1 Derivações de L

1.1 Notação

$Der(L)$	a álgebra das derivações de L
$K \rtimes_{\vartheta} L$	soma semidireta das álgebras de Lie K e L induzida por ϑ. Omitiremos ϑ se ela for nula
$U \oplus V$	Soma direta de espaços vetoriais

1.2 Pares compatíveis

Sejam K e I álgebras de Lie. Diremos que K age sobre I se existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : K \to Der(I)$. Neste caso, denotaremos a ação de K sobre I por

$$[a, k] := \psi(k)(a), k \in K, a \in I.$$

Definição 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tal que K age sobre I. Defina a álgebra dos pares compatíveis de $Der(K) \rtimes Der(I)$ por*

$$\begin{array}{rcl} Comp(K,I) & = & \{d_K + d_I \in Der(K) \rtimes Der(I) \text{ tal que } d_I([a,k]) = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)], \\ & & \text{para todo } a \in I, k \in K\}. \end{array}$$

Para verificar que $Comp(K,I)$ é uma subálgebra de $Der(K) \rtimes Der(I)$ considere $d_K + d_I, e_K + e_I \in Comp(K,I)$, $a \in I$ e $k \in K$. Então,

$$\begin{array}{rcl} [d_I, e_I][a,k] & = & (d_I.e_I - e_I.d_I)[a,k] \\ & = & d_I([e_I(a), k] + [a, e_K(k)]) - e_I([d_I(a), k] + [a, d_K(k)]) \\ & = & [d_I.e_I(a), k] + [e_I(a), d_K(a)] + [d_I(a), e_K(k)] + [a, d_K.e_K(k)] \\ & - & [e_I.d_I(a), k] - [d_I(a), e_K(k)] - [e_I(a), d_K(k)] - [a, e_K.d_K(k)] \\ & = & [[d_I, e_I](a), k] - [a, [d_K, e_K](k)]. \end{array}$$

Se I é abeliana podemos calcular os pares compatíveis como um anulador de uma ação de $Der(K) \rtimes Der(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$. Para isso, sejam $d_K + d_I \in Der(K) \rtimes Der(I)$, $T \in Hom(K, Der(I))$, $k \in K$, $a \in I$ e defina a aplicação $\psi_I : \mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I) \to \mathfrak{gl}(Hom(K, Der(I)))$ por

$$(d_K + d_I)T(k)(a) = d_I(T(k)(a)) - T(d_K(k))(a) - T(k)(d_I(a)). \tag{1}$$

Primeiro Observe que essa aplicação está bem definida, ou seja, que $\psi_I(d_K + d_I)(T) \in Hom(K, Der(I))$ pois I é abeliana.

Vamos verificar que ψ_I é homomorfismo de álgebras de Lie. Seja $e_K + e_I \in \mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I)$ então

$$
\begin{aligned}
[\psi_I(d_K+d_I),\psi_I(e_K+e_I)]T(k)(a) &= (\psi_I(d_K+d_I).\psi_I(e_K+e_I)-\psi_I(e_K+e_I).\psi_I(d_K+d_I))T(k)(a)\\
&= \psi_I(d_K+d_I)(e_I(T(k)(a))-T(e_K(k))(a)-T(k)(e_I(a)))\\
&- \psi_I(e_K+e_I)(d_I(T(k)(a))-T(d_K(k))(a)-T(k)(d_I(a))\\
&= d_I.e_I(T(k)(a))-d_I(T(e_K(k))(a))-d_I(T(k)(e_I(a)))\\
&- e_I.d_I(T(k)(a))+e_I(T(d_K(k))(a))+e_I(T(k)(d_I(a)))\\
&- e_I(T(d_K(k))(a))+T(e_K.d_K(k))(a)+T(d_K(k))(e_I(a))\\
&+ d_I(T(e_K(k))(a))-T(d_K.e_K(k))(a)-T(e_K(k))(d_I(a))\\
&- e_I(T(k)(d_I(a)))+T(e_K(k))(d_I(a))+T(k)(e_I.d_I(a))\\
&+ d_I(T(k)(e_I(a)))-T(d_K(k))(e_I(a))-T(k,d_I.e_I(a))\\
&= [d_I,e_I](T(k)(a))-T([d_K,e_K])(k)(a)-T(k)([d_I,e_I](a))\\
&= \psi_I([d_K,e_K]+[d_I,e_I])T(k)(a)\\
&= \psi_I([d_K+d_I,e_K+e_I])T(k)(a).
\end{aligned}
$$

