1 Derivações de L

1.1 Notação

$Der(L)$	a álgebra das derivações de L
$U \oplus V$	Soma direta de espaços vetoriais ou de álgebras de Lie

1.2 Pares compatíveis

Sejam K e I álgebras de Lie. Diremos que K age sobre I se existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : K \to Der(I)$. Neste caso, denotaremos a ação de K sobre I por

$$[a,k] := \psi(k)(a), k \in K, a \in I.$$

Definição 1. Sejam K e I álgebras de Lie tal que K age sobre I. Um elemento $d_K + d_I \in Der(K)$ é dito par compatível se $d_I([a,k]) = [d_I(a),k] + [a, d_K(k)]$ para todo $a \in I$ e $k \in K$.

Proposição 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. O conjunto*

$$\begin{aligned} Comp(K,I) &= \{d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I) \mid d_I([a,k]) = [d_I(a),k] + [a, d_K(k)], \\ &\quad \textit{para todo } a \in I, k \in K\}. \end{aligned}$$

dos pares compatíveis é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$

Prova: Sejam $d_K + d_I, e_K + e_I \in Comp(K,I)$, $a \in I$ e $k \in K$. Como o produto em L é linear é imediato verificar que $Comp(K,I)$ é um subespaço de $Der(K) \oplus Der(I)$. Além disso,

$$\begin{aligned} [d_I, e_I][a,k] &= (d_I e_I - e_I d_I)[a,k] \\ &= d_I([e_I(a),k] + [a, e_K(k)]) - e_I([d_I(a),k] + [a, d_K(k)]) \\ &= [d_I e_I(a),k] + [e_I(a), d_K(a)] + [d_I(a), e_K(k)] + [a, d_K.e_K(k)] \\ &- [e_I d_I(a),k] - [d_I(a), e_K(k)] - [e_I(a), d_K(k)] - [a, e_K.d_K(k)] \\ &= [[d_I, e_I](a),k] - [a, [d_K, e_K](k)]. \end{aligned}$$

Segue que $[d_K + d)i, e_K + e_I] \in Comp(K,I)$ e, portanto, $Comp(K,I)$ é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$.

■

Se I é abeliana podemos calcular os pares compatíveis como um anulador de uma ação de $Der(K) \oplus Der(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$. Para isso, sejam $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$, $T \in Hom(K, Der(I))$, $k \in K$ e defina a aplicação $\psi_I : \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I) \to \mathfrak{gl}(Hom(K, Der(I)))$ por

$$\psi_I(d_K + d_I)T(k) = d_I(T(k)) - T(d_K(k)) - T(k)(d_I). \tag{1}$$

A aplicação $\Psi_I(d_K + d_I)$ é linear pois é uma combinação linear de composições de aplicações lineares. Isso também é suficiente para garantir que ela pertence a $Hom(K, Der(I))$ pois I é abeliana.

Para verificar que ψ_I é homomorfismo de álgebras de Lie considere $e_K + e_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, então

$$
\begin{array}{rcl}
[\psi_I(d_K+d_I),\psi_I(e_K+e_I)]T(k) & = & (\psi_I(d_K+d_I)\psi_I(e_K+e_I) \\
& - & \psi_I(e_K+e_I)\psi_I(d_K+d_I))T(k) \\
& = & \psi_I(d_K+d_I)(e_I(T(k))-T(e_K(k))-T(k)(e_I) \\
& - & \psi_I(e_K+e_I)(d_I(T(k))-T(d_K(k))-T(k)(d_I) \\
& = & d_I.e_I(T(k))-d_I(T(e_K(k)))-d_I(T(k)(e_I)) \\
& - & e_I.d_I(T(k))+e_I(T(d_K(k)))+e_I(T(k)(d_I)) \\
& - & e_I(T(d_K(k)))+T(e_Kd_K(k))+T(d_K(k))(e_I) \\
& + & d_I(T(e_K(k)))-T(d_Ke_K(k))-T(e_K(k))(d_I) \\
& - & e_I(T(k)(d_I))+T(e_K(k))(d_I)+T(k)(e_Id_I) \\
& + & d_I(T(k)(e_I))-T(d_K(k))(e_I)-T(k)(d_Ie_I) \\
& = & [d_I,e_I](T(k))-T([d_K,e_K])(k)-T(k)([d_I,e_I]) \\
& = & \psi_I([d_K,e_K]+[d_I,e_I])T(k) \\
& = & \psi_I([d_K+d_I,e_K+e_I])T(k).
\end{array}
$$

