1 Extensões de Álgebras de Lie

1.1 Definição

Nessa seção definiremos extensões de álgebras de Lie e alguns grupos de cohomologia.

Definição 1. Sejam K,H e L álgebras de Lie. L é dita uma extensão de K por H se existe uma sequência exata de álgebras de Lie,

$$0 \to H \xrightarrow{i} L \xrightarrow{s} K \to 0.$$

Seja S um subespaço vetorial de L tal que $L = S \oplus Ker(s)$,

- se S é um ideal então é uma extensão **trivial** de K;
- se S é uma subálgebra de L então a extensão é dita **split**;
- se $Ker(s)$ está contido no centro de L, denotado por $Z(L)$, então L é uma extensão **central**.

1.2 Extensões Usando Cohomologia

Definição 2. Sejam K e I álgebras de Lie. Diremos que K age sobre I se existe um morfismo de álgebras de Lie $\psi : K \to Der(I)$. Neste caso, denotaremos a ação de K sobre I por

$$[a, k] := \psi(k)(a), k \in K, a \in I.$$

A ação de K sobre I pode ser vista como uma representação de K em I, assim I possui estrutura de K-módulo, o que nos permite definir os grupos de cohomologia de K em I

Definição 3. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana.

- Denote por $C^2(K, I)$ o espaço das aplicações bilineares e antisimétricas de K em I.
- Se $\theta \in C^2(K, I)$ é tal que $\theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]) = [\theta(y, z), x] + [\theta(z, x), y] + [\theta(x, y), z], x, y, z \in K$, então θ será chamado de **cociclo** e o espaço dos cocilos será denotado por $Z^2(K, I)$, que é o segundo grupo de cohomologia.
- Suponha que θ é um cociclo. Se para todo $k, h \in K$ podemos escrever $\theta(k, h) = \nu([h, k]) + [\nu(h), k] - [\nu(k), h]$, para alguma aplicação linear $\nu : K \to I$ então θ será chamado de **cofronteira**. O espaço das cofronteiras será denotado por $B^2(K, I)$.
- Denote $H^2(K, I) = Z^2(K, I)/B^2(K, I)$ o espaço quociente dos cociclos pelas cofronteiras.
- O primeiro grupo de cohomologia de K e I é definido por $Z^1(K, I) = \{\nu \in Hom(K, I) \mid \nu([k, h]_K) = [\nu(k), h] - [\nu(h), k], \text{ para todo } k, h \in K\}$.

Para cada cociclo em $Z^2(K, I)$ podemos definir uma extensão split de K por I. Se L é uma álgebra de Lie com um ideal abeliano não-trivial I, então L pode ser vista como uma extensão split de $K = L/I$ por I. Através dessa caracterização poderemos calcular as derivações e automorfismos de L a partir de K.

Proposição 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta \in Z^2(K,I)$ e defina a álgebra $K_\theta = K \oplus I$ com o produto*

$$[x+a, y+b]_\theta = [x,y]_K + \theta(x,y) + [a,y] - [b,x], \text{ para } x,y \in K \text{ e } a,b \in I. \tag{1}$$

Então,

1. *K_θ é uma álgebra de Lie;*
2. *K_θ é uma extensão de K por I.*
3. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal de L com I abeliano. Suponha que $K = L/I$ age sobre I. Então existe $\theta \in Z^2(K,I)$ tal que $L \cong K_\theta$.*

Prova: 1) Sejam $x,y,z \in K$ e $a,b,c \in I$ então:

- Se $x \in K$ e $a \in I$ então $[x+a, x+a] = [x,x]_K + \theta(x,x) + [a,x] - [a,x] = 0$;
- Sejam $x,y,z \in K$ e $a,b,c \in I$. Usando a definição do produto em K_θ obtemos

  $$[x+a,[y+b,z+c]] = [x,[y,z]_K]_K + \theta(x,[y,z]) - [\theta(y,z),x] + [a,[y,z]_K] - [[b,z],x] + [[c,y],x].$$

  Logo, podemos escrever a equação

  $$[[x+a,y+b],z+c] + [[y+b,z+c],x+a] + [[z+c,x+a],y+b]$$

  como a soma das parcelas

  $$[x,[y,z]_K]_K + [y,[z,x]_K]_K + [z,[x,y]_K]_K$$

  $$\theta(x,[y,z]) + \theta(y,[z,x]) + \theta(z,[x,y]) - [\theta(y,z),x] - [\theta(z,x),y] - [\theta(x,y),z]$$

  $$[a,[y,z]_K] + [b,[z,x]_K] + [c,[x,y]_K]$$

  $$[[a,z],y] - [[a,y],z] + [[b,x],z] - [[b,z],x] + [[c,y],x] - [[c,x],y]$$

A primeira parcela é zero pela identidade de Jacobi em K; pela definição de cociclo a segunda também é zero; e a soma das duas últimas é zero pois a ação de K em I é definida por uma representação. Portanto, $[x+a,[y+b,z+c]] + [y+b,[z+c,x+a]] + [z+c,[x+a,y+b]] = 0$.

2) Seja $i : I \to L$ a inclusão e $\pi : L \to K$ a projeção natural. Como i e π são morfismos de álgebras de Lie então obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \to I \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\pi} K \to 0.$$

3) Considere a ação de K em I induzida pela representação adjunta de L em I: seja $u \in L$ tal que $u + I = x \in K$, então $[a,x] = [a,u], a \in I$. Então I possui estrutura de K-módulo e podemos definir os grupos de cohomologia de K em I.

