

KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ

Herhangi bir eğrinin denklemi belirlenmeden önce bir koordinat sistemi seçmek yani x ve y eksenleri olarak işlem sağlayacak birbirine dik iki doğru seçmek önemlidir. Denklemin formu bu seçime bağlıdır. Örnek olarak, bu bölümde

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x - 164y + 69 = 0 \text{ ve } x^2 - 4y = 0$$

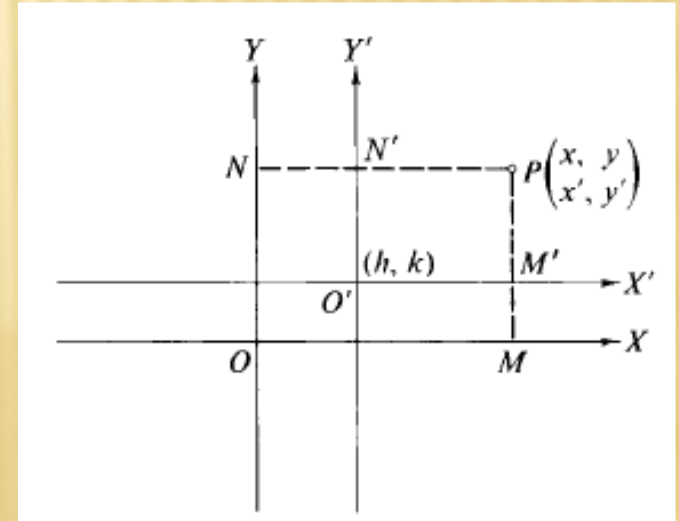
denklemlerinin aynı eğriyi temsil ettiklerini daha sonra göstereceğiz. Fark, denklemi elde etmede kullanılan belirli koordinat eksenlerinden kaynaklanır. Açıkçası bu denklemlerden birisiyle çalışmak daha keyiflidir. Bu nedenle ilk denklem elde etmek için eksenleri seçmede dezavantajlı isek ikinciye elde etmek için eksenleri nasıl değiştireceğimizi bilmemiz gereklidir. Bu bölümde bu problemi inceleyeceğiz.

EKSENLERİN ÖTELENMESİ

Koordinat eksenlerindeki en basit deęişiklik **ÖTELEME** dir.

Tanım: Koordinat eksenlerinin kendisine paralel olarak ve kendisi ile aynı doğrultuda seğilmesi ancak çakışmaması durumunda koordinat eksenleri ötelenmiştir denir.

Bir notasyon kuralı olarak üslü harfler yeni eksenleri gösterirken üssüz harfler orijinal eksenlere işaret eder. Böylece bir P noktası hangi koordinat eksenleri kümesinin kullanıldığına bağlı olarak (x, y) veya (x', y') koordinatları ile tanımlanabilir.



Orijinal eksenlere atıfta bulunulan yeni orijin O' 'nun koordinatları (h, k) olsun.

Bu durumda koordinat eksenleri, yeni orijin (h, k) 'ya ötelenmiştir deriz.

$$NP = x, \quad N'P = x', \quad NN' = h$$

$$MP = y, \quad M'P = y', \quad MM' = k$$

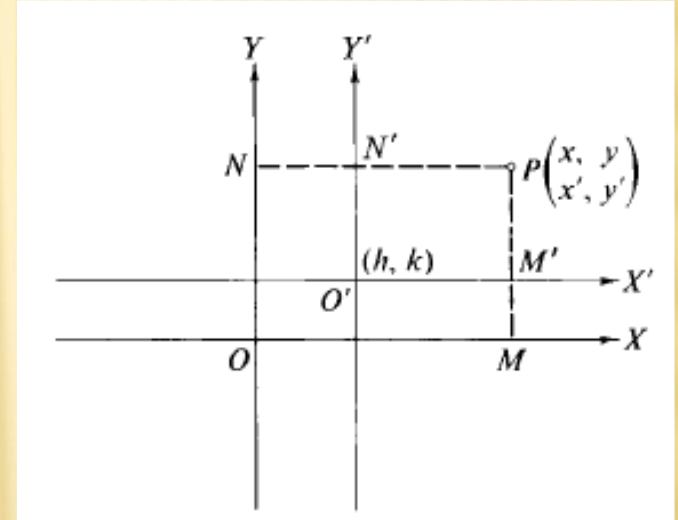
Bu yüzden iki koordinat sistemi arasında

$$x = x' + h, \quad y = y' + k$$

ya da eşdeğer olarak

$$x' = x - h, \quad y' = y - k$$

ilişkisi vardır.



Example 4-1. Determine the equation of the curve represented by the equation $x^2 - 2x + 2y + 7 = 0$ if the coordinate axes are translated to the new origin $(1, -3)$.

From (4-1) we have

$$x = x' + 1,$$

$$y = y' - 3,$$

as the relationship between the two coordinate systems. Then we substitute these for x and y in the given equation and obtain

$$(x' + 1)^2 - 2(x' + 1) + 2(y' - 3) + 7 = 0,$$

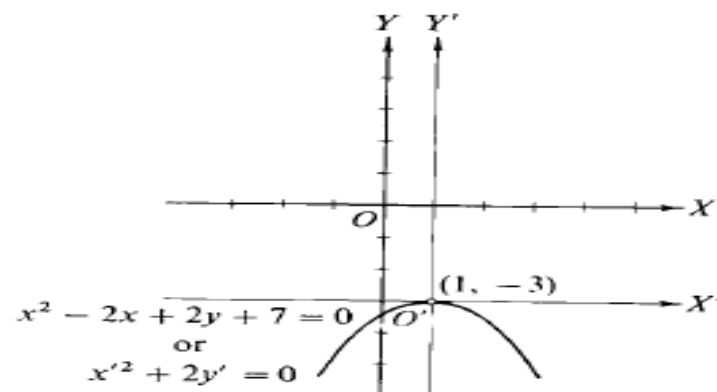


Figure 4-2

which simplifies to

$$x'^2 + 2y' = 0.$$

This is the equation of the given curve referred to the new axes (Figure 4-2).

Translation of axes may often be used to eliminate first-degree terms from the equation of a curve. The following example illustrates one device for doing this.

Example 4-2. Let the equation of a curve be $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 36 = 0$. Use translation of axes to obtain a new equation for this curve in which there are no first-degree terms.

We write this equation in the form

$$(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 6y) = 36,$$

and then complete the square of each expression in parentheses, obtaining

$$(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 - 6y + 9) = 36 + 4 - 36,$$

or

$$(x + 2)^2 - 4(y - 3)^2 = 4.$$

Now we set

$$x' = x + 2, \quad y' = y - 3,$$

which, according to (4-2), translates the axes to the new origin $(-2, 3)$. Under this translation the equation reduces to

$$x'^2 - 4y'^2 = 4,$$

which satisfies the requirement of no first-degree terms. Figure 4-3 shows this

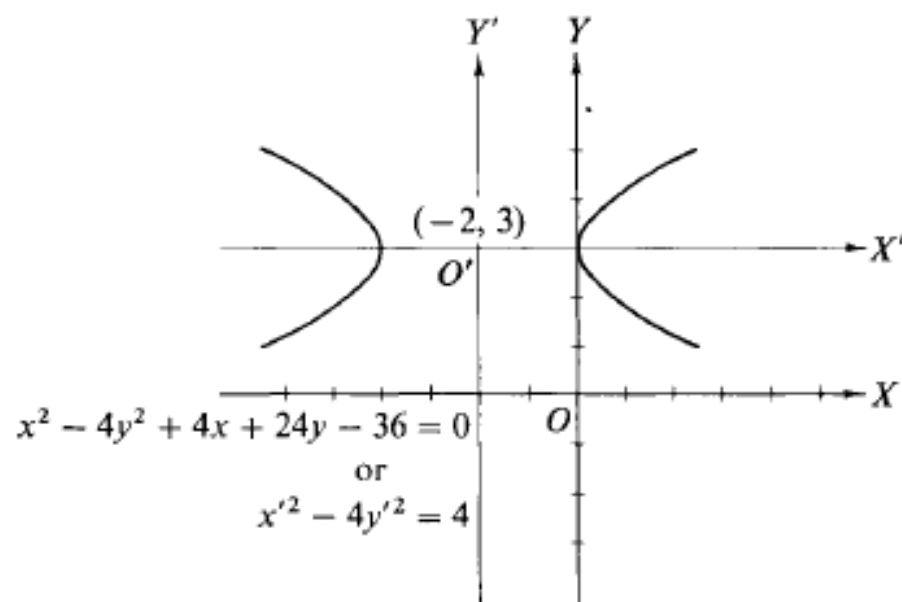


Figure 4-3

curve in relation to both sets of axes.

