1 Derivações de L

1.1 Notação

$Der(L)$	a álgebra das derivações de L
$U \oplus V$	Soma direta de espaços vetoriais ou de álgebras de Lie

1.2 Pares compatíveis

Sejam K e I álgebras de Lie. Diremos que K age sobre I se existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : K \to Der(I)$. Neste caso, denotaremos a ação de K sobre I por

$$[a,k] := \psi(k)(a), k \in K, a \in I.$$

Definição 1. Sejam K e I álgebras de Lie tal que K age sobre I. Um elemento $d_K + d_I \in Der(K)$ é dito par compatível se $d_I([a,k]) = [d_I(a),k] + [a, d_K(k)]$ para todo $a \in I$ e $k \in K$.

Proposição 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tal que K age sobre I. O conjunto*

$$\begin{aligned} Comp(K,I) &= \{d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I) \mid d_I([a,k]) = [d_I(a),k] + [a, d_K(k)], \\ &\quad \textit{para todo } a \in I, k \in K\}. \end{aligned}$$

dos pares compatíveis é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$

Prova: Sejam $d_K + d_I, e_K + e_I \in Comp(K,I)$, $a \in I$ e $k \in K$. Como o produto em L é linear é imediato verificar que $Comp(K,I)$ é um subespaço de $Der(K) \oplus Der(I)$. Além disso,

$$\begin{aligned} [d_I, e_I][a,k] &= (d_I e_I - e_I d_I)[a,k] \\ &= d_I([e_I(a),k] + [a, e_K(k)]) - e_I([d_I(a),k] + [a, d_K(k)]) \\ &= [d_I e_I(a),k] + [e_I(a), d_K(a)] + [d_I(a), e_K(k)] + [a, d_K.e_K(k)] \\ &- [e_I d_I(a),k] - [d_I(a), e_K(k)] - [e_I(a), d_K(k)] - [a, e_K.d_K(k)] \\ &= [[d_I, e_I](a),k] - [a, [d_K, e_K](k)]. \end{aligned}$$

Segue que $[d_K + d)i, e_K + e_I] \in Comp(K,I)$ e, portanto, $Comp(K,I)$ é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$.

■

Se I é abeliana podemos calcular os pares compatíveis como um anulador de uma ação de $Der(K) \oplus Der(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$. Para isso, sejam $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$, $T \in Hom(K, Der(I))$, $k \in K$ e defina a aplicação $\psi_I : \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I) \to \mathfrak{gl}(Hom(K, Der(I)))$ por

$$\psi_I(d_K + d_I)T(k) = d_I(T(k)) - T(d_K(k)) - T(k)(d_I). \tag{1}$$

A aplicação $\Psi_I(d_K + d_I)$ é linear pois é uma combinação linear de composições de aplicações lineares. Isso também é suficiente para garantir que ela pertence a $Hom(K, Der(I))$ pois I é abeliana.

Para verificar que ψ_I é homomorfismo de álgebras de Lie considere $e_K + e_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, então

$$
\begin{aligned}
[\psi_I(d_K+d_I),\psi_I(e_K+e_I)]T(k) &= (\psi_I(d_K+d_I)\psi_I(e_K+e_I)-\psi_I(e_K+e_I)\psi_I(d_K+d_I))T(k)\\
&= \psi_I(d_K+d_I)(e_I(T(k))-T(e_K(k))-T(k)(e_I)\\
&- \psi_I(e_K+e_I)(d_I(T(k))-T(d_K(k))-T(k)(d_I)\\
&= d_I.e_I(T(k))-d_I(T(e_K(k)))-d_I(T(k)(e_I))\\
&- e_I.d_I(T(k))+e_I(T(d_K(k)))+e_I(T(k)(d_I))\\
&- e_I(T(d_K(k)))+T(e_Kd_K(k))+T(d_K(k))(e_I)\\
&+ d_I(T(e_K(k)))-T(d_Ke_K(k))-T(e_K(k))(d_I)\\
&- e_I(T(k)(d_I))+T(e_K(k))(d_I)+T(k)(e_Id_I)\\
&+ d_I(T(k)(e_I))-T(d_K(k))(e_I)-T(k)(d_Ie_I)\\
&= [d_I,e_I](T(k))-T([d_K,e_K])(k)-T(k)([d_I,e_I])\\
&= \psi_I([d_K,e_K]+[d_I,e_I])T(k)\\
&= \psi_I([d_K+d_I,e_K+e_I])T(k).
\end{aligned}
$$