Seja π a projeção natural de L em K e $\epsilon : K \to L$ uma aplicação linear injetora satisfazendo $\pi(\epsilon(x)) = x, x \in K$. Observe que pela definição da ação de K em I temos $[a,x] = [a,\epsilon(x)]$ para todo $a \in I$ e $x \in K$.

Defina a aplicação linear

$$\theta(x,y) = [\epsilon(x), \epsilon(y)]_L - \epsilon([x,y]_K) \text{ para todo } x, y \in K.$$

Pela construção de θ temos $\pi(\theta) = 0$, ou seja, $\theta(x,y) \in I$. Vamos verificar que θ é um cociclo de K em I. Se $x, y \in K$ é imediato que $\theta(x,y) = -\theta(y,x)$ e $\theta(x,x) = 0$.

Por definição temos

$$\theta(x, [y,z]) = [\epsilon(x), \epsilon([y,z]_K)]_L - \epsilon([x,[y,z]_K]_K).$$

Somando os três termos

$$\theta(x,[y,z]) + \theta(y,[z,x]) + \theta(z,[x,y])$$

e usando que ϵ é linear obtemos

$$[\epsilon(x), [\epsilon([y,z]_K)]_L + [\epsilon(y), [\epsilon([z,x]_K)]_L + [\epsilon(z), [\epsilon([x,y]_K)]_L.$$

Por outro lado,

$$[\theta(x,y), z]_L = [[\epsilon(x), \epsilon(y)]_L - \epsilon([x,y]_K), z] = [[\epsilon(x), \epsilon(y)]_L - \epsilon([x,y]_K), \epsilon(z)].$$

Somando os três termos

$$[\theta(x,y), z]_L + [\theta(y,z), x]_L + [\theta(z,x), y]_L$$

obtemos

$$[\epsilon(x), [\epsilon([y,z]_K)]_L + [\epsilon(y), [\epsilon([z,x]_K)]_L + [\epsilon(z), [\epsilon([x,y]_K)]_L.$$

Falta mostrar que K_θ e L são isomorfos. Como ϵ é injetora então todo elemento de $u \in L$ pode ser escrito de forma única como $u = \epsilon(u+I)+a$, com $a \in I$. A partir dessa decomposição defina a aplicação linear $\zeta : L \to L_\theta = K \oplus I$ por

$$\zeta(u) = (u + I) + a.$$

Sejam $u, v \in L$ tais que $x = \epsilon(u + I) + a$ e $v = \epsilon(v + I) + b$, com $a, b \in I$. Escreva

$$[u, v] = \epsilon([u, v] + I) + c \text{ para algum } c \in I.$$

Por outro lado,

$$[u, v] = [\epsilon(u + I) + a, \epsilon(v + I) + b].$$

Desenvolvendo essa última equação obtemos

$$[u, v] = [\epsilon(u + I), \epsilon(v + I)] + [a, v + I] - [b, u + I].$$

Então

$$c = [\epsilon(u + I), \epsilon(v + I)] - \epsilon([u + I, v + I]) + [a, v + I] - [b, u + I].$$

Segue que

$$\begin{aligned} \zeta([u,v]) &= ([u,v] + I) + [\epsilon(u + I), \epsilon(v + I)] - \epsilon([u + I, v + I]) + [a, v + I] - [b, u + I] \\ &= [(u + I) + a, (v + I) + b] \\ &= [\zeta(u), \zeta(v)]. \end{aligned}$$

Suponha que $\zeta(u) = \zeta(v)$ então $a = b$ e $u + I = v + I$. Logo,

$$u = \epsilon(u + I) + a = \epsilon(v + I) + b = v.$$

Para cada $y \in L_\theta = K \oplus I$ escreva $y = (u + I) + a$, com $u \in L$ e $a \in I$. Então $\zeta(u + a) = y$. Portanto $L \cong L_\theta$.

■

Proposição 2. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Sejam $\theta \in Z^2(K, I)$ e $\nu \in B^2(K, I)$. Então*

1. *K_θ é isomorfo a $K_{\theta+\nu}$;*

2. *K_ν é uma extensão split de K por I.*

Prova: 1) Pela definição de $B^2(K, I)$ existe $T : K \to I$ uma aplicação linear tal que $\nu(x, y) = T([x, y]_K) - [T(x), y] + [T(y), x]$ para todo $x, y \in K$.

Sejam $x \in K$ e $a \in I$. Defina a aplicação linear $\sigma : K_\theta \to K_{\theta+\nu}$ por $\sigma(x+a) = x+T(x)+a$.

$$\begin{aligned} \sigma([x + a, y + b]_\theta) &= \sigma([x, y]_K + \theta(x, y) + [a, y] - [b, x]) \\ &= [x, y]_K + \theta(x, y) + [a, y] - [b, x] + T([x, y]). \end{aligned}$$

Substituindo $T([x, y]_K) = \nu(x, y) + [T(x), y] - [T(y), x]$ na última equação temos

$$\begin{aligned} \sigma([x + a, y + b]_\theta) &= [x, y]_K + \theta(x, y) + [a, y] - [b, x] + \nu(x, y) + [T(x), y] - [T(y), x] \\ &= [x, y]_K + (\theta + \nu)(x, y) + [a + T(x), y] - [b, x - T(y)] \\ &= [x + a + T(x), y + b + T(y)]_{\theta+\nu} \\ &= [\sigma(x + a), \sigma(y + b)]_{\theta+\nu}. \end{aligned}$$

Suponha que $\sigma(x + a) = \sigma(y + b)$ então $x + a + T(x) = y + b + T(y)$. Isso implica $x = y$e, consequentemente, $a = b$. Então σ é um endomorfismo injetivo de $K \oplus I$, ou seja, σ é um isomorfismo.