Variations of this method may be used to obtain translations which simplify many equations of curves. It is particularly useful for curves with second-degree equations as will be seen in the next chapter.

Find a coordinate system in which the equation of the parabola $x = 2y^2 - 4y - 1$ takes the form $X = 2Y^2$.

SOLUTION The vertex of the parabola $x = 2y^2 - 4y - 1 = 2(y - 1)^2 - 3$ (Figure 9.66a) is $(-3, 1)$. If we choose X - and Y -axes through this point (Figure 9.66b), then $x = X - 3$ and $y = Y + 1$. When we substitute these into $x = 2(y - 1)^2 - 3$,

$$X - 3 = 2(Y)^2 - 3 \quad \implies X = 2Y^2.$$

FIGURE 9.66a Parabola $x = 2y^2 - 4y - 1$

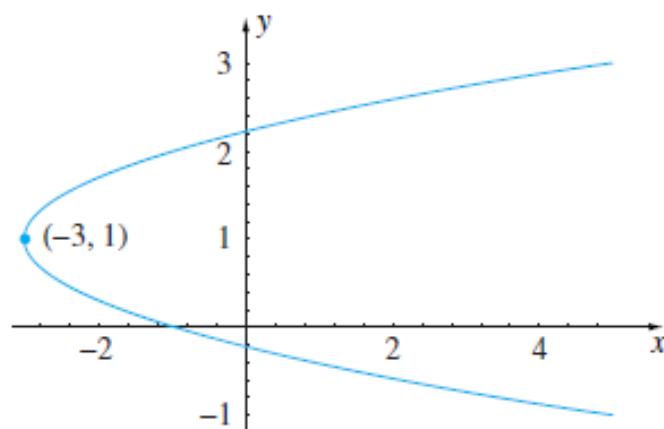
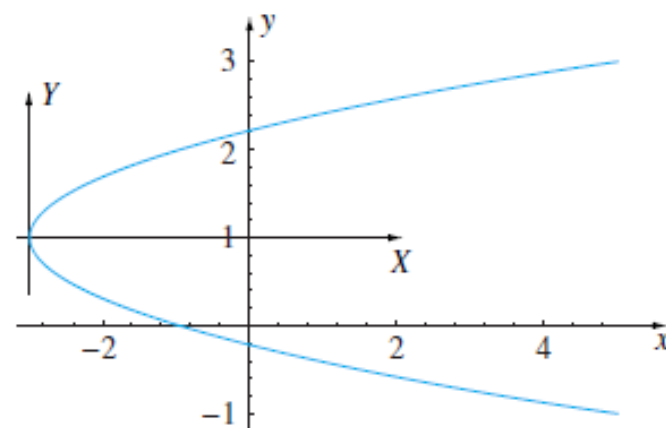


FIGURE 9.66b Using translated coordinates to simplify $x = 2y^2 - 4y - 1$



TEOREM: Ötelemeden sonra uzaklıklar, açılar ve alanlar değişmez.

Uzaklık için ispat:

OXY sisteminde (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları için uzaklık aşağıdaki formül ile hesaplanabiliyordu:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ötelemeden sonra $O'X'Y'$ sisteminde yukarıdaki noktalar

$$x_1 = x_1' + h, y_1 = y_1' + k$$

$$x_2 = x_2' + h, y_2 = y_2' + k$$

olacak şekilde (x_1', y_1') ve (x_2', y_2') noktalarına dönüşür. Buradan

$$\begin{aligned} d' &= \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2} = \sqrt{((x_1 - h) - (x_2 - h))^2 + ((y_1 - k) - (y_2 - k))^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d \end{aligned}$$

olur.

Açı için ispat:

OXY sisteminde

$$d_1 : y = m_1x + n_1 \text{ ve } d_2 : m_2x + n_2$$

doğruları arasındaki açı aşağıdaki formülle elde edilebiliyordu:

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

Ötelemekten sonra yeni formüller;

$$d_1' : y' + k = m_1(x' + h) + n_1 \text{ ve } d_2' : y' + k = m_2(x' + h) + n_2$$

$$d_1' : y' = m_1x' + (m_1h + n_1 - k) \text{ ve } d_2' : y' = m_2x' + (m_2h + n_2 - k)$$

Doğrular arasındaki yeni açı:

$$\tan \theta' = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \tan \theta \quad \text{buradan, } \theta = \theta'$$

Alan için ispat:

Köşe noktaları $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ olan üçgenin alanı:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantın özelliklerine göre bir sütunu bir sayı ile çarpıp diğer sütunun üstüne eklemek determinantın değerini değiştirmez. Üçüncü sütun $-h$ ile çarpıp birinci sütunun üstüne ekleyip, daha sonra $-k$ ile çarpıp ikinci sütunun üstüne eklenirse determinantın değeri değişmez:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - h & y_1 - k & 1 \\ x_2 - h & y_2 - k & 1 \\ x_3 - h & y_3 - k & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = A'$$

Determine the new equation of each of the curves in Exercises 1–6 when the axes are translated to the indicated new origin.

1. $y^2 - 10y - 10x - 5 = 0$, $(-3, 5)$
2. $x^2 + 4x - 4y + 12 = 0$, $(-2, 2)$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, $(2, -3)$
4. $3x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$, $(-1, 2)$
5. $5x^2 - y^2 + 30x - 2y + 43 = 0$, $(-3, -1)$
6. $x^2 - 4y^2 - 8x - 24y - 24 = 0$, $(4, -3)$

Eliminate the first-degree terms in the equations in Exercises 7–12 by an appropriate translation determined by the method illustrated in Example 4-2. What is the new origin of coordinates?

7. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$
8. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 1 = 0$
9. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 119 = 0$
10. $9x^2 - 16y^2 + 36x + 64y - 172 = 0$
11. $16x^2 + 20y^2 + 48x - 20y - 39 = 0$
12. $45x^2 - 36y^2 - 30x - 96y - 419 = 0$

Determine the new equation of each of the curves in Exercises 1–6 when the axes are translated to the indicated new origin.

1. $y^2 - 10y - 10x - 5 = 0$, $(-3, 5)$
2. $x^2 + 4x - 4y + 12 = 0$, $(-2, 2)$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, $(2, -3)$
4. $3x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$, $(-1, 2)$
5. $5x^2 - y^2 + 30x - 2y + 43 = 0$, $(-3, -1)$
6. $x^2 - 4y^2 - 8x - 24y - 24 = 0$, $(4, -3)$

Eliminate the first-degree terms in the equations in Exercises 7–12 by an appropriate translation determined by the method illustrated in Example 4-2. What is the new origin of coordinates?

7. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$
8. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y + 1 = 0$
9. $9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 119 = 0$
10. $9x^2 - 16y^2 + 36x + 64y - 172 = 0$
11. $16x^2 + 20y^2 + 48x - 20y - 39 = 0$
12. $45x^2 - 36y^2 - 30x - 96y - 419 = 0$

EKSENLERİN DÖNDÜRÜLMESİ

*Koordinat eksenlerinde daha karmaşık olan fakat eşit derecede kullanışlı olan şey **DÖNDÜRME** dir.*

Tanım: *Yeni eksenler orijini değiştirmeden seçilirse, eski eksenlerin orijin etrafında bir θ açısı boyunca döndürülmesi onları yenileriyle çakıştıracak şekilde seçilirse, koordinat eksenlerinin bir θ açısı boyunca döndürüldüğü söylenir.*

Önceki bölümde tanıtılan aynı notasyonu kullanacağız. O zaman bir P noktası, referans için kullanılan eksen setine bağlı olarak (x,y) veya (x',y') ile tanımlanabilir. Dönme açısını θ ile gösteririz.

