ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI

20.05.2024

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$ serisinin yak/ırak. durumunu inceleyiniz.

$b_n = \sum \frac{1}{e^{n/3}}$ serisi seçilsin.

$$\sum \frac{1}{e^{n/3}} = \sum \left(\frac{1}{e^{1/3}}\right)^n = \sum \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)^n \rightarrow \text{geometrik}$$

$|r| = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} > 1$ olup seri IRAKSAK

Limit mukayese testi tercih edilsin.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{e^{n/3}}}{\frac{1}{e^{n/3}}} = \lim_{n\to\infty} n^2$$

$L = +\infty$

Limit muk. testine göre $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \underbrace{L \in \mathbb{R} \text{ veya } +\infty}_{\text{seriler aynı karakterli}}$

b_n IRAKSAK olup a_n'de IRAKSAK.

$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^9+1}}$? Limit mukayese testi ile.

$b_n = \sum \frac{1}{k^2}$ Yakınsak (p testine göre $p=2>1$) serisi seçilsin

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^9+1}}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{\sqrt[3]{k^3+1}} \cdot \frac{k^2}{1} = 2 \in (0,+\infty) \Rightarrow \text{seriler aynı karakterli}$$

$2 \neq 0$

b_n YAK. olup a_n'de YAK.

$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$? Limit mukayese testi ile.

$b_n = \sum \frac{1}{n}$ harmonik ıraksak serisi seçilsin

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-(1+1/n)}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{n}{1}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \overset{?}{=} 1 \neq 0, \infty \quad \text{seriler aynı karakterli.}$$

b_n IRAK. olup a_n de IRAKSAK.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
20.05.2024

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}$? Limit mukayese testi ile.

"Mesela kök testi ile:
$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$; $\rho \in [0,1)$ Y. ; $\rho > 1$ I ; $\rho = 1$?

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n-1)^n}{n^{n+3}}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)}{n^{\frac{n+3}{n}}}$$

$n\to\infty$ için "1"

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

↳ Kök testi sonuç vermez

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

Limit mukayese testi ile

$b_n = \sum \frac{1}{n^3}$ YAKINSAK (p-testine göre $p=3>1$) serisi seçilsin.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^n}{n^{n+3}} \cdot \frac{n^3}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0, \infty$$

seriler aynı karakterde!

b_n YAK. olup a_n de YAK.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\sqrt{n} \cdot 4^n}$? Kök testi ile

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{\sqrt{n}\cdot 4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{n^{1/2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(n^{\frac{1}{n}})^{1/2}} = \frac{5}{4} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[\sqrt[n]{n}]^{1/2}}$$

?

$$= \frac{5}{4} \cdot 1 > 1 \text{ olup}$$

seri IRAKSAK

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$? Kök testi ile

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1 \quad \in [0,1)$$

olup YAKINSAK.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$? Kök testi ile

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{(e^n+n)^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e^n+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2}{e^n+n} = \ldots = \frac{1}{\infty} = 0 \in [0,1)$$

?

YAKINSAK

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI
20.05.2024

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^3+1} \ ?$$

Öncelikle

$\sum |a_n| \to ?$

$\sum |a_n| = \sum \frac{n}{n^3+1} \ ?$ $\quad b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ YAK. $(p=2>1)$ serisi ile Limit mukayese testi uygulanır

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+1} \cdot \frac{n^2}{1} = 1 \neq 0, \infty$ olarak seriler aynı karakterli

b_n YAK. olup $|a_n|$ de YAK. Yani a_n serisi "mutlak yakınsaktır"

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin(n)}{n^2} \ ?$$

$\sum |a_n| = \sum \frac{\sin(n)}{n^2} \ ?$

$\underbrace{\text{Limit mukayese testi için:}}$ $b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak (p-testine göre $p=2>1$) serisi seçilsin.

$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \sin(n) \ ?!$ uygun değil.

Dolayısıyla $\underbrace{\text{"Mukayese testi ile"}}$

$a_n \leq k \cdot b_n$

b_n YAK. ise a_n Y.

a_n IRAKSAK ise b_n I.

$b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ Y. serisi.

$\frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ olarak $\sum \frac{1}{n^2}$ Y. olup $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ Y.