2) Suponha que θ é o cociclo trivial, ou seja, $\theta(x, y) = 0$ para todo $x, y \in K$. Então $[x, y]_\theta = [x, y]_K \in K$. Logo K é uma subálgebra de K_θ. Pelo item 2 da proposição anterior temos que K_θ é uma extensão de K por I e como $K_\theta = K \oplus I$ então essa extensão é split. Como $\nu = \theta + B^2(K, I)$ então temos $K_\nu \cong K_\theta$ pelo item anterior. Então K_ν é uma extensão split de K por I.

2 Derivações de Extensões Usando Cohomologia

2.1 Pares compatíveis

Definição 4. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Suponha que $d_K \in Der(K)$ e $d_I \in Der(I)$. O par $d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I)$ é dito par compatível se

$$d_I([a, k]) = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)] \text{ para todo } a \in I \text{ e } k \in K.$$

Proposição 3. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. O conjunto formando pelos pares compatíveis*

$$\begin{aligned} Comp(K, I) &= \{d_K + d_I \in Der(K) \oplus Der(I) \mid d_I([a, k]) = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)], \\ &\quad \text{para todo } a \in I, k \in K\}, \end{aligned}$$

é uma subálgebra de $Der(K) \oplus Der(I)$

Prova: Sejam $d_K + d_I, e_K + e_I \in Comp(K, I)$, $a \in I$ e $k \in K$. Como o produto em L é linear é imediato verificar que $Comp(K, I)$ é um subespaço de $Der(K) \oplus Der(I)$.

Usando a definição de par compatível temos

$$d_I e_I([a, k]) = [d_I e_I(a), k] + [e_I(a), d_K(a)] + [d_I(a), e_K(k)] + [a, d_K.e_K(k)]$$

e

$$e_I d_I([a, k]) = [e_I d_I(a), k] + [d_I(a), e_K(a)] + [e_I(a), d_K(k)] + [a, e_K.d_K(k)].$$

Então

$$[d_I, e_I][a, k] = (d_I e_I - e_I d_I)[a, k] = [[d_I, e_I](a), k] - [a, [d_K, e_K](k)]$$

Segue que $[d_K + d_I, e_K + e_I] \in Comp(K, I)$.

■

Se a álgebra I é abeliana podemos calcular os pares compatíveis como um anulador de uma ação de $Der(K) \oplus Der(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$. Para isso é necessário primeiro definir uma ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $Hom(K, Der(I))$.

Definição 5. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Sejam $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, $T \in Hom(K, Der(I))$ e $k \in K$. A ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ sobre $Hom(K, Der(I)))$ é dada por

$$(d_K + d_I) \cdot T(k) = [d_I, T(k)] - T(d_K(k)). \tag{2}$$

A aplicação $(d_K + d_I) \cdot T$ é linear pois é uma combinação linear de composições de aplicações lineares. Como I é abeliana então toda aplicação linear é uma derivação. Logo, $(d_K + d_I) \cdot T(k) \in Hom(K, Der(I))$. Falta verificar a ação do produto de elementos de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$.

Sejam $d_K + d_I, e_K + e_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$. Pela definição da ação

$$(e_K + e_I) \cdot T(k) = [e_I, T(k)] - T(e_K(k)),$$

aplicando $(d_K + d_I)$ na equação acima obtemos

$$[d_I, [e_I, T(k)]] - [e_I, T(d_K(k))] - [d_I, T(e_K(k))] + T(e_K d_K(k)).$$

Analogamente, obtemos que $(e_K + e_I)(d_K + d_I) \cdot T(k)$ é igual à

$$[e_I, [d_I, T(k)]] - [d_I, T(e_K(k))] - [e_I, T(d_K(k))] + T(d_K e_K(k)).$$

Subtraindo as duas equações temos

$$[d_I, [e_I, T(k)]] - [e_I, [d_I, T(k)]] + T(e_K d_K(k)) - T(d_K e_K(k)).$$

Usando que $T : K \to Der(I)$ é linear e a definção do comutador temos

$$[[d_I, e_I], T(k)]] - T([e_K, d_K](k)).$$

Portanto, $[d_K + d_I, e_K + e_I] \cdot T(k) = [[d_I, e_I], T(k)]] - T([e_K, d_K](k))$.

Teorema 1. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a ação definida em (2) restrita a álgebra $Der(K) \oplus Der(I)$. Se $T \in Hom(K, Der(I))$ é dada por $T(k)(a) = [a, k]$ então $Comp(K, I) = Ann_{Der(K) \oplus Der(I)}(T)$.*

Prova: Sejam $a \in I$ e $k \in K$ quaisquer. Se $d_K + d_I \in Comp(K, I)$ então

$$d_I[a, k] = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)].$$

Podemos reescrever essa equação usando T:

$$d_I T(k) = T(k) d_I(a) + T(d_K(k))(a).$$

Essa igualdade é equivalente à $(d_K + d_I) \cdot T = 0$, que é a definição de $Ann_{Der(K) \oplus Der(I)}(T)$.