Teorema 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a restrição de ψ_I definida em (1) para $Der(K)\oplus Der(I)$. Se $T\in Hom(K,Der(I))$ é dada por $T(k)(a)=[a,k]$ então $Comp(K,I)=Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(T)$.*

Prova: Sejam $a\in I$ e $k\in K$ quaisquer. Se $d_K+d_I\in Comp(K,I)\subset Der(K)\oplus Der(I)$ então $d_I[a,k]=[d_I(a),k]+[a,d_K(k)]$. Essa igualdade é equivalente à $\psi_I|_{Der(K)\oplus Der(I)}(d_K+d_I)(T)=0$, que é a definição de $Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(T)$.

■

1.3 Definição de ϕ

Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L. Defina por $A=\{f\in\mathfrak{gl}(L)\mid f(I)\subset I\}$ a subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$ das aplicações que mantém I invariante. Seja $K=L/I$ e denote por $\bar{k}=k+I$, $k\in L$. Se $f\in A$ então:

- a aplicação $f_K:K\to K$ dada por $f_K(\bar{k})=f(k)+I, k\in L$, é um elemento bem definido de $\mathfrak{gl}(K)$;
- a restrição de $f_I:I\to I$ de f ao ideal I é um elemento de $\mathfrak{gl}(I)$.

Logo, podemos a aplicação $\Phi:A\to\mathfrak{gl}(K)\oplus\mathfrak{gl}(I)$ por

$$\Phi(f)=f_K+f_I. \tag{2}$$

Proposição 2. *Sejam K uma álgebra de Lie e I um ideal de L. Suponha que $K=L/I$ e $A=\{f\in\mathfrak{gl}(L)\mid f(I)\subset I\}$. Então a aplicação de Φ definida em (2) é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Prova: Seja $f,g\in A$. Então

$$
\begin{aligned}
[\Phi([f,g]) &= \Phi(fg-gf)\\
&= (fg)_K+(fg)_I-(gf)_K-(gf)_I\\
&= f_Kg_K+f_Ig_I-g_Kf_K-g_If_I\\
&= [f_K,g_K]+[f_I,g_I]\\
&= [f_K+f_I,g_K+g_I]\\
&= [\Phi(f),\Phi(g)].
\end{aligned}
$$

■

Proposição 3. *Sejam K uma álgebra de Lie e I um ideal de L invarinate por $Der(L)$. Suponha que $K = L/I$ e Φ é a apicação definida (2). Defina $\phi = \Phi|_{Der(L)}$ a restrição de Φ a $Der(L)$. Então $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Prova: Devido ao resultado obtido na proposição 2, basta provarmos que se $d \in Der(L)$ então $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$. Sejam $k, h \in L$ então $d_K([\bar{k}, \bar{h}]) = d([k, h]) + I = [d(k), h] + [k, d(h)] + I = [d_K(\bar{k}), \bar{h}] + [\bar{k}, d_K(\bar{h})]$. Se $a, b \in I$ então $d_I([a, b]) = d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] = [d_I(a), b] + [a, d_I(b)]$.

■

Seja L uma álgebra de Lie e I ideal de L. A representação adjunta de L é definida por $ad_L : L \to Der(L)$ tal que $ad_L(x)(y) = [y, x]$. Suponha I é um ideal abeliano e defina $K = L/I$. Então podemos induzir uma representação $ad_K : K \to Der(I)$ por $ad_K(\bar{k})(a) = [a, k]$, para todo $k \in L$ e $a \in I$. Assim, se I é abeliano então K age sobre I.

Teorema 2. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal abeliano de L. Suponha que K age sobre I pela representação $ad_K : K \to Der(I)$. Seja $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$, conforme definida na proposição 3. Então $Im(\phi) \leq Comp(K, I)$.*

Prova: Se $d_K + d_I \in Im(\phi)$ então existe $d \in D$ tal que $\phi(d) = d_K + d_I$. Seja $k \in L$ tal que $k + I = \bar{k}$ e $a \in I$, $d_I[a, \bar{k}] = d_I[a, k] = d[a, k] = [d(a), k] + [a, d(k)] = [d_I(a), \bar{k}] + [a, d_K(\bar{k})]$.

