1 Extensões de Álgebras de Lie

1.1 Definição

Nessa seção definiremos extensões de álgebras de Lie e alguns grupos de cohomologia.

Definição 1. Sejam K,H e L álgebras de Lie. L é dita uma extensão de K por H se existe uma sequência exata de álgebras de Lie,

$$0 \to H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{s} K \to 0.$$

Seja S um subespaço vetorial de L tal que $L = S \oplus Ker(s)$,

- se S é um ideal então é uma extensão **trivial** de K;
- se S é uma subálgebra de L então a extensão é dita **split**;
- se $Ker(s)$ está contido no centro de L, denotado por $Z(L)$, então L é uma extensão **central**.

1.2 Extensões Usando Cohomologia

Definição 2. Sejam K e I álgebras de Lie. Diremos que K age sobre I se existe um morfismo de álgebras de Lie $\psi : K \to Der(I)$. Neste caso, denotaremos a ação de K sobre I por

$$[a, k] := \psi(k)(a), k \in K, a \in I.$$

A ação de K sobre I pode ser vista como uma representação de K em I, assim I possui estrutura de K-módulo, o que nos permite definir os grupos de cohomologia de K em I

Definição 3. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana.

- Denote por $C^2(K, I)$ o espaço das aplicações bilineares e antisimétricas de K em I.
- Se $\theta \in C^2(K, I)$ é tal que $\theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]) = [\theta(y, z), x] + [\theta(z, x), y] + [\theta(x, y), z], x, y, z \in K$, então θ será chamado de **cociclo** e o espaço dos cocilos será denotado por $Z^2(K, I)$, que é o segundo grupo de cohomologia.
- Suponha que θ é um cociclo. Se para todo $k, h \in K$ podemos escrever $\theta(k, h) = \nu([h, k]) + [\nu(h), k] - [\nu(k), h]$, para alguma aplicação linear $\nu : K \to I$ então θ será chamado de **cofronteira**. O espaço das cofronteiras será denotado por $B^2(K, I)$.
- Denote $H^2(K, I) = Z^2(K, I)/B^2(K, I)$ o espaço quociente dos cociclos pelas cofronteiras.
- O primeiro grupo de cohomologia de K e I é definido por $Z^1(K, I) = \{\nu \in Hom(K, I) \mid \nu([k, h]_K) = [\nu(k), h] - [\nu(h), k],\ \text{para todo } k, h \in K\}$.

Para cada cociclo em $Z^2(K, I)$ podemos definir uma extensão split de K por I. Se L é uma álgebra de Lie com um ideal abeliano não-trivial I, então L pode ser vista como uma extensão split de $K = L/I$ por I. Através dessa caracterização poderemos calcular as derivações e automorfismos de L a partir de K.

Proposição 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in Z^2(K, I)$ e defina a álgebra $K_\theta = K \oplus I$ com o produto*

$$[x + a, y + b]_\theta = [x, y]_K + \theta(x, y) + [a, y] - [b, x], \text{ para } x, y \in K \text{ e } a, b \in I. \tag{1}$$

Então,

1. *K_θ é uma álgebra de Lie;*
2. *K_θ é uma extensão de K por I.*
3. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L com I abeliano. Suponha que $K = L/I$ age sobre I. Então existe $\theta \in Z^2(K, I)$ tal que $L \cong K_\theta$.*

Prova: 1) Sejam $x, y, z \in K$ e $a, b, c \in I$ então:

- Se $x \in K$ e $a \in I$ então $[x + a, x + a] = [x, x]_K + \theta(x, x) + [a, x] - [a, x] = 0$;
- Sejam $x, y, z \in K$ e $a, b, c \in I$. Usando a definição do produto em K_θ obtemos

  $$[x+a, [y+b, z+c]] = [x, [y, z]_K]_K + \theta(x, [y, z]) - [\theta(y, z), x] + [a, [y, z]_K] - [[b, z], x] + [[c, y], x].$$

  Logo, podemos escrever a equação

  $$[[x + a, y + b], z + c] + [[y + b, z + c], x + a] + [[z + c, x + a], y + b]$$

  como a soma das parcelas

  $$[x, [y, z]_K]_K + [y, [z, x]_K]_K + [z, [x, y]_K]_K$$
  $$\theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]) - [\theta(y, z), x] - [\theta(z, x), y] - [\theta(x, y), z]$$
  $$[a, [y, z]_K] + [b, [z, x]_K] + [c, [x, y]_K]$$
  $$[[a, z], y] - [[a, y], z] + [[b, x], z] - [[b, z], x] + [[c, y], x] - [[c, x], y]$$

A primeira parcela é zero pela identidade de Jacobi em K; pela definição de cociclo a segunda também é zero; e a soma das duas últimas é zero pois a ação de K em I é definida por uma representação. Portanto, $[x+a, [y+b, z+c]] + [y+b, [z+c, x+a]] + [z+c, [x+a, y+b]] = 0$.

2) Seja $i : I \to L$ a inclusão e $\pi : L \to K$ a projeção natural. Como i e π são morfismos de álgebras de Lie então obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} K \to 0.$$

3) Considere a ação de K em I induzida pela representação adjunta de L em I: seja $u \in L$ tal que $u + I = x \in K$, então $[a, x] = [a, u], a \in I$. Então I possui estrutura de K-módulo e podemos definir os grupos de cohomologia de K em I.

Seja π a projeção natural de L em K e $\epsilon : K \to L$ uma aplicação linear injetora satisfazendo $\pi(\epsilon(x)) = x, x \in K$. Observe que pela definição da ação de K em I temos $[a, x] = [a, \epsilon(x)]$ para todo $a \in I$ e $x \in K$.

Defina a aplicação linear

$$\theta(x,y) = [\epsilon(x),\epsilon(y)]_L - \epsilon([x,y]_K) \text{ para todo } x,y \in K.$$

Pela construção de θ temos $\pi(\theta) = 0$, ou seja, $\theta(x,y) \in I$. Vamos verificar que θ é um cociclo de K em I. Se $x,y \in K$ é imediato que $\theta(x,y) = -\theta(y,x)$ e $\theta(x,x) = 0$.