Teorema 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a restrição de ψ_I definida em (1) para $Der(K)\oplus Der(I)$. Se $T\in Hom(K,Der(I))$ é dada por $T(k)(a)=[a,k]$ então $Comp(K,I)=Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(T)$.*

Prova: Sejam $a\in I$ e $k\in K$ quaisquer. Se $d_K+d_I\in Comp(K,I)\subset Der(K)\oplus Der(I)$ então $d_I[a,k]=[d_I(a),k]+[a,d_K(k)]$. Essa igualdade é equivalente à $\psi_I|_{Der(K)\oplus Der(I)}(d_K+d_I)(T)=0$, que é a definição de $Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(T)$.

$\blacksquare$

1.3 Definição de ϕ

Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L. Defina por $A=\{f\in\mathfrak{gl}(L)\mid f(I)\subset I\}$ a subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$ das aplicações que mantém I invariante. Seja $K=L/I$ e denote por $\bar{k}=k+I$, $k\in L$. Se $f\in A$ então:

- a aplicação $f_K:K\to K$ dada por $f_K(\bar{k})=f(k)+I, k\in L$, é um elemento bem definido de $\mathfrak{gl}(K)$;
- a restrição de $f_I:I\to I$ de f ao ideal I é um elemento de $\mathfrak{gl}(I)$.

Logo, podemos a aplicação $\Phi:A\to\mathfrak{gl}(K)\oplus\mathfrak{gl}(I)$ por

$$\Phi(f)=f_K+f_I. \tag{2}$$

Proposição 2. *Sejam K uma álgebra de Lie e I um ideal de L. Suponha que $K=L/I$ e $A=\{f\in\mathfrak{gl}(L)\mid f(I)\subset I\}$. Então a aplicação de Φ definida em (2) é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Prova: Seja $f,g\in A$. Então

$$
\begin{array}{rcl}
[\Phi([f,g]) & = & \Phi(fg-gf) \\
& = & (fg)_K+(fg)_I-(gf)_K-(gf)_I \\
& = & f_Kg_K+f_Ig_I-g_Kf_K-g_If_I \\
& = & [f_K,g_K]+[f_I,g_I] \\
& = & [f_K+f_I,g_K+g_I] \\
& = & [\Phi(f),\Phi(g)].
\end{array}
$$

■

Proposição 3. *Sejam K uma álgebra de Lie e I um ideal de L invarinate por $Der(L)$. Suponha que $K = L/I$ e Φ é a aplicação definida (2). Defina $\phi = \Phi|_{Der(L)}$ a restrição de Φ a $Der(L)$. Então $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Prova: Devido ao resultado obtido na proposição 2, basta provarmos que se $d \in Der(L)$ então $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$. Sejam $k, h \in L$ então $d_K([\bar{k}, \bar{h}]) = d([k, h]) + I = [d(k), h] + [k, d(h)] + I = [d_K(\bar{k}), \bar{h}] + [\bar{k}, d_K(\bar{h})]$. Se $a, b \in I$ então $d_I([a, b]) = d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] = [d_I(a), b] + [a, d_I(b)]$.

■

Seja L uma álgebra de Lie e I ideal de L. A representação adjunta de L é definida por $ad_L : L \to Der(L)$ tal que $ad_L(x)(y) = [y, x]$. Suponha I é um ideal abeliano e defina $K = L/I$. Então podemos induzir uma representação $ad_K : K \to Der(I)$ por $ad_K(\bar{k})(a) = [a, k]$, para todo $k \in L$ e $a \in I$. Assim, se I é abeliano então K age sobre I.