■

2.2 Pares induzidos

Definição 6. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Dados $d_K + d_I \in \mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$, $\theta \in C^2(K, I)$ e $h, k \in K$, defina a ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ em $C^2(K, I)$ por

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(h, k) = d_I(\theta(h, k)) - \theta(d_K(k), h) - \theta(k, d_K(h)). \quad (3)$$

Omitiremos a demostração que essa ação está bem definida pois ela é semelhante a demonstração que a ação de $\mathfrak{gl}(K) \oplus \mathfrak{gl}(I)$ sobre $Hom(K, Der(I))$ está bem definida.

Proposição 4. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Considere a ação de $Comp(K, I)$ sobre $C^2(K, I)$ definida em (3). Então os espaços $Z^2(K, I)$ e $B^2(K, I)$ são invariantes por essa ação.*

Prova: Sejam $k, h, l \in K$ e $\theta \in Z^2(K, I)$. Por definição,

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, [h, l]) = d_I(\theta(k, [h, l])) - \theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(k, d_K([h, l])).$$

Como d_K é uma derivação temos

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, [h, l]) = d_I(\theta(k, [h, l])) - \theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(k, [d_K(h), l]) - \theta(k, [h, d_K(l)]).$$

Então a soma

$$(d_K + d_I) \cdot \theta(k, [h, l]) + (d_K + d_I) \cdot \theta(h, [l, k]) + (d_K + d_I) \cdot \theta(l, [k, h]),$$

pode ser escrita como soma das parcelas

$$\begin{gathered}
d_I(\theta(k, [h, l])) + d_I(\theta(h, [l, k])) + d_I(\theta(l, [k, h])) \\
-\theta(d_K(k), [h, l]) - \theta(d_K(h), [l, k]) - \theta(d_K(l), [k, h]) \\
-\theta(k, [d_K(h), l]) - \theta(h, [d_K(l), k]) - \theta(l, [d_K(k), h]) \\
-\theta(k, [h, d_K(l)]) - \theta(h, [l, d_K(k)]) - \theta(l, [k, d_K(h)])
\end{gathered}$$

Usando a definição de cociclo em cada uma delas obtemos as equações

$$d_I([\theta(k, h), l]) + d_I([\theta(h, l), k]) + d_I([\theta(l, k), h])$$

$$\begin{gathered}
-[\theta(d_K(k), h), l] - [\theta(d_K(h), l), k] - [\theta(d_K(l), k), h] \\
-[\theta(k, d_K(h)), l] - [\theta(h, d_K(l)), k] - [\theta(l, d_K(k)), h]
\end{gathered}$$

$$-[\theta(k,h),d_K(l)]-[\theta(h,l),d_K(k)]-[\theta(l,k),d_K(h)]$$

Como d_K+d_I é um par compatível então podemos substituir na equação acima as igualdades

$$d_I([\theta(k,h),l])=[\mathrm{d}_I\theta(k,h),l])+[\theta(k,h)),d_K(l)].$$

$$d_I([\theta(h,l),k])=[\mathrm{d}_I\theta(h,l),k])+[\theta(h,l)),d_K(k)].$$

$$d_I([\theta(l,k),h])=[\mathrm{d}_I\theta(l,k),h])+[\theta(l,k)),d_K(h)].$$

obtendo

$$[\mathrm{d}_I\theta(k,h),l]+[\mathrm{d}_I\theta(h,l),k]+[\mathrm{d}_I\theta(l,k),h]$$
$$-[\theta(d_K(k),h),l]-[\theta(d_K(h),l),k]-[\theta(d_K(l),k),h]$$
$$-[\theta(k,d_K(h)),l]-[\theta(h,d_K(l)),k]-[\theta(l,d_K(k)),h].$$

Que é equivalente à

$$[(d_K+d_I)\cdot\theta(h,l),k]+[(d_K+d_I)\cdot\theta(l,k),h]+[(d_K+d_I)\cdot\theta(k,h),l].$$

Então $(d_K+d_I)\cdot\theta\in Z^2(K,I)$.

Agora suponha que $\theta\in B^2(K,I)$. Então existe uma aplicação linear $\nu:K\to I$ tal que

$$\theta(k,h)=\nu([k,h])-[\nu(k),h]-[k,\nu(h)].$$

Então

$$(d_K+d_I)\cdot\theta(k,h)=(d_K+d_I)\cdot(\nu([k,h]-[\nu(k),h]-[k,\nu(h)]).$$

Aplicando a definição da ação em cada termo da equação acima obtemos

$$d_I(\nu([k,h]))-\nu([d_K(k),h])-\nu([k,d_K(h)])$$
$$-d_I([\nu(k),h])+[\nu(d_K(k)),h]+[\nu(k),d_K(h)]$$
$$-d_I([k,\nu(h)])+[d_K(k),\nu(h)]+[k,\nu(d_K(h))],$$

podemos usar que d_K é derivação na primeira linha e d_K+d_I é um par compatível nas outras duas para obter

$$d_I(\nu([k,h]))-\nu(d_K[k,h])$$
$$-[d_I(\nu(k)),h]-[\nu(k),d_K(h)]+[\nu(d_K(k)),h]+[\nu(k),d_K(h)]$$
$$-[d_I(k),\nu(h)]-[k,d_I(\nu(h))]+[d_I(k),\nu(h)]+[k,\nu(d_K(h))],$$

Que é igual a

$$(d_I\nu-\nu d_K)[k,h]-[(d_I\nu-\nu d_K)(k),h]-[d_I(k),\nu(h)]+[k,(d_I\nu-\nu d_K)(h)].$$

Como $(d_I.\nu-\nu.d_K):K\to I$ é uma aplicação linear então $(d_K+d_I)\cdot\theta\in B^2(K,I)$.

