

MATEMÁTICA DISCRETA

Ano Letivo 2024/2025 (Versão: 17 de Fevereiro de 2025)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
<https://elearning.ua.pt/>

CAPÍTULO I

LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM E DEMONSTRAÇÃO AUTOMÁTICA

INTRODUÇÃO

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas **consequências** destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa **consequência**? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma **prova**?

Para dar esta resposta teremos que especificar:

- o que é, em rigor, uma **afirmação/asserção**.
- o que é, em rigor, uma **linguagem formal**.

Aprender português (ou alemão ou ...) significa ...

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
 - «A, B, C, D, E,..., !,?,...»
 - « \wedge , \rightarrow , \neg , \forall , cos, x, y, ...»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
 - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
 - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
 - « $\forall x \exists y x < y$ » está bem mas « $xy \rightarrow \forall$ » não.
3. Aprender o **significado das palavras** (isto é, a sua interpretação).

Por exemplo, a palavra «esquilo» significa



Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se $3 + 3 = 0$ e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e $3 + 3 = 0$, então $3 + 3 = 0$. ✓
- ...

Mas não temos todo o dia!! Felizmente, basta considerar os casos « p representa algo verdadeiro», « p representa algo falso», « q representa algo verdadeiro» e « q representa algo falso».

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Demonstração.

Verificamos de facto todas as interpretações:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1



Exemplo

A fórmula

$$((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$$

é uma tautologia?

Para justificar esta afirmação, em lugar de criar uma tabela de verdade, é melhor(?) **argumentar**:

Suponha, por causa de argumento, $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r))$, portanto $p \vee q$ e $q \rightarrow r$. Sabendo $p \vee q$, podemos distinguir em dois casos.

Se p , então $p \vee r$.

Se q , então r porque $q \rightarrow r$, logo $p \vee r$.

Portanto, obtemos $p \vee r$ em ambos os casos.

Assim, concluímos $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$.

Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos — as chamadas **proposições**.

Exemplos

- «O Porto é campeão» é uma proposição.
- « $3 < (2 + 7)$ » é uma proposição.
- « $x = 6$ » não é uma proposição.
- «O Porto é campeão ou não» é uma proposição.
- «Se está chover, então está chover» é uma proposição.

Nota

No que se segue, denotamos proposições por p, q, r, \dots ou por $\varphi, \psi, \theta \dots$ e não discutimos mais a questão o que é uma proposição.

Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «... e ...»,
- «... ou ...»,
- «não ...»,
- «Se ... então ...».

Assim, uma proposição pode ser

1. **atômica** (o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente) ou
2. **composta** por proposições e pelos conectivos acima, cujo valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «... ou ...» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «... ou ...» não é tão *determinado*: pode ter o significado **inclusivo** acima, também pode ter o significado **exclusivo** onde «... ou ...» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.
- Para evitar a ambiguidade, na linguagem comum acrescentam-se as vezes
«... mas não ambos», «... ou ambos», «... e/ou ...», ...
- Neste curso, como é habitual na matemática, estabelecemos que «ou» tem o significado **inclusivo**.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«... mas ...», «... só se ...», «... exceto se ...».

- «... mas ...» pode-se substituir por «... e ...».
- «... só se ...» pode-se substituir por «... implica ...».
- «... exceto se ...» pode-se substituir por «... ou ...».

Portanto, «exceto se» tem a mesma ambiguidade como o «ou», e estabelecemos que neste semestre tem o significado **inclusivo**.

1. Revisão de lógica proposicional
2. A sintaxe (lógica de 1ª ordem)
3. A semântica (lógica de 1ª ordem)
4. Formas normais de fórmulas
5. Unificação
6. O método de resolução

1. REVISÃO DE LÓGICA PROPOSICIONAL

Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de **variáveis** (que representam as proposições),
- os símbolos \perp (contradição) e \top (tautologia) e os **conetivos**

Negação: \neg (não ...),

Conjunção: \wedge (... e ...),

Disjunção: \vee (... ou ...),

Implicação: \rightarrow (se ..., então ...),

Equivalência: \leftrightarrow (... se e somente se ...).

- Cada variável é uma fórmula, e \perp and \top são fórmulas.
- Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

são fórmulas.

