1 Extensões de Álgebras de Lie

1.1 Definição

Nessa seção definiremos extensões de álgebras de Lie e alguns grupos de cohomologia.

Definição 1. Sejam K,H e L álgebras de Lie. L é dita uma extensão de K por H se existe uma sequência exata de álgebras de Lie,

$$0 \to H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{s} K \to 0.$$

- se existe um ideal S de L tal que se $L = S \oplus Ker(s)$ então a extensão é **trivial**;
- se existe uma subálgebra S de L tal que $L = S \oplus Ker(s)$ então a extensão é **split**;
- se $Ker(s)$ está contido no centro de L, denotado por $Z(L)$, então L é uma extensão **central**.

1.2 Extensões Usando Cohomologia

Definição 2. Sejam K e I álgebras. Diremos que K age sobre I se temos um morfismo de álgebras $\psi : K \to Der(I)$. Neste caso, denotaremos a ação de K sobre I por

$$[a, k] := \psi(k)(a), k \in K, a \in I.$$

O morfismo ψ pode ser visto como uma representação de K em $\mathfrak{gl}(I)$. Então K age sobre I se, e somente se, I possui estrutura de K-módulo.

Usaremos a notação $ad : K \to Der(I)$ para a derivação definida pelo produto $ad_k(a) = [a, k]$, para todo $k \in K$ e $a \in I$. Quando necessário usaremos a notação $ad^K : K \to Der(I)$ para explicitar o domínio K.

Exemplo 1. Seja L uma álgebra de Lie. Denote a representação adjunta de L por $ad^L : L \to Der(L)$. Suponha que L possui um ideal abeliano I e seja $K = L/I$. Defina $ad^K : K \to Der(I)$ por $ad^K_{x+I}(a) = [a, x]$ para todo $x \in L$ e $a \in I$. Como I é abeliano então ad^K está bem definida e é uma representação de K em $Der(I)$. Portanto, se L possui um ideal abeliano I então L/I age sobre I. Nesse caso diremos que a ação é induzida pela representação adjunta.

Definição 3. Sejam K uma álgebra e I um espaço vetorial tais que I é um K-módulo. Denote por $C^2(K, I)$ o espaço das aplicações bilineares alternadas de $K \times K$ em I.

- Se $\theta \in C^2(K, I)$ é tal que

  $$\theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]) = [\theta(y, z), x] + [\theta(z, x), y] + [\theta(x, y), z],$$

  para todo $x, y, z \in K$, então θ será chamado de **cociclo** e o espaço dos cocilos será denotado por $Z^2(K, I)$, que é o segundo grupo de cohomologia.
- Suponha que θ é um cociclo. Se existe uma aplicação linear $T : K \to I$ tal que

  $$\theta(k, h) = T([h, k]) + [T(h), k] - [T(k), h],$$

  para todo $k, h \in K$ então θ será chamado de **cofronteira**. O espaço das cofronteiras será denotado por $B^2(K, I)$.

- Denote $H^2(K,I) = Z^2(K,I)/B^2(K,I)$ o espaço quociente dos cociclos pelas cofronteiras.

- O primeiro grupo de cohomologia de K e I é definido por

$$Z^1(K,I) = \{\nu \in Hom(K,I) \mid \nu([k,h]_K) = [\nu(k),h] - [\nu(h),k], \text{ para todo } k,h \in K\}.$$

A seguir vamos apresentar como definir extensões de uma álgebra de Lie K a partir de cociclos de K em I. Também provaremos que toda álgebra de Lie com ideal abeliano pode ser caracterizada como uma extensão desse tipo.

Proposição 1. *Sejam K uma álgebra de Lie e I um espaço vetorial tais que K age sobre I. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ e defina a álgebra $K_\theta = K \oplus I$ com o produto*

$$[x+a, y+b]_\theta = [x,y]_K + \theta(x,y) + [a,y] - [b,x], \text{ para } x,y \in K \text{ e } a,b \in I. \tag{1}$$

Então,

1. *K_θ é uma álgebra de Lie;*

2. *K_θ é uma extensão de K por I.*

Prova: 1) Sejam $x,y,z \in K$ e $a,b,c \in I$. Então

- $[x+a, x+a]_\theta = [x,x]_K + \theta(x,x) + [a,x] - [a,x] = 0.$

- Usando a definição do produto em K_θ obtemos

$$\begin{aligned}[x+a,[y+b,z+c]_\theta]_\theta = {} & [x,[y,z]_K]_K + \theta(x,[y,z]) - [\theta(y,z),x] \\ & + [a,[y,z]_K] - [[b,z],x] + [[c,y],x].\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever a expressão

$$[x+a,[y+b,z+c]_\theta]_\theta + [y+b,[z+c,x+a]_\theta]_\theta + [z+c,[x+a,y+b]_\theta]_\theta$$

como a soma das parcelas

$$\begin{gathered}[x,[y,z]_K]_K + [y,[z,x]_K]_K + [z,[x,y]_K]_K \\ \theta(x,[y,z]) + \theta(y,[z,x]) + \theta(z,[x,y]) - [\theta(y,z),x] - [\theta(z,x),y] - [\theta(x,y),z] \\ [a,[y,z]_K] + [b,[z,x]_K] + [c,[x,y]_K] \\ [[a,z],y] - [[a,y],z] + [[b,x],z] - [[b,z],x] + [[c,y],x] - [[c,x],y].\end{gathered}$$

A primeira parcela é zero pela identidade de Jacobi em K; pela definição de cociclo a segunda também é zero; e a soma das duas últimas é zero pois a ação de K em I é definida por uma representação. Portanto, $[x+a,[y+b,z+c]_\theta]_\theta + [y+b,[z+c,x+a]_\theta]_\theta + [z+c,[x+a,y+b]_\theta]_\theta = 0$.

2) Seja $i : I \to L$ a inclusão e $\pi : L \to K$ a projeção natural. Então i e π são morfismos de álgebras de Lie e obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} K \to 0.$$

■

Proposição 2. *Se L é uma álgebra de Lie e I um ideal abeliano de L com $K = L/I$ então existe $\theta \in Z^2(K, I)$ tal que $L \cong K_\theta$.*

Prova: Considere a ação de K em I induzida pela representação adjunta de L em I. Então I possui estrutura de K-módulo e podemos definir os grupos de cohomologia de K em I.

Seja π a projeção natural de L em K e $\epsilon : K \to L$ uma aplicação linear injetora satisfazendo $\pi(\epsilon(x)) = x$, para todo $x \in K$. Observe que pela definição da ação de K em I temos $[a, x] = [a, \epsilon(x)]_L$ para todo $a \in I$ e $x \in K$.

Defina a aplicação bilinear $\theta : K \times K \to I$ por

$$\theta(x, y) = [\epsilon(x), \epsilon(y)]_L - \epsilon([x, y]_K) \text{ para todo } x, y \in K.$$

Observe que $\pi(\theta(x, y)) = 0$, para todo $x, y \in K$ então θ é uma aplicação de $K \times K$ em I. Como ela é definida por comutadores ela é bilinear.