■

1.4 Extensões usando cohomologia

Definição 2. Sejam K e I álgebras de Lie com I abeliana tal que K age sobre I. Defina

$$\begin{array}{rcl}
C^2(K,I) & = & \{\theta : K \times K \to I, \text{ bilinear e anti-simétrica}\}, \\
Z^2(K,I) & = & \{\theta \in C^2(K,I) \text{ tal que } \theta(k,[h,l]) + \theta(h,[l,k]) + \theta(l,[k,h]) \\
 & & = [\theta(h,l),k] + [\theta(l,k),h] + [\theta(k,h),l], h,k,l \in K\}, \\
B^2(K,I) & = & \{\theta \in C^2(K,I) \text{ tal que} \\
 & & \theta(k,h) = \nu([h,k]) + [\nu(h),k] - [\nu(k),h], \nu : K \to I \text{ linear } \}, \\
Z^1(K,I) & = & \{\nu \in Hom(K,I) \text{ tal que } \nu([k,h]) = [\nu(k),h] - [\nu(h),k]\}.
\end{array}$$

Se K age sobre I, podemos definir uma extensão de K usando elementos de $Z^2(K, I)$. Seja $\theta \in Z^2(K, I)$ e defina $L_\theta = K \oplus I$ a algebra de Lie com a seguinte colchete

$$[k + a, h + b] = [k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]. \tag{3}$$

L_θ é bem definida em $H^2(K, I)$. Sejam $\theta \in Z^2(K, I)$ e $\eta \in B^2(K, I)$ tal que $\eta(k, h) = \nu([h, k]) + [\nu(h), k] - [\nu(k), h]$. Cada elemento de L_θ pode ser escrito unicamente como $k + a, k \in K, a \in I$. Então $\sigma : L_\theta \to L_{\theta+\eta}$ por $\sigma(x + a) = x + (\nu(x) + a)$ é um isomorfismo entre as álgebras de Lie.

Afirmação 1. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal tais que $K = L/I$ age sobre I. Então existe $\theta \in Z^2(K, I)$ tal que $L \cong L_\theta$.*

Prova: Considere a seguinte sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} H \to 0,$$

e escolha uma transversal $\epsilon : K \to L$ tal que $\pi(\epsilon(k)) = k, k \in K$. Defina a aplicação $\theta : K \to I$ por

$$\theta(k,h) = [\epsilon(k), \epsilon(h)]_L - \epsilon([k,h]_K). \tag{4}$$

- $\theta \in Z^2(K, I)$. Primeiro observe que $\pi(\theta(k,h)) = \pi([\epsilon(k), \epsilon(h)]_L - \epsilon([k,h]_K)) = 0$, ou seja, $\theta(k,h) \in I$. Além disso, $\theta(k,k) = 0$ e pela identidade de Jacobi em K e L temos $\theta(k,[h,l]) + \theta(h,[l,k]) + \theta(l,[k,h]) = 0$;

- O tipo de isomorfismo de θ independe da escolha de ϵ. Sejam $\theta_1, \theta_2 \in Z^2(K,I)$ definidas por meio das transversais $\epsilon_1, \epsilon_2 : K \to L$, respectivamente. Então, podemos escrever $\epsilon_1(k) = \epsilon_2(k) + \lambda(k), k \in K$ com $\lambda \in Hom(K,I)$. Da igualdade $\epsilon_1([k,h]_K) = \epsilon_2([k,h]_K) + \lambda([k,h]_K)$ obtemos: $(\theta_1 - \theta_2)(k,h) = [\epsilon_1(k), \epsilon_1(h)]_L - \epsilon_1([k,h]_K) - ([\epsilon_2(k), \epsilon_2(h)]_L = \lambda([k,h]_K) - [\lambda(k), h] + [\lambda(h), k]$. Logo, $\theta_1 - \theta_1 \in B^2(K, I)$;

- $L \cong L_\theta$. Todo elemento de $x \in L$ pode ser escrito de forma única como $x = \epsilon(k) + y$, pois $\epsilon : K \to L$ é injetora. Então $\zeta : L \to L_\theta$ definida por $\zeta(x) = k + y$ é um isomorfismo.

