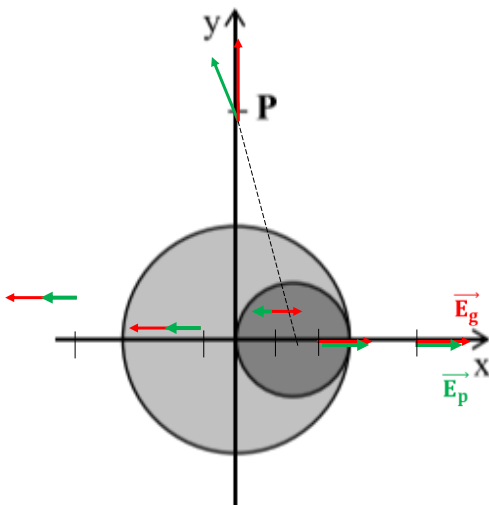
LEI DE GAUSS

$$E_g \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{r_1} \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$E_g \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{R_1} \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

MCE_IM_2025-2026

17



Princípio de Sobreposição

Somar vectorialmente os contributos do campo eléctrico das duas esferas (em xx e no ponto P sobre o eixo dos yy)

MCE_IM_2025-2026

18