Vamos verificar que θ é um cociclo. Se $x, y, z \in K$ é imediato que $\theta(x, y) = -\theta(y, x)$ e $\theta(x, x) = 0$. Por definição temos, para todo $x, y, z \in K$,

$$\theta(x, [y, z]) = [\epsilon(x), \epsilon([y, z]_K)]_L - \epsilon([x, [y, z]_K]_K).$$

Defina

$$X = \theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]).$$

Então

$$\begin{aligned} X = [\epsilon(x), \epsilon([y, z]_K)]_L - \epsilon([x, [y, z]_K]_K) + [\epsilon(y), \epsilon([z, x]_K)]_L - \epsilon([y, [z, x]_K]_K) \\ + [\epsilon(z), \epsilon([x, y]_K)]_L - \epsilon([z, [x, y]_K]_K). \end{aligned}$$

Pela identidade de Jacobi em K obtemos

$$X = [\epsilon(x), [\epsilon([y, z]_K)]_L + [\epsilon(y), [\epsilon([z, x]_K)]_L + [\epsilon(z), [\epsilon([x, y]_K)]_L. \tag{2}$$

Por outro lado,

$$[\theta(x, y), z] = [[\epsilon(x), \epsilon(y)]_L - \epsilon([x, y]_K), z]_L = [[\epsilon(x), \epsilon(y)]_L - \epsilon([x, y]_K), \epsilon(z)].$$

Defina

$$Y = [\theta(x, y), z] + [\theta(y, z), x] + [\theta(z, x), y].$$

Similarmente a equação (2) obtemos

$$Y = [\epsilon(x), [\epsilon([y, z]_K)]_L + [\epsilon(y), [\epsilon([z, x]_K)]_L + [\epsilon(z), [\epsilon([x, y]_K)]_L. \tag{3}$$

Comparando as equações (2) e (3) otemos que θ é um cociclo.

Falta mostrar que K_θ e L são isomorfos. Como ϵ é injetora então todo elemento de $u \in L$ pode ser escrito de forma única como $u = \epsilon(u+I)+a$, com $a \in I$. A partir dessa decomposição defina a aplicação linear $\zeta : L \to L_\theta = K \oplus I$ por

$$\zeta(u) = (u + I) + a_u.$$

Sejam $u, v \in L$ então existem $a, b \in I$ tais que $u = \epsilon(u+I) + a$ e $v = \epsilon(v+I) + b$. Escreva

$$[u,v]_L = \epsilon([u,v]_L + I) + a_{[u,v]_L} \text{ onde } a_{[u,v]_L} \in I. \tag{4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [u,v]_L &= [\epsilon(u+I) + a, \epsilon(v+I) + b]_L \\ &= [\epsilon(u+I), \epsilon(v+I)]_L + [a, \epsilon(v+I)]_L - [b, \epsilon(u+I)]_L \\ &= [\epsilon(u+I), \epsilon(v+I)]_L + [a, v+I] - [b, u+I]. \end{aligned} \tag{5}$$

Comparando (4) e (5) obtemos

$$\begin{aligned} a_{[u,v]_L} &= [\epsilon(u+I), \epsilon(v+I)]_L - \epsilon([u,v]_L + I) + [a, v+I]_L - [b, u+I]_L \\ &= [\epsilon(u+I), \epsilon(v+I)]_L - \epsilon([u+I, v+I]_K) + [a, v+I]_L - [b, u+I]_L. \end{aligned}$$

Segue da definição de ζ e das contas anteriores

$$\begin{aligned} \zeta([u,v]_L) &= ([u,v]_L + I) + a_{[u,v]_L} \\ &= ([u,v]_L + I) + [\epsilon(u+I), \epsilon(v+I)]_L - \epsilon([u+I, v+I]_K) \\ &\quad + [a, v+I] - [b, u+I] \\ &= [u+I, v+I]_K + \theta(u+I, v+I) + [a, v+I] - [b, u+I] \\ &= [(u+I) + a, (v+I) + b]_\theta \\ &= [\zeta(u), \zeta(v)]_\theta. \end{aligned}$$

Então ζ é um morfismo de álgebras de Lie.

Sejam $u, v \in L$ tais que $\zeta(u) = \zeta(v)$. Então $a = b$ e $u + I = v + I$. Logo,

$$u = \epsilon(u+I) + a = \epsilon(v+I) + b = v,$$

e ζ é injetora. Para cada $y \in L_\theta = K \oplus I$ escreva $y = (u+I) + a$, com $u \in L$ e $a \in I$. Então $\zeta(u+a) = y$. Portanto ζ é um isomorfismo e $L \cong L_\theta$.

■

Proposição 3. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Sejam $\theta \in Z^2(K, I)$ e $\nu \in B^2(K, I)$. Então*

1. *K_θ é isomorfo a $K_{\theta+\nu}$;*
2. *K_ν é uma extensão split de K por I.*

Prova: 1) Pela definição de $B^2(K, I)$ existe $T : K \to I$ uma aplicação linear tal que $\nu(x,y) = T([x,y]_K) - [T(x), y] + [T(y), x]$ para todo $x, y \in K$.

Sejam $x \in K$ e $a \in I$. Defina a aplicação linear $\sigma : K_\theta \to K_{\theta+\nu}$ por $\sigma(x+a) = x + T(x) + a$. Então,

$$\begin{aligned} \sigma([x+a, y+b]_\theta) &= \sigma([x,y]_K + \theta(x,y) + [a,y] - [b,x]) \\ &= [x,y]_K + \theta(x,y) + [a,y] - [b,x] + T([x,y]). \end{aligned}$$

Substituindo $T([x,y]_K) = \nu(x,y) + [T(x), y] - [T(y), x]$ na última equação temos

$$\begin{aligned}\sigma([x+a,y+b]_\theta) &= [x,y]_K+\theta(x,y)+[a,y]-[b,x]+\nu(x,y)+[T(x),y]-[T(y),x]\\ &= [x,y]_K+(\theta+\nu)(x,y)+[a+T(x),y]-[b+T(y),x]\\ &= [x+a+T(x),y+b+T(y)]_{\theta+\nu}\\ &= [\sigma(x+a),\sigma(y+b)]_{\theta+\nu}.\end{aligned}$$

Então σ é um morfismo de álgebras de Lie. Vamos verificar que ela é um isomorfismo. Para mostrar que σ é injetora considere $x,y\in K$ e $a,b\in I$ tais que

$$\sigma(x+a)=\sigma(y+b).$$

Então $x+a+T(x)=y+b+T(y)$. Reescreva essa equação como $x-y=b+T(y)-a-T(x)$. Como a soma de K e I é direta em K_θ temos $x-y=0$. Logo, $T(x)=T(y)$ o que implica $a=b$.

Dado $y+b\in K_{\theta+\nu}$ seja $x=y$ e $a=b-T(y)$. Então $\sigma(x+a)=y+b$. Portanto, σ é sobrejetor.

2) Suponha que θ é o cociclo trivial, ou seja, $\theta(x,y)=0$ para todo $x,y\in K$. Se $x,y\in K$ então

$$[x,y]_\theta=[x,y]_K\in K.$$

Logo K é uma subálgebra de K_θ. Pelo item 2 da proposição anterior temos que K_θ é uma extensão de K por I e $K_\theta=K\oplus I$ implica que essa extensão é split. Como $\nu\in\theta+B^2(K,I)$ então temos $K_\nu\cong K_\theta$ pelo item anterior. Então K_ν é uma extensão split de K por I.

