ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
07.05.2024

2- MUKAYESE TESTİ:

$\sum a_n \; ; \; \sum b_n$

$a_n \leq b_n \Rightarrow b_n$ YAK. ise a_n de YAK.

$a_n \leq b_n \Rightarrow a_n$ IRAK. ise b_n de IRAK.

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ serinin yakınsaklık-ıraksaklığını inceleyiniz

$$\frac{3n+1}{n^3+1} = \frac{3n}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+1} < \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2}$$

O halde verilen seri için

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ serisi p-testine göre $p=2>1$ olup seri YAKINSAKTIR.

$\sum \frac{3n+1}{n^3+1} < \sum \frac{4}{n^2}$ olduğundan $\sum \frac{3n+1}{n^3+1}$ serisi de YAK.

$b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$?

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ serisi harmonik seri olup IRAKSAK.

Dolayısıyla:

$b_n > \sum \frac{1}{n}$ olup b_n de IRAK.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
07.05.2024

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$?

$\ln n < n$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ harmonik seri ve ıraksak.

Dolayısıyla

Muk.T. göre $\sum \frac{1}{\ln n}$ IRAK.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n \cdot \sqrt{n}}$;

$\underbrace{a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}}_{\text{YAK.}}$; $0<r<1$ $\longleftarrow \sum a \cdot r^{n-1} \longrightarrow$ Geo. meti

$\frac{1}{e^n \cdot \sqrt{n}} < \frac{1}{e^n} \Rightarrow \sum \frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \underbrace{\sum \frac{1}{e^n}}_{?} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geometrik seri}} \to$ YAK

$a = \frac{1}{e}$; $r = \frac{1}{e} < 1$

Mukayese testine göre:

$\sum \frac{1}{e^n \sqrt{n}} < \underbrace{\sum \frac{1}{e^n}}_{\text{YAK.}}$ olup yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{3/2}}$?

$\sum \frac{1+\cos 2n}{2n^{3/2}} = \underbrace{\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^{3/2}}}_{\substack{\text{p-serisi olup} \\ \text{p testine göre}}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum \frac{\cos 2n}{n^{3/2}}}_{?}$

$p = 3/2 > 1$ olup YAK.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
07.05.2024

$$\frac{\cos 2n}{n^{3/2}} \leq \underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\text{YAK.}}$$ Dolayısıyla $\sum \frac{\cos 2n}{n^{3/2}}$ -de YAK.

3) LİMİT (LİMİT MUKAYESE) TESTİ:

$\sum a_n$; $\sum b_n$; $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$ veya $+\infty$

- $0 < L < \infty \Rightarrow$ seriler aynı karakterli
- $L = 0$ ve $\sum b_n$ YAK. ise $\sum a_n$ 'de YAK.
- $L = \infty$ ve $\sum b_n$ IRAK. ise // IRAK.

/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$?

Seri için $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak serisini alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = 1 \neq 0$$

$1 \in (0,\infty)$

olup seriler aynı karakterli

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ IRAKSAK olup $\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ 'de IRAKSAK.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
07.05.2024

$a_n=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$? $b_n=\sum \frac{1}{n}$ serisi limit testine tabi tutulsun

$$L=\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}\cdot n = 2 \neq 0 \underbrace{\in (0,\infty)}_{\text{Seriler aynı karakterli}}$$

b_n ıraksak olup a_n'de ıraksak.

$a_n=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+3}{n^4+5n^3}$? $\underbrace{b_n=\sum \frac{1}{n}}$

$$L=\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n+3}{n^4+5n^3}\cdot\frac{n}{1}=1 \in (0,\infty)$$ seriler aynı karakterli

$b_n=\sum\frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak olup $\sum a_n$'de ıraksak.

$a_n=\sum_{n=1}^{\infty} \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$? $b_n=\sum\left(\frac{1}{n}\right)^3$ seçilsin.

$$L=\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^3(1/n)}{\left(\frac{1}{n}\right)^3}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right]^3=1 \in (0,\infty)$$ seriler aynı karakterli

$b_n=\sum\frac{1}{n^3}$ p-testine göre $p=3>1$ YAK. O halde a_n de YAK.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
07.05.2024

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \; ?$$

$b_n = \sum \frac{1}{e^n}$ seçilsin.

$$\sum \frac{1}{e^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}}_{\text{geom.}}$$

$a = 1/e$; $r = \frac{1}{e} < 1$

$\in 0 < r < 1$

$(0,1)$

YAK.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \cdot \frac{e^n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{1+e^{2n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{B}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2.e^{2n}}{2.e^{2n}} = 1 \in (0,\infty)$$ olup seriler aynı karakterli.

$\sum b_n$ YAK. olup $\sum a_n$-de YAK.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n} \; ?$$

$\underbrace{b_n = \sum \frac{1}{n}}_{\text{Harmonik seri ıraksak}}$ seçilsin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2)}{n} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \ln(n^2) = \lim_{n\to\infty} (2.\ln n) = \infty$$

$L = +\infty$ ve $\sum b_n$ IRAKSAK olup $\sum a_n$-de IRAKSAK.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
07.05.2024

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}}$? $b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \to$ p-testine göre $p=\frac{1}{2}<1$ ıraksak serisi şeklinde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+1)\cdot n}{n^2+2}} = 1 \neq 0 \in (0,\infty)$$

seriler aynı karakterli.

b_n ıraksak olup a_n serisi de ıraksak.

4.) KÖK TESTİ:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} : \begin{cases} L<1 ; & \text{YAK.} \\ L>1 ; & \text{IRAK.} \\ L=1 ; & \text{Test kesin sonuç vermez.} \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+5}{3^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{5}{3^n}\right]^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1+ \frac{5}{3^n \cdot \frac{2^n}{3^n}}\right)\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \left[1+ \underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\to 0}\right]\right]^{1/n}$$

$= \frac{2}{3} < 1$ olup seri YAKINSAK.