Şimdi eski ve yeni koordinatlar arasındaki ilişkiyi elde edeceğimiz şekli oluşturacağız. Bunu PR ve TS yi OX e dik, PT yi OX' ye dik ve QT yi PR 'ye dik olarak oluşturarak yapıyoruz. O zaman, P noktası için

$$x = OR, \quad y = RP, \quad x' = OT, \quad y' = TP$$

ve

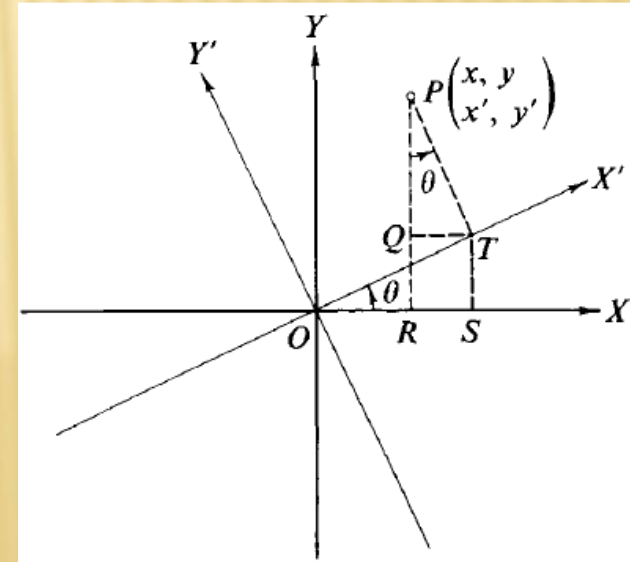
$$\angle TOS = \angle QPT = \theta$$

Bu durumda, şekilden

$$x = OR = OS - RS = OS - QT$$

Sağ üçgenler OTS ve PQT için

$$\frac{OS}{OT} = \cos \theta, \quad \frac{QT}{TP} = \sin \theta$$



$\theta > 0$ ise, döndürme saat yönünün tersinedir.

$$OS = OT \cos \theta = x' \cos \theta, \quad QT = TP \sin \theta = y' \sin \theta,$$

Buradan,

$$x = OS - QT = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

Benzer olarak,

$$y = RP = RQ + QP = ST + QP$$

ve

$$\frac{ST}{OT} = \sin \theta, \quad \frac{QP}{TP} = \cos \theta$$

ya da

$$ST = OT \sin \theta = x' \sin \theta, \quad QP = TP \cos \theta = y' \cos \theta$$

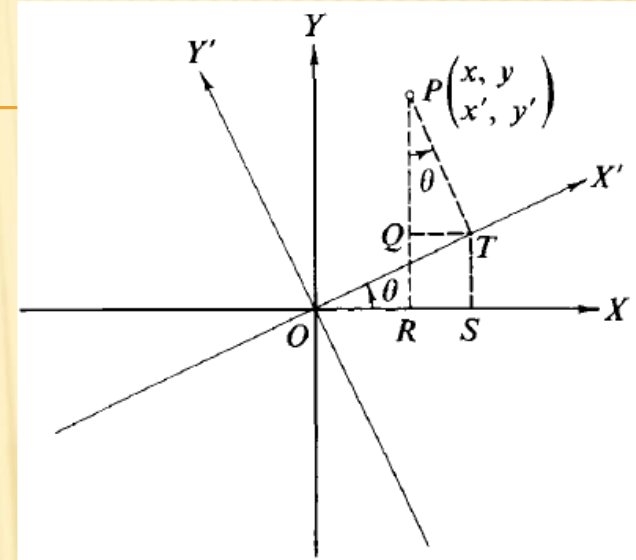
Buradan,

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Sonuçta döndürme denklemleri:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$



Bu x ve y değerlerini bir eğrinin denkleminde yerine koyarsak, eğri için orijinal konumlarından θ açısı boyunca döndürülmüş yeni bir eksen kümesine atıfta bulunan yeni bir denklem elde ederiz. Orijin merkezi noktadır.

Example 4-3. The equation of a curve is $x^2 + y^2 + 2xy + 2\sqrt{2}(x - y) = 0$. Find its equation if the axes are rotated through an angle of 45° .

Equations (4-3), for $\theta = 45^\circ$, take the form

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),$$

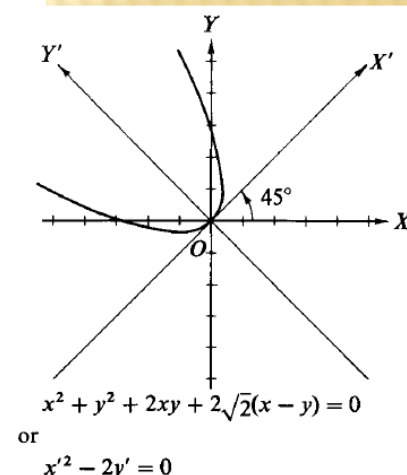
so the new equation for the curve is given by

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right]^2 + 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right] \\ + 2\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \right] = 0. \end{aligned}$$

When the terms in this equation are expanded and like terms collected we obtain the new equation

$$x'^2 - 2y' = 0.$$

Figure 4-5 shows this curve in relation to both sets of axes.



Example 4-4. The equation of a curve is

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x - 164y + 69 = 0.$$

Find its equation if the axes are rotated through the angle $\text{Arctan } \frac{4}{3}$.

We have as the angle of rotation

$$\theta = \text{Arctan } \frac{4}{3},$$

so θ is a first quadrant angle whose tangent is $\frac{4}{3}$. Hence, from Figure 4-6 $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \frac{3}{5}$, and the equations of rotation are

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' = \frac{1}{5}(3x' - 4y'),$$

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' = \frac{1}{5}(4x' + 3y').$$

We substitute these values of x and y in the given equation and obtain

$$\begin{aligned} \frac{9}{25}(3x' - 4y')^2 + \frac{24}{25}(3x' - 4y')(4x' + 3y') + \frac{16}{25}(4x' + 3y')^2 \\ + \frac{2}{5}(3x' - 4y') - \frac{164}{5}(4x' + 3y') + 69 = 0. \end{aligned}$$

When we clear of fractions, expand, and collect like terms, we get

$$625x'^2 - 3250x' - 2500y' + 1725 = 0,$$

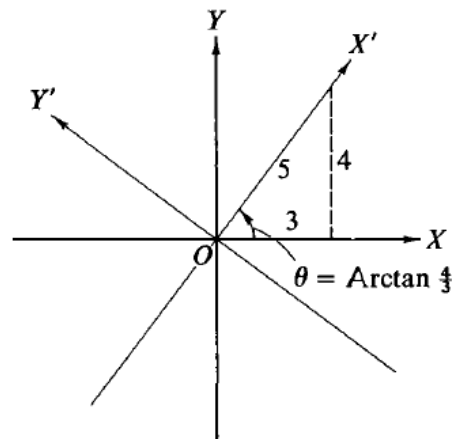
or, dividing both sides by 25,

$$25x'^2 - 130x' - 100y' + 69 = 0,$$

which is the equation called for in the statement of this example.

Further simplification can be made if we complete the square on the terms in x' . We have

$$25(x'^2 - \frac{26}{5}x') - 100y' + 69 = 0,$$



or

$$25(x'^2 - \frac{26}{5}x' + \frac{169}{25}) - 100y' + 69 - 169 = 0,$$

or

$$25(x' - \frac{13}{5})^2 - 100(y' + 1) = 0.$$

Now, if we set

$$x'' = x' - \frac{13}{5},$$

$$y'' = y' + 1,$$

that is, if we translate the x' and y' axes to the new origin $(\frac{13}{5}, -1)$, we obtain the new equation

$$x''^2 - 4y'' = 0,$$

Figure 4-7 shows this curve and the three sets of coordinate axes corresponding to the three different equations.