■

2 Derivações de Extensões Usando Cohomologia

2.1 Pares compatíveis

Definição 4. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Seja $ad:K\to Der(I)$ dada por $ad_k(a)=[a,k]$, para todo $k\in K$ e $a\in I$. O par $(\alpha,\beta)\in Der(K)\oplus Der(I)$ é dito compatível se

$$\beta ad_k^K=ad_k^K\beta+ad_{\alpha(k)}^K,\ \text{para todo } k\in K. \tag{6}$$

O conjunto formado pelos pares compatíveis será denotado por $Comp(K,I)$.

Podemos escrever a equação acima usando o comutador de aplicações lineares. Temos

$$ad_k^K\beta-\beta ad_k^K=-ad_{\alpha(k)}^K,$$

então (6) é equivalente à

$$[ad_k^K,\beta]=-ad_{\alpha(k)}^K. \tag{7}$$

Usando a notação da representação adjunta temos que (α,β) é compatível se

$$ad_\beta^{Der(I)}ad_k^K=-ad_{\alpha(k)}^K \text{ para todo } k\in K,$$

que pode ser representado com o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "ad^K"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Der(I) \arrow[d, "ad_\beta^{Der(I)}"] \\ K \arrow[r, "ad^K"] & Der(I). \end{tikzcd}$$

Proposição 4. *Sejam K e I álgebras de Lie sobre $\mathbb{F}$ tais que K age sobre I. Então $Comp(K, I)$ é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$.*

Prova: Sejam $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in Comp(K, I)$ e $ad : K \to Der(I)$ dada por $ad_k(a) = [k, a]$, para todo $k \in K$ e $a \in I$.

Vamos verificar que $Comp(K, I)$ é um subespaço vetorial usando a equação (7). Se $\lambda \in \mathbb{F}$ e $k \in K$ então

$$\begin{aligned}[ad_k, \beta + \lambda\beta'] &= [ad_k, \beta] + \lambda[ad_k, \beta'] \\ &= -ad_{\alpha(k)} - \lambda ad_{\alpha'(k)} \\ &= -ad_{(\alpha+\lambda\alpha')(k).}\end{aligned}$$

O que implica $(\alpha, \beta) + \lambda(\alpha', \beta') \in Comp(K, I)$.

Pela definição de par compatível temos

$$\beta' ad_k = ad_k\beta' + ad_{\alpha'(k)}.$$

Então

$$\begin{aligned}\beta(\beta' ad_k) &= \beta(ad_k\beta') + \beta(ad_{\alpha'(k)}) \\ &= ad_k\beta\beta' + ad_\alpha\beta' + ad_{\alpha'}\beta + ad_{\alpha\alpha'}.\end{aligned}$$

Analogamente

$$\beta'(\beta ad_k) = ad_k\beta'\beta + ad_{\alpha'}\beta + ad_\alpha\beta' + ad_{\alpha'\alpha}.$$

Então

$$[\beta, \beta']ad_k = \beta(\beta' ad_k) - \beta'(\beta ad_k) = ad_k[\beta, \beta'] + ad_{[\alpha,\alpha']}.$$

Segue que $[(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')] \in Comp(K, I)$.

■

Se a álgebra I é abeliana podemos calcular a álgebra dos pares compatíveis como um anulador de uma ação de $Der(K) \oplus Der(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$. Vamos definir a ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $Hom(K, Der(I))$.

Definição 5. Sejam K e I espaços vetoriais. Se $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ e $T \in Hom(K, \mathfrak{gl}(I))$ então definimos a ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ sobre $Hom(K, \mathfrak{gl}(I)))$ por

$$(\alpha, \beta) \cdot T = ad_\beta T + T\alpha. \tag{8}$$

A aplicação $(\alpha, \beta) \cdot T$ é linear pois é combinação linear de composições de aplicações lineares. Vamos verificar a ação do produto de elementos de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$.

Sejam $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$. Pela definição da ação

$$(\alpha', \beta') \cdot T = ad_{\beta'}T + T\alpha'.$$

Então

$$(\alpha, \beta) \cdot ((\alpha', \beta') \cdot T) = ad_\beta ad_{\beta'}T + ad_{\beta'}T\alpha + ad_\beta T\alpha' + T\alpha'\alpha.$$

Analogamente,

$$(\alpha', \beta') \cdot ((\alpha, \beta) \cdot T) = ad_{\beta'}ad_\beta T + ad_\beta T\alpha' + ad_{\beta'}T\alpha + T\alpha\alpha'.$$

Segue que,

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\cdot((\alpha',\beta')\cdot T)-(\alpha',\beta')\cdot((\alpha,\beta)\cdot T) &= ad_\beta ad_{\beta'}T-ad_{\beta'}ad_\beta T+T\alpha\alpha'-T\alpha'\alpha\\ &= [ad_\beta,ad_{\beta'}]T+T[\alpha,\alpha'].\end{aligned}$$

Portanto,

$$[(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')]\cdot T=([\alpha,\alpha'],[\beta,\beta'])\cdot T.$$

Proposição 5. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a ação definida em (8) restrita a álgebra $Der(K)\oplus Der(I)$. Seja $ad^K : K\to Der(I)$ dada por $ad^K_k(a)=[a,k]$ para $k\in K$ e $a\in I$. Então $Comp(K,I)=Ann_{Der(K)\oplus Der(I)}(ad^K)$.*

Prova: Basta considerar $ad_\beta=ad_\beta^{Der(I)}$ e $T=ad^K$ na Definição (8).

■

2.2 Pares induzidos

Definição 6. Sejam K e I espaços vetoriais. Dados $(\alpha,\beta)\in\mathfrak{gl}(K)\oplus\mathfrak{gl}(I)$, $\theta\in C^2(K,I)$ e $h,k\in K$, defina a ação de $\mathfrak{gl}(K)\oplus\mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K,I)$ por

$$(\alpha,\beta)\cdot\theta(h,k)=\beta(\theta(h,k))-\theta(\alpha(k),h)-\theta(k,\alpha(h)). \tag{9}$$

Omitiremos a demostração que essa ação está bem definida pois ela é semelhante a demonstração que a ação de $\mathfrak{gl}(K)\oplus\mathfrak{gl}(I)$ sobre $Hom(K,\mathfrak{gl}(I))$ está bem definida.

Proposição 6. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $C^2(K,I)$ definida em (9). Então os espaços $Z^2(K,I)$ e $B^2(K,I)$ são invariantes por essa ação.*

Prova: Sejam $k,h,l\in K$, $(\alpha,\beta)\in Comp(K,I)$ e $\theta\in Z^2(K,I)$. Por definição e por α ser uma derivação temos

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\cdot\theta(k,[h,l]) &= \beta(\theta(k,[h,l]))-\theta(\alpha(k),[h,l])-\theta(k,\alpha([h,l]))\\ &= \beta(\theta(k,[h,l]))-\theta(\alpha(k),[h,l])-\theta(k,[\alpha(h),l])-\theta(k,[h,\alpha(l)]).\end{aligned}$$

