Семинар 4.11.21

$T(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Пос-ть действий

1. Вычислить $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \Rightarrow$ тип линии: $\delta > 0$ – эллиптический, $\delta < 0$ – гиперболический, $\delta = 0$ – параболический

При $\delta \neq 0$ составить систему уравнений для центра [симметрии] (x_0, y_0)

$$\begin{cases} \frac{1}{2}T'_x = Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ \frac{1}{2}T'_y = Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Перенести начало коорд. в точку $O'(x_0, y_0)$: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$

Уравнение примет вид: $Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0$, $F' = T(x_0, y_0)$

2. Повернуть с.к. на такой угол φ, чтобы $B' = 0$, решить уравнение $B\,tg^2\varphi + (A-C)\,tg\varphi - B = 0$; $tg\varphi \to \sin\varphi, \cos\varphi$,

$$\begin{cases} x' = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi \\ y' = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi \end{cases}$$

Уравнение примет вид: $A'\tilde{x}^2 + C'\tilde{y}^2 + F' = 0$ (при $\delta = A'C' \neq 0$)

либо $C'\tilde{y}^2 + 2D\tilde{x} + 2E\tilde{y} + F' = 0$ (при $\delta = 0$)

3. Финишные операции.

9.4. 1) Опр. тип, привести ур-е к канонич. виду, найти канонич. с.к.

$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$

Реш. 1) $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$ – эллиптический тип

Система уравнений для центра: $\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 + 4 = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 - 1 = 0 \end{cases}$ $3y_0 + 3 = 0$, $y_0 = -1$, $x_0 = y_0 - 2 = -3$

$O'(-3, -1)$. Перенос начала: $x = x' - 3$, $y = y' - 1$

Преобразованное уравнение: $2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 + \underbrace{(18 - 12 + 5 - 24 + 2 + 9)}_{-2} = 0$

2) Ур-е для $tg\varphi$: $-2\,tg^2\varphi - 3\,tg\varphi + 2 = 0$

$2\,tg^2\varphi + 3\,tg\varphi - 2 = 0$. $tg\varphi = \frac{-3 \pm 5}{4} = \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{matrix}\right.$

Выберем $tg\varphi = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{\cos^2\varphi} = tg^2\varphi + 1 = \frac{5}{4}$, $\cos\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\vec{e}_1{}' = \{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\}$, $\vec{e}_2{}' = \{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\}$

$x' = \tilde{x}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \tilde{y}\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = \tilde{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \tilde{y}\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{5}(\tilde{x}\cdot 2 - \tilde{y})^2 - \frac{4}{5}(2\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} + 2\tilde{y}) + \frac{5}{5}(\tilde{x} + 2\tilde{y})^2 - 2 = \left(\frac{8}{5} - \frac{8}{5} + 1\right)\tilde{x}^2 + \left(\frac{2}{5} + \frac{8}{5} + 4\right)\tilde{y}^2 - 2 = 0$

$\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2 = 2$ – эллипс, $\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{1/3} = 1$.

9.4 (6) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

$A = C$, $\varphi = 45°$, $B = -1$, $\delta = 0$ – параболич. тип

$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$(x - y)^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ } ориентир: $\tilde{y}^2 = 2p\tilde{x}$.

$x - y = \sqrt{1 + (-1)^2}\left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}\right)$. $\tilde{y} = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}$, $\tilde{x} = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$, или $\begin{cases} x = \frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{\tilde{x} + \tilde{y}}{\sqrt{2}} \end{cases}$ (V)

(соответствует повороту на 45°)

$\frac{1}{2}(\tilde{x} - \tilde{y})^2 - (\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} + \tilde{y}) + \frac{1}{2}(\tilde{x} + \tilde{y})^2 - 5\sqrt{2}(\tilde{x} - \tilde{y}) - 3\sqrt{2}(\tilde{x} + \tilde{y}) + 25 =$

$= \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)\tilde{y}^2 - 8\sqrt{2}\tilde{x} + 2\sqrt{2}\tilde{y} + 25 = 0$

$\vec{e}_1{}' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $\vec{e}_2{}' = \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ (по столбцам S)

$2\underbrace{\left(\tilde{y}^2 + 2\sqrt{2}\tilde{y} + \frac{1}{2}\right)}_{\left(\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - 8\sqrt{2}\tilde{x} + 24 = 0$, $2\tilde{\tilde{y}}^2 = 8\sqrt{2}\left(\tilde{x} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$\tilde{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \tilde{\tilde{y}}$, $\tilde{x} - \frac{3}{\sqrt{2}} = \tilde{\tilde{x}}$. $\tilde{\tilde{y}}^2 = 4\sqrt{2}\tilde{\tilde{x}}$

$\tilde{O}\left(+\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (V) $x_0 = \frac{3/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$, $y_0 = \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = 1$.

Т.3* L_1: $2x^2 + 12xy + 18y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ (1)

$A_1 = 2$, $B_1 = 6$, $C_1 = 18$, $D_1 = -1$, $E_1 = -2$, $F_1 = 2$

L_2: $4x^2 + 16xy + 16y^2 + 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + 4 = 0$ (2)

$A_2 = 4$, $B_2 = 8$, $C_2 = 16$, $D_2 = \sqrt{2}$, $E_2 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $F_2 = 4$

9.8. Инварианты: $S = A + C$, $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ – не изменяются при замене ортонормированной с.к.

$\delta_{1,2} = 0$ $L_1 \to \tilde{y}^2 = 2p_1\tilde{x}$, $L_2 \to \hat{y}^2 = 2p_2\hat{x}$, $L_1 \to L_2 \Leftrightarrow p_1 = p_2$

Из 9.9 (4): $p = \sqrt{\frac{-\Delta}{S^3}}$. (1) $S_1 = 20$, $\delta_1 = 0$, $\Delta_1 = -2$
(2) $S_2 = 20$, $\delta_2 = 0$, $\Delta_2 = -2$ – одни и те же инварианты, $p_1 = p_2$.

Эти ур-я можно преобразовать друг в друга комбинацией поворота и переноса начала координат.