Nota

Para tornar a notação menos pesada, suprimem-se os parêntesis mais externos. Por exemplo, escreve-se

$$\varphi \vee (\psi \rightarrow \gamma) \quad \text{em lugar de} \quad (\varphi \vee (\psi \rightarrow \gamma)).$$

Nota

Entende-se que o conetivo « \neg » tem uma «ligação mais forte» (ou seja, aplica-se primeiro) do que os outros conetivos. Por exemplo, escreve-se

$$\neg \varphi \vee \psi \quad \text{em lugar de} \quad (\neg \varphi) \vee \psi.$$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top, \perp, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $p \rightarrow \perp$, $\neg \top$, ...
- $(p \wedge q) \rightarrow q$, $(p \rightarrow q) \wedge (p \vee q)$, ...
- $(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow q)$, ...

Exemplos (não são fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

$$(\top \perp), \quad (p \ q \ r), \quad (\top \rightarrow), \quad (p \rightarrow \wedge), \quad \dots$$

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- \perp interpreta-se por **0** (falso)
- \top por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada **variável** um **valor de verdade** (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- \perp interpreta-se por **0** (falso)
- \top por **1** (verdadeiro)
- os **conectivos** interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
0	0	0	1

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
1	0	1	0

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. ✓
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. ✓
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. ✗

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para **cada** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para **alguma** interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \rightarrow q$ é uma tautologia.

Demonstração.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1



Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para **cada** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para **alguma** interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para cada a interpretação.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Demonstração.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1



Verificam-se as equivalências

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$$

$$(p \wedge p) \equiv p$$

$$(p \wedge \top) \equiv p$$

$$(p \wedge \perp) \equiv \perp$$

$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$

$$(p \vee p) \equiv p$$

$$(p \vee \perp) \equiv p$$

$$(p \vee \top) \equiv \top$$

bem como as leis de distributividade

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

as leis de De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q),$$

e a lei da contraposição e da dupla negação

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

$$\neg\neg p \equiv p.$$

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r .

- $p, q, \neg r$ são literais.
- $\neg\neg q, p \rightarrow q$ não são literais.

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r .

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$ é uma **CNF** (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$ é uma **DNF** (disjuntiva).
- $p \wedge q \wedge r$ é uma **CNF** e uma **DNF**.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ nem é uma **CNF** nem uma **DNF**.

Teorema

Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).

Como obter?

Utilizar

$$\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \quad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

e as leis de De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$$

e as leis de distributividade

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) &\equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta), \\ (\varphi \vee (\psi \wedge \theta)) &\equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta).\end{aligned}$$

Definição

Um conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ em 1.

Exemplo

O conjunto

$$\{\neg p, p \rightarrow q, q\}$$

é consistente: podemos escolher a interpretação

$$p \longmapsto 0, \quad q \longmapsto 1.$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$,
a proposição atômica $P_{i,j,k}$ representa a
afirmação

«a posição (i, j) contém o número k ».

- Portanto, de acordo com o quadro acima, as fórmulas

$$P_{1,2,2}, \quad P_{1,3,6}, \quad P_{2,7,1}, \quad \dots, \quad P_{9,8,4}$$

devem ser válidas.

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$,
a proposição atômica $P_{i,j,k}$ representa a
afirmação

«a posição (i, j) contém o número k ».

- Cada número aparece em cada linha:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (P_{1,1,1} \vee P_{1,2,1} \vee \dots \vee P_{1,9,1}) \wedge (P_{1,1,2} \vee P_{1,2,2} \vee \dots) \wedge \dots \\
 &= \bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 P_{i,j,k}.
 \end{aligned}$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$,
a proposição atômica $P_{i,j,k}$ representa a
afirmação

«a posição (i, j) contém o número k ».

- Cada número aparece em cada coluna:

$$F_2 = \bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{k=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 P_{i,j,k}.$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$,
a proposição atômica $P_{i,j,k}$ representa a
afirmação

«a posição (i, j) contém o número k ».

- Cada número aparece em cada bloco 3×3 :

$$F_3 = \bigwedge_{k=1}^9 \bigwedge_{u=0}^2 \bigwedge_{v=0}^2 \bigvee_{i=1}^3 \bigvee_{j=1}^3 P_{3u+i, 3v+j, k}.$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$,
a proposição atômica $P_{i,j,k}$ representa a
afirmação

«a posição (i, j) contém o número k ».

- Nenhuma posição tem dois números:

$$\begin{aligned}
 F_4 &= \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,2}) \wedge \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,3}) \wedge \dots \\
 &= \bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{1 \leq k < k' \leq 9} \neg(P_{i,j,k} \wedge P_{i,j,k'}).
 \end{aligned}$$

Exemplo (<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$,
a proposição atômica $P_{i,j,k}$ representa a
afirmação

«a posição (i, j) contém o número k ».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente. O número de variáveis é $9^3 = 729$, portanto, a tabela de verdade correspondente tem $2^{729} > 10^{200}$ linhas ...