Teorema 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere em $Hom(K, Der(I))$ a ação de $Der(K) \rtimes Der(I)$ dada por ψ_I definida em (**??**). Se $\psi \in Hom(K, Der(I))$ é dada por $\psi(k)(a) = [a, k]$ então $Comp(K, I) = Ann_{Der(K)\rtimes Der(I)}(\psi)$.*

Prova:

$$
\begin{aligned}
d_K+d_I\in Comp(K,I) &\Leftrightarrow d_I[a,k]=[d_I(a),k]+[a,d_K(k)] \quad a\in I, k\in K\\
&\Leftrightarrow d_I[a,k]-[d_I(a),k]-[a,d_K(k)]=0 \quad a\in I, k\in K\\
&\Leftrightarrow \psi_I(d_K+d_I)(\psi)=0\\
&\Leftrightarrow d_K+d_I\in Ann_{Der(K)\rtimes Der(I)}(\psi)
\end{aligned}
$$

■

1.3 Definição de ϕ

Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L invariante por $Der(L)$. Seja $K = L/I$ e denote por $\bar{k} = k + I$, $k \in L$. Escreva $L = K \oplus I$, então:

- para cada $k \in K$ a aplicação $d_K : K \to K$ dada por $d_K(\bar{k}) = d(k) + I$ é uma derivação de K;
- a restrição de d ao ideal I é um elemento de $Der(I)$.

Logo, podemos definir o homormorfismo entre álgebras de Lie $\phi : Der(L) \to Der(K) \rtimes Der(I)$ por

$$\phi(d) = d_K + d_I. \tag{2}$$

Observação 1. *Sejam L uma álgebra de Lie e I ideal de L com $K = L/I$. Defina a aplicação $\psi : K \to Der(I)$ por $\bar{\psi}(\bar{k})(a) = [a, k], a \in I$ e $k \in L$ tal que $\bar{k} = k + I$. Então I abeliano se, e somente se, $\bar{\psi}$ está bem definida.*

Prova: Suponha que I é abeliano. Defina a aplicação $L \to Der(I)$ por $\psi(k)(a) = [k, a]$. Como I é uma subálgebra de $ker(\psi)$ então podemos induzir uma representação $\bar{\psi} : K \to Der(I)$ dada por $\bar{\psi}(\bar{k}) = \psi(k)(a) = [a, k], \bar{k} \in K, a \in I$.

Por outro lado, se $\bar{\psi}$ está bem definida então $[a, k + b] = [a, k]$ para $a, b \in I$ e $k \in L$. Em particular, para $k = 0$ temos $[a, b] = 0$.

■

Se L é uma álgebra de Lie e I um ideal de L com $K = L/I$ definiremos a ação de K sobre I usando a observação **??**. Ou seja, diremos que K age sobre I se I é um ideal abeliano de L e a ação é dada pela representação $[a, k] = \bar{\psi}(k)(a), k \in K$.

Teorema 2. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L tais que $K = L/I$ age sobre I então $Im(\phi) \leq Comp(K, I)$.*

Prova: Se $d_K + d_I \in Im(\phi)$ então existe $d \in D$ tal que $\phi(d) = d_K + d_I$. Seja $k \in L$ tal que $k + I = \bar{k}$ e $a \in I$, $d_I[a, \bar{k}] = d_I[a, k] = d[a, k] = [d(a), k] + [a, d(k)] = [d_I(a), \bar{k}] + [a, d_K(\bar{k})]$.

