26.10.2023

DİZİLER İLE İLGİLİ BAZI UYGULAMALAR

$(a_n)=\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right)$; $(b_n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)$ $\quad (b_{k_n})=(a_n)$ $\quad k_n \to ?$

(a_n) dizisi (b_n) dizisinin bir alt dizisi midir?

Bunun (b_n) dizisinde n yerine terimleri N^+'da bulunan ve büyüyen bir (k_n) dizisinin genel terimini yani k_n'yi yazmak yeterli olacaktır. Bu durumda elde edilecek olan dizi bir alt dizi olacağından bu ifadenin (a_n)'ye eşitlenerek k_n'nin bulunması gerekir. $\forall n \in N^+$ için k_n ifadesinin büyüyen (artan) olması gerekir. Aksi halde (k_n'in elde edilememesi veya büyüyen olmaması) -alt dizisi- değildir.

$(b_{k_n})=\left(\frac{k_n}{k_n+1}\right)$ $\rightarrow$ eğer bu bir alt dizi ise (a_n) ifadesine eşit olmalıdır.

$$\frac{k_n}{k_n+1}=\frac{3n+2}{3n+3}$$

$$3n.k_n+3k_n=3nk_n+3n+2k_n+2$$

$$k_n=\boxed{3n+2} \rightarrow \quad n\in[1,2,3,\ldots)$$

$(k_n)=(3n+2)$ olarak mevcut ve $\forall n \in N^+$ için büyüyen (artan) bir dizi olduğundan (a_n) dizisi (b_n) dizisinin bir alt dizisidir.

41) $\{a_n\} = \left\{\frac{1-2n}{1+n}\right\}$ dizisi $\{b_n\} = \left\{\frac{1-n}{1+2n}\right\}$ dizisinin bir alt dizisi midir?

$$(b_{k_n}) = \left(\frac{1-k_n}{1+2k_n}\right) = \left(\frac{1-2n}{1+n}\right) = (a_n) \qquad (b_{k_n}) = (a_n)$$

$$\frac{1-k_n}{1+2k_n} = \frac{1-2n}{1+n} \qquad n \in [1,2,3,\dots)$$

$k_n = \dfrac{n}{1-n}$ olarak k_n mevcuttur.

Ancak $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ için (k_n) dizisinin büyüyen (artan) olması gerekir. Oysa $n=1$ için

$k_1 = \dfrac{1}{0}$ olarak tanımlı değildir.

Dolayısıyla (a_n) dizisi (b_n) dizisinin alt dizisi değildir.

Not: Bir dizinin iki alt dizisinin toplamı ve çarpımı o dizinin bir alt dizisi olduğu halde bölümleri alt dizisi değildir.

Örneğin:

$(a_n) = (n)$ dizisi için $(b_n) = (2n)$ ve $(c_n) = (2n+1)$ dizileri (a_n) dizisinin birer alt dizileridir.

$(b_n) + (c_n) = (2n) + (2n+1) = (4n+1)$; (a_n) nin alt dizisi,

$(b_n) \cdot (c_n) = (4n^2+2n)$; (a_n) dizisinin alt dizisi, Ancak;

$$\frac{(b_n)}{(c_n)} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

Bu durumu $(d_n) = \frac{(b_n)}{(c_n)}$

$(a_{k_n}) = (d_n)$ ile

$a_{k_n} = k_n \Rightarrow k_n = \frac{2n}{2n+1}$

olarak $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için k_n'in büyüyen olması gerekirken k_n'nin küçülen yani artan olmamasından kolaylıkla görebiliriz.

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ dizisi için $\{a_{2n}\}$ ve $\{a_{2n-1}\}$ alt dizilerini bulunuz. Bunların çarpım ve bölüm dizileri $\{a_n\}$ dizisinin bir alt dizisi midir?

(a_{k_n})

$(a_{2n}) = \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$; $(a_{2n-1}) = \left\{\frac{1}{2n-1+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$

Çarpım dizisi:

$(a_{2n})\cdot(a_{2n-1}) = \left(\frac{1}{4n^2+2n}\right) = (A_n)$ olsun.