Teorema 2. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal abeliano de L. Suponha que K age sobre I pela representação $ad_K : K \to Der(I)$. Seja $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$, conforme definida na proposição 3. Então $Im(\phi) \leq Comp(K, I)$.*

Prova: Se $d_K + d_I \in Im(\phi)$ então existe $d \in D$ tal que $\phi(d) = d_K + d_I$. Seja $k \in L$ tal que $k + I = \bar{k}$ e $a \in I$, $d_I[a, \bar{k}] = d_I[a, k] = d[a, k] = [d(a), k] + [a, d(k)] = [d_I(a), \bar{k}] + [a, d_K(\bar{k})]$.

■

1.4 Extensões usando cohomologia

Definição 2. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana.

- Denote por $C^2(K, I)$ o espaço das aplicações bilineares e antisimétricas de K em I.
- Se $\theta \in C^2(K, I)$ é tal que $\theta(k, [h, l]) + \theta(h, [l, k]) + \theta(l, [k, h]) = [\theta(h, l), k] + [\theta(l, k), h] + [\theta(k, h), l], h, k, l \in K$, então θ será chamado de cociclo e o espaço dos cocilos será denotado por $Z^2(K, I)$.
- Suponha que θ é um cociclo. Se para todo $k, h \in K$ podemos escrever $\theta(k, h) = \nu([h, k]) + [\nu(h), k] - [\nu(k), h]$, para alguma aplicação linear $\nu : K \to I$ então θ será chamado de cofronteira. O espaço das cofronteiras será denotado por $B^2(K, I)$.
- Denote $H^2(K, I) = Z^2(K, I)/B^2(K, I)$ o espaço quociente dos cociclos pelas cofronteiras.
- O primeiro grupo de cohomologia de K e I é definido por $Z^1(K, I) = \{\nu \in Hom(K, I) \mid \nu([k, h]_K) = [\nu(k), h] - [\nu(h), k], \text{ para todo } k, h \in K\}$.

Proposição 4. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in Z^2(K, I)$ e no espaço $L_\theta = K \oplus I$ e defina o produto*

$$[k + a, h + b] = [k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k], \text{ para } k, h \in K \text{ e } a, b \in I. \tag{3}$$

Então,

1. L_θ é uma álgebra de Lie;

2. Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L com I abeliano. Suponha que $K = L/I$ age sobre I. Então existe $\theta \in Z^2(K,I)$ tal que $L \cong L_\theta$.

Prova: 1) Se $\theta \in Z^2(K,I)$, $h \in K$ e $a \in I$ então $[k+a,k+a] = [k,k]_K + \theta(k,k) + [a,k] - [a,k] = 0$. Sejam $h,l \in K$ e $b,c \in I$. Usando a definição do produto obtemos:

$$\begin{aligned}
[k+a,[h+b,l+c]] &= [k+a,[h,l]_K + \theta(h,l) + [b,l] - [c,h]] \\
&= [k,[h,l]_K]_K + \theta(k,[h,l]) + [a,[h,l]_K] - [\theta(h,l) + [b,l] - [c,h],k].
\end{aligned}$$

Portanto, a igualdade $[k+a,[h+b,l+c]] + [h+b,[l+c,k+a]] + [l+c,[k+a,h+b]] = 0$ segue da definição de cociclo, identidade de Jacobi em K e do fato que ação de K em I é definida por uma representação.

2) Considere a seguinte sequência exata $0 \to I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} K \to 0$. Chamamos de transversal de K em L a aplicação linear injetora $\epsilon : K \to L$ que satisfaz $\pi(\epsilon(k)) = k, k \in K$.

Defina a aplicação $\theta : K \to I$ por $\theta(k,h) = [\epsilon(k), \epsilon(h)]_L - \epsilon([k,h]_K)$. Então,

- $\theta \in Z^2(K,I)$. Por definição temos $\pi(\theta(k,h)) = \pi([\epsilon(k),\epsilon(h)]_L - \epsilon([k,h]_K)) = 0$, ou seja, $\theta(k,h) \in I$. Além disso, $\theta(k,k) = 0$ e pela identidade de Jacobi em K e L temos $\theta(k,[h,l]) + \theta(h,[l,k]) + \theta(l,[k,h]) = 0$;

- Seja $\epsilon : K \to I$ uma transversal. Todo elemento de $x \in L$ pode ser escrito de forma única como $x = \epsilon(\bar{x}) + a$, pois $\epsilon : K \to L$ é injetora. Vamos mostrar que a aplicação $\zeta : L \to L_\theta$ por $\zeta(x) = \bar{x} + a$ é um isomorfismo.