Se

$$X=(\alpha,\beta)\cdot\theta(k,[h,l])+(\alpha,\beta)\cdot\theta(h,[l,k])+(\alpha,\beta)\cdot\theta(l,[k,h]),$$

então

$$\begin{aligned}X=\beta(\theta(k,[h,l]))+\beta(\theta(h,[l,k]))+\beta(\theta(l,[k,h]))&\\ -\theta(\alpha(k),[h,l])-\theta(\alpha(h),[l,k])-\theta(\alpha(l),[k,h])&\\ -\theta(k,[\alpha(h),l])-\theta(h,[\alpha(l),k])-\theta(l,[\alpha(k),h])&\\ -\theta(k,[h,\alpha(l)])-\theta(h,[l,\alpha(k)])-\theta(l,[k,\alpha(h)])&\end{aligned}$$

Usando a definição de cociclo obtemos

$$\begin{aligned}X=\beta([\theta(k,h),l])+\beta([\theta(h,l),k])+\beta([\theta(l,k),h])&\\ -[\theta(\alpha(k),h),l]-[\theta(\alpha(h),l),k]-[\theta(\alpha(l),k),h]&\\ -[\theta(k,\alpha(h)),l]-[\theta(h,\alpha(l)),k]-[\theta(l,\alpha(k)),h]&\\ -[\theta(k,h),\alpha(l)]-[\theta(h,l),\alpha(k)]-[\theta(l,k),\alpha(h)].&\end{aligned}$$

Como (α, β) é um par compatível então podemos substituir na equação acima as igualdades

$$\beta([\theta(k,h),l]) = [\beta(\theta(k,h)),l] + [\theta(k,h)),\alpha(l)];$$
$$\beta([\theta(h,l),k]) = [\beta(\theta(h,l)),k] + [\theta(h,l)),\alpha(k)];$$
$$\beta([\theta(l,k),h]) = [\beta(\theta(l,k)),h] + [\theta(l,k)),\alpha(h)].$$

obtendo

$$\begin{aligned} X = {} & [\beta(\theta(k,h)),l] + [\beta(\theta(h,l)),k] + [\beta(\theta(l,k)),h] \\ & - [\theta(\alpha(k),h),l] - [\theta(\alpha(h),l),k] - [\theta(\alpha(l),k),h] \\ & - [\theta(k,\alpha(h)),l] - [\theta(h,\alpha(l)),k] - [\theta(l,\alpha(k)),h], \end{aligned}$$

o que implica, usando a definição da ação,

$$X = [(\alpha,\beta)\cdot\theta(h,l),k] + [(\alpha,\beta)\cdot\theta(l,k),h] + [(\alpha,\beta)\cdot\theta(k,h),l].$$

Então $(\alpha, \beta)\cdot\theta \in Z^2(K, I)$.

Agora suponha que $\theta \in B^2(K, I)$. Então existe uma aplicação linear $\nu : K \to I$ tal que

$$\theta(k,h) = \nu([k,h]) - [\nu(k),h] - [k,\nu(h)]. \tag{10}$$

Seja $Y = (\alpha, \beta)\cdot\theta(k, h)$. Pela equação (10)

$$Y = (\alpha,\beta)\cdot(\nu([k,h]) - (\alpha,\beta)\cdot([\nu(k),h]) - (\alpha,\beta)\cdot([k,\nu(h)]).$$

Aplicando a definição da ação em cada termo da equação acima obtemos

$$\begin{aligned} Y = {} & \beta(\nu([k,h])) - \nu([\alpha(k),h]) - \nu([k,\alpha(h)]) \\ & - \beta([\nu(k),h]) + [\nu(\alpha(k)),h] + [\nu(k),\alpha(h)] \\ & - \beta([k,\nu(h)]) + [\alpha(k),\nu(h)] + [k,\nu(\alpha(h))], \end{aligned}$$

podemos usar que α é derivação e (α, β) é um par compatível para obter

$$\begin{aligned} Y = {} & \beta\nu([k,h]) - \nu\alpha([k,h]) \\ & - [\beta\nu(k),h] - [\nu(k),\alpha(h)] + [\nu\alpha(k),h] + [\nu(k),\alpha(h)] \\ & - [\beta(k),\nu(h)] - [k,\beta\nu(h)] + [\beta(k),\nu(h)] + [k,\nu\alpha(h)], \end{aligned}$$

Logo,

$$Y = (\beta\nu - \nu\alpha)[k,h] - [(\beta\nu - \nu\alpha)(k),h] + [k,(\beta\nu - \nu\alpha)(h)].$$

Se $T = \beta\nu - \nu\alpha : K \to I$ então

$$(\alpha,\beta)\cdot\theta(k,h) = T([k,h]) - [T(k),h] - [k,T(h)].$$

Portanto, $(\alpha, \beta)\cdot\theta \in B^2(K, I)$.

$\blacksquare$

Agora podemos definir uma ação de $Comp(K,I)$ em $H^2(K,I)$: sejam $\theta \in Z^2(K,I)$ e $(\alpha,\beta) \in Comp(K,I)$ então pela Proposição (6)

$$(\alpha,\beta)\cdot(\theta + B^2(K,I)) = ((\alpha,\beta)\cdot\theta) + B^2(B,I) \tag{11}$$

é uma ação bem definida.

Definição 7. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ e considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $H^2(K,I)$ definida em (11). Defina o conjunto dos pares induzidos de $Comp(K,I)$ por

$$Indu(K,I,\theta) = Ann_{Comp(K,I)}(\theta + B^2(K,I)).$$

2.3 Derivações de K_θ

Nessa seção vamos calcular as derivações da extensão K_θ a partir das derivações de K. Para isso é necessário definir um morfismo de $Der(K_\theta)$ em $Der(K)\oplus Der(I)$.

Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in H^2(K,I)$ e suponha que I, como ideal de K_θ, é invariante pela derivação $d \in Der(K_\theta)$. Sejam $P_K : K_\theta \to K$ e $P_I : K_\theta \to I$ as projeções naturais de K_θ em K e K_θ em I, respectivamente. Defina as aplicações

- $\alpha : K \to K$ por $\alpha(k) = P_K d(k)$, para todo $k \in K$;
- $\beta : I \to I$ por $\beta(a) = d(a)$, para todo $a \in I$;
- $\varphi : K \to I$ por $\varphi(k) = P_I d(k)$, para todo $k \in K$.

Portanto,

$$d(x+a) = \alpha(x) + \varphi(x) + \beta(a) \text{ para todo } a \in I \text{ e } x \in K. \tag{12}$$

Então, $\beta \in Der(I)$, $\alpha \in Der(K)$ e $\varphi \in Hom(K,I)$.

Como β é a restrição de d a subálgebra I então é imediato que β é uma derivação de I. Sejam $x,y \in K$. Pela definição de produto em K_θ temos

$$d([x,y]_\theta) = d([x,y]_K + \theta(x,y)).$$

Usando a decomposição apresentada em (12) temos

$$d([x,y]_\theta) = \alpha([x,y]_K) + \varphi([x,y]_K) + \beta(\theta(x,y)).$$

Por outro lado,

$$[d(x),y]_\theta + [x,d(y)]_\theta = [\alpha(x)+\varphi(x),y] + [x,\alpha(y)+\varphi(y)]. \tag{13}$$

Novamente, pela defínção do produto em K_θ temos

$$\begin{aligned}[d(x),y]_\theta + [x,d(y)]_\theta = {} & [\alpha(x),y]_K + [x,\alpha(y)]_K + \theta(\alpha(x),y) \\ & + \theta(y,\alpha(x)) + [\varphi(x),\alpha(y)] - [\varphi(y),\alpha(x)]. \end{aligned} \tag{14}$$

Comparando as componentes em K em (13) e (14) obtemos

$$\alpha([x,y]_K) = [\alpha(x),y]_K + [x,\alpha(y)]_K.$$

Portanto $\alpha \in Der(K)$.