(A_n) çarpım dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi ise $(a_{k_n}) = (A_n)$'den k_n artan olarak bulunmalı.

$$a_{k_n} = A_n \Rightarrow \frac{1}{k_n+1} = \frac{1}{4n^2+2n} \Rightarrow k_n = 4n^2+2n-1$$

$\forall n \in N^+$ için (k_n) dizisi büyüyen (artan) bir dizi olduğundan

$$(A_n) = (a_n).(a_{2n-1}) = \left(\frac{1}{4n^2+2n}\right)$$

dizisi

$(a_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$ dizisinin bir alt dizisidir.

Bölüm için ise:

$$\frac{(a_{2n})}{(a_{2n-1})} = (B_n) = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$(a_{k_n}) = (B_n)$$

$$\frac{1}{k_n+1} = \frac{2n-1}{2n} \Rightarrow k_n = \frac{1}{2n-1} \to 2n-1 \text{ BÜYÜR}$$

$(k_n) = \left(\frac{1}{2n-1}\right)$ dizisi $\forall n \in N^+$ için büyüyen (artan) olması gerekirken küçülen (azalan) olduğundan $\frac{(b_n)}{(c_n)}$ bölüm dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

Not: Burada (a_n) ve $\frac{(b_n)}{(c_n)}$ dizilerinin ilk iki veya üç terimini yazarak da alt dizi olamayacağı görülebilir.

$(a_n) = \left(\frac{2-n}{2n+1}\right)$ dizisi monoton artan mı yoksa monoton azalan mıdır?

$\forall n \in N^+$ için;

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \; - - \quad f: N^+$

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ ise monoton artan.

$a_{n+1} - a_n \leq 0$ ise monoton azalan.

$$\underline{a_{n+1}} - \underline{a_n} = \frac{2-(n+1)}{2(n+1)+1} - \frac{2-n}{2n+1}$$

$$= -\frac{5}{\underbrace{(2n+3)}_{+}\underbrace{(2n+1)}_{+}} < 0$$

$\forall n \in N^+$ $(n=1,2,3,\ldots)$ için $a_{n+1} - a_n < 0$ olduğundan (a_n) dizisi monoton azalandır.

$(a_n) = \left(\frac{(n+2)!}{4^n}\right)$ dizisi monoton artan mı yoksa monoton azalan mıdır?

<u>Metod-1</u> $\forall n \in N^+$ için $a_{n+1} - a_n > 0$ ise monoton artan

< 0 ise " azalan.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+3)!}{4^{n+1}} - \frac{(n+2)!}{4^n}$$

$$= \frac{(n+3)! - 4.(n+2)!}{4^{n+1}} = \frac{(n+3).(n+2)! - 4(n+2)!}{4^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+2)!.(n-1)}{4^{n+1}} \geq 0$$

$a_1 \quad a_2 \; - - - -$

$n=1$

Dolayısıyla (a_n) dizisi monoton artandır.

metod-2

$(a_n) = \left(\frac{(n+3)!}{4^n}\right)$ dizisinin bütün terimleri $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için pozitiftir. Dolayısıyla bazı durumlarda $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ veya $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ şeklinde, daha doğrusu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranını "1" ile karşılaştırmak işlem kolaylığı sağlayabilir.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ M. Artan

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ M. Azalan

Bu bağlamda $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı incelenirse:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+3)!}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{(n+2)!}$$

$$= \frac{(n+3)\cdot\cancel{(n+2)!}\cdot\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\cdot 4\cdot\cancel{(n+2)!}}$$

$$= \frac{n+3}{4}$$

Bu ifade $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $(n=1,2,3,\ldots)$ için daima ≥ 1 dir. Dolayısıyla

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+3}{4} \geq 1$ olup $a_{n+1} \geq a_n$ yani (a_n) dizisi monoton artandır.