  É imediato que se $\zeta(x) = \zeta(y)$ então $x = y$. E se $y \in L_\theta$ então escreva $y = (x+I) + a$, com $x \in L/I$ e $a \in I$. Segue que $\zeta(x+a) = y$.

  Sejam $x,y \in L$ tais que $x = \epsilon(\bar{x}) + a$ e $y = \epsilon(\bar{y}) + b$, com $b \in I$. Por um lado, $[x,y] = \epsilon([\bar{x},\bar{y}]) + c$, para algum $c \in I$. Por outro lado, $[x,y] = [\epsilon(\bar{x}) + a, \epsilon(\bar{y}) + b] = [\epsilon(\bar{x}),\epsilon(\bar{y})] + [a,\epsilon(\bar{y})] - [b,\epsilon(\bar{x})] = [\epsilon(\bar{x}),\epsilon(\bar{y})] + [a,\bar{y}] - [b,\bar{x}]$. Então $c = [\epsilon(\bar{x}),\epsilon(\bar{y})] - \epsilon([\bar{x},\bar{y}]) + [a,\bar{y}] - [b,\bar{x}]$. Portanto, $\zeta([x,y]) = [\bar{x},\bar{y}]_K + [\epsilon(\bar{x}),\epsilon(\bar{y})] - \epsilon([\bar{x},\bar{y}]) + [a,\bar{y}] - [b,\bar{x}] = [\bar{x}+a,\bar{y}+b] = [\zeta(x),\zeta(y)]$.

Portanto $L \cong L_\theta$.

■

Nas condições da proposição anterior. Suponha que ϵ_1, ϵ_2 sejam duas escolhas de transversais de K em I e θ_1, θ_2 os cociclos definidos por $\theta_i(k,h) = [\epsilon_i(k), \epsilon_i(h)]_L - \epsilon_i([k,h]_K)$ para $1 \leq i \leq 2$ e $k,h \in K$. Então $\theta_1 - \theta_2 \in B^2(K,I)$. De fato, podemos escrever $\epsilon_1(k) = \epsilon_2(k) + \lambda(k), k \in K$ com $\lambda \in Hom(K,I)$. Da igualdade $\epsilon_1([k,h]_K) = \epsilon_2([k,h]_K) + \lambda([k,h]_K)$ obtemos: $(\theta_1 - \theta_2)(k,h) = [\epsilon_1(k),\epsilon_1(h)]_L - \epsilon_1([k,h]_K) - ([\epsilon_2(k),\epsilon_2(h)]_L = \lambda([k,h]_K) - [\lambda(k),h] + [\lambda(h),k]$. Logo, $\theta_1 - \theta_1 \in B^2(K,I)$.

1.5 Ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K,I)$

Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Vamos definir uma ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K,I)$. Dados $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, $\theta \in Z^2(K,I)$ e $h,k \in K$, defina a aplicação $\psi_K : \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I) \to \mathfrak{gl}(C^2(K,I))$ por

$$\psi_K(d_K + d_I)\theta(h,k) = d_I(\theta(h,k)) - \theta(d_K(k),h) - \theta(k,d_K(h)). \tag{4}$$

A prova que ψ_K define uma representação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ é semelhante prova de que ψ_I definida em (1) é uma representação.

Proposição 5. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja ψ_K a representação definida em (5). Então os espaços $Z^2(K,I)$ e $B^2(K,I)$ são invariantes por ψ_K restrita à $Comp(K,I)$.*