Proposição 7. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in H^2(K,I)$ e suponha que I, como ideal de K_θ, é invariante por derivações. Usando a decomposição apresentada em (12) defina $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ por $\phi(d) = (\alpha, \beta)$. Então ϕ é um morfismo de álgebras de Lie*

Prova: Sejam $d, d' \in Der(K_\theta)$ e $x \in K$ tais que, para todo $x \in K$ e $a \in I$,

$$\begin{aligned} d(x+a) &= \alpha(x) + \varphi(x) + \beta(a) \\ d'(x+a) &= \alpha'(x) + \varphi'(x) + \beta'(x). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} dd'(x) &= d(\alpha'(x) + \varphi'(x)) \\ &= \alpha\alpha'(x) + \varphi(\alpha'(x)) + \beta'(\varphi'(x)). \end{aligned}$$

Segue que, $P_K dd'(x) = \alpha\alpha'(x)$. Analogamente, $P_K d'd(x) = \alpha'\alpha'(x)$. Segue que, $P_K([d,d']) = [\alpha, \alpha']$. Como β e β' são definidas pela restrição de d e d' a I é imediato que $P_I([d,d']) = [\beta, \beta']$. Portanto,

$$\phi([d,d']) = ([\alpha,\alpha'],[\beta,\beta']) = [(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')] = [\phi(d),\phi(d')].$$

∎

Teorema 1. *Sejam K e I álgebrsa de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in H^2(K,I)$ tal que I como ideal de θ é invariante por derivações. Seja $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = (\alpha, \beta)$, definida na Proposição 7. Então $Im(\phi) \leq Comp(K,I)$.*

Prova: Seja $(\alpha,\beta) \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(K_\theta)$ tal que $\phi(d) = (\alpha, \beta)$. Se $k \in K$ e $a \in I$ então

$$\begin{aligned} \beta([a,k]_\theta) &= d([a,k]_\theta) && [a,k] \in I \\ &= [d(a),k]_\theta + [a,d(k)]_\theta && d \in Der(K_\theta) \\ &= [\beta(a),k]_\theta + [a,\alpha(k)+\varphi(k)]_\theta \\ &= [\beta(a),k]_\theta + [a,\alpha(k)]_\theta && \text{pois } I \text{ é abeliano} \end{aligned}$$

∎

Teorema 2. *Seja K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $\theta \in H^2(K,I)$. Seja $K_\theta = K \oplus I$ e considere I como ideal de K_θ. Assuma que I é invariante por $Der(K_\theta)$. Seja $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = (\alpha, \beta)$. Então:*

1. *$Im(\phi) = Indu(K,I,\theta)$*
2. *$ker(\phi) \cong Z^1(K,I)$*

Prova: 1) Seja $(\alpha,\beta) \in Indu(K,I,\theta)$. Por definição temos

$$(\alpha,\beta)\cdot\theta = 0 \bmod B^2(K,I).$$

Logo, existe uma aplicação linear $T : K \to I$ tal que para todo $k,h \in K$ temos

$$\theta(\alpha(k),h) + \theta(k,\alpha(h)) + [T(k),h] - [T(h),k] = \beta(\theta(k,h)) + T([k,h]). \tag{15}$$

Suponha que $k \in K$ e $a \in I$ e defina a aplicação linear $(\alpha, \beta)^* : K_\theta \to K_\theta$ por

$$(\alpha, \beta)^*(k + a) = \alpha(k) + \beta(a) + T(k).$$

Vamos verificar que $(\alpha, \beta)^*$ é uma derivação de K_θ. Sejam $k + a, h + b \in K_\theta$ e defina

$$X = (\alpha, \beta)^*([k + a, h + b]_\theta)$$

então

$$\begin{array}{rcl} X & = & (\alpha, \beta)^*([k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]) \\ & = & \alpha([k, h]_K) + \beta(\theta(k, h)) + \beta([a, h]) - \beta([b, k]) + T([k, h]_K). \end{array}$$

Por outro lado, seja

$$Y = [(\alpha + \beta)^*(k + a), h + b]_\theta + [k + a, (\alpha + \beta)^*(h + b)]_\theta.$$

Como

$$\begin{array}{rcl} [(\alpha + \beta)^*(k + a), h + b]_\theta & = & [\alpha(k) + \beta(a) + T(k), h + b]_\theta \\ & = & [\alpha(k), h]_K + \theta(\alpha(k), h) + [\beta(a) + T(k), h] - [b, \alpha(k)] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} [k + a, (\alpha + \beta)^*(h + b)]_\theta & = & [k + a, \alpha(h) + \beta(b) + T(h)] \\ & = & [k, \alpha(h)]_K + \theta(k, \alpha(h)) + [a, \alpha(h)] - [\beta(b) + T(h), k] \end{array}$$

então

$$\begin{array}{l} Y = \alpha([k, h]_K) + \theta(\alpha(k), h) + \theta(k, \alpha(h)) \\ \qquad\qquad + [T(k), h] - [T(h), k] + [\beta(a), h]) + [a, \alpha(h)] - [\beta(b), k] - [b, \alpha(k)]. \end{array}$$

Usando a definição de par compatível obtemos

$$Y \;=\; \alpha([k, h]_K) + \theta(\alpha(k), h) + \theta(k, \alpha(h)) + \beta([a, h]) - \beta([b, k]) + [T(k), h] - [T(h), k].$$

Pela equação (15) obtemos

$$Y = \alpha([k, h]_K) + \beta(\theta(h, k)) + T([k, h]) + \beta([a, h]) - \beta([b, k]).$$

Como $X = Y$ então $(\alpha, \beta)^*$ é uma derivação.

Além disso, observe que $P_K(\alpha, \beta)^* = \alpha$ e $P_I(\alpha, \beta)^* = \beta$. Segue que $\phi((\alpha + \beta)^*) = \alpha + \beta$, ou seja, $Indu(K, I, \theta) \subseteq Im(\phi)$.

Agora, suponha que $(\alpha + \beta) \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(K_\theta)$ tal que

$$\phi(d) = (\alpha + \beta).$$

Pelo Teorema 1 temos $Im(\phi) \subseteq Comp(K, I)$. Então basta mostrar que existe uma aplicação linear $T : K \to I$ tal que a equação 15 é satisfeita.

Para cada $k + a \in K_\theta$ podemos usar a decomposição definida em (12) para escrever

$$d(k + a) = \alpha(k) + \varphi(k) + \beta(a).$$

Pelo produto em K_θ temos

$$\begin{array}{rcl} [d(k+a),h+b]_\theta & = & [\alpha(k)+\varphi(k)+\beta(a),h+b]_\theta \\ & = & [\alpha(k),h]_K+\theta(\alpha(k),h)+[\varphi(k)+\beta(a),h]-[b,\alpha(k)] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [k+a,d(h+b)]_\theta & = & [k+a,\alpha(h)+\varphi(h)+\beta(b)]_\theta \\ & = & [k,\alpha(h)]_K+\theta(k,\alpha(h))+[a,\alpha(h)]-[\varphi(h)+\beta(b),k] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} d([k+a,h+b]_\theta) & = & d([k,h]_K+\theta(k,h)+[a,h]-[b,k]) \\ & = & \alpha([k,h]_K)+\beta(\theta(k,h))+\beta([a,h])-\beta([b,k])+\varphi_d([k,h]) \end{array}$$

Como d é uma derivação então temos a igualdade

$$d[k+a,h+b]=[d(k)+a,h+b]=[k+a,d(h)+b].$$

Assim,

$$\beta(\theta(k,h))+\varphi([k,h])=\theta(\alpha(k),h)+[\varphi(k),h]+\theta(k,\alpha(h))-[\varphi(h),k].$$

Portanto $T=\varphi$ satisfaz a equação (15) e $Im(\phi)\subseteq Indu(K,I,\theta)$.