Por definição temos

$$\theta(x,[y,z]) = [\epsilon(x),\epsilon([y,z]_K)]_L - \epsilon([x,[y,z]_K]_K).$$

Somando os três termos

$$\theta(x,[y,z]) + \theta(y,[z,x]) + \theta(z,[x,y])$$

e usando que ϵ é linear obtemos

$$[\epsilon(x),[\epsilon([y,z]_K)]_L + [\epsilon(y),[\epsilon([z,x]_K)]_L + [\epsilon(z),[\epsilon([x,y]_K)]_L.$$

Por outro lado,

$$[\theta(x,y),z]_L = [[\epsilon(x),\epsilon(y)]_L - \epsilon([x,y]_K),z] = [[\epsilon(x),\epsilon(y)]_L - \epsilon([x,y]_K),\epsilon(z)].$$

Somando os três termos

$$[\theta(x,y),z]_L + [\theta(y,z),x]_L + [\theta(z,x),y]_L$$

obtemos

$$[\epsilon(x),[\epsilon([y,z]_K)]_L + [\epsilon(y),[\epsilon([z,x]_K)]_L + [\epsilon(z),[\epsilon([x,y]_K)]_L.$$

Falta mostrar que K_θ e L são isomorfos. Como ϵ é injetora então todo elemento de $u \in L$ pode ser escrito de forma única como $u = \epsilon(u+I)+a$, com $a \in I$. A partir dessa decomposição defina a aplicação linear $\zeta : L \to L_\theta = K \oplus I$ por

$$\zeta(u) = (u+I) + a.$$

Sejam $u,v \in L$ tais que $x = \epsilon(u+I) + a$ e $v = \epsilon(v+I) + b$, com $a,b \in I$. Escreva

$$[u,v] = \epsilon([u,v]+I) + c \text{ para algum } c \in I.$$

Por outro lado,

$$[u,v] = [\epsilon(u+I) + a, \epsilon(v+I) + b].$$

Desenvolvendo essa última equação obtemos

$$[u,v] = [\epsilon(u+I),\epsilon(v+I)] + [a, v+I] - [b, u+I].$$

Então

$$c = [\epsilon(u+I),\epsilon(v+I)] - \epsilon([u+I, v+I]) + [a, v+I] - [b, u+I].$$

Segue que

$$\begin{aligned} \zeta([u,v]) &= ([u,v]+I) + [\epsilon(u+I),\epsilon(v+I)] - \epsilon([u+I,v+I]) + [a,v+I] - [b,u+I] \\ &= [(u+I)+a,(v+I)+b] \\ &= [\zeta(u),\zeta(v)]. \end{aligned}$$

Suponha que $\zeta(u) = \zeta(v)$ então $a = b$ e $u+I = v+I$. Logo,

$$u = \epsilon(u+I) + a = \epsilon(v+I) + b = v.$$

Para cada $y \in L_\theta = K \oplus I$ escreva $y = (u+I) + a$, com $u \in L$ e $a \in I$. Então $\zeta(u+a) = y$.

Portanto $L \cong L_\theta$.

■

2 Derivações de Extensões Usando Cohomologia

2.1 Pares compatíveis

Definição 4. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Suponha que $d_K \in Der(K)$ e $d_I \in Der(I)$. O par $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$ é dito par compatível se

$$d_I([a,k]) = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)] \text{ para todo } a \in I \text{ e } k \in K.$$

Proposição 2. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. O conjunto formando pelos pares compatíveis*

$$\begin{aligned} Comp(K,I) \quad = \quad & \{d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I) \mid d_I([a,k]) = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)], \\ & \textit{para todo } a \in I, k \in K\}, \end{aligned}$$

é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$

Prova: Sejam $d_K + d_I, e_K + e_I \in Comp(K,I)$, $a \in I$ e $k \in K$. Como o produto em L é linear é imediato verificar que $Comp(K,I)$ é um subespaço de $Der(K) \oplus Der(I)$.

Usando a definição de par compatível temos

$$d_I e_I([a,k]) = [d_I e_I(a), k] + [e_I(a), d_K(a)] + [d_I(a), e_K(k)] + [a, d_K.e_K(k)]$$

e

$$e_I d_I([a,k]) = [e_I d_I(a), k] + [d_I(a), e_K(a)] + [e_I(a), d_K(k)] + [a, e_K.d_K(k)].$$

Então

$$[d_I, e_I][a,k] = (d_I e_I - e_I d_I)[a,k] = [[d_I, e_I](a), k] - [a, [d_K, e_K](k)]$$

Segue que $[d_K + d_I, e_K + e_I] \in Comp(K,I)$.

■

Se a álgebra I é abeliana podemos calcular os pares compatíveis como um anulador de uma ação de $Der(K) \oplus Der(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$. Para isso é necessário primeiro definir uma ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $Hom(K, Der(I))$.

Definição 5. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Sejam $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, $T \in Hom(K, Der(I))$ e $k \in K$. A ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ sobre $Hom(K, Der(I)))$ é dada por

$$(d_K + d_I) \cdot T(k) = [d_I, T(k)] - T(d_K(k)). \tag{2}$$

A aplicação $(d_K + d_I) \cdot T$ é linear pois é uma combinação linear de composições de aplicações lineares. Como I é abeliana então toda aplicação linear é uma derivação. Logo, $(d_K + d_I) \cdot T(k) \in Hom(K, Der(I))$. Falta verificar a ação do produto de elementos de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$.

Sejam $d_K + d_I, e_K + e_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$. Pela definição da ação

$$(e_K + e_I) \cdot T(k) = [e_I, T(k)] - T(e_K(k)),$$

aplicando $(d_K + d_I)$ na equação acima obtemos

$$[d_I, [e_I, T(k)]] - [e_I, T(d_K(k))] - [d_I, T(e_K(k))] + T(e_K d_K(k)).$$

Analogamente, obtemos que $(e_K + e_I)(d_K + d_I) \cdot T(k)$ é igual à

$$[e_I, [d_I, T(k)]] - [d_I, T(e_K(k))] - [e_I, T(d_K(k))] + T(d_K e_K(k)).$$

Subtraindo as duas equações temos

$$[d_I, [e_I, T(k)]] - [e_I, [d_I, T(k)]] + T(e_K d_K(k)) - T(d_K e_K(k)).$$

Usando que $T : K \to Der(I)$ é linear e a defineção do comutador temos

$$[[d_I, e_I], T(k)]] - T([e_K, d_K](k)).$$

Portanto, $[d_K + d_I, e_K + e_I] \cdot T(k) = [[d_I, e_I], T(k)]] - T([e_K, d_K](k))$.