■

Definição 7. Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I e I é abeliana. Seja $\theta\in Z^2(K,I)$ e considere a ação de $Comp(K,I)$ sobre $Z^2(K,I)$ definida em (3). Defina os pares induzidos de $Comp(K,I)$ por

$$Indu(K,I,\theta)=Ann_{Comp(K,I)}(\theta+B^2(K,I)).$$

2.3 Derivações de K_θ

Nessa seção vamos calcular as derivações da extensão K_θ a partir das derivações de K. Para isso é necessário definir um morfismo ϕ de $Der(K_\theta)$ em $Der(K) \oplus Der(I)$.

Proposição 5. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Seja $\theta \in H^2(K, I)$ e suponha que I como ideal de K_θ é invariante por derivações. Sejam $d \in Der(K_\theta)$ e $x + a \in K_\theta$ então $d(x + a) = d(x) + d(a)$. Defina as aplicações lineares $d_I : I \to I$ a restrição de d a I; $d_K : K \to K$ tal que $d_K(x)$ é a componente em K de $d(x)$; e $\varphi : K \to I$ tal que $\varphi(x)$ é a componente em I de $d(x)$. Portanto,*

$$d(x + a) = d_K(x) + \varphi_d(x) + d_I(a) \text{ para todo } a \in I \text{ e } x \in K. \tag{4}$$

Então, $d_I \in Der(I)$, $d_K \in Der(K)$ e $\varphi \in Hom(K, I)$.

Prova: Como I é uma subálgebra de K_θ invariante por derivações então

$$d_I([a, b]) = d([a, b]) = [d(a), b] + [a, d(b)] = [d_I(a), b] + [a, d_I(b)],$$

ou seja, $d_I \in Der(I)$. Sejam $x, y \in K$ então

$$d(x + y) = d(x) + d(y),$$

usando a decomposição apresentada em (4) obtemos

$$d_K(x + y) + \varphi(x + y) = d_K(x) + d_K(y) + \varphi(x) + \varphi(y).$$

Como a $K_\theta = K \oplus I$ então $d_K(x + y) = d_K(x) + d_K(y)$ e $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Provando que d_K e φ são aplicações lineares.

Pela definição de produto em K_θ temos

$$d([x, y]_\theta) = d([x, y]_K + \theta(x, y)).$$

Aplicando (4) temos

$$d([x, y]_\theta) = d_K([x, y]_K) + \varphi([x, y]_K) + d_I(\theta(x, y)).$$

Por outro lado,

$$[d(x), y]_\theta + [x, d(y)]_\theta = [d_K(x) + \varphi(x), y] + [x, d_K(y) + \varphi(y)].$$

Usando a definção do produto em K_θ temos que $[d(x), y]_\theta + [x, d(y)]_\theta$ é igual à

$$[d_K(x), y]_K + [x, d_K(y)]_K + \theta(d_K(x), y) + \theta(y, d_K(x)) + [\varphi(x), d_K(y)] - [\varphi(y), d_K(x)].$$

Comparando as componentes em K de $d([x, y]_\theta)$ e $[d(x), y]_\theta + [x, d(y)]_\theta$ obtemos

$$d_K([x, y]_K) = [d_K(x), y]_K + [x, d_K(y)]_K.$$

Portanto $d_K \in Der(K)$.

■

Proposição 6. *Sejam K e I álgebras de Lie tais que K age sobre I. Seja $\theta \in H^2(K,I)$ e suponha que I como ideal de K_θ é invariante por derivações. Defina $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ por $\phi(d) = d_K + d_I$. Então ϕ é um morfismo de álgebras de Lie*

Prova: Sejam $d, e \in Der(K_\theta)$, $x \in K$. Temos,

$$\begin{aligned} d(e(x)) &= d(e(x)) \\ &= d(e_K(x) + \varphi_e(x)) \\ &= d_K e_K(x) + \varphi_d(e_K(x)) + e_I(\varphi_e(x)). \end{aligned}$$

Então a componente em K de $d(e(x))$ é $d_K e_K(x)$. O que implica $[d,e]_K = [d_K, e_K]$. Como d_I e e_I são definidas pela restrição de d e e é imediato que $[d,e]_I = [d_I, e_I]$. Portanto,

$$\begin{aligned} \phi([d,e]) &= [d,e]_K + [d,e]_I \\ &= [d_K, e_K] + [d_I, e_I] \\ &= [d_K + d_I, e_K + e_I] \\ &= [\phi(d), \phi(e)]. \end{aligned}$$

■

Seja L uma álgebra de Lie e I ideal de L com $K = L/I$. Denote a restrição da representação adjunta de L a I por ad_I. Se I é um ideal abeliano então $I \subset Ker(ad_I)$. Logo, podemos induzir uma representação $ad_K : K \to Der(I)$ dada por $ad_K(x+I)(a) = [a,x]$, para todo $x \in L$ e $a \in I$. Portanto, se L possi um ideal abeliano I então K age sobre I, com a ação induzida pela representação adjunta.