2) Suponha que $d\in ker(\phi)$. A decomposição apresentada em (12) nos dá

$$d(k)=\varphi(k), k\in K.$$

Sejam $k,h\in K$ como d é uma derivação temos

$$d([k,h]_\theta)=[d(k),h]_\theta+[k,d(h)]_\theta. \tag{16}$$

Usando a definição do produto em K_θ podemos reescrever (16) como

$$d([k,h]_K+\theta(k,h))=[\varphi(k),h]_\theta+[k,\varphi(h)]_\theta.$$

Como $d\in Ker(\phi)$ então (16) é igual à

$$\varphi([k,h]_K)=[\varphi(k),h]_K-[\varphi(h),k]_K.$$

Segue que, $\varphi\in Z^1(K,I)$.

Defina $\sigma : ker(\phi)\to (Z^1(K,I),+)$ por $\sigma(d)=\varphi_d$ tal que $\varphi_d(k)=d(k)$. Então $\sigma(Ker(\phi))\subseteq Z^1(K,I)$.

Sejam $d,d'\in ker(\phi)$ então

$$\sigma(d+d')(k)=\varphi_{d+d'}(k)=(d+d')(k)=d(k)+d'(k)=\varphi(k)+\varphi'(k)=(\sigma(d)+\sigma(d'))(k).$$

Então σ é um homomorfismo de grupos.

Se $d,d'\in Ker(\phi)$ tais que $\sigma(d)=\sigma(d')$ então $\varphi_d(k)=\varphi_{d'}(k)$, para todo $k\in K$ e $d=d'$. Seja $T\in Z^1(K,I)$ e defina $d:K_\theta\to K_\theta$ por

$$d(x+a)=T(x), x\in K, a\in I.$$

d é uma derivação pois

$$d([k+a,h+b]_\theta)=T([k,h]_K)$$

e

$$[d(k+a),h+b]_\theta+[k+a,d(h+b)]_\theta=[T(k),h]_K+[k+T(h)]_K.$$

É imediato que $\sigma(d)=T$. Portanto, σ é um isomorfismo

■

3 Teorema de Jacobson para K-módulos

3.1 Derivação não singular

Definição 8. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e $a \in End(V)$. Se $p \in \mathbb{F}[X]$ então

$$V_0(p(a)) = \{v \in V | p(a)^m v = 0 \text{ para algum } m > 0\}.$$

Se $p(a) = X - \lambda$ para algum $\lambda \in \mathbb{F}$ então $V(p(a))$ será denotado por V_λ e chamado de λ-autoespaço generalizado de a. λ será chamado de autovalor generalizado de a.

Proposição 8. *Sejam V um espaço vetorial e $a \in End(V)$. Seja A a álgebra associativa com unidade gerada por a. Seja f_a o polinômio minimal de a e suponha que*

$$f_a = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$$

a fatoração de f_a em fatores mônicos irredutíveis. Então V possui uma decomposição como soma direta de subespaços invariantes por a,

$$V = V_0(p_1(a)) \oplus \cdots \oplus V_0(p_r(a)).$$

Prova: Lema A.2.2, De Graaf pág. 369.

■

Proposição 9. *Sejam K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $(\alpha, \beta) \in Comp(K, I)$ então*

$$(\beta - (\lambda + \mu))^n [a, k] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\beta - \lambda)^{n-i}(a), (\alpha - \mu)^i(k)] \text{ para todo } a \in I, k \in K \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{F} \tag{17}$$

Prova: Suponha que $\mathbb{F}$ seja o corpo base de K. Vamos provar o resultado por indução sobre n. Se $n = 1$ então o resultado segue da definição de par compatível. Suponha o resultado válido para $n > 0$. Então

$$\begin{aligned}(\beta - (\lambda + \mu))^{n+1}[a, k] &= (\beta - (\lambda + \mu)) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\beta - \lambda)^{n-i}(a), (\alpha - \mu)^i(k)] \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left([(\beta - \lambda)^{n+1-i}(a), (\alpha - \mu)^i(k)] + [(\beta - \lambda)^{n+1-i}(a), (\alpha - \mu)^{i+1}(k)]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} [(\beta - \lambda)^{n+1-i}(a), \text{ para todo } a \in I, k \in K \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{F}\end{aligned} \tag{18}$$

■

Proposição 10. *Seja K uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e I um K-módulo. Sejam $(\alpha, \beta) \in Comp(K, I)$. Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ e $\mu_1, \cdots, \mu_s \in \mathbb{F}$ são autovalores generalizados de α e β, respectivamente, então $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] \subseteq I_{\mu_i + \lambda_j}$ se $\mu_i + \lambda_j$ é autovalor generalizado de β. Caso contrário $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] = 0$.*

Prova: Sejam $a \in I_{\mu_i}$ e $k \in K_{\lambda_j}$ então pela **Proposição 9** temos

$$(\beta - (\lambda + \mu)I)^n [a, k] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\beta - \lambda I)^{n-i}(a), (\alpha - \mu I)^i(k)],$$

que é zero para n suficientemente grande. Portanto, $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] \subset I_{\mu_i + \lambda_j}$ se $\mu_i + \lambda_j$ é autovalor generalizado de β, caso contrário $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] = 0$ pois $(\beta - (\lambda + \mu))$ é não-singular.

■

Proposição 11. *Suponha que A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se S é um subconjunto multiplicativamente fechado tal que seus elementos são somas de elementos nilpotentes então S é nilpotente.*

Prova: Rowen, L. H. Ring Theory, Student Edition, **Proposição 2.6.32** pg 178.

■

Teorema 3. *Seja K uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e I um K-módulo de dimensão finita. Suponha que $(\alpha, \beta) \in Comp(K, I)$ tal que α é não-singular. Se $car(\mathbb{F}) = 0$ ou $car(\mathbb{F}) = p$ e a dimensão de I é menor que p então a ação de K sobre I é nilpotente.*

Prova: Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ e $\mu_1, \cdots, \mu_s \in \mathbb{F}$ autovalores generalizados de α e β, respectivamente. Se $a \in I_{\mu_i}$ e $k \in K_{\alpha_j}$ então, pela **Proposição 10**, temos $(ad_k)^n(a) \in I_{\mu_i + n\lambda_j}$, com $\lambda_j \neq 0$, se $\mu_i + n\lambda_j$ é autovalor generalizado de β e $(ad_k)^n = 0$ se $\mu_i + n\lambda_j$ não é autovalor de β. Se $car(\mathbb{F}) = 0$ então $(ad_k)^n = 0$ para algum n pois o conjunto dos autovalores de β é finito; e se $car(\mathbb{F}) = p$ o conjunto $\{\mu_i + \lambda_j, \mu_i + 2\lambda_j, \cdots, \mu_i + (p-1)\lambda_j, \mu_i\}$ possui p elementos distintos e β possui no máximo $p-1$ autovalores então $(ad_k)^n = 0$ para algum $1 \leq n \leq p$. Nos dois casos ad_k é nilpotente para todo $k \in K_{\lambda_j}$, $1 \leq j \leq r$. Segue que todo elemento de $ad^K : K \to \mathfrak{gl}(I)$ pode ser escrito como soma de elementos nilpotentes. Então, pela **Propsição 11**, ad^K é nilpotente.