No entanto, podem utilizar um SAT-solver como www.minisat.se.

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I ,

se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I , então ψ tem o valor 1 em I .

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q, p \rightarrow q \models q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Nota

$\dots, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi$ se e só se $\dots, \varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

Exemplo

Consideremos: $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \models \varphi \rightarrow \theta$

Podemos validar esta consequência verificando **todas** as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade ...

Em alternativa, podemos fazer uma **prova** (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta, \dots \text{ algo esperto}^a \dots \varphi \rightarrow \theta.$$

^aJustificado pelo anterior utilizando certas regras (**as regras de inferência**).

Nota

Se existe uma prova de ψ a partir de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, escreve-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

As regras de inferência (lógica proposicional)

$$\begin{array}{c}
 \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge \mathcal{E}_1 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge \mathcal{E}_2 \\
 \\
 \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee \mathcal{I}_1 \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \mathcal{I}_2 \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \psi \\ \vdots \\ \theta \end{array}}{\theta} \vee \mathcal{E} \\
 \\
 \frac{\begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow \mathcal{E} \qquad \frac{\perp}{\varphi} \perp \mathcal{E} \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{EM}
 \end{array}$$

\mathcal{E} – Eliminação, \mathcal{I} – Introdução

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \theta \vdash \varphi \rightarrow \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \rightarrow \psi$	
2	$\psi \rightarrow \theta$	
3	φ	H
4	ψ	$\Rightarrow E, 1, 3$
5	θ	$\Rightarrow E, 2, 4$
6	$\varphi \rightarrow \theta$	$\Rightarrow I, 3, 5$

Português:

Por hipótese, $\varphi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \theta$.

Com o objetivo de provar $\varphi \rightarrow \theta$, suponha-se φ (temporariamente!!). Como $\varphi \rightarrow \psi$, conclua-se ψ ; como $\psi \rightarrow \theta$, conclua-se θ .

Portanto, $\varphi \rightarrow \theta$ (e retire-se φ).

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Teorema (As regras são corretas)

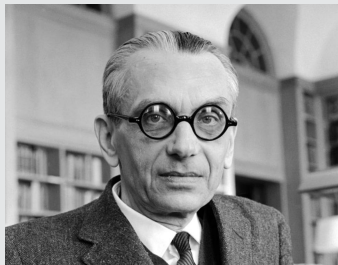
«Tudo o que se prova é válido.»

Teorema (As regras são suficientes)

«Tudo o que é válido se pode provar.»

Um pouco de história ...

O Kurt Gödel apresentou o resultado correspondente para a lógica de primeira ordem numa conferência em Königsberg (Kaliningrad) em 1930 ... um dia antes de anunciar o seu famoso resultado de incompletude.



Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978), matemático austríaco e norte-americano.

Nota

No que se segue, apresentamos um algoritmo para verificar se a fórmula ψ é consequência das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Começamos por observar:

Teorema

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ se e só se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$ é inconsistente.

A questão

Como verificar se o conjunto de fórmulas $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é inconsistente?

A preparação

- Consideremos que cada fórmula está na **forma normal conjuntiva**.
- Como

$\{\dots \psi_1 \wedge \psi_2\}$ é consistente se e só se $\{\dots \psi_1, \psi_2\}$ é consistente, podemos supor que $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é um conjunto de **cláusulas**.

- É conveniente identificar uma cláusula com o conjunto de literais que ocorrem na cláusula (por causa da associatividade, comutatividade e idempotência da disjunção). Assim, não distinguimos entre

$$p \vee \neg q \vee p, \quad \neg q \vee p \vee p, \quad \neg q \vee p,$$

e a fórmula \perp corresponde ao conjunto vazio de literais.

A questão

Como verificar se o conjunto de cláusulas $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é inconsistente?

O método

Deduzimos uma «contradição»: $\theta_1, \dots, \theta_n \vdash \perp$.

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \perp$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ou ψ_i é «consequência» das fórmulas anteriores.