The rotations in the preceding two examples were very effective in producing simplified equations. The student may very well ask at this point how such

$$\left. \begin{aligned} 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 2x - 164y + 69 &= 0 \\ \text{or } 25x'^2 - 130x' - 100y' + 69 &= 0 \\ \text{or } x''^2 - 4y'' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

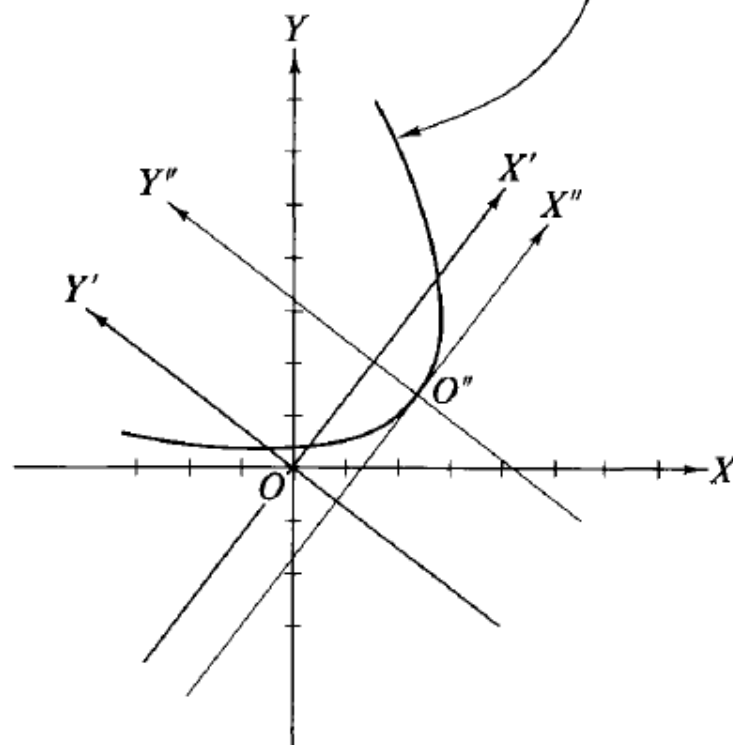


Figure 4-7

Find the equation of the hyperbola $x^2 - y^2 = 1$ when it is rotated by $\pi/6$ radians counterclockwise around the origin.

SOLUTION Rotating the curve $\pi/6$ radians is equivalent to rotating axes by $-\pi/6$ radians (Figure 9.70a), in which case

$$x = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}, \quad y = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2}.$$

Substitution of these into $x^2 - y^2 = 1$ gives

$$\left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 - \left(-\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2}\right)^2 = 1,$$

which simplifies to $X^2 + 2\sqrt{3}XY - Y^2 = 2$. This is the equation of the hyperbola with respect to the XY -coordinates. It follows that the equation of the hyperbola in Figure 9.70b is $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$.

Equivalently, we could write the equation of the hyperbola in Figure 9.70c with respect to the XY -axes as $X^2 - Y^2 = 1$, and then use 9.37 with $\theta = \pi/6$,

$$X = \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2}, \quad Y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2}.$$

Substitution of these into $X^2 - Y^2 = 1$ once again leads to $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$.

FIGURE 9.70a Instead of rotating curve counterclockwise, rotate axes clockwise

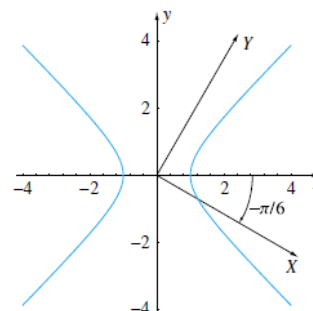


FIGURE 9.70b Results of rotating hyperbola

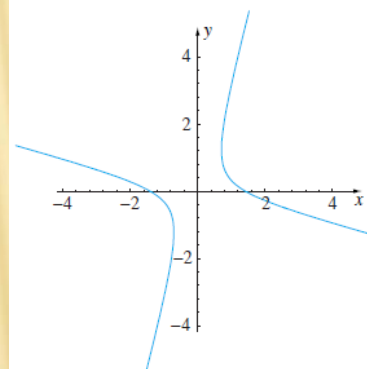
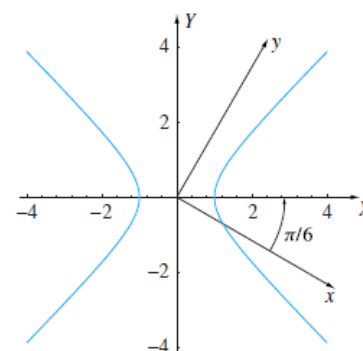


FIGURE 9.70c Rotate the curve counterclockwise



Eğer XY-koordinat sistemi x-doğrultusunda h birim, y doğrultusunda k birim ötelenirse ve saat yönünün tersine θ açısı kadar döndürülürse x, y, X ve Y arasındaki ilişkiler şu şekilde olur:

$$x = (X + h)\cos\theta - (Y + k)\sin\theta,$$

$$y = (X + h)\sin\theta + (Y + k)\cos\theta$$

For example, to find the equation of the ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ is translated 2 units to the right, 1 unit down, and rotated clockwise $\pi/3$ radians,

$$x = \frac{1}{2}(X - 2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(Y + 1), \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(X - 2) + \frac{1}{2}(Y + 1).$$

Substitution of these into $4x^2 + 9y^2 = 36$ gives

$$4 \left[\frac{1}{2}(X - 2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(Y + 1) \right]^2 + 9 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(X - 2) + \frac{1}{2}(Y + 1) \right]^2 = 36,$$

and this simplifies to

$$31(X - 2)^2 - 10\sqrt{3}(X - 2)(Y + 1) + 21(Y + 1)^2 = 144.$$

The equation of the ellipse is therefore

$$31(x - 2)^2 - 10\sqrt{3}(x - 2)(y + 1) + 21(y + 1)^2 = 144.$$

Teorem: Döndürmeden sonra uzaklıklar, açılar ve alanlar değişmez.

UYARI: Ortogonal sistemlerde öteleme ve döndürme komütatif değildir.

$$T(h,k)R(\theta) \neq R(\theta)T(h,k)$$

$$T(h,k): x = x' + h, y = y' + k \text{ ve } R(\theta): \begin{matrix} x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{matrix}$$

olsun.

$$R(\theta)T(h,k) \Rightarrow \begin{matrix} x = x' + h \\ y = y' + k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta + h \\ y = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta + k \end{matrix}$$

$$T(h,k)R(\theta) \Rightarrow \begin{matrix} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x' = x'' + h \\ y' = y'' + k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = (x'' + h) \cos \theta - (y'' + k) \sin \theta \\ y = (x'' + h) \sin \theta + (y'' + k) \cos \theta \end{matrix}$$

In Exercises 1–5 find the new equation if the coordinate axes are rotated through the indicated angle.

1. $x^2 - y^2 = a^2$, 45°

2. $xy = -a^2$, -45°

3. $x^2 + y^2 = a^2$, θ

4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$, 30°

5. $3x^2 + 24xy - 4y^2 - 10 = 0$, $\text{Arcsin } \frac{3}{5}$

6. Determine the new coordinates of the point $(-3, 5)$ if the coordinate axes are rotated through the angle

(a) 90° , (b) -90° , (c) 60° , (d) $\text{Arcsin } \frac{1}{3}$.

7. Simplify the equation

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 + 12\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y + 5 = 0$$

by rotating the coordinate axes through the angle $\text{Arcsin } 1/\sqrt{5}$ and then finding an appropriate translation.

Döndürme ve öteleme işlemleri sadece dik koordinat sisteminde değil, dikey koordinat sisteminden eğik sisteme geçişte de uygulanmaktadır.

Aynı şekilde eğik sistemde döndürme ve öteleme yapılabilmesinin yanı sıra eğik sistemden ortogonal sisteme geçiş de yapılabilmektedir. Bunun için koordinat sisteminin baz vektörlerinin skaler çarpımından faydalanırız.

Not: Bu kolay yöntem, her dönüşümü (hem döndürme hem de öteleme) bir uygulama olarak gösterecektir. Bu yöntemi herhangi bir sistemdeki her dönüşüm için kullanabileceğimiz için, her bir sistemin dönüşümü için formülleri ezberlememize gerek yoktur.