Prova: Sejam $k, h, l \in K$ e $\theta \in Z^2(K,I)$. Então,

$$
\begin{aligned}
&\psi_K(d_K + d_I)(\theta)(k,[h,l]) + \psi_K(d_K + d_I)(\theta)(h,[l,k]) + \psi_K(d_K + d_I)(\theta)(l,[k,h]) \\
&= d_I(\theta(k,[h,l])) - \theta(d_K(k),[h,l]) - \theta(k, d_K([h,l])) \\
&+d_I(\theta(h,[l,k])) - \theta(d_K(h),[l,k]) - \theta(h, d_K([l,k])) \\
&+d_I(\theta(l,[k,h])) - \theta(d_K(l),[k,h]) - \theta(l, d_K([k,h])) \\
&= d_I(\theta(k,[h,l]) + \theta(h,[l,k]) + \theta(l,[k,h])) \\
&-(\theta(d_K(k),[h,l]) + \theta(d_K(h),[l,k]) + \theta(d_K(l),[k,h])) \\
&-(\theta(k, d_K([h,l]) + \theta(h, d_K([l,k]) + \theta(l, d_K([k,h])) \\
&= d_I([\theta(h,l),k] + [\theta(l,k),h] + [\theta(k,h),l]) \\
&-\theta(d_K(k),[h,l]) - \theta(d_K(h),[l,k]) - \theta(d_K(l),[k,h]) \\
&-\theta(k,[d_K(h),l]) - \theta(k,[h,d_K(l)]) - \theta(h,[d_K(l),k]) \\
&-\theta(h,[l,d_K(k)]) - \theta(l,[d_K(k),h]) - \theta(l,[k,d_K(h)]) \\
&= [d_I(\theta(h,l)),k] + [\theta(h,l),d_K(k)] + [d_I(\theta(l,k)),h] \\
&+[\theta(l,k),d_K(h)] + [d_I(\theta(k,h)),l] + [\theta(k,h),d_K(l)] \\
&-\theta(d_K(k),[h,l]) - \theta(h,[l,d_K(k)]) - \theta(l,[d_K(k),h]) \\
&-\theta(d_K(h),[l,k]) - \theta(k,[d_K(h),l]) - \theta(l,[k,d_K(h)]) \\
&-\theta(d_K(l),[k,h]) - \theta(k,[h,d_K(l)]) - \theta(h,[d_K(l),k]) \\
&= [d_I(\theta(h,l)),k] + [\theta(h,l),d_K(k)] + [d_I(\theta(l,k)),h] \\
&+[\theta(l,k),d_K(h)] + [d_I(\theta(k,h)),l] + [\theta(k,h),d_K(l)] \\
&-[\theta(h,l),d_K(k)] - [\theta(l,d_K(k)),h] - [\theta(d_K(k),h),l] \\
&-[\theta(d_K(h),l),k] - [\theta(l,k),d_K(h)] - [\theta(k,d_K(h)),l] \\
&-[\theta(h,d_K(l)),k] - [\theta(d_K(l),k),h] - [\theta(k,h),d_K(l)] \\
&= [d_I(\theta(h,l)) - \theta(d_K(h),l) - \theta(h,d_K(l)),k] + [d_I(\theta(l,k)) - \theta(l,d_K(k)) - \theta(d_K(l),k),h] \\
&+[d_I(\theta(k,h)) - \theta(d_K(k),h) - \theta(k,d_K(h)),l] \\
&= [\psi_K(d_K + d_I)\theta(h,l),k] + [\psi_K(d_K + d_I)\theta(l,k),h] + [\psi_K(d_K + d_I)\theta(k,h),l].
\end{aligned}
$$

Então $\psi_K(d_K + d_I)\theta \in Z^2(K,I)$.

Seja $\theta \in B^2(K,I)$ tal que $\theta(k,h) = \nu([k,h] - [\nu(k),h] - [k,\nu(h)]$, $\nu : K \to I$ linear. Então,

$$
\begin{aligned}
&\psi_K(d_K + d_I)\theta(k,h) = d_I(\nu([k,h] - [\nu(k),h] - [k,\nu(h)]) \\
&-\nu([d_K(k),h]) + [\nu(d_K(k)),h] + [d_K(k),\nu(h)] - \nu([k,d_K(h)] + [\nu(k),d_K(h)] + [k,\nu(d_K(h))] \\
&= d_I(\nu[k,h]) - [d_I(\nu(k)),h] - [\nu(k),d_K(h)] - [d_K(k),\nu(h)] - [k,d_I(\nu(h))] \\
&-\nu([d_K(k),h]) + [\nu(d_K(k)),h] + [d_K(k),\nu(h)] - \nu([k,d_K(h)] + [\nu(k),d_K(h)] + [k,\nu(d_K(h))] \\
&= d_I(\nu[k,h]) - \nu([d_K(k),h]) - \nu([k,d_K(h)] \\
&-[d_I(\nu(k)),h] + [\nu(d_K(k)),h] - [k,d_I(\nu(h))] + [k,\nu(d_K(h))] \\
&= (d_I.\nu - \nu.d_K)([k,h] - [(d_I.\nu - \nu.d_K)(k),h] - [k,(d_I.\nu - \nu.d_K)(h)].
\end{aligned}
$$