Teorema 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a ação definida em (2) restrita a álgebra $Der(K) \oplus Der(I)$. Se $T \in Hom(K, Der(I))$ é dada por $T(k)(a) = [a, k]$ então $Comp(K, I) = Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(T)$.*

Prova: Sejam $a \in I$ e $k \in K$ quaisquer. Se $d_K + d_I \in Comp(K, I)$ então

$$d_I[a, k] = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)].$$

Podemos reescrever essa equação usando T:

$$d_I T(k) = T(k) d_I(a) + T(d_K(k))(a).$$

Essa igualdade é equivalente à $(d_K + d_I) \cdot T = 0$, que é a definição de $Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(T)$.

■

2.2 Pares induzidos

Definição 6. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Dados $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, $\theta \in C^2(K, I)$ e $h, k \in K$, defina a ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K, I)$ por

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(h, k) = d_I(\theta(h, k)) - \theta(d_K(k), h) - \theta(k, d_K(h)). \tag{3}$$

Omitiremos a demostração que essa ação está bem definida pois ela é semelhante a demonstração que a ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$ está bem definida.

Proposição 3. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a ação de $Comp(K, I)$ sobre $C^2(K, I)$ definida em (3). Então os espaços $Z^2(K, I)$ e $B^2(K, I)$ são invariantes por essa ação.*

Prova: Sejam $k, h, l \in K$ e $\theta \in Z^2(K, I)$. Por definição,

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, [h, l]) = d_I(\theta(k, [h, l])) - \theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(k, d_K([h, l])).$$

Como d_K é uma derivação temos

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, [h, l]) = d_I(\theta(k, [h, l])) - \theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(k, [d_K(h), l]) - \theta(k, [h, d_K(l)]).$$

Então a soma

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, [h, l]) + (d_K + d_I) \cdot \theta(h, [l, k]) + (d_K + d_I) \cdot \theta(l, [k, h]),$$

pode ser escrita como soma das parcelas

$$\begin{gathered} d_I(\theta(k, [h, l])) + d_I(\theta(h, [l, k])) + d_I(\theta(l, [k, h])) \\ -\theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(d_K(h), [l, k]) - \theta(d_K(l), [k, h]) \\ -\theta(k, [d_K(h), l]) - \theta(h, [d_K(l), k]) - \theta(l, [d_K(k), h]) \\ -\theta(k, [h, d_K(l)]) - \theta(h, [l, d_K(k)]) - \theta(l, [k, d_K(h)]) \end{gathered}$$

Usando a definição de cociclo em cada uma delas obtemos as equações

$$d_I([\theta(k, h), l]) + d_I([\theta(h, l), k]) + d_I([\theta(l, k), h])$$

$$\begin{gathered} -[\theta(d_K(k), h), l] - [\theta(d_K(h), l), k] - [\theta(d_K(l), k), h] \\ -[\theta(k, d_K(h)), l] - [\theta(h, d_K(l)), k] - [\theta(l, d_K(k)), h] \\ -[\theta(k, h), d_K(l)] - [\theta(h, l), d_K(k)] - [\theta(l, k), d_K(h)] \end{gathered}$$

Como $d_K + d_I$ é um par compatível então podemos substituir na equação acima as igualdades

$$d_I([\theta(k, h), l]) = [\mathrm{d}_I\theta(k, h), l]) + [\theta(k, h)), d_K(l)].$$

$$\begin{gathered} d_I([\theta(h, l), k]) = [\mathrm{d}_I\theta(h, l), k]) + [\theta(h, l)), d_K(k)]. \\ d_I([\theta(l, k), h]) = [\mathrm{d}_I\theta(l, k), h]) + [\theta(l, k)), d_K(h)]. \end{gathered}$$

obtendo

$$\begin{gathered} [\mathrm{d}_I\theta(k, h), l] + [\mathrm{d}_I\theta(h, l), k] + [\mathrm{d}_I\theta(l, k), h] \\ -[\theta(d_K(k), h), l] - [\theta(d_K(h), l), k] - [\theta(d_K(l), k), h] \\ -[\theta(k, d_K(h)), l] - [\theta(h, d_K(l)), k] - [\theta(l, d_K(k)), h]. \end{gathered}$$

Que é equivalente à

$$[(d_K + d_I) \cdot \theta(h, l), k] + [(d_K + d_I) \cdot \theta(l, k), h] + [(d_K + d_I) \cdot \theta(k, h), l].$$

Então $(d_K + d_I) \cdot \theta \in Z^2(K, I)$.

Agora suponha que $\theta \in B^2(K, I)$. Então existe uma aplicação linear $\nu : K \to I$ tal que

$$\theta(k, h) = \nu([k, h]) - [\nu(k), h] - [k, \nu(h)].$$

Então

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, h) = (d_K + d_I) \cdot (\nu([k, h] - [\nu(k), h] - [k, \nu(h)]).$$

Aplicando a definição da ação em cada termo da equação acima obtemos

$$d_I(\nu([k, h])) - \nu([d_K(k), h]) - \nu([k, d_K(h)])$$

$$-d_I([\nu(k), h]) + [\nu(d_K(k)), h] + [\nu(k), d_K(h)]$$

$$-d_I([k,\nu(h)]) + [d_K(k),\nu(h)] + [k,\nu(d_K(h))],$$

podemos usar que d_K é derivação na primeira linha e $d_K + d_I$ é um par compatível nas outras duas para obter

$$d_I(\nu([k,h])) - \nu(d_K[k,h])$$
$$-[d_I(\nu(k)),h] - [\nu(k),d_K(h)] + [\nu(d_K(k)),h] + [\nu(k),d_K(h)]$$
$$-[d_I(k),\nu(h)] - [k,d_I(\nu(h))] + [d_I(k),\nu(h)] + [k,\nu(d_K(h))],$$

Que é igual a

$$(d_I\nu - \nu d_K)[k,h] - [(d_I\nu - \nu d_K)(k),h] - [d_I(k),\nu(h)] + [k,(d_I\nu - \nu d_K)(h)].$$

Como $(d_I.\nu - \nu.d_K) : K \to I$ é uma aplicação linear então $(d_K + d_I) \cdot \theta \in B^2(K,I)$.

■

Definição 7. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ e considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $Z^2(K,I)$ definida em (3). Defina os pares induzidos de $Comp(K,I)$ por

$$Indu(K,I,\theta) = Ann_{Comp(K,I)}(\theta + B^2(K,I)).$$

2.3 Derivações de K_θ

Nessa seção vamos calcular as derivações da extensão K_θ a partir das derivações de K. Para isso é necessário definir um morfismo ϕ de $Der(K_\theta)$ em $Der(K) \oplus Der(I)$.

Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L com $K = L/I$. Seja $A = \{f \in \mathfrak{gl}(L) \mid f(I) \subset I\}$ a subálgebra de $\mathfrak{gl}(L)$ das aplicações lineares que mantém I invariante. Se k é um elemento de K na forma $k = x + I$ com $x \in L$ e $f \in A$ então podemos definir as aplicações lineares

- $f_K : K \to K$ dada por $f_K(k) = f(x) + I, x \in L$ e
- $f_I : I \to I$ como a restrição de f ao ideal I.

Definimos a aplicações linear $\Phi : A \to \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ por

$$\Phi(f) = f_K + f_I. \tag{4}$$

Proposição 4. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L. Suponha que $K = L/I$ e $A = \{f \in \mathfrak{gl}(L) \mid f(I) \subset I\}$. Então a aplicação de Φ definida em (4) é um morfismo de álgebras de Lie.*

Prova: Seja $f, g \in A$. Então

$$\begin{array}{rcl}
[\Phi([f,g]) & = & \Phi(fg - gf) \\
 & = & (fg)_K + (fg)_I - (gf)_K - (gf)_I \\
 & = & f_K g_K + f_I g_I - g_K f_K - g_I f_I \\
 & = & [f_K, g_K] + [f_I, g_I] \\
 & = & [f_K + f_I, g_K + g_I] \\
 & = & [\Phi(f), \Phi(g)].
\end{array}$$

■

Proposição 5. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L invarinate por $Der(L)$. Suponha $K = L/I$ e Φ a aplicação definida (4). Defina $\phi = \Phi|_{Der(L)}$ a restrição de Φ a $Der(L)$. Então $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ é um morfismo de álgebras de Lie.*

Prova: Devido ao resultado obtido na Proposição 4, basta provarmos que se $d \in Der(L)$ então $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$. Sejam $k, h \in L$ então $d_K([\bar{k}, \bar{h}]) = d([k, h]) + I = [d(k), h] + [k, d(h)] + I = [d_K(\bar{k}), \bar{h}] + [\bar{k}, d_K(\bar{h})]$. Se $a, b \in I$ então $d_I([a, b]) = d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] = [d_I(a), b] + [a, d_I(b)]$.

■

Seja L uma álgebra de Lie e I ideal de L com. Denote a restrição da representação adjunta de L a I por ad_I. Se I é um ideal abeliano então $I \subset Ker(ad_I)$. Logo, se $K = L/I$ podemos induzir uma representação $ad_K : K \to Der(I)$ dada por $ad_K(x + I)(a) = [a, x]$, para todo $x \in L$ e $a \in I$. Portanto, se I é abeliano então K age sobre I.

Teorema 2. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal abeliano de L. Suponha que K age sobre I pela representação $ad_K : K \to Der(I)$. Seja $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$, conforme definida na proposição 5. Então $Im(\phi) \leq Comp(K, I)$.*

Prova: Se $d_K + d_I \in Im(\phi)$ então existe $d \in D$ tal que $\phi(d) = d_K + d_I$. Seja $k \in L$ tal que $k + I = \bar{k}$ e $a \in I$, $d_I[a, \bar{k}] = d_I[a, k] = d[a, k] = [d(a), k] + [a, d(k)] = [d_I(a), \bar{k}] + [a, d_K(\bar{k})]$.

■

Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in H^2(K, I)$ e suponha que I é um ideal de K_θ invariante por derivações. Sejam $d \in Der(K_\theta)$ e $x + a \in K_\theta$ então $d(x + a) = d(x) + d(a)$. Como I é invariante por derivações então $d(a) \in I$, a restrição de d ao ideal I, denotada por $d_I : I \to I$, é uma derivação de I. Agora decomponha $d(x)$ em $d_K(x) + \varphi(x)$ com $d_K(x) \in K$ e $\varphi(x) \in I$. Então

$$d(x + a) = d_K(x) + \varphi_d(x) + d_I(a). \tag{5}$$

com $d_K : K \to K$ e $d_I : I \to I$ derivações e $\varphi_d : K \to I$ uma aplicação linear.

Podemos verificar que φ_d é uma aplicação linear: como d é linear temos $d(k) + d(h) = d_K(k) + d_K(h) + \varphi_d(k) + \varphi_d(h)$. Por outro lado, $d(k + h) = d_K(k + h) + \varphi_d(k + h)$, então $\varphi_d(k + h) = \varphi_d(k) + \varphi_d(h)$.

Teorema 3. *Seja K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $\theta \in Z^2(K, I)$. Seja $L_\theta = K \oplus I$ e considere I como ideal de L_θ. Assuma que I é invariante por $Der(L_\theta)$. Seja $\phi : Der(L_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$. Então:*

1. *$Im(\phi) = Indu(K, I, \theta)$*
2. *$ker(\phi) \cong Z^1(K, I)$*

Prova: 1) Seja $d_K + d_I \in Indu(K, I, \theta)$ então $(d_K + d_I) \cdot \theta = 0 \mod B^2(K, I)$. Logo, existe uma aplicação linear $\nu : K \to I$ tal que para todo $k, h \in K$ temos

$$\theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_K(h)) + [\nu(k), h] - [\nu(h), k] = d_I(\theta(k, h)) + \nu([k, h]). \tag{6}$$

Suponha que $x \in K$ e $a \in I$ e defina a aplicação linear $(d_K + d_I)^* : L_\theta \to L_\theta$ por

$$(d_K + d_I)^*(k + a) = d_K(k) + d_I(a) + \nu(k).$$

Vamos verificar que $(d_K + d_I)^*$ é uma derivação de L_θ. Sejam $k + a, h + b \in L_\theta$.

$$\begin{array}{rcl} (d_K + d_I)^*([k + a, h + b]) & = & (d_K + d_I)^*([k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]) \\ & = & d_K([k, h]_K) + d_I(\theta(k, h)) + d_I([a, h]) - d_I([b, k]) + \nu([k, h]) \\ & = & d_K([k, h]_K) + d_I(\theta(k, h)) + \nu([k, h]) \\ & + & [d_I(a), h]) + [a, d_K(h)] - [d_I(b), k] - [b, d_K(k)] \end{array}$$

$$[(d_K + d_I)^*(k + a), h + b] + [k + a, (d_K + d_I)^*(h + b)])$$

$$\begin{array}{rcl} & = & (d_K + d_I)^*([k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]) \\ & = & [d_K(k) + d_I(a) + \nu(k), h + b] + [k + a, d_K(h) + d_I(b) + \nu(h)] \\ & = & [d_k(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [d_I(a) + \nu(k), h] - [b, d_K(k)] \\ & + & [k, d_K(h)]_K + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [d_I(b) + \nu(h), k] \\ & = & d_K([k, h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_K(h)) + [\nu(k), h] + [k, \nu(h)] \\ & + & [d_I(a), h]) + [a, d_K(h)] - [d_I(b), k] - [b, d_K(k)] \end{array}$$

Pela equação (6) obtemos a igualdade. Logo $(d_K + d_I)^*$ é uma derivação. Além disso, $(d_K + d_I)^*_K(x + a) = d_K(x) + d_I(a) + \nu(x) + I = d_K(x) + I$. E $(d_K + d_I)^*_I(a) = d_I(a)$. Segue que $\phi((d_K + d_I)^*) = d_K + d_I$.