Kartezyen Koordinat sisteminden aynı x eksenine sahip Eğik Koordinat Sistemine dönüşüm formülünü bulma

Kartezyen Koordinat sisteminden Eğik Koordinat Sistemine çeviri
formülünü bulma

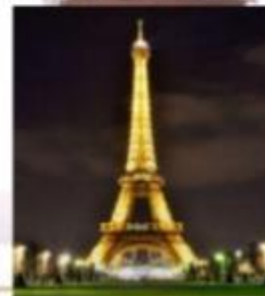
Kartezyen Koordinat sisteminden Ötelenmiş Eğik Koordinat Sistemine
çeviri formülünü bulma

Eğik Koordinat sisteminden Eğik Koordinat Sistemine çeviri formülünü
bulma

PARABOL

Applications of Parabola

- Parabolas are everywhere in modern society. Parabolas can be found in most things we encounter everyday. parabolas are formed when a football is kicked, a baseball is hit, a basketball hoop is made, dolphins jump and much more.
 - ✓ The bottom of Eiffel Tower is a Parabola and it can be interpreted as a negative parabola as it opens down.
 - ✓ Parabola is the path of any object thrown in the air and is the mathematical curve used by engineers in designing some suspension bridges. The properties of parabola make it the ideal shape for reflector of an automobile headlight.

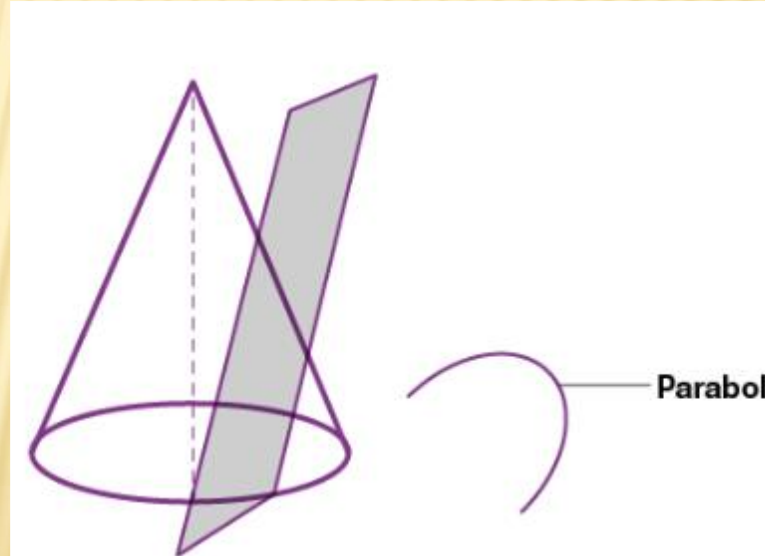


Parabol nedir?

Sağ dairesel koninin üreteline paralel bir düzlemle oluşturduğu arakesit paraboldür. Sabit bir noktaya (odak) uzaklığı sabit bir doğruya (doğrultman) uzaklığına eşit olan bir noktanın yörüngesidir.

-Sabit Nokta : Odak noktası

-Sabit doğru : Doğrultman



Parabolün standart denklemi:

Parabolün en basit denklemi doğrultmanı y eksenine paralel olan $y^2 = x$ denklemdir.

Genel olarak, doğrultman y eksenine paralel ise parabolün standart denklemi şöyle verilir:

$$y^2 = 4ax$$

Doğrultman x eksenine paralel ise standart denklem:

$$x^2 = 4ay$$

şeklinde verilir.

Bu ikisinin dışında parabolün denklemi eğer parabol negatif çeyreklerde ise

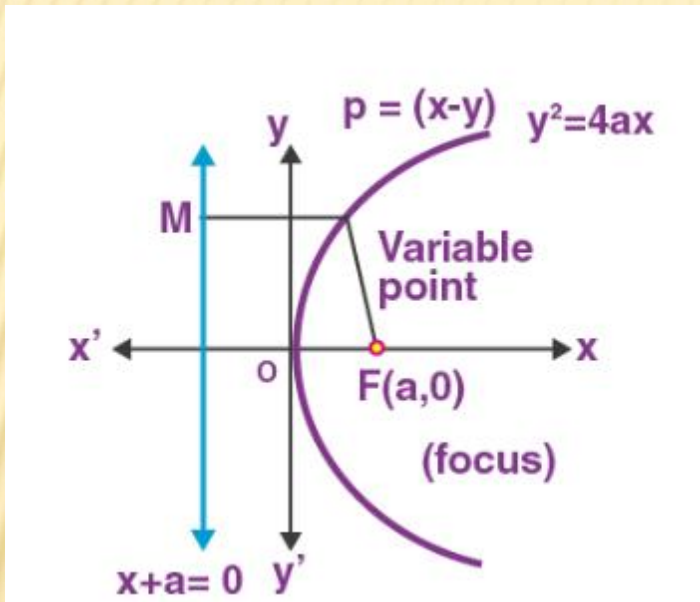
$$y^2 = 4ax \text{ ve } x^2 = 4ay$$

şeklinde verilebilir. Buradan, parabolün dört denklemi:

$$y^2 = 4ax, y^2 = -4ax, x^2 = 4ay, x^2 = -4ay$$

Parabol denkleminin elde edilişi:

Daha önce verilen denklemlerde «a» orijinden odak noktasına olan uzaklıktır.



From definition,

$$\frac{SP}{PM} = 1$$

$$SP = PM$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \left| \frac{x+a}{1} \right|$$

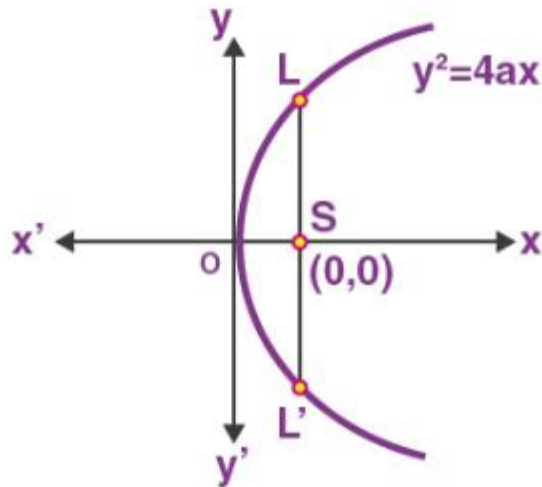
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$y^2 = 4ax$$

\Rightarrow Standard equation of Parabola.

Parabolün özkirişi:

Parabolün özkirişi, parabolün odak noktasından geçen ve parabolün eksenine dik olan bir kiriştir.