Como $(d_I.\nu - \nu.d_K) : K \to I$ é linear então $\psi_K(d_K + d_I)\theta \in B^2(K,I)$.

■

Definição 3. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ tal que $L = L_\theta$ e considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $Z^2(K,I)$ segundo a representação ψ_K definida em (5). Defina os pares induzidos de $Der(K) \oplus Der(I)$ por:

$$Indu(K,I,\theta) = Ann_{Comp(K,I)}(\theta + B^2(K,I)).$$

1.6 Derivações de L_θ

Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal abeliano de L invariante por derivações. Defina $K = L/I$ e escreva $L = K \oplus I$. Se $\bar{x} \in K$ então $d_K(\bar{x}) = d(x) + I$. Logo, podemos escrever $d(x) = d_K(\bar{x}) + \varphi_d(x)$, com $d_K(\bar{x}) \in K$ e $\varphi_d(x) \in I$. Se $d \in Der(L)$ e os elementos de L estão na forma $x + a$ com $x \in K$ e $a \in L$ então

$$d(x+a) = d_K(x) + \varphi_d(x) + d_I(a). \tag{5}$$

Podemos verificar que φ_d é uma aplicação linear: como d é linear temos $d(k) + d(h) = d_K(k) + d_K(h) + \varphi_d(k) + \varphi_d(h)$. Por outro lado, $d(k+h) = d_K(k+h) + \varphi_d(k+h)$, então $\varphi_d(k+h) = \varphi_d(k) + \varphi_d(h)$.

Teorema 3. *Seja K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $\theta \in Z^2(K,I)$. Seja $L_\theta = K \oplus I$ e considere I como ideal de L_θ. Assuma que I é invariante por $Der(L_\theta)$. Seja $\phi : Der(L_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$. Então:*

1. *$Im(\phi) = Indu(K,I,\theta)$*
2. *$ker(\phi) \cong Z^1(K,I)$*

Prova: 1) Seja $d_K + d_I \in Indu(K,I,\theta)$ então $(d_K + d_I) \cdot \theta = 0 \mod B^2(K,I)$. Logo, existe uma aplicação linear $\nu : K \to I$ tal que para todo $k, h \in K$ temos

$$\theta(d_K(k),h) + \theta(k,d_K(h)) + [\nu(k),h] - [\nu(h),k] = d_I(\theta(k,h)) + \nu([k,h]). \tag{6}$$

Suponha que $x \in K$ e $a \in I$ e defina a aplicação linear $(d_K + d_I)^* : L_\theta \to L_\theta$ por

$$(d_K + d_I)^*(k+a) = d_K(k) + d_I(a) + \nu(k).$$

Vamos verificar que $(d_K + d_I)^*$ é uma derivação de L_θ. Sejam $k+a, h+b \in L_\theta$.

$$\begin{array}{rcl}
(d_K + d_I)^*([k+a,h+b]) & = & (d_K + d_I)^*([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\
& = & d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + d_I([a,h]) - d_I([b,k]) + \nu([k,h]) \\
& = & d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + \nu([k,h]) \\
& + & [d_I(a),h]) + [a,d_K(h)] - [d_I(b),k] - [b,d_K(k)]
\end{array}$$

$$[(d_K + d_I)^*(k+a),h+b] + [k+a,(d_K + d_I)^*(h+b)])$$

$$\begin{array}{rcl}
& = & (d_K + d_I)^*([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\
& = & [d_K(k) + d_I(a) + \nu(k), h+b] + [k+a, d_K(h) + d_I(b) + \nu(h)] \\
& = & [d_k(k),h]_K + \theta(d_K(k),h) + [d_I(a) + \nu(k),h] - [b,d_K(k)] \\
& + & [k,d_K(h)]_K + \theta(k,d_K(h)) + [a,d_K(h)] - [d_I(b) + \nu(h),k] \\
& = & d_K([k,h]_K) + \theta(d_K(k),h) + \theta(k,d_K(h)) + [\nu(k),h] + [k,\nu(h)] \\
& + & [d_I(a),h]) + [a,d_K(h)] - [d_I(b),k] - [b,d_K(k)]
\end{array}$$