Yani a_n serisi "mutlak yakınsak"!

$$a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{2^n} \ ? = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{2^n} \ ?$$

$\sum |a_n| = \sum \frac{n}{2^n} \ ?$

Kök testi:

$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \dots = \frac{1}{2} < 1$ $\in [0,1)$ olup $\sum |a_n|$ serisi YAK.

Dolayısıyla a_n serisi "Mutlak Yakınsak"

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI

20.05.2024

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln(n)} \ ? \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \ ?$$

Acaba $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ → mutlak yakınsak mı? $|a_n| = \sum \frac{1}{\ln n}$?

Mukayese testi uygulansın.

$b_n = \sum \frac{1}{n}$ harmonik ıraksak serisi alınsın.

$n > \ln n \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ olarak $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olup $|a_n| = \sum \frac{1}{\ln(n)}$ ıraksak

O halde $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ serisi "mutlak yakınsak" değildir.

$$a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)}{\sqrt{n}\cdot(n-1)} \ ?$$

Mutlak yakınsak mı? $|a_n| = \sum \frac{2n-1}{\sqrt{n}\cdot(n-1)}$?

$b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; Iraksak (p-testine göre $p = \frac{1}{2} < 1$) serisi seçilsin.

Limit mukayese testi ile:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}\cdot(n-1)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = 2 \neq 0, \infty$$ seriler aynı karakterli

$b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olup $|a_n| = \sum \frac{2n-1}{\sqrt{n}\,(n-1)}$ ıraksak.

Dolayısıyla a_n mutlak yakınsak değil.

a_n, acaba şartlı yakınsak mı?

$a_n > 0 \longrightarrow \frac{2n-1}{\sqrt{n}\cdot(n-1)} > 0$ ✓

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}\cdot(n)} \cdot \frac{\sqrt{n}\cdot(n-1)}{(2n-1)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2n^2-n-1}{2n^2-n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ✓

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{n}\cdot(n-1)} = 0$

Dolayısıyla seri mutlak yak. olmadığından "şartlı yakınsak"tır.

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI

20.05.2024

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cdot\cos(n\pi)}{2n+3} \ ?$$

$y=x.e^{-x}$ fonksiyonu için seri açılımından yararlanarak $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}}$ alterne seri toplamını bulunuz.

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$x \to -x$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!}$$

$$x.e^{-x} = x-x^2+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x\cdot\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{n!}$$

$$x.e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{n!}$$

$x=1$ için

$$1.e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1^{n+1}}{n!}$$

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta-\theta+\theta^3/6}{\theta^5} = ?\ \left[\frac{0}{0}\right] \text{ seri açılımı ile?}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\left(\cancel{\theta}-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\dots\right)-\cancel{\theta}+\frac{\theta^3}{6}}{\theta^5} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cancel{-\frac{\theta^3}{3!}}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\dots+\cancel{\frac{\theta^3}{6}}}{\theta^5}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{5!}-\underbrace{\frac{\theta^2}{7!}+\dots}_{0} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

ANALİZ-II, SERİ UYGULAMALARI

20.05.2024

$f(x)=\int_0^x t^2 \cdot e^{-t^2}\,dt$: f(x) in Maclaurin seri açılımı genel terimini yazınız.

$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} \Rightarrow t\to -t^2$ için $e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=\sum\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{n!}$

$t^2\cdot e^{-t^2}=t^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n+2}}{n!}$

$f(x)=\int_0^x t^2\cdot e^{-t^2}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n+3}}{n!\,(2n+3)}$ ✓

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}=?\left[\frac{0}{0}\right]^B$ seri açılımı ile

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

$\ln(1+x^2)=\int\frac{2x\cdot dx}{1+x^2}$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$; $x\to -x^2$ $\quad \frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$

$\frac{2x}{1+x^2}=\sum(-1)^n\cdot x^{2n}\cdot(2x)=2\cdot\sum(-1)^n\cdot x^{2n+1}$

$\frac{2x}{1+x^2}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n+1}$

$\int\frac{2x\cdot dx}{1+x^2}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+2}=\sum\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+2}}{n+1}$

Bunlar yerine yazılırsa;

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots}{1-\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\left[1-\underbrace{\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}}_{\to 0}-\cdots\right]}{\cancel{x^2}\left[\frac{1}{2!}-\underbrace{\frac{x^2}{4!}+\cdots}_{\to 0}\right]}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$