Para definir «consequência», consideremos agora apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\psi \rightarrow \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi} \text{Res} \quad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

$$\text{Em particular:} \quad \frac{\neg\psi \quad \psi \vee \varphi}{\varphi} \text{Res} \quad \text{e} \quad \frac{\neg\psi \quad \psi}{\perp} \text{Res}.$$

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \dots, \theta_n$,

$\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é inconsistente se e só se $\theta_1, \dots, \theta_n \vdash \perp$.

Nota

Como cada resolvente a partir de $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ corresponde a um conjunto de literais, então só há um número finito destes resolventes.

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$:

1. Converter as fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na forma normal conjuntiva.
3. Aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até ou
 - obtém-se \perp e neste caso **verifica-se** $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, ou
 - não se aplica mais a regra de resolução (sem obter \perp) e neste caso **não se verifica** $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r, \quad \neg(p \rightarrow r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p \wedge \neg r.$$

Agora: $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r, \quad r, \quad \neg r, \quad \perp$.

Exemplo

Em suma, provámos que

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$$

uma vez que o conjunto de cláusulas

$$\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

é inconsistente, tal como se verifica na seguinte dedução:

1.	$\neg p \vee q$	Hip.
2.	$\neg q \vee r$	Hip.
3.	p	Hip.
4.	$\neg r$	Hip.
5.	q	Res (1,3)
6.	r	Res (2,5)
7.	\perp	Res (4,6)

Exemplo

Será que $p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \vee q$

(3) $\neg r \vee q$

(4) $\neg r$

(5) q (Resolvente de (1) e (2))

Não há mais resolventes. Logo, a afirmação

$$p, p \rightarrow q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$$

é falsa.

2. A SINTAXE (LÓGICA DE 1^A ORDEM)

Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$\forall x \forall y ((\text{par}(x) \wedge \text{par}(y)) \rightarrow \text{par}(x + y))$$

e podemos quantificar.

Por exemplo, para expressar que «todos os gatos têm garras»:

$$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x)).$$

Também podemos utilizar a lógica de primeiro ordem para

representar factos (criar bases de dados) e fazer **inquéritos**.

Exemplo (Os factos)

1. A Ana é docente.
2. Todos os docentes são pessoas.
3. O Paulo é diretor.
4. Os diretores são docentes.
5. Todos os docentes consideram o diretor um amigo ou não o conhecem.
6. Todos têm um amigo.
7. As pessoas apenas criticam aquelas pessoas que não são suas amigas.
8. A Ana critica o Paulo.

Exemplo (Os factos ... mais formais)

1. $\text{docente}(\text{Ana})$
2. $\forall x (\text{docente}(x) \rightarrow \text{pessoa}(x))$
3. $\text{diretor}(\text{Paulo})$
4. $\forall x (\text{diretor}(x) \rightarrow \text{docente}(x))$
5. $\forall x \forall y ((\text{docente}(x) \wedge \text{diretor}(y)) \rightarrow (\text{amigo}(y, x) \vee \neg \text{conhece}(x, y)))$
6. $\forall x \exists y \text{amigo}(y, x)$
7. $\forall x \forall y ((\text{pessoa}(x) \wedge \text{pessoa}(y) \wedge \text{critica}(x, y)) \rightarrow \neg \text{amigo}(y, x))$
8. $\text{critica}(\text{Ana}, \text{Paulo})$

Questão. O Paulo não é amigo da Ana?

$\neg \text{amigo}(\text{Paulo}, \text{Ana})$

Exemplo (Os factos ... do ponto de vista de um computador)

1. $P_1(A)$
2. $\forall x (P_1(x) \rightarrow P_3(x))$
3. $P_4(B)$
4. $\forall x (P_4(x) \rightarrow P_1(x))$
5. $\forall x \forall y ((P_1(x) \wedge P_4(y)) \rightarrow (P_2(x, y) \vee \neg P_5(x, y)))$
6. $\forall x \exists y P_2(y, x)$
7. $\forall x \forall y ((P_3(x) \wedge P_3(y) \wedge P_6(x, y)) \rightarrow \neg P_2(y, x))$
8. $P_6(A, B)$

Questão. $\neg P_2(B, A)$

As tarefas

- Colecionar o conhecimento.
- Escolher uma linguagem apropriada: símbolos de constantes, de predicados ...
- Representar o conhecimento nesta linguagem.
- Consultar a base de dados (e o procedimento de dedução).

Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos « \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow , \neg , \perp , \top » da lógica proposicional,
3. os **quantificadores**: os símbolos « \exists » (existe) e « \forall » (para todos),
4. o símbolo de igualdade « $=$ »,
5. Além destes símbolos, e dependente do contexto, temos
 - uma coleção de símbolos de constante,
 - uma coleção de símbolos de função
(cada símbolo de função f tem uma «aridade» $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos),
 - uma coleção de símbolos de predicado (= relação)
(cada símbolo de predicado R tem uma «aridade» $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos).

Exemplo (espaços vetoriais)

O alfabeto da **teoria de espaços vetoriais reais** consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de constante 0 ,
- para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o símbolo de função $\alpha \cdot -$ de uma variável, e
- o símbolo de função $+$ de duas variáveis.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e t_1, \dots, t_n são termos, então $f(t_1, \dots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z , um símbolo de constante a , um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a .
- $i(a), i(x), m(z, y), m(a, z), \dots$
- $m(i(x), x), i(m(x, a)), m(m(z, a), i(x)), \dots$
- \dots

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \dots, t_n)$ é uma fórmula onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e t_1, \dots, t_n são termos.
- $t_1 = t_2$ é uma fórmula onde t_1, t_2 são termos.
- \perp e \top são fórmulas.

Às fórmulas acima chamamos **átomos**.

- Se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \rightarrow \psi), \quad (\neg \varphi), \quad \perp, \quad \top$$

são fórmulas.

- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então

$$\forall x \varphi \quad \text{e} \quad \exists x \varphi$$

são fórmulas.

Exemplo

$$\underbrace{\forall x \forall y \forall z \left(\underbrace{((x < y) \rightarrow \underbrace{(x + z < y + z)}_{\text{termo}})}_{\text{fórmula}} \right)}_{\text{fórmula}}$$

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** \forall respetivamente \exists .

Exemplos

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$:

O alcance de « \forall » é « $(\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$ ».

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$:

O alcance de « \forall » é « $\exists y x < y$ ».

O alcance de « \exists » é « $x < y$ ».

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$:

O alcance de « \forall » é « $\exists y (x < y \wedge a < x)$ ».

O alcance de « \exists » é « $x < y \wedge a < x$ ».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x \varphi$ e $\exists x \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** \forall respectivamente \exists .

Variável livre e ligada

Uma **ocorrência de uma variável** numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma **ocorrência de uma variável** numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Uma **variável** numa fórmula diz-se **livre** quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula.

Nota

Uma fórmula diz-se **fechada** quando não tem variáveis livres.

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garras}(x))$:

A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x \exists y x < y) \wedge (a < x)$:

A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada.

A fórmula não é fechada.

- $\forall x \exists y (x < y \wedge a < x)$:

As variáveis x e y ocorrem ligadas. A fórmula é fechada.

3. A SEMÂNTICA (LÓGICA DE 1^A ORDEM)

Nota

Para interpretar os termos respetivamente as fórmulas

$$M(M(x, y), I(A)), \quad R(y, A), \quad \exists y R(y, A),$$

precisamos de saber o significado de cada uma dos símbolos. Quais elementos denotam as variáveis? Quais funções correspondem às símbolos de funções? E às símbolos de predicados?

No que se segue, explicaremos como interpretar cada uma das componentes da fórmula.

Nota

- Sendo c um símbolo de constante que interpretamos por 3, então a interpretação da fórmula $x = c$ depende da interpretação de x .
- No entanto, para a interpretação da fórmula $\forall x x = c$, a interpretação de x é irrelevante. Ou seja, os quantificadores alterem o «estatuto da variável».

Definição

Uma **estrutura** \mathcal{M} para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D ,
- a cada símbolo de constante a associamos um elemento $a^{\mathcal{M}} \in D$,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $f^{\mathcal{M}}: D^n \rightarrow D$,
- a cada símbolo de predicado P com n argumentos associamos um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Definição

Dada uma estrutura \mathcal{M} , uma **valoração** V em \mathcal{M} associa a cada variável x um elemento $V(x) \in D$.

O par (\mathcal{M}, V) diz-se **interpretação**.

Interpretação de termos

Dada uma interpretação (\mathcal{M}, V) de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \dots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in D.$$

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária M (ou seja, de dois argumentos), um símbolo de função I de um argumento e um símbolo de constante A .