LSL' Latus Ractum

=

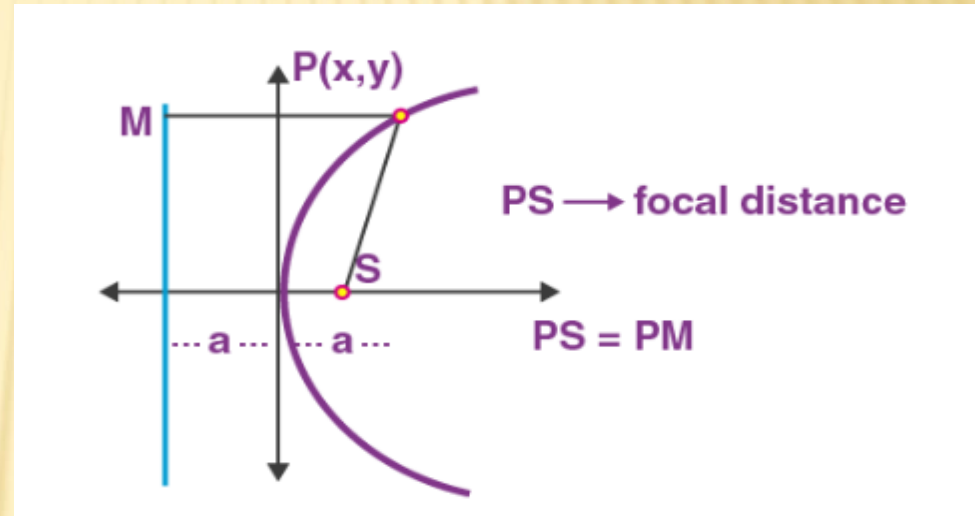
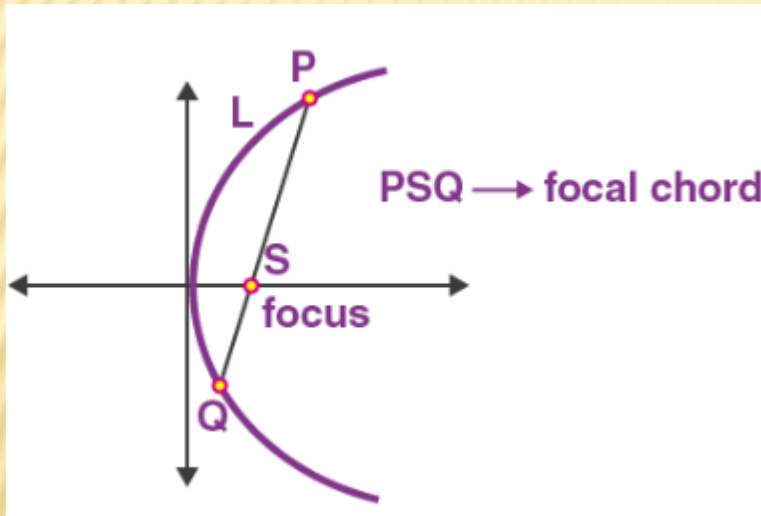
$$2 \left(\sqrt{4a \cdot a} \right)$$

= $4a$ (length of latus Rectum)

Note: – Two parabola are said to be equal if their latus rectum are equal.

Parabolün odak kirişi ve odak uzaklığı:

Odak kirişi: Parabolün odak noktasından geçen herhangi bir kiriş parabolün sabit bir kirişidir.



Odak uzaklığı: $y^2 = 4ax$ parabolü üzerindeki herhangi bir $p(x,y)$ noktasının odak uzaklığı p noktası ile odak noktası arasındaki uzaklıktır.

$$PM = a + x$$

$$PS = \text{Focal distance} = x + a$$

Küçük bir alıştırma:

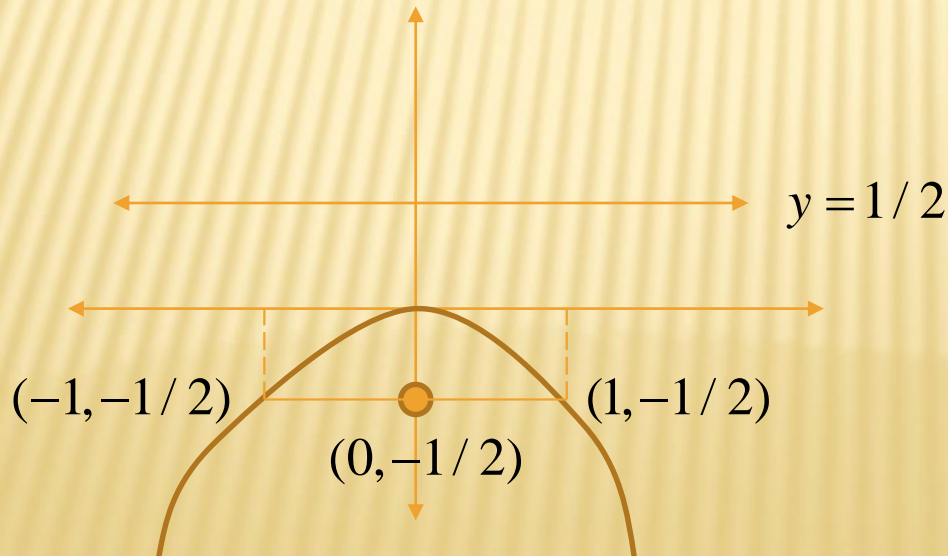
$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

parabolünün odak noktasını, doğrultmanını ve odak genişliğini bulunuz.

odak noktası: $(0, -1/2)$

doğrultman: $y = 1/2$

odak genişliği: 2



Küçük bir alıştırma:

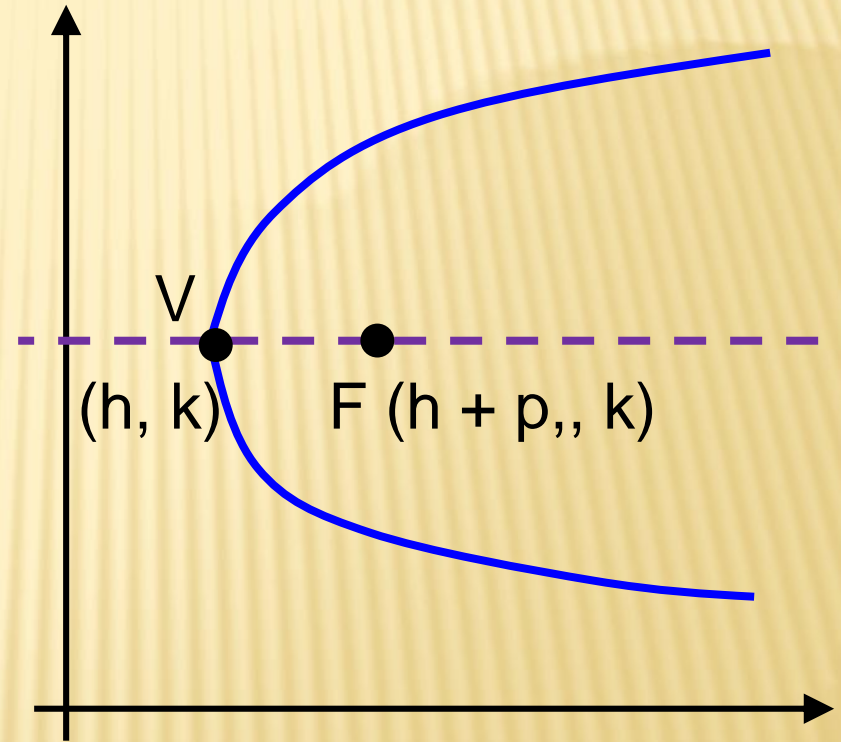
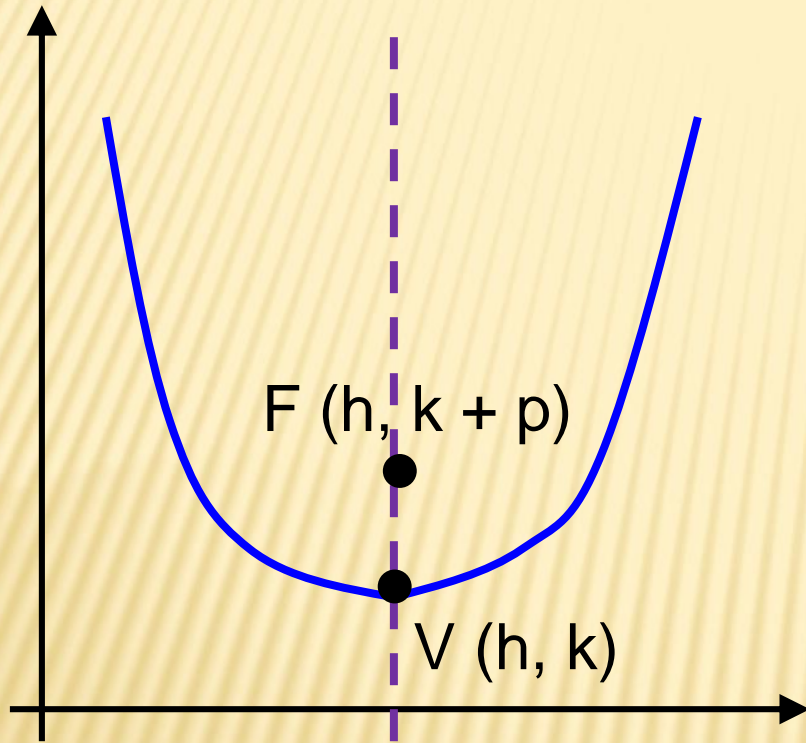
Doğrultmanı $x = 2$ doğrusu ve odak noktası $(-2, 0)$ olan parabolün standart denklemini bulunuz.

