SORU-1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 + (2 + a_n)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde verilmiş olan rekürsif dizinin

(i) **Monoton** bir dizi olup olmadığını araştırınız. (Tümevarım metodu kullanarak) **(10p)**
(ii) Eğer varsa **alt** ve **üst** sınırlarını bulunuz (Tümevarım metodu kullanarak) **(10p)**
(iii) Dizi **yakınsak** veya **ıraksak** mıdır? (Cevabınızı açıklayınız) **(3p)**
(iv) Eğer varsa dizinin **limitini** bulunuz. **(7p)**

CEVAP-1)
(i)

$a_1 = 2$

$a_2 = 2 + \sqrt{2+2} = 4 > a_1$

$\forall k \in N^+$ için:

$a_{k+1} > a_k$ (*) kabulü doğru olsun (olduğunu kabul edelim). Bu durumda eğer;

$a_{k+2} > a_{k+1}$ (**) olduğu gösterilebilirse;

$\forall n \in N^+$ için $a_{n+1} > a_n$ olarak dizi **monoton artan** olur. Dolayısıyla;

$\forall k \in N^+$ için (**) ele alınırsa:

$$a_{k+2} > a_{k+1} \Rightarrow a_{k+2} = 2 + \sqrt{2 + a_{k+1}} > 2 + \sqrt{2 + a_k} = a_{k+1}$$
$$2 + \sqrt{2 + a_{k+1}} > 2 + \sqrt{2 + a_k}$$
$$\sqrt{2 + a_{k+1}} > \sqrt{2 + a_k}$$
$$2 + a_{k+1} > 2 + a_k$$
$$a_{k+1} > a_k \quad (*)$$

elde edilmiş olur. Yani (*) kabulü doğrudur. O halde dizi **monoton artan**dır.

Sınırlılık için:
(ii)

$a_1 = 2 < 5$

$a_2 = 2 + \sqrt{2+2} = 4 < 5$

$\forall k \in N^+$ için:

$a_k < 5$ (*) kabulü doğru olsun (olduğunu kabul edelim). Bu durumda eğer;

$a_{k+1} < 5$ (**) olduğu gösterilebilirse;

$\forall n \in N^+$ için $a_n < 5$ olarak dizi **sınırlı** olur. Dolayısıyla;

$\forall k \in N^+$ için (**) ele alınırsa:

$$a_{k+1} < 5 \Rightarrow a_{k+1} = 2 + \sqrt{2 + a_k} \qquad (a_k < 5 \text{ kabul edildiğinden } (*))$$
$$= 2 + \sqrt{2+5} \qquad (a_k = 5 \text{ bile kabul edilse})$$
$$= 2 + \sqrt{7} \qquad (\sqrt{7} < 3)$$
$$< 5$$
$$a_{k+1} < 5 \quad (**)$$

elde edilmiş olur. Yani (**) gösterilmiş olur. Dolayısıyla; o halde dizi **sınırlı**dır.

$\forall n \in N^{+}$ için:

$a_n < 5$

$a_{n+1} = 2 + \sqrt{2 + a_n}$ dizisi için dizi monoton artan ve $a_1 = 2$, $a_n < 5$ olduğundan;

$$a_1 = 2 \leq a_n < 5$$

olarak $a_1 = 2$ bir **alt sınır**, 5 ise bir **üst sınır**dır.

(iii) Monoton artan (azalan) ve sınırlı her dizi yakınsak, yakınsak her dizinin de limiti vardır. Ayrıca yakınsak bir dizinin bütün alt dizileri de dizi ile aynı limite yakınsayacağından;

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = L \quad \text{olsun.}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \sqrt{2 + a_n}\right)$$

$$L = 2 + \sqrt{2 + L}$$

$$L - 2 = \sqrt{2 + L}$$

$$(L - 2)^2 = 2 + L$$

$$L^2 - 5L + 2 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.2}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$L_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \quad , \quad L_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

Dizi için $a_1 = 2$ ve dizi monoton artan olduğundan dizinin limiti 2 den büyüktür. Dolayısıyla $L_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} < 2$, $2 < L_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} < 5$ olduğundan dizinin limiti $L = L_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ dir.

Bu durumda dizi için;

$$2 \leq a_n \leq \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

yazılacak olup;

$$\text{E.B.A.S}(a_n) = 2$$

$$\text{E.K.Ü.S}(a_n) = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$