

Teoria de grupos - Exercício 1

Mateus Marques

5 de abril de 2024

Grupo da molécula de amônia NH_3

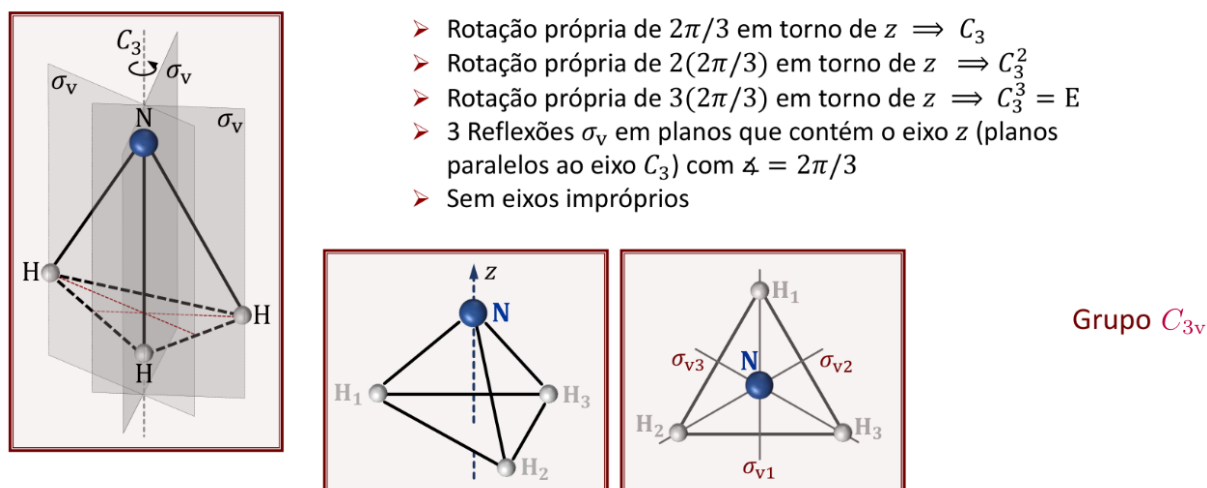
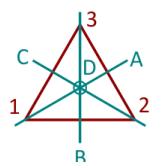


Figura 1: Grupo C_{3v} associado à molécula de amônia.

Nos slides da Aula 3 (Figura 1), a professora deu como exemplo o grupo C_{3v} da amônia. Este grupo contém 6 elementos, sendo eles

- a identidade E ;
- as três reflexões σ_{v1} , σ_{v2} e σ_{v3} representadas na Figura 1;
- as rotações C_3 (por 120°) e C_3^2 (por 240°) pelo eixo que passa pelo átomo de nitrogênio N e o baricentro do triângulo definido pelos três átomos de hidrogênio H.

Exemplo:



$\Rightarrow \{E\}$ é uma classe de ordem 1

$\Rightarrow \{A, B, C\}$ é uma classe de ordem 3

$\Rightarrow \{D, F\}$ é uma classe de ordem 2

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

Figura 2: Grupo do triângulo visto na Aula 2.

Nos slides da Aula 2 (Figura 2) a professora passou o grupo do triângulo. Note bem que se compararmos as Figuras 1 e 2, conseguimos estabelecer diretamente um isomorfismo entre o grupo do triângulo e o grupo C_{3v} . De fato, colocando os dois desenhos lado a lado na Figura 3 vemos imediatamente a identificação:

$$E \leftrightarrow E, \quad \sigma_{v1} \leftrightarrow B, \quad \sigma_{v2} \leftrightarrow A, \quad \sigma_{v3} \leftrightarrow C, \quad C_3 \leftrightarrow D, \quad C_3^2 \leftrightarrow F. \quad (1)$$

Devido a esse isomorfismo, todas as propriedades algébricas entre os grupos seram iguais, em particular a tabela de multiplicação e a partição do grupo em classes.

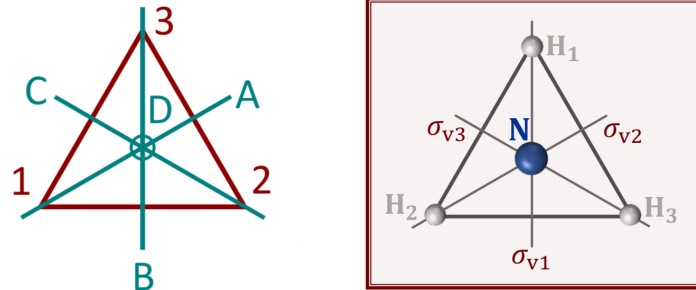


Figura 3: Identificação imediata entre os elementos do grupo do triângulo e o grupo C_{3v} .

1. Ordem

O grupo se escreve $C_{3v} = \{E, \sigma_{v1}, \sigma_{v2}, \sigma_{v3}, C_3, C_3^2\}$ e possui ordem 6.

2. Tabela de Multiplicação

Pelo isomorfismo, a tabela de multiplicação do grupo C_{3v} é idêntica ao do grupo do triângulo (mostrada na Figura 2), dado que fazamos a identificação 1. Portanto ela é:

Tabela 1: Tabela de multiplicação do grupo C_{3v} , construída pela tabela de multiplicação do grupo do triângulo (Figura 2) e o isomorfismo da equação 1.

	E	σ_{v1}	σ_{v2}	σ_{v3}	C_3	C_3^2
E	E	σ_{v1}	σ_{v2}	σ_{v3}	C_3	C_3^2
σ_{v1}	σ_{v1}	E	C_3	C_3^2	σ_{v1}	σ_{v3}
σ_{v2}	σ_{v2}	C_3^2	E	C_3	σ_{v3}	σ_{v2}
σ_{v3}	σ_{v3}	C_3	C_3^2	E	σ_{v2}	σ_{v1}
C_3	C_3	σ_{v3}	σ_{v2}	σ_{v1}	C_3^2	E
C_3^2	C_3^2	σ_{v1}	σ_{v3}	σ_{v2}	E	C_3

3. Cíclico?

Como vemos na tabela de multiplicação 1, ela não é simétrica e portanto o grupo não é abeliano. Assim, ele também não é cíclico (não existe um único elemento gerador que gera todo o grupo).

4. Abelianano?

A tabela de multiplicação 1 não é simétrica, logo o grupo não é abeliano.

5. Classes

As classes do grupo C_{3v} são idênticas às classes do grupo do triângulo, ao realizarmos a identificação na equação 1. Portanto, olhando na Figura 2 vemos que as três classes são $\{E\}$, $\{\sigma_{v1}, \sigma_{v2}, \sigma_{v3}\}$ e $\{C_3, C_3^2\}$.