Küçük bir alıştırma:

Tepe noktası $(0,0)$ olan aşağıya doğru açılan ve odak genişliği 4 olan parabolün standart denklemini bulunuz.

PARABOLLERDE ÖTELEME

Yalnızca tepe noktası orijinde olan paraboller ile ilgilendik. Olmasaydı:



Bunun gibi ötelemeler parabolün odak uzaklığını, odak genişliğini ve açılma doğrultusunu etkilemez.

(h,k) tepe noktalı paraboller:

Standart denklem: $(x - h)^2 = 4a(y - k)$

Açılma: Yukarıya veya aşağıya

Odak noktası: $(h, k + a)$

Doğrultman: $y = k - a$

Eksen: $x = h$

Odak uzaklığı: a

Odak genişliği: $|4a|$

Aıştırma:

Tepe noktası $(3,4)$ ve odak noktası $(5,4)$ olan parabolün standart denklemi nedir?

Alıştırma:

$$y^2 - 6x + 2y + 13 = 0$$

grafiğinin parabol olup olmadığını kanıtlayın.

Tepe noktasını, odak noktasını ve doğrultmanını bulun.

Alıştırma:

Tepe noktası $(-3,3)$ olan, aşağıya doğru açılan ve odak genişliği 20 olan parabolün standart denklemini bulunuz.

Alıştırma:

Tepe noktası $(2,3)$ olan, sağa doğru açılan ve odak genişliği 5 olan parabolün standart denklemini bulunuz.

Alıştırma:

Tepe noktası $(0,0)$ olan, yukarıya doğru açılan odak genişliği 3 olan parabolün standart denklemini bulunuz.

Alıştırma:

$$(x - 4)^2 = -8y$$

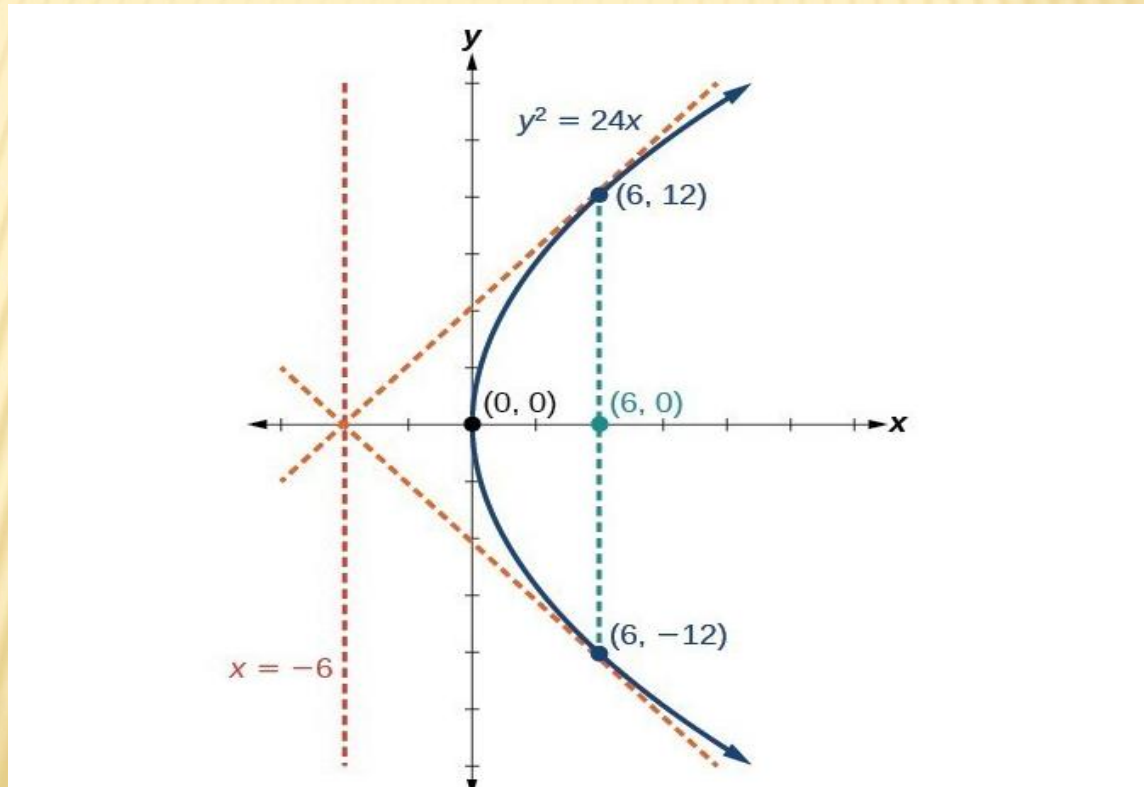
parabolünün tepe noktasını, odak noktasını, doğrultmanını, odak kirişinin bitiş noktalarını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Alıştırma:

$$(y - 3)^2 = 8(x + 1)$$

parabolünün tepe noktasını, odak noktasını, doğrultmanını, odak kirişinin bitiş noktalarını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

**Bir eğriyle kesişimi tek bir nokta olan doğruya o eğrinin teğeti denir.
Bir parabolün odak çapının bitiş noktalarından geçen teğet doğruları
simetri ekseninde kesişirler.**



Bir noktanın bir parabole göre pozisyonu:

Parabol için,

$$S = y^2 - 4ax = 0, \quad p(x_1, y_1)$$

$$S_1 = y_1^2 - 4ax_1$$

$$S_1 < 0 \quad \text{EĞRİNİN İÇİNDE}$$

$$S_1 = 0 \quad \text{EĞRİNİN ÜZERİNDE}$$

$$S_1 > 0 \quad \text{EĞRİNİN DIŞINDA}$$

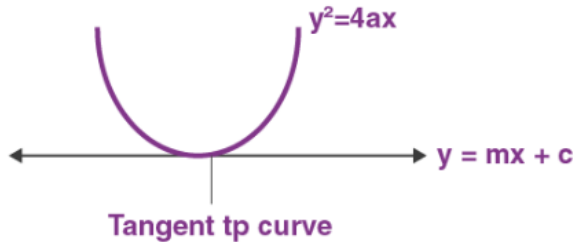
Bir doğrunun $y^2 = 4ax$ parabolü ile kesişimi:

$y = mx + c$ doğrusu için
 m doğrunun eğimidir.

$$(mx + c)^2 - 4ax = 0 \Rightarrow m^2 x^2 + 2x(mc - 2a) + c^2 = 0$$

denkleminin çözümüdür.

$D = 0$

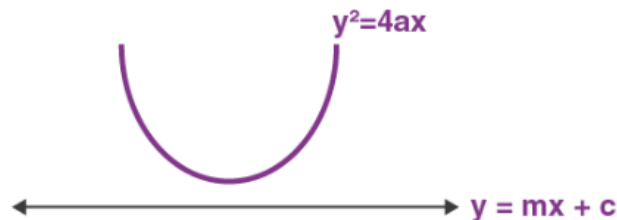


$c = a/m$

$D > 0$



$D < 0$ ($mc - a < 0$): Straight line not touching the curve



Alıştırma

$$x^2 = 4y$$

parabolünün $(3, 2)$ noktasından geçen iki tane teğet doğrusunu bulunuz.