Teorema 2. *Sejam L uma álgebra de Lie e I um ideal abeliano de L. Seja $K = L/I$. Considere a ação de K em I induzida pela representação adjunta de L. Seja $\theta \in H^2(K,I)$ tal que $L \cong K_\theta$. Seja $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$, definida na Proposição 6. Então $Im(\phi) \leq Comp(K,I)$.*

Prova: Seja $d_K + d_I \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(K_\theta)$ tal que $\phi(d) = d_K + d_I$. Se $k \in K$ e $a \in I$ então

$$\begin{aligned} d_I([a,k]_\theta) &= d([a,k]_\theta) && [a,k] \in I \\ &= [d(a),k]_\theta + [a,d(k)]_\theta && d \in Der(K_\theta) \\ &= [d_I(a),\bar{k}]_\theta + [a, d_K(k) + \varphi(k)]_\theta \\ &= [d_I(a),\bar{k}]_\theta + [a, d_K(k)]_\theta && \text{pois } I \text{ é abeliano} \end{aligned}$$

■

Teorema 3. *Seja K uma álgebra de Lie, I um K-módulo e $\theta \in Z^2(K,I)$. Seja $K_\theta = K \oplus I$ e considere I como ideal de K_θ. Assuma que I é invariante por $Der(K_\theta)$. Seja $\phi : Der(K_\theta) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(d) = d_K + d_I$. Então:*

1. $Im(\phi) = Indu(K,I,\theta)$
2. $ker(\phi) \cong Z^1(K,I)$

Prova: 1) Seja $d_K + d_I \in Indu(K, I, \theta)$. Por definição temos

$$(d_K + d_I) \cdot \theta = 0 \text{ mod } B^2(K, I).$$

Logo, existe uma aplicação linear $T : K \to I$ tal que para todo $k, h \in K$ temos

$$\theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_K(h)) + [T(k), h] - [T(h), k] = d_I(\theta(k, h)) + T([k, h]). \tag{5}$$

Suponha que $k \in K$ e $a \in I$ e defina a aplicação linear $(d_K + d_I)^* : K_\theta \to K_\theta$ por

$$(d_K + d_I)^*(k + a) = d_K(k) + d_I(a) + T(k).$$

Vamos verificar que $(d_K + d_I)^*$ é uma derivação de K_θ. Sejam $k + a, h + b \in K_\theta$.

$$\begin{array}{rcl} (d_K + d_I)^*([k + a, h + b]) & = & (d_K + d_I)^*([k, h]_K + \theta(k, h) + [a, h] - [b, k]) \\ & = & d_K([k, h]_K) + d_I(\theta(k, h)) + d_I([a, h]) - d_I([b, k]) + T([k, h]_K). \end{array}$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} [(d_K + d_I)^*(k + a), h + b] & = & [d_K(k) + d_I(a) + T(k), h + b] \\ & = & [d_k(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [d_I(a) + T(k), h] - [b, d_K(k)] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} [k + a, (d_K + d_I)^*(h + b)]) & = & [k + a, d_K(h) + d_I(b) + T(h)] \\ & = & [k, d_K(h)]_K + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [d_I(b) + T(h), k] \end{array}$$

Então

$$[(d_K + d_I)^*(k + a), h + b] + [k + a, (d_K + d_I)^*(h + b)])$$

pode ser escrito como a soma das parcelas

$$d_K([k, h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_K(h))$$

$$[T(k), h] - [T(h), k]$$

$$[d_I(a), h]) + [a, d_K(h)] - [d_I(b), k] - [b, d_K(k)$$

Usando a definição de par compatível obtemos

$$d_K([k, h]_K) + \theta(d_K(k), h) + \theta(k, d_K(h))$$

$$d_I([a, h]) - d_I([b, k])$$

$$[T(k), h] - [T(h), k]$$

Pela equação (5) obtemos que $(d_K + d_I)^*$ é uma derivação.

Além disso, a componente em K de $(d_K + d_I)^*(x)$ é $d_K(x)$ e a restrição de $(d_K + d_I)^*$ a I é dada por $d_I(a)$. Segue que $\phi((d_K + d_I)^*) = d_K + d_I$, ou seja, todo par induzido está na imagem de ϕ.

Agora, suponha que $(d_K + d_I) \in Im(\phi)$. Então existe $d \in Der(K_\theta)$ tal que

$$\phi(d) = (d_K + d_I).$$

Pelo Teorema 2 temos $Im(\phi) \subseteq Comp(K, I)$. Então basta mostrar que existe uma aplicação linear $T : K \to I$ tal que a equação 5 é satisfeita.