■

Afirmação 2. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal tais que $K = L/I$ age sobre I. Sejam $\theta, \eta \in H^2(K, I)$ e $\{e_1, \cdots, e_s\}$ base de I. Escreva $\theta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x,y).e_i$ e $\eta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \eta_i(x,y).e_i$. Suponha que os isomorfismos lineares $\sigma : L_\theta \to L_\eta$ fixem I. Então $L_\theta \cong L_\eta$ se e somente se existe $\delta \in Aut(K)$ tal que $\delta.\eta_i$ e θ_i geram o mesmo subespaço de $H^2(K, \mathbb{F})$.*

Prova: Seja $\sigma : L_\theta \to L_\eta$ um isomorfismo de álgebras de Lie. Como espaço vetorial escreva $L_\theta = K \oplus I = L_\eta$. Seja $\{x_1, \cdots, x_n\}$ uma base de K.

Análogo aos caso das derivações, dado um automorfismo $\sigma : L_\theta \to L_\eta$ podemos escrever $\sigma(k + a) = \sigma_K(k) + \varphi_\sigma(k) + \sigma_I(a)$, com $\sigma_K \in Aut(K)$, $\varphi \in Hom(K, I)$ e $\sigma_I \in Aut(I)$.

- $\delta.\theta$ é a ação de $Aut(K)$ em $Z^2(K, I)$.

Desenvolvendo a equação

$$[\sigma(x_i + e_r), \sigma(x_j + e_s)] = \sigma([x_i + e_r, x_j + e_s]), 1 \le i, j, \le n 1 \le r, t \le s,$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
[\sigma(x_i + e_r), \sigma(x_j + e_s)] &= [\sigma_K(x_i) + \varphi_\sigma(x_i) + \sigma_I(e_r), \sigma_K(x_j) + \varphi_\sigma(x_j) + \sigma_I(e_t)] \\
&= [\sigma_K(x_i), \sigma_K(x_j)]_K + \eta(\sigma_K(x_i), \sigma_K(x_j)) \\
&+ [\varphi_\sigma(x_i) + \sigma_I(e_r), \sigma_K(x_j)] - [\varphi_\sigma(x_j) + \sigma_I(e_t), \sigma_K(x_i)] \\
&= [\sigma_K(x_i), \sigma_K(x_j)]_K + \eta(\sigma_K(x_i), \sigma_K(x_j)) \\
&+ [\varphi_\sigma(x_i), \sigma_K(x_j)] - [\varphi_\sigma(x_j), \sigma_K(x_i)] + [\sigma_I(e_r), \sigma_K(x_j)] - [\sigma_I(e_t), \sigma_K(x_i)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma([x_i + e_r, x_j + e_s]) &= \sigma([x_i, x_j]_K + \theta(x_i, x_j) + [e_r, x_j] - [e_s, x_t]) \\
&= \sigma_K([x_i, x_j]_K) + \varphi_\sigma([x_i, x_j]) + \sigma(\theta(x_i, x_j)) \\
&+ \sigma_I([e_r, x_j]) - \sigma_I([e_t, x_i]) \text{ pares compatíveis de automorfismos!!!} \\
&= \sigma_K([x_i, x_j]_K) + \varphi_\sigma([x_i, x_j]) + \sigma(\theta(x_i, x_j)) \\
&+ [\sigma_I(e_r), \sigma_K(x_j)] - [\sigma_I(e_t), \sigma_K(x_i)]
\end{aligned}$$

Segue que

$$\eta(\sigma_K(x_i),\sigma_K(x_j)) = \sigma(\theta(x_i,x_j)) + \varphi_\sigma([x_i,x_j]) + [\varphi_\sigma(x_i),\sigma_K(x_j)] - [\varphi_\sigma(x_j),\sigma_K(x_i)].$$

Se $\sigma(e_k) = \sum_{m=1}^{s} \alpha_{km}.e_k$ então $\eta_p(\sigma_K(x_i),\sigma_K(x_j)) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{kp}\theta_k(x_i,x_j) + B^2(K,I)$, para $i \leq p \leq s$.