■

1.4 Extensões usando cohomologia

Definição 2. *Sejam K e I álgebras de Lie tal que K age sobre I. Defina*

$$\begin{array}{rcl} C^2(K, I) & = & \{\theta : K \times K \to I, \ \textit{bilinear e anti-simétrica}\}, \\ Z^2(K, I) & = & \{\theta \in C^2(K, I) \ \textit{tal que} \ \theta(k, [h, l]) + \theta(h, [l, k]) + \theta(l, [k, h]) \\ & & = [\theta(h, l), k] + [\theta(l, k), h] + [\theta(k, h), l], h, k, l \in K\}, \\ B^2(K, I) & = & \{\theta \in C^2(K, I) \ \textit{tal que} \\ & & \theta(k, h) = \nu([h, k]) + [\nu(h), k] - [\nu(k), h], \nu : K \to I \ \textit{linear} \ \}, \\ Z^1(K, I) & = & \{\nu \in Hom(K, I) \ \textit{tal que} \ \nu([k, h]) = [\nu(k), h] - [\nu(h), k]\}. \end{array}$$

Se K age sobre I, podemos definir uma extensão de K usando elementos de $Z^2(K, I)$. Seja $\theta \in Z^2(K, I)$ e defina $L_\theta = K \oplus I$ a algebra de Lie com a seguinte colchete

$$[k + a, h + b] = [k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]. \tag{3}$$

L_θ é bem definida em $H^2(K, I)$. Sejam $\theta \in Z^2(K, I)$ e $\eta \in B^2(K, I)$ tal que $\eta(k, h) = \nu([h, k]) + [\nu(h), k] - [\nu(k), h]$. Cada elemento de L_θ pode ser escrito unicamente como $k + a, k \in K, a \in I$. Então $\sigma : L_\theta \to L_{\theta+\eta}$ por $\sigma(x + a) = x + (\nu(x) + a)$ é um isomorfismo entre as álgebras de Lie.

Afirmação 1. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal tais que K age sobre I. Então existe $\theta \in Z^2(K, I)$ tal que $L \cong L_\theta$.*

Prova: Considere a seguinte sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} H \to 0,$$

e escolha uma transversal $\epsilon : K \to L$ tal que $\pi(\epsilon(k)) = k, k \in K$. Defina a aplicação $\theta : K \to I$ por

$$\theta(k, h) = [\epsilon(k), \epsilon(h)]_L - \epsilon([k, h]_K). \tag{4}$$

- $\theta \in Z^2(K, I)$. Primeiro observe que $\pi(\theta(k, h)) = \pi([\epsilon(k), \epsilon(h)]_L - \epsilon([k, h]_K)) = 0$, ou seja, $\theta(k, h) \in I$. Além disso, $\theta(k, k) = 0$ e pela identidade de Jacobi em K e L temos $\theta(k, [h, l]) + \theta(h, [l, k]) + \theta(l, [k, h]) = 0$;

- O tipo de isomorfismo de θ independe da escolha de ϵ. Sejam $\theta_1, \theta_2 \in Z^2(K, I)$ definidas por meio das transversais $\epsilon_1, \epsilon_2 : K \to L$, respectivamente. Então, podemos escrever $\epsilon_1(k) = \epsilon_2(k) + \lambda(k), k \in K$ com $\lambda \in Hom(K, I)$. Da igualdade $\epsilon_1([k, h]_K) = \epsilon_2([k, h]_K) + \lambda([k, h]_K)$ obtemos: $(\theta_1 - \theta_2)(k, h) = [\epsilon_1(k), \epsilon_1(h)]_L - \epsilon_1([k, h]_K) - ([\epsilon_2(k), \epsilon_2(h)]_L = \lambda([k, h]_K) - [\lambda(k), h] + [\lambda(h), k]$. Logo, $\theta_1 - \theta_1 \in B^2(K, I)$;

- $L \cong L_\theta$. Todo elemento de $x \in L$ pode ser escrito de forma única como $x = \epsilon(k) + y$, pois $\epsilon : K \to L$ é injetora. Então $\zeta : L \to L_\theta$ definida por $\zeta(x) = k + y$ é um isomorfismo.