3.2 Subálgebras nilpotentes sem autovalor nulo

Definição 9. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $D \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ uma subálgebra. Seja $\alpha : D \to \mathbb{F} \in D^*$ um funcional linear. Então o subespaço

$$V_\alpha^K = \{v \in V | \text{ para todo } x \in D \text{ temos } (x - \alpha(x)I)^N v = 0 \text{ para algum } N > 0\},$$

é chamado α-autoespaço generalizado de K. Se $V_\alpha^K \neq 0$ então α é um autovalor generalizado de D.

Proposição 12. *Seja K uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$ e $D \subset Der(K)$ uma subálgebra nilpotente. Então K possui uma decomposição em autoespaços generalizados $K = \bigoplus_{i=0}^{n} K_{\alpha_i}$ de D;*

Prova: Pelo **Teorema 3.1.10** (De Graaf pg.62) L possui uma decomposição primária coletada relativa a D. Como $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado podemos escrever $K = K_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus K_{\alpha_n}$ tal que cada componente é da forma

$$K_{\alpha_i} = \{v \in K | \text{ para todo } x \in K \text{ existe um } m > 0 \text{ tal que } (x - \alpha_i(x)I)^m v = 0\}.$$

■

Sejam K uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$, I um K-módulo de dimensão finita. Seja $D \subset Comp(K, I)$ um subconjunto e defina as subálgebras

- $D_K \subset Der(K)$: gerada por $\alpha \in Der(K)$ tal que $(\alpha, \beta) \in D$;
- $D_I \subset Der(I)$: gerada por $\beta \in Der(I)$ tal que $(\alpha, \beta) \in D$.

Se D_K e D_I são nilpotentes então pela **Proposição 12** podemos escrever K e I como soma de autoespaços generalizados de D_K e D_I, respectivamente. Escreva $K = K_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus K_{\lambda_r}$ e $I = I_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus I_{\mu_s}$.

Sejam $(\alpha, \beta) \in D$, $a \in I_{\mu_i}$ e $k \in K_{\lambda_j}$ então pela **Proposição 9** temos

$$(\beta - (\lambda + \mu)(\beta)I)^n [a, k] = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [(\beta - \lambda(\beta)I)^{n-i}(a), (\alpha - \mu(\alpha)I)^i(k)],$$

que é zero para n suficientemente grande. Portanto, $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] \subset I_{\mu_i+\lambda_j}$ se $\mu_i + \lambda_j$ é autovalor generalizado de D_I, caso contrário $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] = 0$ pois $(\beta - (\lambda + \mu))$ é não-singular. Podemos resumir esse resultado na proposição abaixo.

Proposição 13. *Sejam K uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$, I um K-módulo de dimensão finita. Seja $D \subset Comp(K, I)$. Se λ_j e μ_i são autovalores generalizados de D_K e D_I então $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] \subset I_{\mu_i+\lambda_j}$ se $\mu_i + \lambda_j$ é autovalor generalizado de D_I. Caso contrário $[I_{\mu_i}, K_{\lambda_j}] = 0$.*

Teorema 4. *Sejam K uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica p e I um K-módulo de dimensão menor que p. Suponha que $Comp(K, I)$ possui um subconjunto D tal que D_K e D_I sejam nilpotentes e D_K não possui autovalor generalizado zero. Então a ação de K sobre I é nilpotente*

3.3 Subálgebras nilpotentes de $Der(L)$

Teorema 5. *Sejam L uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e I um ideal abeliano de L invariante por derivações. Suponha que $Der(L)$ possua uma subálgebra nilpotente D tal que zero não é autovalor generalizado da subálgebra D_K, induzida por D em $Der(L/I)$. Se ou $car(\mathbb{F}) = 0$ ou $car(\mathbb{F}) = p$ e $dim(I) < p$ então a ação de $K = L/I$ em I induzida pela representação adjunta é nilpotente.*

Prova: Seja $L = L_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus L_{\alpha_n}$ a decomposição de L em autoespaços generalizados de D e $\Phi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. Defina $K_{\alpha_i} = L_{\alpha_i}/I$, $I_{\beta_i} = L_{\alpha_i} \cap I$ e $\Delta = \{\beta_1, \cdots, \beta_r\}$. Pode acontecer que I_{β_i} ou K_{α_i} seja zero. Sejam $a \in I_{\beta_i}$ e $x \in L_{\alpha_j}$ então

$$\begin{cases} [a, x + I] \in I_{\beta_i+\alpha_j}, & \text{se } \beta_i + \alpha_j \in \Delta \\ [a, x + I] = 0, & \text{se } \beta_i + \alpha_j \notin \Delta \end{cases}.$$

Então

$$\begin{cases} ad_I(x+I)^n(a) \in I_{\beta_i+n\alpha_j}, & \text{se } \beta_i + n\alpha_j \in \Delta \\ ad_I(x+I)^n(a) = 0, & \text{se } \beta_i + n\alpha_j \notin \Delta \end{cases}.$$

Se $Car(\mathbb{F}) = 0$ então $\alpha_i + \beta_j, \alpha_i + 2\beta_j, \cdots$ são todos distintos e $\alpha_i + n\beta_j \notin \Delta$, para n suficientemente grande, pois Δ é finito. Se $car(\mathbb{F}) = p$ e $dim(I) < p$ então $\alpha_i + n\beta_j \notin \Delta$ para algum n, $1 \leq n \leq p$, pois $\alpha_i + \beta_j, \alpha_i + 2\beta_j, \cdots, \alpha_i + (p-1)\beta_j, \alpha_i$ são todos distintos e Δ possui no máximo $p-1$ elementos distintos. Em ambos os casos $ad_I(x+I)^n = 0$, para algum $n > 0$ então $ad_I(x+I)$ é nilpotente, para todo $x + I \in K_{\alpha_i}$. Consequentemente, todo elemento de $ad_I(K)$ pode ser escrito como soma de elementos nilpotentes de $ad_I(K)$. Então, $ad_I(K)$ é nilpotente.

4 Aplicações

Lema 1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica p com $p = 0$ ou $p > n$. Suponha que $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. Então A é nilpotente se, e somente se, $tr(A^r) = 0$ para $1 \leq r \leq n$.*

Prova: Seja $\overline{\mathbb{F}}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}$ e considere A como uma matriz sobre $\overline{\mathbb{F}}$. O traço e a nilpotência de uma matriz são invariantes pela conjugação por uma matriz invertível sobre $\bar{\mathbb{F}}$. Assim, sem perda de generalidade, vamos assumir que A está na forma canônica de Jordan. A pode ser vista como uma matriz de blocos diagonais onde cada bloco é formado agrupando-se os blocos de Jordan associados ao mesmo autovalor. Denotaremos por A_t o bloco diagonal associado ao autovalor $\lambda_t \in \overline{\mathbb{F}}$ e por n_j sua ordem. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ os autovalores não-nulos distintos de A. Então

$$tr(A^r) = n_1\lambda_1^n + \cdots + n_k\lambda_k^n \tag{19}$$

Suponha que A é nilpotente. Então A só possui o autovalor zero e pela equação (19) temos $tr(A^r) = 0$ para $1 \leq r \leq n$.