Suponha que $\delta\eta_i$ e θ_i geram o mesmo espaço em $Z^2(K,I)$ módulo $B^2(K,I)$. Então existem funções lineares $f_l : K \to \mathbb{F}$ e α_{lh} tais que $\delta.\eta_l(x_i,x_j) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{lk}\theta_k(x_i,x_j) + f_l([x_i,x_j]) + [f_l(x_i),x_j] - []$

1.5 Ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K,I)$

Se K age sobre I podemos definir uma ação de $\mathfrak{gl}(K)\oplus\mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K,I)$. Dados $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, $\theta \in Z^2(K,I)$ e $h,k \in K$, defina a aplicação $\psi_K : \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I) \to \mathfrak{gl}(C^2(K,I))$ por

$$\psi_K(d_K + d_I)\theta(h,k) = d_I(\theta(h,k)) - \theta(d_K(k),h) - \theta(k,d_K(h)). \tag{5}$$

A prova que ψ_K define uma representação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ é semelhante a de ψ_I.

Afirmação 3. *Os espaços $Z^2(K,I)$ e $B^2(K,I)$ são invariantes pela ação de $Comp(K,I)$ segundo a representação ψ_K.*

Prova: Sejam $k,h,l \in K$ e $\theta \in Z^2(K,I)$. Então,

$\psi_K(d_K + d_I)(\theta)(k,[h,l]) + \psi_K(d_K + d_I)(\theta)(h,[l,k]) + \psi_K(d_K + d_I)(\theta)(l,[k,h])$
$= d_I(\theta(k,[h,l])) - \theta(d_K(k),[h,l]) - \theta(k,d_K([h,l]))$
$+d_I(\theta(h,[l,k])) - \theta(d_K(h),[l,k]) - \theta(h,d_K([l,k]))$
$+d_I(\theta(l,[k,h])) - \theta(d_K(l),[k,h]) - \theta(l,d_K([k,h]))$
$= d_I(\theta(k,[h,l]) + \theta(h,[l,k]) + \theta(l,[k,h]))$
$-(\theta(d_K(k),[h,l]) + \theta(d_K(h),[l,k]) + \theta(d_K(l),[k,h]))$
$-(\theta(k,d_K([h,l]) + \theta(h,d_K([l,k]) + \theta(l,d_K([k,h]))$
$= d_I([\theta(h,l),k] + [\theta(l,k),h] + [\theta(k,h),l])$
$-\theta(d_K(k),[h,l]) - \theta(d_K(h),[l,k]) - \theta(d_K(l),[k,h])$
$-\theta(k,[d_K(h),l]) - \theta(k,[h,d_K(l)]) - \theta(h,[d_K(l),k]) - \theta(h,[l,d_K(k)]) - \theta(l,[d_K(k),h]) - \theta(l,[k,d_K(h)])$
$= [d_I(\theta(h,l)),k]+[\theta(h,l),d_K(k)]+[d_I(\theta(l,k)),h]+[\theta(l,k),d_K(h)]+[d_I(\theta(k,h)),l]+[\theta(k,h),d_K(l)]$
$-\theta(d_K(k),[h,l]) - \theta(h,[l,d_K(k)]) - \theta(l,[d_K(k),h])$
$-\theta(d_K(h),[l,k]) - \theta(k,[d_K(h),l]) - \theta(l,[k,d_K(h)])$
$-\theta(d_K(l),[k,h]) - \theta(k,[h,d_K(l)]) - \theta(h,[d_K(l),k])$
$= [d_I(\theta(h,l)),k]+[\theta(h,l),d_K(k)]+[d_I(\theta(l,k)),h]+[\theta(l,k),d_K(h)]+[d_I(\theta(k,h)),l]+[\theta(k,h),d_K(l)]$
$-[\theta(h,l),d_K(k)] - [\theta(l,d_K(k)),h] - [\theta(d_K(k),h),l]$
$-[\theta(d_K(h),l),k] - [\theta(l,k),d_K(h)] - [\theta(k,d_K(h)),l]$
$-[\theta(h,d_K(l)),k] - [\theta(d_K(l),k),h] - [\theta(k,h),d_K(l)]$
$= [d_I(\theta(h,l)) - \theta(d_K(h),l) - \theta(h,d_K(l)),k] + [d_I(\theta(l,k)) - \theta(l,d_K(k)) - \theta(d_K(l),k),h]$
$+[d_I(\theta(k,h)) - \theta(d_K(k),h) - \theta(k,d_K(h)),l]$
$= [\psi_K(d_K + d_I)\theta(h,l),k] + [\psi_K(d_K + d_I)\theta(l,k),h] + [\psi_K(d_K + d_I)\theta(k,h),l].$

Então $\psi_K(d_K + d_I)\theta \in Z^2(K,I)$.