Agora, suponha que $(d_K + d_I) \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(L_\theta)$ tal que $\phi(d) = (d_K + d_I)$. Para cada $k + a \in L_\theta$ escreva $d(k + a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a)$, conforme a equação (5). Como d é uma derivação, temos $d[k + a, h + b] = [d(k) + a, h + b] = [k + a, d(h) + b]$. Expandindo os dois da igualdade:

$$\begin{array}{rcl} [d(k + a), h + b] + [k + a, d(h + b)] & = & [d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a), h + b] \\ & + & [k + a, d_K(h) + \varphi_d(h) + d_I(b)] \\ & = & [d_K(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [\varphi_d(k) + d_I(a), h] - [b, d_K(k)] \\ & + & [k, d_K(h)]_K + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [\varphi_d(h) + d_I(h), k] \\ & = & d_K([k, h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_k(h)) \\ & + & [d_I(a), h] - [b, d_k(k)] + [a, d_K(h)] \\ & - & [d_I(b), k] + [\varphi_d(k), b] - [\varphi_d(h), k] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} d([k + a, h + b]) & = & d([k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]) \\ & = & d_K([k, h]_K) + d_I(\theta(k, h)) + d_I([a, h]) - d_I([b, k]) + \varphi_d([k, h]) \end{array}$$

Como $Im(\phi) \subseteq Comp(K, I)$ então $\phi(d) = (d_K + d_I) \in Indu(K, I, \theta)$.

2) Se $d \in ker(\phi)$ então $d(k + a) = \varphi_d(k)$. Assim, a igualdade $d[k + a, h + b] = [d(k) + a, h + b] = [k + a, d(h) + b]$ nos fornece $\varphi_d([k, h]_K) = [\varphi_d(k), h] - [\varphi_d(h), k]$ ou seja, $\varphi_d \in Z^2(K, I)$.

Defina $\sigma : ker(\phi) \to (Z^1(K, I), +)$ por $\sigma(d) = \varphi_d$.Sejam $d, e \in ker(\phi)$ e $k \in K$ então $\sigma(d + e)(k) = \varphi_{(d+e)}(k) = (d + e)(k) = (d)(k) + (d)(k) = \varphi_d(k) + \varphi_e(k) = (\sigma(d) + \sigma(e))(k)$.

Agora defina $\delta : (Z^1(K, I), +) \to ker(\phi)$ por $\delta(\varphi) = d_\varphi$ tal que $d_\varphi(k + a) = \varphi(k)$. Temos, $d_\varphi([k + a, h + k]) = \varphi([k, h]) = [\varphi(k), h] + [k, \varphi(h)] = [d_\varphi(k + a), h + b] + [k + a, d_\varphi(h + b)]$. Logo, d_φ é uma derivação de L_θ e $d_\varphi \in ker(\phi)$. Sejam $\varphi, \beta \in (Z^1(K, I), +)$ e $k \in K$ então $\delta(\varphi + \beta)(k) = d_{\varphi+\beta}(k) = \varphi(k) + \beta(k) = (\delta(\varphi) + \delta(\beta))(k)$.

É imediato que $\sigma = \delta^{-1}$.

■

3 Extensões Centrais via Cohomologia

Apresentaremos como definir uma extensão central de K a partir de subespaços de $H^2(K,\mathbb{F})$ e calcularemos as classes de isomorfismos dessas extensões.

3.1 Extensões a partir de espaços de $H^2(K,\mathbb{F})$

Sejam K uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}$ pode ser visto como um K-módulo com ação trivial então podemos definir o segundo grupo de cohomologia de $Z^2(K,\mathbb{F})$.

Sejam $\theta_1,\cdots,\theta_s \in Z^2(K,\mathbb{F})$ e I um espaço vetorial com base $\{e_1,\cdots,e_s\}$. Denote por U o espaço gerado sobre $\mathbb{F}$ por $\theta_1,\cdots,\theta_s$ e defina a álgebra K_U como o espaço vetorial $K\oplus I$ com o produto

$$[x+a,y+b]_U = [x,y]_K + \sum_{i=1}^{s}\theta_i(x,y)e_i \text{ para } x,y\in K \text{ e } a,b\in I. \tag{7}$$

Utilizaremos o subíndice K para denotar o produto de elementos de K.

Vamos verificar que K_U é uma álgebra de Lie.

O próximo resultado nos permitirá definir a álgebra K_U a partir de elementos de $H^2(K,\mathbb{F})$.

Proposição 6. *Sejam $\theta_1,...,\theta_s,\zeta_1,...,\zeta_s \in Z^2(L,\mathbb{F})$ tais que $\theta_i-\zeta_i \in B^2(K,\mathbb{F})$ para $1\le i\le s$. Se U e V são os subespaços vetoriais gerados por θ_i e ζ_i, respectivamente, então K_U é isomorfo a K_V.*

Prova: Sejam $\nu_1,\cdots,\nu_s$ funcionais lineares em K tais que $\theta_i(x,y)=\zeta_i(x,y)+\nu_i([x,y])$, para $1\le i\le s$. Seja I um espaço vetorial com base $\{e_1,\cdots,e_s\}$. Então como espaços vetorias temos a igualdade $K_U=K\oplus I=K_V$. Defina a aplicação linear $\sigma: K_U\to K_V$ por

$$\sigma(x+a)=x+a+\sum_{i=1}^{s}\nu_i(x)e_i, \qquad x\in K, a\in I.$$

Sejam $x,y\in K$ e $a,b\in I$, então

$$\begin{array}{rcl} \sigma([x+a,y+b]_U) & = & \sigma([x,y]_K+\sum_{i=1}^{s}\theta_i(x,y)e_i) \\ & = & [x,y]_K+\sum_{i=1}^{s}\theta_i(x,y)e_i+\sum_{i=1}^{s}\nu_i([x,y]_K)e_i \\ & = & [x,y]_K+\sum_{i=1}^{s}(\theta_i+\nu_i)([x,y]_K)e_i \\ & = & [x+a,y+b]_V. \end{array}$$

Logo, σ é um morfismo de álgebras de Lie. Se $\sigma(x+a)=0$ então $x=0$ pois a soma de K e I é direta. Isso implica que $\sum_{i=1}^{s}\nu_i(x)e_i=0$ e, consequentemente, $a=0$. Como σ é um endomorfismo injetor de $K\oplus I$ então σ é um isomorfismo.