Para cada $k + a \in K_\theta$ podemos usar a decomposição definida em (4) para escrever

$$d(k + a) = d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a).$$

Pela produto em K_θ temos

$$\begin{aligned} [d(k+a), h+b] &= [d_K(k) + \varphi_d(k) + d_I(a), h+b] \\ &= [d_K(k), h]_K + \theta(d_K(k), h) + [\varphi_d(k) + d_I(a), h] - [b, d_K(k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [k+a, d(h+b)] &= [k+a, d_K(h) + \varphi_d(h) + d_I(b)] \\ &= [k, d_K(h)]_K + \theta(k, d_K(h)) + [a, d_K(h)] - [\varphi_d(h) + d_I(b), k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d([k+a, h+b]) &= d([k,h]_K + \theta(k,h) + [a,h] - [b,k]) \\ &= d_K([k,h]_K) + d_I(\theta(k,h)) + d_I([a,h]) - d_I([b,k]) + \varphi_d([k,h]) \end{aligned}$$

Podemos usar essas três equações para reescrever a igualdade

$$d[k + a, h + b] = [d(k) + a, h + b] = [k + a, d(h) + b].$$

Assim,

$$d_I(\theta(k,h)) + \varphi_d([k,h]) = \theta(d_K(k), h) + [\varphi_d(k), h] + \theta(k, d_K(h)) - [\varphi_d(h), k].$$

2) Suponha que $d \in ker(\phi)$. A decomposição apresentada em (4) nos dá

$$d(k) = \varphi_d(k), k \in K.$$

Sejam $k, h \in K$ como d é uma derivação temos

$$d[k,h] = [d(k), h] = [k, d(h)].$$

Então

$$\varphi_d([k,h]_K) = [\varphi_d(k), h] - [\varphi_d(h), k].$$

Ou seja, $\varphi_d \in Z^1(K, I)$. Defina $\sigma : ker(\phi) \to (Z^1(K,I), +)$ por

$$\sigma(d) = \varphi_d.$$

Se $d, e \in ker(\phi)$ e $k \in K$ então

$$\sigma(d + e)(k) = \varphi_{(d+e)}(k) = d(k) + e(k).$$

Por outro lado,

$$(\sigma(d) + \sigma(e))(k) = \varphi_d(k) + \varphi_e(k) = d(k) + e(k).$$

Então σ é um homomorfismo de grupos.

Se $d, e \in Ker(\phi)$ tais que $\sigma(d) = \sigma(e)$ então $\varphi_d(k) = \varphi_e(k)$, para todo $k \in K$ e $d = e$. Seja $T \in Z^1(K, I)$ e defina $d : K_\theta \to K_\theta$ por

$$d(x + a) = T(x), x \in K, a \in I.$$

d é uma derivação pois

$$d([k + a, h + b]) = T([k,h])$$

e

$$[d(k + a), h + b] + [k + a, d(h + b)] = [T(k), h] + [k + T(h)].$$

É imediato que $\sigma(d) = T$. Portanto, σ é um isomorfismo

■

3 Aplicações

Lema 1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica p com $p = 0$ ou $p > n$. Suponha que $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$. Então A é nilpotente se, e somente se, $tr(A^r) = 0$ para $1 \leq r \leq n$.*

Prova: Seja $\overline{\mathbb{F}}$ o fecho algébrico de $\mathbb{F}$ e considere A como uma matriz sobre $\overline{\mathbb{F}}$. O traço e a nilpotência de uma matriz são invariantes pela conjugação por uma matriz invertível sobre $\bar{\mathbb{F}}$. Assim, sem perda de generalidade, vamos assumir que A está na forma canônica de Jordan. A pode ser vista como uma matriz de blocos diagonais onde cada bloco é formado agrupando-se os blocos de Jordan associados ao mesmo autovalor. Denotaremos por A_j o bloco diagonal associado ao autovalor $\lambda_t \in \overline{\mathbb{F}}$ e por n_j sua ordem. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ os autovalores não-nulos distintos de A. Então

$$tr(A^r) = n_1\lambda_1^n + \cdots + n_k\lambda_k^n \tag{6}$$

Suponha que A é nilpotente. Então A só possui o autovalor zero e pela equação (6) temos $tr(A^r) = 0$ para $1 \leq r \leq n$.

Suponha $tr(A^r) = 0$ para $1 \leq r \leq n$. Da equação (6) extraimos o sistema

$$n_1\lambda_1^r + \cdots + n_k\lambda_k^r = 0, \qquad 1 \leq r \leq k, \tag{7}$$

nas variáveis $n_1, \cdots, n_k$, cuja matriz dos coeficientes é

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_k^k. \end{bmatrix}$$

A matriz C pode ser obtida como a transposta da matriz de Vandermonde nas variávies $\lambda_2, \cdots, \lambda_k$ multiplicando-se a j-ésima coluna por λ_j. A matriz de Vandermonde possui determinante não-nulo e cada λ_j é diferente de zero então a matriz C é invertível. Segue que o sistema (7) só possui a solução trivial e, portanto, cada n_j é zero no corpo $\mathbb{F}$.

Se a característica de $\mathbb{F}$ é 0 ou $p > n \geq k$ então $n_j = 0$ e $\lambda = 0$ é o único autovalor da matriz A.

Lema 2. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica p, com $p = 0$ ou $p > n$. Sejam $A, B, C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ tais que $[A, B] = C + \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{F}$ e $[B, C] = 0$. Então $[A, B^n] = nB^{n-1}C + \lambda nB^n$ para todo $n \geq 1$. Em particular, se $\lambda \neq 0$ e C é nilpotente então B é nilpotente.*

Prova: Provaremos o resultado por indução. O caso $n = 1$ segue da hipótese.