Seja $\theta \in B^2(K,I)$ tal que $\theta(k,h) = \nu([k,h] - [\nu(k),h] - [k,\nu(h)]$, $\nu : K \to I$ linear. Então,
$\psi_K(d_K + d_I)\theta(k,h) = d_I(\nu([k,h] - [\nu(k),h] - [k,\nu(h)])$

$-\nu([d_K(k),h]) + [\nu(d_K(k)),h] + [d_K(k),\nu(h)] - \nu([k,d_K(h)] + [\nu(k),d_K(h)] + [k,\nu(d_K(h))]$
$= d_I(\nu[k,h]) - [d_I(\nu(k)),h] - [\nu(k),d_K(h)] - [d_K(k),\nu(h)] - [k,d_I(\nu(h))]$
$-\nu([d_K(k),h]) + [\nu(d_K(k)),h] + [d_K(k),\nu(h)] - \nu([k,d_K(h)] + [\nu(k),d_K(h)] + [k,\nu(d_K(h))]$
$= d_I(\nu[k,h]) - \nu([d_K(k),h]) - \nu([k,d_K(h)]$
$-[d_I(\nu(k)),h] + [\nu(d_K(k)),h] - [k,d_I(\nu(h))] + [k,\nu(d_K(h))]$
$= (d_I.\nu - \nu.d_K)([k,h] - [(d_I.\nu - \nu.d_K)(k),h] - [k,(d_I.\nu - \nu.d_K)(h)]$.
Como $(d_I.\nu - \nu.d_K) : K \to I$ é linear então $\psi_K(d_K + d_I)\theta \in B^2(K,I)$.

■

Definição 3. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ tal que $L = L_\theta$ e considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $Z^2(K,I)$ segundo a representação ψ_K. Defina os pares induzidos de $Der(K) \oplus Der(I)$ por:

$$Indu(K,I,\theta) = Ann_{Comp(K,I)}(\theta + B^2(K,I)).$$

1.6 Derivações de L_θ

Uma observação para coerência das notações utilizadas para d_I e d_K. Se $d \in L_\theta$ então d_I é obtida pela restrição de d à I. Já a função $d_K : K \to K$ é definida como a componente em K de $d(k), k \in K$, que é corresponde a função d_K definida em L/I.

Lema 1. *Seja $d \in L_\theta = K \oplus I$ e $k + a \in L_\theta$. Então $d(k+a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a)$, com $d_K \in Der(K)$, $d_I \in Der(I)$ e $\varphi_d \in Z^1(K,I)$.*

Prova: d_K e d_I foram definidas no inicio do texto. φ_d pode ser definida como $\varphi_d(k) = d(k) - d_K(k)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi_d([k,h]_K) &= d([k,h]_K) - d_K([k,h]_K) \\
&= [d(k),h]_K + [k,d(h)]_K - [d_K(k),h]_K - [k,d_K(h)]_K \\
&= [\varphi_d(k),h]_K + [k,\varphi_d(h)]
\end{aligned}$$

■

Teorema 3. *Seja K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $\theta \in Z^2(K,I)$. Seja $L_\theta = K \oplus I$ e considere I como ideal de L_θ. Assuma que I é invariante por $Der(L)$. Seja $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$. Então:*

1. *$Im(\phi) = Indu(K,I,\theta)$*
2. *$ker(\phi) \cong Z^1(K,I)$*

Prova: 1) Seja $d_K + d_I \in Indu(K,I,\theta)$ então $(d_K + d_I)\theta = 0 \bmod B^2(K,I)$. Logo, existe $\nu : K \to I$ linear tal que
$\theta(d_K(k),h) + \theta(k,d_K(h)) + [\nu(k),h] + [k,\nu(h)] = d_I(\theta(k,h)) + \nu([k,h])$.