■

Proposição 7. *Seja L uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{F}$ com centro não trivial. Suponha que o centro de L tenha dimensão s. Então existem uma álgebra de Lie K e cociclos $\theta_1,\cdots,\theta_s\in Z^2(K,\mathbb{F})$ tais que, se U é o subespaço gerado por $\theta_1+B^2(K,\mathbb{F}),\cdots,\theta_s+B^2(K,\mathbb{F})$ em $H^2(K,\mathbb{F})$, então $L\cong K_U$.*

Prova: Sejam $I = Z(L)$ e $K = L/I$. Considere a ação de K em I induzida pela representação adjunta. Como I é central então a ação é trivial. Seja $\pi : L \to K$ a projeção. Escolha uma aplicação linear $\sigma : K \to L$ satisfazendo $\pi(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in K$.

Defina $\theta : K \times K \to I$ por $\theta(x, y) = [\sigma(x), \sigma(y)]_L - \sigma([x, y]_K)$. Vamos verificar que θ é um cociclo em $H^2(K, I)$. Sejam $x, y, z \in K$.

- $\theta(x, y) = [\sigma(x), \sigma(y)]_L - \sigma([x, y]_K) = -[\sigma(y), \sigma(x)]_L - \sigma([y, x]_K) = \theta(y, x)$;
- $\theta(x, x) = [\sigma(x), \sigma(x)]_L - \sigma([x, x]_K) = 0$;
- $\theta([x, y]_K, z) = [\sigma([x, y]_K), \sigma(y)]_L - \sigma([[x, y]_K, z]_K)$

3.2 Centro de K_U

Definição 8. Seja $\theta \in Z^2(K, \mathbb{F})$. O radical de θ é definido pelo conjunto

$$\theta^{\perp} = \{x \in K \text{ tal que } \theta(x, y) = 0, \forall y \in K\}.$$

Se S é um subconjunto de $Z^2(K, \mathbb{F})$ então o radical de S é definido por $S^{\perp} = \cap_{\theta \in S} \theta^{\perp}$.

Proposição 8. *Seja S um subconjunto de $Z^2(K, \mathbb{F})$. Então,*
a) O radical de S é uma subálgebra de L.
b) O radical de S é igual ao radical do subespaço gerado por S.
c) Sejam $\theta_1, \theta_2 \in Z^2(K, \mathbb{F})$ tais que $\theta_1 - \theta_2 \in B^2(K, \mathbb{F})$. Então $\theta_1^{\perp} \cap Z(K) = \theta_2^{\perp} \cap Z(K)$.

Prova: a) Sejam $\theta \in S$, $x, z \in S^{\perp}$ e $y \in K$. Pela definição de cociclo temos

$$\theta([x, z], y) = -\theta([z, y], x) - \theta([y, x], z) = 0.$$

Segue que $\theta^{\perp}$ é uma subálgebra de K e, consequentemente, $S^{\perp}$ é uma interseção de subálgebras.

b) Sejam $x \in S^{\perp}$, $y \in K$ e θ no subespaço gerado por S. Então $\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i$ para $a_i \in \mathbb{F}$ e $\theta_i \in S$. Segue que,

$$\theta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i \theta_i(x, y) = 0.$$

Se x está no radical do subespaço gerado por S então $x \in \theta^{\perp}$ para cada $\theta \in S$, ou seja, $x \in S^{\perp}$.

c) Seja $\nu : K \to \mathbb{F}$ um funcional linear tal que $(\theta_1 - \theta_2)(x, y) = \nu([x, y])$. Se $x \in Z(K)$ então

$$\theta_1(x, y) = \theta_2(x, y), y \in K.$$

Em particular, x está no radical de θ_1 se, e somente se, está no radical de θ_2.

■

Proposição 9. *Sejam $\bar{\theta}_1, \cdots, \bar{\theta}_s \in H^2(K, \mathbb{F})$ e U o subespaço gerado por $\bar{\theta}_1, \cdots, \bar{\theta}_s$. Então o centro de K_U é dado por*

$$Z(K_U) = (U^{\perp} \cap Z(K)) + I.$$

Prova: Sejam $\theta_1, \cdots, \theta_s \in Z^2(K, \mathbb{F})$ tais que $\bar{\theta}_i = \theta_i + B^2(K, \mathbb{F})$ para $1 \leq i \leq s$. Seja V o subespaço de $Z^2(K, \mathbb{F})$ gerado pelos θ_i.

- Se $x \in V^{\perp} \cap Z(K)$ e $a \in K$ então $[x + a, y + b]_V = [x, y]_K + \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)e_i = 0$, para quaisquer $y \in K$ e $b \in I$. Logo, $x + a \in Z(K_V)$.
- Seja $x + a \in Z(K_V)$ então $[x, y]_L + \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)e_i$, para todo $y \in K$ e $b \in I$. Como a soma de K e I é direta então $[x, y]_K = 0$ e $\theta_i(x, y) = 0$. Segue que $x \in Z(K) \cap V^{\perp}$.

Portanto, $Z(K_V) = (V^{\perp} \cap Z(K)) + I$. Usando Proposição 8 item c), podemos extender o resultado para o subespaço U de $H^2(L, \mathbb{F})$.

■

3.3 Ação de $Aut(L)$ em $H^2(L, \mathbb{F})$

Sejam $\phi \in Aut(L)$ e $\theta \in H^2(L, \mathbb{F})$. Defina a ação de $Aut(L)$ em $H^2(L, \mathbb{F})$ por $\phi.\theta(x, y) = \theta(\phi(x), \phi(y))$. Se $\nu : L \to V$ é uma aplicação linear então $\phi.\nu([x, y]) = \nu([\phi(x), \phi(y)]) = \nu(\phi([x, y]))$ e $\phi.\nu \in B^2(L, \mathbb{F})$, ou seja, a ação está bem definida em $H^2(L, \mathbb{F})$.