Para a interpretação (\mathcal{M}, V) com a estrutura \mathcal{M} dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}}: D^2 \rightarrow D, (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \text{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$, temos:

- $V(M(A, x)) = |1 - 2| = 1.$
- $V(M(M(x, y), I(A))) = ||2 - 1| - 1| = 0.$

Definição

Dada uma interpretação (\mathcal{M}, V) de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ , definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** (\mathcal{M}, V) , ou **(\mathcal{M}, V) é modelo de** φ , denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \dots, t_n)$ quando $(V(t_1), \dots, V(t_n)) \in R^{\mathcal{M}}$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e **não** $(\mathcal{M}, V) \models \perp$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \rightarrow \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ implica $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \neg \varphi$ quando **não** $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

Falta considerar os quantificadores ...

Modificação da valoração

Para uma variável x e um elemento $a \in D$, V_a^x denota a valoração definida por

$$V_a^x(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

Definição

Continuamos:

- $(\mathcal{M}, V) \models \exists x \psi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, V_a^x) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \forall x \psi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, V_a^x) \models \psi$.

Nota

Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é irrelevante na interpretação de φ .

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação (\mathcal{M}, V) com a estrutura \mathcal{M} dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}}: D^2 \rightarrow D, (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \text{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D , e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em (\mathcal{M}, V) .
- $\exists x R(x, A)$ é válida em (\mathcal{M}, V) .
- $\forall x R(x, A)$ não é válida em (\mathcal{M}, V) .
- $\forall x \exists x R(x, A)$ é válida em (\mathcal{M}, V) .

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x x < 4$	não válida
$\forall y y < 4$	não válida
$\exists y \forall y y < 4$	não válida
$\forall x ((x < 4) \rightarrow (1 = 0))$	não válida
$\forall x \exists y x < y$	válida
$\exists x \forall y x \leq y$	não válida

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em **cada** interpretação.

Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

- **consistente** quando é válida em **alguma** interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.

- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma **contradição**.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** quando $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso escrevemos $\varphi \equiv \psi$.

Definição

Uma fórmula ψ diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação (\mathcal{M}, V) ,

se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são válidas em (\mathcal{M}, V) , então ψ é válida em (\mathcal{M}, V) .

Em símbolos: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Nota

As regras de dedução «natural» da lógica proposicional admitem uma extensão para a lógica de primeira ordem. Tal como na lógica proposicional, baseada nestas regras define-se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, e tem-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \quad \text{se e só se} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

No entanto, neste capítulo consideremos o **método de resolução**.

Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

Na linguagem de 1ª ordem

$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$

Aqui:

- «gato, garra» são símbolos de predicado de um argumento,
- «Tom» é um símbolo de constante.

Exemplo

Todos os gatos têm garras. Tom é um gato.

Tom tem garras.

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x (\text{gato}(x) \rightarrow \text{garra}(x)), \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$$
Preparar para a dedução

$\neg \text{gato}(x) \vee \text{garra}(x)$,^a $\text{gato}(\text{Tom})$, $\neg \text{garra}(\text{Tom})$.

^aNão escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom})$, $\neg \text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom})$,^a $\text{garra}(\text{Tom})$, $\neg \text{garra}(\text{Tom})$, \perp .

^aEscrever «Tom» em lugar de «x» ... já que a fórmula é válida «para todos».

4. FORMAS NORMAIS DE FÓRMULAS

Convenção

A partir de agora vamos supor que o domínio da interpretação não é vazio.

Definição

Adaptamos a definição da lógica proposicional:

- Um literal é um átomo ou a negação de um átomo.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \quad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \quad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i .

Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota « \exists » ou « \forall » diz-se na **na forma normal prenex**.

Como obter?

- Mover « \neg » mais para o interior:

$$\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi \quad \text{e} \quad \neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi.$$

- Mover os quantificadores mais para o exterior:

- $(\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi) \equiv \forall x (\psi \wedge \varphi),$

- $(\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi) \equiv \exists x (\psi \vee \varphi).$

- Suponha que ψ não contém a variável x :

$$(\forall x \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi), \quad (\exists x \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi),$$

$$(\forall x \varphi) \vee \psi \equiv \forall x (\varphi \vee \psi), \quad (\exists x \varphi) \vee \psi \equiv \exists x (\varphi \vee \psi).$$

Definição

Uma fórmula na **forma normal de Skolem**^a é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

^aThoralf Albert Skolem (1887 – 1963), matemático norueguês.

Nota

Como

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) \wedge (\forall x_1 \dots \forall x_n \psi),$$

uma fórmula na forma normal de Skolem pode-se escrever como uma conjunção de fórmulas normais de Skolem $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi_i$ onde φ_i é uma cláusula $L_1 \vee \dots \vee L_n$.