■

1.5 Ação de $\mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K, I)$

Se K age sobre I podemos definir uma ação de $\mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K, I)$. Dados $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I)$, $\theta \in Z^2(K, I)$ e $h, k \in K$, defina a aplicação $\psi_K : \mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I) \to \mathfrak{gl}(C^2(K, I))$ por

$$\psi_K(d_K + d_I)\theta(h, k) = d_I(\theta(h, k)) - \theta(d_K(k), h) - \theta(k, d_K(h)). \tag{5}$$

A prova que ψ_K define uma representação de $\mathfrak{gl}(K) \rtimes \mathfrak{gl}(I)$ é semelhante a de ψ_I.

Afirmação 2. *Os espaços $Z^2(K, I)$ e $B^2(K, I)$ são invariantes pela ação de $Comp(K, I)$ segundo a representação ψ_K.*

Prova: Sejam $k, h, l \in K$ e $\theta \in Z^2(K, I)$. Então,

$\psi_K(d_K + d_I)(\theta)(k, [h, l]) + \psi_K(d_K + d_I)(\theta)(h, [l, k]) + \psi_K(d_K + d_I)(\theta)(l, [k, h])$
$= d_I(\theta(k, [h, l])) - \theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(k, d_K([h, l]))$
$+ d_I(\theta(h, [l, k])) - \theta(d_K(h), [l, k]) - \theta(h, d_K([l, k]))$
$+ d_I(\theta(l, [k, h])) - \theta(d_K(l), [k, h]) - \theta(l, d_K([k, h]))$
$= d_I(\theta(k, [h, l]) + \theta(h, [l, k]) + \theta(l, [k, h]))$
$-(\theta(d_K(k), [h, l]) + \theta(d_K(h), [l, k]) + \theta(d_K(l), [k, h]))$
$-(\theta(k, d_K([h, l]) + \theta(h, d_K([l, k]) + \theta(l, d_K([k, h]))$
$= d_I([\theta(h, l), k] + [\theta(l, k), h] + [\theta(k, h), l])$
$-\theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(d_K(h), [l, k]) - \theta(d_K(l), [k, h])$
$-\theta(k, [d_K(h), l]) - \theta(k, [h, d_K(l)]) - \theta(h, [d_K(l), k]) - \theta(h, [l, d_K(k)]) - \theta(l, [d_K(k), h]) - \theta(l, [k, d_K(h)])$
$= [d_I(\theta(h, l)), k] + [\theta(h, l), d_K(k)] + [d_I(\theta(l, k)), h] + [\theta(l, k), d_K(h)] + [d_I(\theta(k, h)), l] + [\theta(k, h), d_K(l)]$
$-\theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(h, [l, d_K(k)]) - \theta(l, [d_K(k), h])$
$-\theta(d_K(h), [l, k]) - \theta(k, [d_K(h), l]) - \theta(l, [k, d_K(h)])$
$-\theta(d_K(l), [k, h]) - \theta(k, [h, d_K(l)]) - \theta(h, [d_K(l), k])$
$= [d_I(\theta(h, l)), k] + [\theta(h, l), d_K(k)] + [d_I(\theta(l, k)), h] + [\theta(l, k), d_K(h)] + [d_I(\theta(k, h)), l] + [\theta(k, h), d_K(l)]$
$-[\theta(h, l), d_K(k)] - [\theta(l, d_K(k)), h] - [\theta(d_K(k), h), l]$
$-[\theta(d_K(h), l), k] - [\theta(l, k), d_K(h)] - [\theta(k, d_K(h)), l]$
$-[\theta(h, d_K(l)), k] - [\theta(d_K(l), k), h] - [\theta(k, h), d_K(l)]$
$= [d_I(\theta(h, l)) - \theta(d_K(h), l) - \theta(h, d_K(l)), k] + [d_I(\theta(l, k)) - \theta(l, d_K(k)) - \theta(d_K(l), k), h]$
$+ [d_I(\theta(k, h)) - \theta(d_K(k), h) - \theta(k, d_K(h)), l]$
$= [\psi_K(d_K + d_I)\theta(h, l), k] + [\psi_K(d_K + d_I)\theta(l, k), h] + [\psi_K(d_K + d_I)\theta(k, h), l]$.