Afirmação 1. *Sejam $U =< \bar{\theta}_1, ..., \bar{\theta}_s >$ e $W =< \bar{\eta}_1, ..., \bar{\eta}_s >$ subespaços de $H^2(L, \mathbb{F})$ tais que $U^{\perp} \cap Z(L) = W^{\perp} \cap Z(L)$. Então $L_U \cong L_W$ se, e somente se, existe $\phi \in Aut(L)$ tal que $U =< \phi.\bar{\eta}_1, ..., \phi.\bar{\eta}_s >$.*

Prova: Lema 3 do artigo

Corolário 1. *O tipo de isomorfismo de L_U independe da base de U escolhida.*

Afirmação 2. *Seja $U =< \bar{\theta}_1, ..., \bar{\theta}_s >$ subespaço de $H^2(L, \mathbb{F})$ tal que $U^{\perp} \cap Z(L) = 0$. Então L_U não possuiu componente central se, e somente se, $\{\bar{\theta}_1, ..., \bar{\theta}_s\}$ são linearmente independentes.*

Prova: Lema 4 do artigo

Definição 9. Um subespaço U de $H^2(L, \mathbb{F})$ é dito **permissível** se $U^{\perp} \cap Z(L) = 0$.

Afirmação 3. *Sejam $U =< \bar{\theta}_1, ..., \bar{\theta}_s >$ um subespaço permissível de $H^2(L, \mathbb{F})$, $L_U = L \oplus V$ e $\{v_1, ..., v_s\}$ uma base de V. Então $V = \{\sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)v_i, x, y \in L\}$.*

Prova: Suponha que exista $z \in V - \{\sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)v_i, x, y \in L\}$. Então $z \notin L_U'$ com $z \in Z(L_u)$. Logo, $< y >$ é uma componente central de L_U. O que não acontece pois U é permissível.

Resumo: Seja U um espaço permissível de dimensão s e V um espaço vetorial de dimensão s. Sejam $\{\theta_1, ..., \theta_s\}$, $\{v_1, ..., v_s\}$ bases de U e V, respectivamente. Então $L_U = L \oplus V$ com a operação $[x + u, y + w]_U = [x, y]_L + \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y)v_i$ para $x, y \in L$ e $u, w \in V$ é uma álgebra de Lie de dimensão $dim(L) + s$ que não possui componente central.

4 Automorfismos de L_U

4.1 Levantamento de $(Aut(L))_U$ para $Aut(L_u)$

Seja $U =< \bar{\theta}_1, ..., \bar{\theta}_s >$ um espaço permissível de $H^2(L, \mathbb{F})$ e $(Aut(L))_U$ o estabilizador de U sob a ação de $Aut(L)$. Usando a afirmação 3 podemos escrever os elementos de V da forma $u = (\sum_{i=1}^{s} \theta_i(x,y)v_i)$, com $x, y \in L$. Para cada $\alpha \in (Aut(L))_U$ defina $\alpha^* : L_U \to L_U$ por $\alpha^*(x+u) = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{s}(\alpha.\theta_i)(x,y)v_i = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{s} \theta_i(\alpha(x), \alpha(y))v_i$.

Afirmação 4. *α^* está bem definida e $\alpha^* \in Aut(L_U)$*

Prova: Suponha que $u = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(a,b)v_i = \sum_{i=1}^{s} \beta_i v_i$, com $\beta_i \in \mathbb{F}$. Como $\alpha \in (Aut(L))_U$ então $\alpha.\theta_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij}\theta_j$. Assim,

- $\alpha^*(x+u) = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{s}(\alpha.\theta_i)(a,b)v_i$
$= \alpha(x) + \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij}\theta_j)(a,b)v_i$
$= \alpha(x) + \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij}\theta_j(a,b))v_i$
$= \alpha(x) + \sum_{i=1}^{s}(\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij}\beta_j)v_i,$ *(que depende somente de $x+u$).*

Para checar que α^* é um L-homomorfismo considere $x, y \in L$ e $u, w \in V$ tais que $u = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x_1,x_2)v_i$ e $w = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(y_1,y_2)v_i$.

- $[\alpha^*(x+u), \alpha^*(y+w)] = [\alpha(x) + \sum_{i=1}^{s} \alpha.\theta_i(x_1,x_2)v_i, \alpha(y) + \sum_{i=1}^{s} \alpha.\theta_i(y_1,y_2)v_i]$
$= [\alpha(x), \alpha(y)]_L + \sum_{i=1}^{s} \theta_i(\alpha(x), \alpha(y))v_i$
$= [\alpha(x), \alpha(y)]_L + \sum_{i=1}^{s} \alpha.\theta_i(x,y)v_i$

- $\alpha^*([x+u, y+w]) = \alpha^*([x,y])$
$= \alpha^*([x,y]_L + \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x,y)v_i)$
$= \alpha[x,y]_L + \sum_{i=1}^{s} \alpha.\theta_i(x,y)v_i$
$= [\alpha(x), \alpha(y)]_L + \sum_{i=1}^{s} \alpha.\theta_i(x,y)v_i.$

- α^* é um isomorfismo pois $(\alpha^*)^{-1} = (\alpha^{-1})^*$ ■

4.2 Descrição de L_U

Se $\tau \in Aut(L_U)$ então $\tau(V) \subseteq V$, pois V é o centro de L_U. Então τ_V, a restrição de τ à V é um automorfismo de V.

Se $x \in L$ então $\tau(x)$ pode ser escrito como $\tau_L(x) + \varphi_\tau(x)$, com $\tau_L(x) \in L$ e $\varphi_\tau(x) \in V$.

Assim $\tau(x+u) = \tau(x) + \tau(u) = \tau_L(x) + \varphi_\tau(x) + \tau_V(u)$. Isso nos permite definir duas aplicações $\tau_L : L \to L$ e $\varphi_\tau : L \to V$.

Afirmação 5. *Sejam $\tau \in Aut(L_U)$ e τ_L, φ_τ como definidas acima, então:*

a) $\tau_L \in Aut(L)$;

b) φ_τ é uma aplicação linear;

c) $\Psi : Aut(L_U) \to Aut(L)$ é um homomorfismo

Prova: Sejam $x, y \in L$. Então

$$\begin{aligned} \tau_L(x+y) + \varphi_\tau(x+y) &= \tau(x+y) \\ &= \tau(x) + \tau(y) \\ &= \tau_L(x) + \varphi_\tau(x) + \tau_L(y) + \varphi_\tau(y) \end{aligned}$$

Logo, $\tau_L(x+y) = \tau_L(x) + \tau_L(y)$ e $\varphi_\tau(x+y) = \varphi(x) + \varphi_\tau(y)$. Verificando que φ_τ e τ_L são aplicações lineares.