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$:
 1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
 2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi$ por c , e
 3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists x_k Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$ ($k > 1$):
 1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k - 1$ argumentos,
 2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \dots Q_n x_n \varphi$ por $f(x_1, \dots, x_{k-1})$, e
 3. eliminar $\exists x_k$.

Teorema

Sejam ψ_1, \dots, ψ_n as «skolemizações» das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, então

$\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ é consistente se e só se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é consistente.

5. UNIFICAÇÃO

Definição

Uma **substituição** é uma função $\sigma: \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$.

Nota

- Se

$$\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições «relevantes»:

$$\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$$

sendo $t_i = \sigma(v_i)$.

- A substituição

$$\{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}, \quad v \mapsto v$$

denotamos por ε . Portanto, escrevemos $\varepsilon = \emptyset$.

Exemplo

$\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ corresponde à substituição

$\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$

$$v \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{se a variável } v \text{ é } x, \\ A & \text{se a variável } v \text{ é } y, \\ v & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Estender substituições:

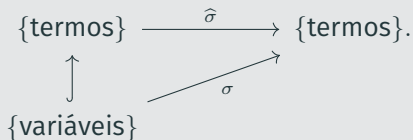
Cada substituição $\sigma: \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\hat{\sigma}: \{\text{termos}\} \rightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\hat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v .
- $\hat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c .
- $\hat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$, para cada símbolo de função f de n argumentos e termos t_1, \dots, t_n .

Portanto, obtemos



Estender ainda mais

Dada uma substituição $\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ e uma fórmula E (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando $\hat{\sigma}$ ao todos os termos em E .

Para um conjunto \mathcal{E} de fórmulas (sem quantificadores), definimos:

$$\mathcal{E}\sigma = \{E\sigma \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

- $\sigma = \{f(z, y)/x, A/y\}$:

$$\hat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z, y), A).$$

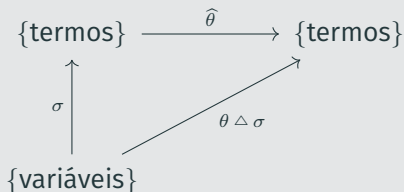
Definição

Sejam

$$\sigma, \theta: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A **composta de θ após σ** é a função

$$\theta \triangle \sigma = \hat{\theta} \circ \sigma.$$

**Nota**

Para cada expressão (= termo, fórmula) E : $E(\theta \triangle \sigma) = (E\sigma)\theta$.

Exemplo

Consideremos as substituições

$$\sigma = \{A/x, g(x)/y, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x, z/y, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\theta \triangle \sigma &= \{\hat{\theta}(A)/x, \hat{\theta}(g(x))/y, \hat{\theta}(y)/z, x/u\} \\ &= \{A/x, g(f(y))/y, z/z, x/u\} \\ &= \{A/x, g(f(y))/y, x/u\}.\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

Nota:

$$\begin{aligned}\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\} &= \{f(f(A))/y\} \triangle \{y/x\} \\ &= \{f(f(A))/x\} \triangle \{x/y\}.\end{aligned}$$

Definição

- Seja \mathcal{E} um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição

$$\sigma: \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

diz-se **unificador** de \mathcal{E} quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.

- Um conjunto \mathcal{E} de expressões diz-se **unificável** quando existe um unificador de \mathcal{E} .

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x), Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y), Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x), f(f(x))\}$ não é unificável.

Definição

Seja \mathcal{E} um conjunto de expressões. Um unificador σ de \mathcal{E} diz-se **unificador mais geral** (abreviação: **mgu**) de \mathcal{E} quando, para cada unificador θ de \mathcal{E} , existe uma substituição λ tal que

$$\theta = \lambda \triangle \sigma.$$

Ou seja, cada unificador de \mathcal{E} se pode descrever como «acrescentar substituições acima do unificador mais geral».

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** \mathcal{E}_k tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de \mathcal{E} e podemos PARAR.
3. Determinar o **conjunto das diferenças** de \mathcal{E}_k ; isto é, o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \dots\}$ das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de \mathcal{E}_k são diferentes.
4. **Se** existem uma variável v e um termo t em \mathcal{D} e v não ocorre em t , **então**
 - $\sigma_{k+1} = \{t/v\} \triangle \sigma_k$,
 - $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k\{t/v\}$,
 - $k := k + 1$ e voltar ao ponto (2);

se não PARAR com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$:

Aqui:

- x, y, z são variáveis.
- A é um símbolo de constante.
- h é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de predicado de dois argumentos.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y, z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y, x, A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x, z), P(x, h(x)), P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x, A\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \{A/x\} \triangle \sigma_1 = \{A/x, A/y\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A, z), P(A, h(A)), P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

2. $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \{h(A)/z\} \triangle \sigma_2 = \{h(A)/z, A/x, A/y\}, \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A, h(A)), P(A, h(A)), P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

3. $\mathcal{E}_3 = \{P(A, h(A))\}$. Logo: mgu = $\{A/x, A/y, h(A)/z\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(A, h(A))\}$:

o. $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z), P(A, h(y)), P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A), A\}$.