Pela equação (**??**) obtemos a igualdade. Logo $(d_K + d_I)^*$ é uma derivação. Além disso, $(d_K + d_I)^*_K(x + a) = d_K(x) + d_I(a) + \nu(x) + I = d_K(x) + I$. E $(d_K + d_I)^*_I(a) = d_I(a)$. Segue que $\phi((d_K + d_I)^*) = d_K + d_I$.

Agora, suponha que $(d_K+d_I) \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(L_\theta)$ tal que $\phi(d) = (d_K+d_I)$. Para cada $k + a \in L_\theta$ escreva $d(k + a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a)$, conforme a equação (**??**). Como d é uma derivação, temos $d[k+a, h+b] = [d(k)+a, h+b] = [k+a, d(h)+b]$. Expandindo os dois da igualdade:

$$
\begin{aligned}
[d(k + a), h + b] + [k + a, d(h + b)] &= [d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a), h + b] \\
&+ [k + a, d_K(h) + \varphi_d(h) + d_I(b)] \\
&= [d_K(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [\varphi_d(k) + d_I(a), h] - [b, d_K(k)] \\
&+ [k, d_K(h)]_K + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [\varphi_d(h) + d_I(h), k] \\
&= d_K([k, h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_k(h)) \\
&+ [d_I(a), h] - [b, d_k(k)] + [a, d_K(h)] \\
&- [d_I(b), k] + [\varphi_d(k), b] - [\varphi_d(h), k]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d([k + a, h + b]) &= d([k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]) \\
&= d_K([k, h]_K) + d_I(\theta(k, h)) + d_I([a, h]) - d_I([b, k]) + \varphi_d([k, h])
\end{aligned}
$$

Como $Im(\phi) \subseteq Comp(K, I)$ então $\phi(d) = (d_K + d_I) \in Indu(K, I, \theta)$.

2) Se $d \in ker(\phi)$ então $d(k+a) = \varphi_d(k)$. Assim, a igualdade $d[k+a, h+b] = [d(k)+a, h+b] = [k + a, d(h) + b]$ nos fornece $\varphi_d([k, h]_K) = [\varphi_d(k), h] - [\varphi_d(h), k]$ ou seja, $\varphi_d \in Z^2(K, I)$.

Defina $\sigma : ker(\phi) \to (Z^1(K, I), +)$ por $\sigma(d) = \varphi_d$.Sejam $d, e \in ker(\phi)$ e $k \in K$ então $\sigma(d + e)(k) = \varphi_{(d+e)}(k) = (d + e)(k) = (d)(k) + (d)(k) = \varphi_d(k) + \varphi_e(k) = (\sigma(d) + \sigma(e))(k)$.

Agora defina $\delta : (Z^1(K, I), +) \to ker(\phi)$ por $\delta(\varphi) = d_\varphi$ tal que $d_\varphi(k + a) = \varphi(k)$. Temos, $d_\varphi([k + a, h + k]) = \varphi([k, h]) = [\varphi(k), h] + [k, \varphi(h)] = [d_\varphi(k + a), h + b] + [k + a, d_\varphi(h + b)]$. Logo, d_φ é uma derivação de L_θ e $d_\varphi \in ker(\phi)$. Sejam $\varphi, \beta \in (Z^1(K, I), +)$ e $k \in K$ então $\delta(\varphi + \beta)(k) = d_{\varphi+\beta}(k) = \varphi(k) + \beta(k) = (\delta(\varphi) + \delta(\beta))(k)$.

É imediato que $\sigma = \delta^{-1}$.

∎