Suponha $tr(A^r) = 0$ para $1 \leq r \leq n$. Da equação (19) extraimos o sistema

$$n_1\lambda_1^r + \cdots + n_k\lambda_k^r = 0, \qquad 1 \leq r \leq k, \tag{20}$$

nas variáveis $n_1, \cdots, n_k$, cuja matriz dos coeficientes é

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_k^k. \end{bmatrix}$$

A matriz C pode ser obtida como a transposta da matriz de Vandermonde nas variávies $\lambda_2, \cdots, \lambda_k$ multiplicando-se a j-ésima coluna por λ_j. A matriz de Vandermonde possui determinante não-nulo e cada λ_j é diferente de zero então a matriz C é invertível. Segue que o sistema (20) só possui a solução trivial e, portanto, cada n_j é zero no corpo $\mathbb{F}$.

Se a característica de $\mathbb{F}$ é 0 ou $p > n \geq k$ então $n_j = 0$ e $\lambda = 0$ é o único autovalor da matriz A.

Lema 2. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica p, com $p = 0$ ou $p > n$. Sejam $A, B, C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ tais que $[A, B] = C + \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{F}$ e $[B, C] = 0$. Então $[A, B^n] = nB^{n-1}C + \lambda nB^n$ para todo $n \geq 1$. Em particular, se $\lambda \neq 0$ e C é nilpotente então B é nilpotente.*

Prova: Provaremos o resultado por indução. O caso $n = 1$ segue da hipótese.

Suponha o resultado válido para $(n-1)$. Ou seja, $[A, B^{n-1}] = (n-1)B^{n-2}C + \lambda(n-1)B^{n-1}$. Equivalentemente,

$$\lambda(n-1)B^{n-1} = AB^{n-1} - B^{n-1}A - (n-1)B^{n-2}C,$$

multiplicando a equação à direita por B obtemos

$$\lambda(n-1)B^n = AB^n - B^{n-1}(AB) - (n-1)B^{n-2}(CB),$$

Da hipótese podemos extrair as igualdades $AB = BA + C + \lambda B$ e $CB = BC$. Substituindo na equaçao acima, obtemos

$$\lambda(n-1)B^n = AB^n - B^nA - B^{n-1}C - \lambda B^n - (n-1)B^{n-1}C.$$

Portanto,

$$AB^n - B^n A = \lambda n B^n + nB^{n-1}C.$$

Suponha $\lambda \neq 0$ e C nilpotente. Usando a primeira parte podemos escrever

$$B^n = (1/\lambda n)[A, B^n] - (1/\lambda)B^{n-1}C.$$

Suponha que o índice de nilpotência de C é m, então $(B^{n-1}C)^m = (B^{n-1})^m(C)^m = 0$. Logo, $B^{n-1}C$ é nilpotente e $Tr((1/\lambda)B^{n-1}C) = 0$ para todo $n \geq 1$. Como o traço do comutador de operadores lineares é zero temos $tr([A, B^n]) = 0$ para todo $n \geq 1$. Segue que $tr(B^n) = 0$ para todo $n \geq 1$. Pelo lema (1) concluimos que B é nilpotente.

■

Teorema 6. *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado de característica p, com $p = 0$ ou $p > n$. Suponha que L tem comprimento derivado 2. Seja $I = [L, L]$ e defina $K = L/I$. Seja $\theta \in H^2(K, I)$ tal que $L \cong K_\theta$. Se L possui uma derivação tal que $\alpha : K \to K$ é não singular então L é nilpotente.*

Prova: Seja $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por

$$\phi(f) = f_K + f_I, f \in Der(K_\theta).$$

Pelo Teorema 1 Segue que $\phi(d) = \alpha + \beta \in Comp(K, I)$.

Usando a definição de par compatível temos $\beta[k, a] = [\beta(a), k] + [a, \alpha(k)]$ para todo $a \in I$ e $k \in K$. Denote a representação de K em I induzida pela representação adjunta de L por $ad : I \to I$. Então,

$$[\beta, ad(k)] = ad(\alpha(k)), \forall k \in K. \tag{21}$$

Seja $x_1, ..., x_s$ uma base de K tal que a matriz do operador α esteja na forma canônica de Jordan. Seja V_t o subespaço invariante de K associado ao bloco de Jordan J e ao autovalor λ_t. $\lambda_t \neq 0$ pois d é não singular. Seja $x_{t1}, \cdots, x_{tm}$ uma base de V_t. Então

$$\begin{aligned} \alpha(x_{t1}) &= \lambda_t x_{t1} \\ \alpha(x_{tj}) &= x_{t(j-1)} + \lambda_t x_{tj}, \quad 2 \leq j \leq m. \end{aligned} \tag{22}$$

Substitua $k = x_{t1}$ e $\alpha(x_{t1}) = \lambda_t x_{t1}$ em (21) para obter

$$[\beta, ad(x_{t1})] = \lambda_t ad(x_{t1}).$$

Podemos aplicar o Lema 2 nessa última equação para $A = \beta$, $B = ad(x_{t1})$, $C = 0$ e $\lambda = \lambda_t \neq 0$ para concluir que $ad(x_{t1})$ é nilpotente.

Suponha por indução que $ad(x_{t(j-1)})$ é nilpotente. Substitua $k = x_{tj}$ e
$\alpha(x_{tj}) = ad(x_{t(j-1)}) + \lambda_t x_{tj}$ em (21) para obter

$$[\beta, ad(x_{tj})] = ad(x_{t(j-1)}) + \lambda_t ad(x_{tj}).$$

Novamente, podemos usar o Lema 2 com $A = \beta$, $B = ad(x_{tj})$, $\lambda = \lambda_t \neq 0$ e $C = ad(x_{t(j-1)})$ para concluir que $ad(x_{tj})$ é nilpotente.

Portanto, $ad(x_r)$ é nilpotente para $1 \leq r \leq s$. Se $k \in K$ então $ad(k) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i ad(x_i), \alpha_i \in \mathbb{F}$ é a soma de derivações nilpotentes que comutam, pois K é abeliano. Logo, $ad(k)$ é nilpotente.

Sejam $x, y \in K_\theta$. Se $ad_{K_\theta} : K_\theta \to K_\theta$ é a representação adjunta então $ad_{K_\theta}(x)(y) = [y, x] \in I$. Se $\bar{x} = x + I$ e $a \in I$ então $[a, \bar{x}] = [a, x] + I = [a, x]$ então existe m tal que $ad(\bar{x})^m = 0$. Segue que $ad_{K_\theta}(x)^{m+1}(y) = ad(x)^m([y, x]) = ad(\bar{x})^m([y, x]) = 0$. Então $ad_{K_\theta}(x)$ é nilpotente para todo $x \in K_\theta$. Pelo teorema de Engel $K_\theta \cong L$ é nilpotente.

■