Defina a seguinte aplicação linear $(d_K+d_I)^* : L_\theta \to L_\theta$ por $(d_K+d_I)^*(k+a) = d_K(k)+d_I(a)+\nu(k)$. É imediato que $\phi((d_K+d_I)^*) = d_K+d_I$. Falta verificar que $(d_K+d_I)^* \in Der(L_\theta = L)$.

$$\begin{aligned}
(d_K+d_I)^*([k+a,h+b]) &= (d_K+d_I)^*([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\
&= d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + d_I([a,h]) - d_I([b,k]) + \nu([k,h]) \\
&= d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + \nu([k,h]) \\
&+ [d_I(a),h]) + [a,d_K(h)] - [d_I(b),k] - [b,d_K(k)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[(d_K+d_I)^*(k+a),h+b]+[k+a,(d_K+d_I)^*(h+b)]) \\
&= (d_K+d_I)^*([k,h]_K+\theta(k,h)+[a,h]-[b,k]) \\
&= [d_K(k)+d_I(a)+\nu(k),h+b]+[k+a,d_K(h)+d_I(b)+\nu(h)] \\
&= [d_k(k),h]_K+\theta(d_K(k),h)+[d_I(a)+\nu(k),h]-[b,d_K(k)] \\
&+ [k,d_K(h)]_K+\theta(k,d_K(h))+[a,d_K(h)]-[d_I(b)+\nu(h),k] \\
&= d_K([k,h]_K)+\theta(d_K(k),h)+\theta(k,d_K(h))+[\nu(k),h]+[k,\nu(h)] \\
&+ [d_I(a),h])+[a,d_K(h)]-[d_I(b),k]-[b,d_K(k)]
\end{aligned}
$$

Agora, seja $(d_K+d_I)\in Im(\phi)$. Então existe $d\in Der(L_\theta)$ tal que $\phi(d)=(d_K+d_I)$. Para cada $k+a\in L_\theta$ escreva $d(k+a)=d_K(k)+\varphi_d(k)+d_I(a)$. Como d é uma derivação, temos $d[k+a,h+b]=[d(k)+a,h+b]=[k+a,d(h)+b]$. Expandindo os dois lados temos:

$$
\begin{aligned}
[d(k+a),h+b]+[k+a,d(h)+b] &= [d_K(k)+\varphi_d(k)+d_I(a),h+b]+[k+a,d_K(h)+\varphi_d(h)+d_I(b)] \\
&= [d_K(k),h]_K+\theta(d_K(k),h)+[d_I(a)+\varphi_d(k),h]-[b,d_K(k)] \\
&+ [k,d_K(h)]+\theta(k,d_K(h))+[a,d_K(h)]-[d_I(h)+\varphi_d(h),k] \\
&= d_K([k,h]_K)+\theta(d_K(k),h)+\theta(k,d_k(h)) \\
&+ [d_I(a),h]-[b,d_k(k)]+[a,d_K(h)]-[d_I(b),k]+[\varphi_d(k),b]-[\varphi_d(h),k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d([k+a,h+b]) &= d([k,h]_K+\theta(k,h)+[a,h]-[b,k]) \\
&= d_K([k,h]_K)+d_I(\theta(k,h))+d_I([a,h])-d_I([b,k])+\varphi_d([k,h])
\end{aligned}
$$

Como $Im(\phi)\subseteq Comp(K,I)$ então $\phi(d)=(d_K+d_I)\in Indu(K,I,\theta)$.

2) Se $d\in Der(L_\theta)$ então a aplicação apresentada no lema 1 nos fornece $d(k+a)=d_K(k)+\varphi_d(k)+d_I(a)$. Para $d\in ker(\phi)$ temos $d(k+a)=\varphi_d(k)$. Defina $\sigma: ker(\phi)\to (Z^1(K,I),+)$ por $\sigma(d)=\varphi_d$. É imediato que σ é um homomorfismo injetor. Para verificar a sobrejetividade, considere $\varphi\in Z^1(K,I)$. φ satisfaz $\varphi([k,h])=[\varphi(k),h]+[k,\varphi(h)]$. Defina a aplicação linear $d_\varphi(k+a)=\varphi(k)$. Temos,

$d_\varphi([k+a,h+k])=\varphi([k,h])=[\varphi(k),h]+[k,\varphi(h)]=[d_\varphi(k+a),h+b]+[k+a,d_\varphi(h+b)]$.

Assim, d_φ é uma derivação de L_θ, $d_\varphi\in ker(\phi)$ e $\sigma(d_\varphi)=\varphi$.

■