Como nenhuma variável pertence à \mathcal{D}_1 , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), P(x, h(A))\}$:

o. $\mathcal{D}_0 = \{h(x), x, x\} = \{h(x), x\}$.

Como x (a única variável em \mathcal{D}_0) ocorre em $h(x)$ (o único termo em \mathcal{D}_0 diferente do x), terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), \neg P(A, h(A))\}$:

o. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

Como nenhuma variável pertence à \mathcal{D}_0 , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z), P(x, h(y)), Q(A, h(A))\}$:

o. $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$.

Como nenhuma variável pertence à \mathcal{D}_0 , terminamos com a mensagem «Não é unificável».

6. O MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Convenção

A partir de agora consideremos apenas linguagens sem o símbolo «=». Além disso, continuamos supor que o domínio da interpretação não é vazio.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:**
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

(aqui: $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:**
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

Exemplos

Consideremos $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um fator de C_1 .
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um fator de C_1 e C_2 .
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente de C_1 e C_2 .

Resolvente de cláusulas C_1 e C_2 = Resolvente binária de (um fator de) C_1 e de (um fator de) C_2 .

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:**

$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

(aqui: $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)

- **Fator:**

$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

Recordamos

Para justificar que

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$$

(ψ é consequência de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$), mostramos que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

é inconsistente.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:**
$$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma) \text{ mgu}(\psi, \varphi)} \text{BR}$$

(aqui: $\neg\psi \vee \theta, \varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:**
$$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta) \text{ mgu}(\varphi, \psi)} \text{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores \forall (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;
4. aplicar sucessivamente as duas regras anteriores, até se obter uma contradição (se for possível).

Exemplo (de Lewis Carroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Car96.

Na linguagem de 1ª ordem (português \rightsquigarrow formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x))$.
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x))$. A negação: $\exists x (P(x) \wedge B(x))$.

Na linguagem de 1ª ordem (português \rightsquigarrow formulês)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg B(x)).$ A negação: $\exists x (P(x) \wedge B(x)).$

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x (\neg B(x) \vee S(x)).$
- $\forall x (P(x) \rightarrow I(x)) \equiv \forall x (\neg P(x) \vee I(x)).$
- $\neg \exists x (I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x (\neg I(x) \vee \neg S(x)).$
- $\exists x (P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c),$ c um símbolo de constante.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,
6. $\neg B(x) \vee S(x)$, mgu de $S(c)$ e $S(x)$: $\{c/x\}$.
7. $\neg B(c)$,
8. $B(c)$,
9. \perp .

Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x));$ ou seja $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \perp$.

Aqui:

- x é uma variável.
- f é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de relação de um argumento.

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

$\forall x P(x) \models \exists x P(f(x))$; ou seja $\forall x P(x), \forall x \neg P(f(x)) \vdash \perp$.

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x))$
2. $P(x)$, $P(f(x))$ e $P(x)$ não são unificáveis!!?

Esquecemos renomear as variáveis: $P(x) \rightsquigarrow P(y) \quad \dots$

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

- | | |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ | (Hip) |
| 2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$ | (Hip) |
| 3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$ | (Hip) |
| 4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$ | (Hip) |
| 5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ | Resolvente (1,2) |
| 6. $\neg P(x_1)$ | Fator (5) |
| 7. $P(x_3) \vee P(x_4)$ | Resolvente (3,4) |
| 8. $P(x_3)$ | Fator (7) |
| 9. \perp | Resolvente (6,8) |

O método de resolução baseia-se no trabalho

Este método é (correto e) completo na lógica de 1ª ordem no seguinte sentido:

Se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi,$$

então existe uma dedução de \perp a partir de $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$.

Sobre a programação (em lógica):

Em particular: 4.4. «Logical Programming».

Vídeos em: <https://groups.csail.mit.edu/mac/classes/6.001/abelson-sussman-lectures/>