Suponha o resultado válido para $(n-1)$. Ou seja, $[A, B^{n-1}] = (n-1)B^{n-2}C+\lambda(n-1)B^{n-1}$. Equivalentemente,

$$\lambda(n-1)B^{n-1} = AB^{n-1} - B^{n-1}A - (n-1)B^{n-2}C,$$

multiplicando a equação à direita por B obtemos

$$\lambda(n-1)B^n = AB^n - B^{n-1}(AB) - (n-1)B^{n-2}(CB),$$

Da hipótese podemos extrair as igualdades $AB = BA + C + \lambda B$ e $CB = BC$. Substituindo na equaçao acima, obtemos

$$\lambda(n-1)B^n = AB^n - B^nA - B^{n-1}C - \lambda B^n - (n-1)B^{n-1}C.$$

Portanto,

$$AB^n - B^n A = \lambda n B^n + n B^{n-1} C.$$

Suponha $\lambda \neq 0$ e C nilpotente. Usando a primeira parte podemos escrever

$$B^n = (1/\lambda n)[A, B^n] - (1/\lambda) B^{n-1} C.$$

Suponha que o índice de nilpotência de C é m, então $(B^{n-1}C)^m = (B^{n-1})^m (C)^m = 0$. Logo, $B^{n-1}C$ é nilpotente e $Tr((1/\lambda)B^{n-1}C) = 0$ para todo $n \geq 1$. Como o traço do comutador de operadores lineares é zero temos $tr([A, B^n]) = 0$ para todo $n \geq 1$. Segue que $tr(B^n) = 0$ para todo $n \geq 1$. Pelo lema (1) concluimos que B é nilpotente.

■

Teorema 4. *Seja L uma álgebra de Lie de dimensão n sobre um corpo algebricamente fechado de característica p, com $p = 0$ ou $p > n$. Suponha que L tem comprimento derivado 2. Se L possui uma derivação não singular d então L é nilpotente.*

Prova: Seja $I = [L, L]$ e defina $K = L/I$. Como K age sobre I pela representação adjunta $ad : K \to Der(I)$ então podemos calcular $\phi : Der(L) \to Der(K) \oplus Der(I)$ dada por $\phi(f) = f_K + f_I$. Segue que $\phi(d) = d_K + d_I \in Comp(K, I)$.

Usando a definição de par compatível temos $d_I[k, a] = [d_I(a), k] + [a, d_K(k)]$ para todo $a \in I$ e $k \in K$. Equivalentemente,

$$[d_I, ad(k)] = ad(d_K(k)), \forall k \in K. \tag{8}$$

Seja $x_1, ..., x_s$ uma base de K tal que a matriz do operador d_K esteja na forma canônica de Jordan. Seja V_t o subespaço invariante de K associado ao bloco de Jordan J e ao autovalor λ_t. $\lambda_t \neq 0$ pois d é não singular. Seja $x_{t1}, \cdots, x_{tm}$ uma base de V_t. Então

$$\begin{aligned} d_K(x_{t1}) &= \lambda_t x_{t1} \\ d_K(x_{tj}) &= x_{t(j-1)} + \lambda_t x_{tj}, \quad 2 \leq j \leq m. \end{aligned} \tag{9}$$

Substitua $k = x_{t1}$ e $d_K(x_{t1}) = \lambda_t x_{t1}$ em (8) para obter

$$[d_I, ad(x_{t1})] = \lambda_t ad(x_{t1}).$$

Podemos aplicar o Lema 2 nessa última equação para $A = d_I$, $B = ad(x_{t1})$, $C = 0$ e $\lambda = \lambda_t \neq 0$ para concluir que $ad(x_{t1})$ é nilpotente.

Suponha por indução que $ad(x_{t(j-1)})$ é nilpotente. Substitua $k = x_{tj}$ e $d_K(x_{tj}) = ad(x_{t(j-1)}) + \lambda_t x_{tj}$ em (8) para obter

$$[d_I, ad(x_{tj})] = ad(x_{t(j-1)}) + \lambda_t ad(x_{tj}).$$

Novamente, podemos usar o Lema 2 com $A = d_I$, $B = ad(x_{tj})$, $\lambda = \lambda_t \neq 0$ e $C = ad(x_{t(j-1)})$ para concluir que $ad(x_{tj})$ é nilpotente.

Portanto, $ad(x_r)$ é nilpotente para $1 \leq r \leq s$. Se $k \in K$ então $ad(k) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i ad(x_i), \alpha_i \in \mathbb{F}$ é a soma de derivações nilpotentes que comutam, pois K é abeliano. Logo, $ad(k)$ é nilpotente.

Sejam $x, y \in L$. Primeiro observe que $ad_L(x)(y) = [y, x] \in I$. Se $\bar{x} = x + I$ e $a \in I$ então $[a, \bar{x}] = [a, x] + I = [a, x]$ então existe m tal que $ad(\bar{x})^m = 0$. Segue que $ad(x)_L^{m+1}(y) = ad(x)^m([y, x]) = ad(\bar{x})^m([y, x]) = 0$. Então $ad_L(x)$ é nilpotente para todo $x \in L$. Pelo teorema de Engel L é nilpotente.

■