Então $\psi_K(d_K + d_I)\theta \in Z^2(K, I)$.

Seja $\theta \in B^2(K, I)$ tal que $\theta(k, h) = \nu([k, h] - [\nu(k), h] - [k, \nu(h)]$, $\nu : K \to I$ linear. Então,

$\psi_K(d_K + d_I)\theta(k, h) = d_I(\nu([k, h] - [\nu(k), h] - [k, \nu(h)])$
$-\nu([d_K(k), h]) + [\nu(d_K(k)), h] + [d_K(k), \nu(h)] - \nu([k, d_K(h)] + [\nu(k), d_K(h)] + [k, \nu(d_K(h))]$
$= d_I(\nu[k, h]) - [d_I(\nu(k)), h] - [\nu(k), d_K(h)] - [d_K(k), \nu(h)] - [k, d_I(\nu(h))]$
$-\nu([d_K(k), h]) + [\nu(d_K(k)), h] + [d_K(k), \nu(h)] - \nu([k, d_K(h)] + [\nu(k), d_K(h)] + [k, \nu(d_K(h))]$
$= d_I(\nu[k, h]) - \nu([d_K(k), h]) - \nu([k, d_K(h)]$

$-[d_I(\nu(k)),h] + [\nu(d_K(k)),h] - [k, d_I(\nu(h))] + [k, \nu(d_K(h))]$
$= (d_I.\nu - \nu.d_K)([k,h] - [(d_I.\nu - \nu.d_K)(k), h] - [k, (d_I.\nu - \nu.d_K)(h)]$.
Como $(d_I.\nu - \nu.d_K) : K \to I$ é linear então $\psi_K(d_K + d_I)\theta \in B^2(K,I)$.

■

Definição 3. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ tal que $L = L_\theta$ e considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $Z^2(K,I)$ segundo a representação ψ_K. Defina os pares induzidos de $Der(K) \oplus Der(I)$ por:*

$$Indu(K,I,\theta) = Ann_{Comp(K,I)}(\theta + B^2(K,I)).$$

1.6 Derivações de L_θ

Uma observação para coerência das notações utilizadas para d_I e d_K. Se $d \in L_\theta$ então d_I é obtida pela restrição de d à I. Já a função $d_K : K \to K$ é definida como a componente em K de $d(k), k \in K$, que é corresponde a função d_K definida em L/I.

Lema 1. *Seja $d \in L_\theta = K \oplus I$ e $k + a \in L_\theta$. Então $d(k+a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a)$, com $d_K \in Der(K)$, $d_I \in Der(I)$ e $\varphi_d \in Z^1(K,I)$.*

Prova: d_K e d_I foram definidas no inicio do texto. φ_d pode ser definida como $\varphi_d(k) = d(k) - d_K(k)$. Logo,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_d([k,h]_K) & = & d([k,h]_K) - d_K([k,h]_K) \\
& = & [d(k),h]_K + [k,d(h)]_K - [d_K(k),h]_K - [k,d_K(h)]_K \\
& = & [\varphi_d(k),h]_K + [k,\varphi_d(h)]
\end{array}$$

■

Teorema 3. *Seja K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $\theta \in Z^2(K,I)$. Seja $L_\theta = K \oplus I$ e considere I como ideal de L_θ. Assuma que I é invariante por $Der(L)$. Seja $\phi : Der(L) \to Der(K) \rtimes Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$. Então:*

1. *$Im(\phi) = Indu(K,I,\theta)$*
2. *$ker(\phi) \cong Z^1(K,I)$*

Prova: 1) Seja $d_K + d_I \in Indu(K,I,\theta)$ então $(d_K + d_I)\theta = 0 \bmod B^2(K,I)$. Logo, existe $\nu : K \to I$ linear tal que
$\theta(d_K(k),h) + \theta(k,d_K(h)) + [\nu(k),h] + [k,\nu(h)] = d_I(\theta(k,h)) + \nu([k,h])$.