τ é um automorfismo de L_U então temos a igualdade $[\tau(x), \tau(y)]_U = \tau([x,y]_U)$. Desenvolvendo ambos os lados:

$$
\begin{aligned}
[\tau(x),\tau(y)]_U &= [\tau_L(x)+\varphi_\tau(x),\tau_L(y)+\varphi_\tau(y)]_U\\
&= [\tau_L(x),\tau_L(y)]_U\\
&= [\tau_L(x),\tau_L(y)]_L+\textstyle\sum_{i=1}^s \theta_i(x,y)v_i\\
\tau([x,y]_U) &= \tau([x,y]_L+\textstyle\sum_{i=1}^s \theta_i(x,y)v_i)\\
&= \tau_L([x,y]_L)+\varphi_\tau([x,y]_L)+\tau_V(\textstyle\sum_{i=1}^s \theta_i(x,y)v_i))
\end{aligned}
$$

Então $\tau_L([x,y]_L)=[\tau_L(x),\tau_L(y)]_L$.

Para concluirmos que τ_L é um automorfismos podemos exibir sua inversa:

$x=\tau\tau^{-1}(x)=\tau^{-1}(\tau_L(x)+\varphi_\tau(x))=\tau_L^{-1}\tau_L(x)+\tau_V^{-1}(\varphi_\tau(x))+\tau^{-1}(\varphi_\tau(x))$. Como τ^{-1} é um automorfismo e $\varphi_\tau(x)\in V$ temos $\tau_L^{-1}\tau_L(x)=x$.

c) $\tau\sigma(x+u)=\tau(\sigma_L(x)+\varphi_\sigma(x)+\tau_V(u))=\tau_L(\sigma_L(x))+\varphi_\tau(\sigma_L(x))+\tau_V(\varphi_\sigma(x)+\sigma_V(u))$. Então $\Psi(\tau\sigma)=\Psi(\tau)\Psi(\sigma)$■

Afirmação 6. $Img(\Psi)\cong(Aut(L))_U$

Prova: Se $\alpha\in(Aut(L))_U$ então $\alpha^*\in Aut(L_U)$ e $\Psi(\alpha^*)=\alpha$.Logo, $\alpha\in Img(\Psi)$.

Seja $\alpha\in Img(\Psi)$ então existe $\tau\in Aut(L_U)$ tal que $\tau_L=\alpha$. Desenvolvendo a equação $\tau([x+u,y+w]_U)=[\tau(x+u),\tau(y+w)]_U$:

$$
\begin{aligned}
\tau([x+u,y+w]_U) &= \tau([x,y]_L+\textstyle\sum_{i=1}^s \theta_i(x,y)v_i)\\
&= \tau_L([x,y]_L)+\varphi_\tau([x,y]_L)+\textstyle\sum_{i=1}^s \theta_i(x,y)\tau_V(v_i)\\
[\tau(x+u),\tau(y+w)]_U &= [\tau_L(x)+\varphi_\tau(x)+\tau_V(u),\tau_L(y)+\varphi_\tau(y)+\tau_V(w)]_U\\
&= [\tau_L(x),\tau_L(y)]_L+\textstyle\sum_{i=1}^s \theta_i(\tau_L(x),\tau_L(y))v_i\\
&= [\tau_L(x),\tau_L(y)]_L+\textstyle\sum_{i=1}^s (\tau_L.\theta_i)(x,y)v_i
\end{aligned}
$$

Se escrevermos $\tau_V(v_i)=\sum_{j=1}^s \lambda_{ij}v_j,\lambda_{ij}\in\mathbb{F}$ teremos $\tau_L.\theta_k=\sum_{t=1}^s \lambda_{tk}\theta_k$ em $H^2(L,\mathbb{F})$ e $\tau_L\in(Aut(L))_U$■

Lema 1. *Seja $X=\{x_1,...,x_d\}$ um conjunto mínimo de geradores de L como álgebra de Lie* ***nilpotente*** *e $\tau,\sigma\in ker(\Psi)$. Então $\sigma_V(\varphi_\tau(x_i))=x_i, 1\le i\le d$.*

Prova: Se $\sigma\in ker(\Psi)$ então σ fixa $[x_i,x_j]_U$: $\sigma([x_i,x_j]_U)=[\sigma(x_i),\sigma(x_j)]=[x_i+\varphi_{\sigma(x_i)},x_j+\varphi_{\sigma(x_j)}]=[x_i,x_j]_U$. Como $\varphi_\sigma(x_i)\in V$ então $\varphi_\sigma(x_i)=\sum[x_{i_1},...,.x_{i_t}]$ é fixo por σ e, em particular, por σ_V.

Afirmação 7. *Seja $X=\{x_1,...,x_d\}$ um conjunto mínimo de geradores de L como álgebra de Lie. Então $ker(\Psi)\cong Hom(\mathcal{X},V)$, $Hom(\mathcal{X},V)$ considerado como grupo abeliano, com $\mathcal{X}$ sendo o espaço gerado por X.*

Prova: Defina $\Phi: ker(\Psi)\to Hom(X,V)$ por $\Phi(\tau)=\varphi_\tau$. Se $\sigma,\tau\in Aut(L_U)$, então $\sigma\tau(x_j)=\sigma(x_j+\varphi_\tau(x_i))=x_j+\varphi_\sigma(x_j)+\sigma_V(\varphi_\tau(x_j))\overset{Lema1}{=}x_j+\varphi_\sigma(x_j)+\varphi_\tau(x_j)$.

Se $\Phi(\tau)=0$ então $\tau(x)=x,\forall x\in L$ e $\tau=Id_L$. Sejam $\phi_{ij}:X\to V$ dada por $\phi_{ij}(x_i)=v_j$ e $\phi_i j(x_k)=0$ se $i\neq k$, e $\beta\in\mathbb{F}$ um elemento primitivo. Então $Hom(X,V)_{\mathbb{F}}=<\beta^k\phi_{ij},1\le k\le p-1,1\le i\le d,1\le j\le s>$. Defina $\tau_{ij}^k:L_U\to L_U$ por $\tau_{ij}^k(x_i)=x_i+\beta^k v_j$ e $\tau_{ij}^k(x_t)=x_t$. $\Phi(\tau_{ij}^k(x_t)=\beta^k\phi_{ij}$. Portanto Φ é bijetora.

Corolário 2. $ker(\Psi)$ *é gerado por* τ_{ij}^k.