Parabolün teğeti:

(x_1, y_1) noktasındaki teğet

$y^2 = 4ax$ parabolü

$$\Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y} \Rightarrow m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_1, y_1)} = \frac{2a}{y_1}$$

$$y = mx + c \Rightarrow y = \frac{2a}{y_1}x + c \Rightarrow c = \frac{2ax_1}{y_1}$$

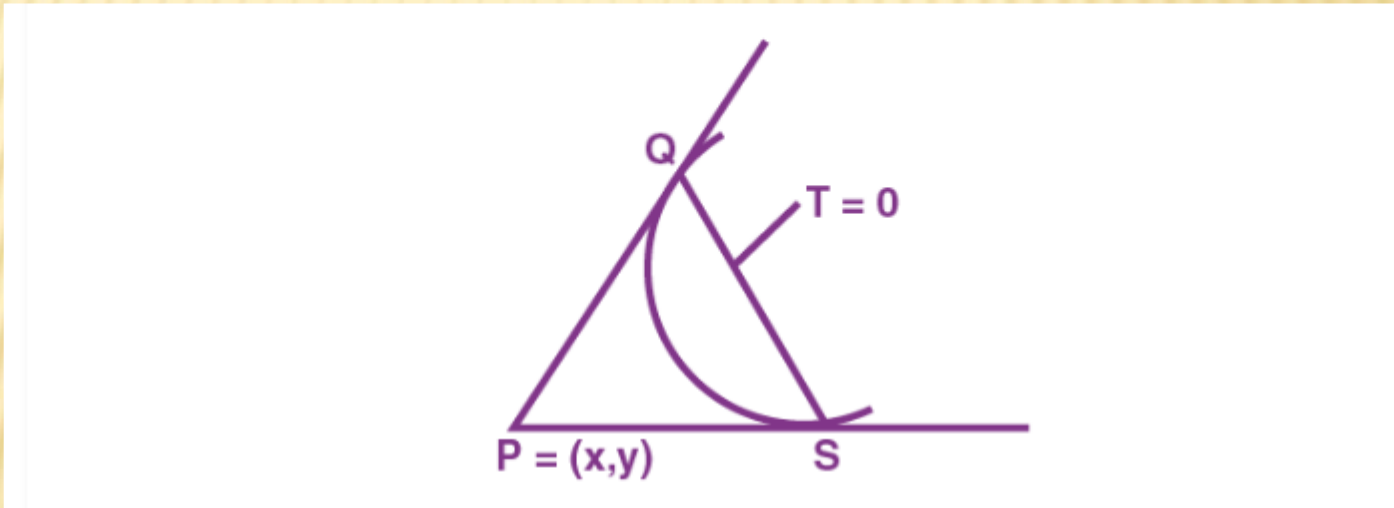
$$\Rightarrow y = \frac{2a}{y_1}x + \frac{2ax_1}{y_1} \Rightarrow yy_1 = 2a(x + x_1)$$

Değme kirişi:

$p(x_1, y_1)$ noktasından $y^2 = 4ax$ parabolüne çizilen teğetlerin değme kirişinin denklemi

$T = 0$ ile verilir, yani

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$$



Parabolün normali:

$p(x_1, y_1)$ noktasından çizilen normalin eğimi ile o noktadan çizilen teğetin eğimi arasında

$$m_{normal} \cdot m_{teget} = -1$$

ilişkisi vardır.

Yani;

$$m_{normal} = -\frac{y_1}{2a}$$

Bu durumda normalin denklemi

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

Odak kirişinin önemli özellikleri:

- 1.Eğer kiriş $P = (at_1^2, 2at_1)$ ve $Q = (at_2^2, 2at_2)$ noktalarını birleştiriyorsa bu kiriş $y^2 = 4ax$ parabolünün odak kirişidir ve $t_1t_2 = -1$ dir.
- 2.Eğer bir odak kirişinin bitiş noktalarından birisi $(at_1^2, 2at_1)$ ise diğeri $(at_1^2, 2at_2)$ dir ve $\left(\frac{a}{t_1^2}, -\frac{2a}{t_1}\right)$ olur.
- 3.Eğer $P(at^2, 2at)$ $y^2 = 4ax$ parabolünün üzerinde ise PQ odak kirişinin uzunluğu $a(t + 1/t)^2$ dir.

Four Common Forms of a Parabola:

Form:	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
Vertex:	(0, 0)	(0,0)	(0, 0)	(0, 0)
Focus:	(a, 0)	(-a, 0)	(0, a)	(0, -a)
Equation of the directrix:	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
Equation of the axis:	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
Tangent at the vertex:	$x = 0$	$x = 0$	$y = 0$	$y = 0$

Example

Suppose $P(\frac{ap^2}{2}, \frac{ap^2}{2})$ and $Q(\frac{aq^2}{2}, \frac{aq^2}{2})$ are two points lying on the parabola $x^2 = 2ay$.

Prove that, if OP and OQ are perpendicular, then $pq = -4$.

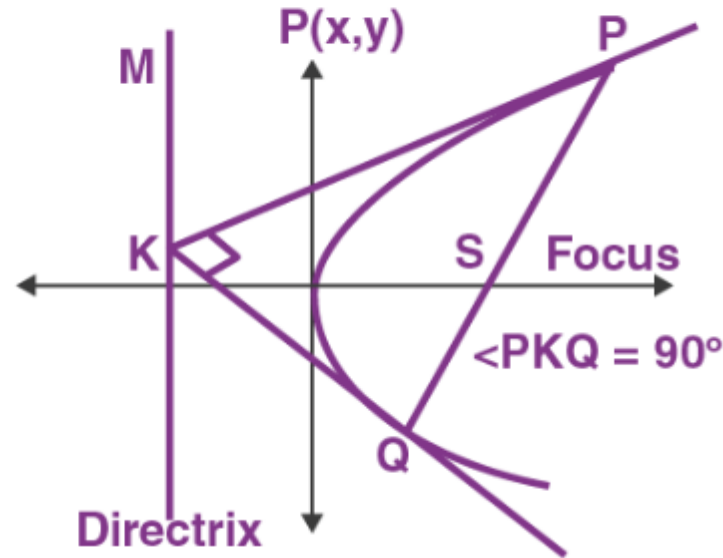
Solution

The gradient of OP is $\frac{ap^2}{2ap} = \frac{p}{2}$ and similarly the gradient of OQ is $\frac{q}{2}$. Since these lines are perpendicular, the product of their gradients is -1 and so $\frac{p}{2} \times \frac{q}{2} = -1$, which implies that $pq = -4$.

Note that, in this case, PQ can never be a focal chord.

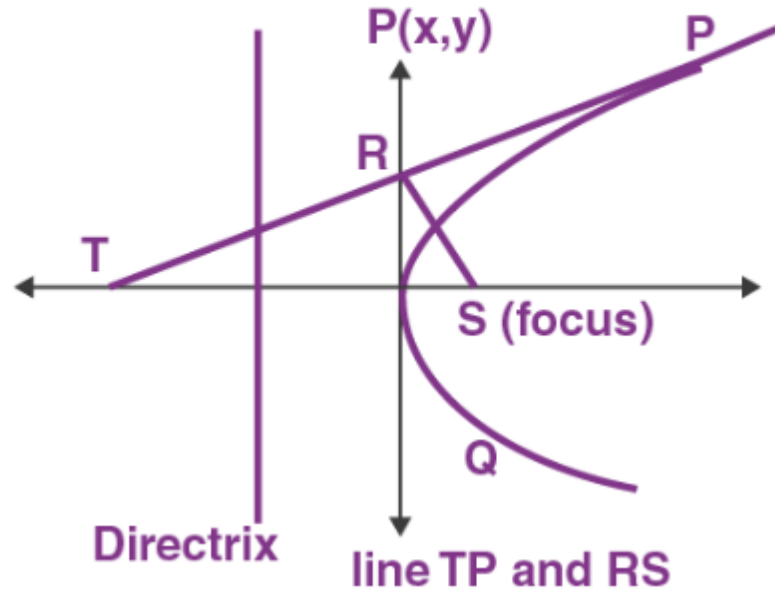
Odak kirişinin önemli özellikleri:

Herhangi bir odak kirişinin bitiş noktalarından geçen teğetler doğrultman üzerinde kesişirler.



Odak kirişinin önemli özellikleri:

Bir parabolün herhangi bir teğeti, o teğete odak noktasından çizilen dikme ile tepe noktasından çizilen teğet üzerinde kesişirler.



Find the equation of the parabola whose focus is (3, -4) and directrix $x - y + 5 = 0$.

Solution: Let $P(x, y)$ be any point on the parabola. Then

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} = \frac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{(x-y+5)^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 22x + 26y + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 22x - 26y - 25$$