Defina a seguinte aplicação linear $(d_K+d_I)^* : L_\theta \to L_\theta$ por $(d_K+d_I)^*(k+a) = d_K(k)+d_I(a)+\nu(k)$. É imediato que $\phi((d_K+d_I)^*) = d_K + d_I$. Falta verificar que $(d_K+d_I)^* \in Der(L_\theta = L)$.

$$\begin{array}{rcl}
(d_K+d_I)^*([k+a,h+b]) & = & (d_K+d_I)^*([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\
& = & d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + d_I([a,h]) - d_I([b,k]) + \nu([k,h]) \\
& = & d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + \nu([k,h]) \\
& + & [d_I(a),h]) + [a,d_K(h)] - [d_I(b),k] - [b,d_K(k)]
\end{array}$$

$[(d_K+d_I)^*(k+a),h+b] + [k+a,(d_K+d_I)^*(h+b)])$

$$\begin{aligned}
&= (d_K + d_I)^*([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\
&= [d_K(k) + d_I(a) + \nu(k), h+b] + [k+a, d_K(h) + d_I(b) + \nu(h)] \\
&= [d_k(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [d_I(a) + \nu(k), h] - [b, d_K(k)] \\
&+ [k, d_K(h)]_K + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [d_I(b) + \nu(h), k] \\
&= d_K([k,h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_K(h)) + [\nu(k), h] + [k, \nu(h)] \\
&+ [d_I(a), h]) + [a, d_K(h)] - [d_I(b), k] - [b, d_K(k)]
\end{aligned}$$

Agora, seja $(d_K + d_I) \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(L_\theta)$ tal que $\phi(d) = (d_K + d_I)$. Para cada $k + a \in L_\theta$ escreva $d(k+a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a)$. Como d é uma derivação, temos $d[k+a, h+b] = [d(k) + a, h+b] = [k+a, d(h)+b]$. Expandindo os dois lados temos:

$$\begin{aligned}
[d(k+a), h+b] + [k+a, d(h)+b] &= [d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a), h+b] + [k+a, d_K(h) + \varphi_d(h) + d_I(b)] \\
&= [d_K(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [d_I(a) + \varphi_d(k), h] - [b, d_K(k)] \\
&+ [k, d_K(h)] + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [d_I(h) + \varphi_d(h), k] \\
&= d_K([k,h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_k(h)) \\
&+ [d_I(a), h] - [b, d_k(k)] + [a, d_K(h)] - [d_I(b), k] + [\varphi_d(k), b] - [\varphi_d(h), k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d([k+a, h+b]) &= d([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\
&= d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + d_I([a,h]) - d_I([b,k]) + \varphi_d([k,h])
\end{aligned}$$

Como $Im(\phi) \subseteq Comp(K,I)$ então $\phi(d) = (d_K + d_I) \in Indu(K, I, \theta)$.

2) Se $d \in Der(L_\theta)$ então a aplicação apresentada no lema **??** nos fornece $d(k+a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a)$. Para $d \in ker(\phi)$ temos $d(k+a) = \varphi_d(k)$. Defina $\sigma : ker(\phi) \to (Z^1(K,I), +)$ por $\sigma(d) = \varphi_d$. É imediato que σ é um homomorfismo injetor. Para verificar a sobrejetividade, considere $\varphi \in Z^1(K,I)$. φ satisfaz $\varphi([k,h]) = [\varphi(k), h] + [k, \varphi(h)]$. Defina a aplicação linear $d_\varphi(k+a) = \varphi(k)$. Temos,

$d_\varphi([k+a, h+k]) = \varphi([k,h]) = [\varphi(k), h] + [k, \varphi(h)] = [d_\varphi(k+a), h+b] + [k+a, d_\varphi(h+b)]$.

Assim, d_φ é uma derivação de L_θ, $d_\varphi \in ker(\phi)$ e $\sigma(d_\varphi) = \varphi$.

$\blacksquare$

modificação L