$(a_n)=\left(4-\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n)=\left(4+\frac{1}{n}\right)$ dizilerinin monotonluk durumunu (artan_azalan) inceleyiniz

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için:

$$a_{n+1}-a_n=\left(4-\frac{1}{n+1}\right)-\left(4-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

olarak sağdaki ifadenin paydası $(n+1)$ daha büyük dolayısıyla kesrin değeri daha küçük olup

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$$

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$ olup (a_n) monoton artan.

$$b_{n+1}-b_n=\left(4+\frac{1}{n+1}\right)-\left(4+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için yukarıdaki durumun tam tersi olarak

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0$; (b_n) dizisi monoton azalan

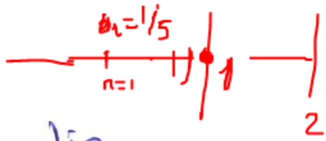
$(a_n)=\left(\dfrac{(-1)^n}{3n+2}\right)$ dizisi sınırlı mıdır?

(a_n) dizisi sınırlıysa:

$|a_n|\leq M$ olacak şekilde $\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $M\in\mathbb{R}$.

$$|a_n|=\left|\frac{(-1)^n}{3n+2}\right|=\frac{|(-1)^n|}{\underbrace{|3n+2|}_{+}}=\frac{|-1|^n}{3n+2}=\frac{1^n}{3n+2}$$

$$|a_n|=\frac{1}{3n+2}\to n=1,2,3,\dots$$



$\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $\dfrac{1}{3n+2}\leq 1$ dir.

Dolayısıyla;

$|a_n|\leq 1$ olup (a_n) dizisi sınırlıdır.

$(a_n)=\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$ dizisi sınırlı mıdır?

$$|a_n|=\left|\frac{2n+1}{n+1}\right|=\left|2-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{+}\right|$$

$\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $2-\dfrac{1}{n+1}\leq 2$ dir.

Dolayısıyla:

$|a_n|=\left|2-\dfrac{1}{n+1}\right|\leq 2$ olup (a_n) sınırlıdır.

$\{a_n\} = \left\{\frac{2n+1}{3n+1}\right\}$ dizisi sınırlı mıdır?

$$|a_n| = \left|\frac{2n+1}{3n+1}\right| = \left|1 - \frac{n}{3n+1}\right| < 1$$

$\forall n \in N^+$ için

$|a_n| < 1$ olup sınırlıdır.

$1 - \frac{n}{3n+1} < 1$

$|a_n| < 1$

$(a_n) = \left(\frac{n^2+2}{n}\right)$ dizisi sınırlı mıdır?

$$|a_n| = \left|\frac{n^2+2}{n}\right| = \left|n + \frac{2}{n}\right|$$

$\forall n \in N^+$ için $\qquad |a_n| \leq M$

$|a_n| = \left|n + \frac{2}{n}\right| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$

mevcut olamaz.

Dolayısıyla $(a_n) = \left(\frac{n^2+2}{n}\right)$ dizisi sınırlı değildir.

$(a_n) = \left(\frac{2n+1}{3n}\right)$ dizisi sınırlı mıdır?

Metod-1:

$$|a_n| = \left|\frac{2n+1}{3n}\right| = \left|1 - \frac{n-1}{3n}\right|$$

$\forall n \in N^+$ için;

$|a_n| = \left|1 - \frac{(n-1)}{3n}\right| \leq 1$ olup (a_n) dizisi sınırlıdır.

Metod-2:

$$|a_n| = \left|\frac{2n+1}{3n}\right| = \left|\frac{2}{3} + \frac{1}{3n}\right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için:

$$\frac{2}{3} < \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 1}$$

$$\frac{2}{3} < \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{1}{3n}}_{a_n} \leq 1$$

$\frac{2}{3} < a_n \leq 1$ olup (a_n) dizisi sınırlıdır.

Metod-3:

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için;

$$a_n = \frac{2n+1}{3n} = \underbrace{\frac{2n}{3n} + \frac{1}{3n}}_{a_n} > \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$

$$\underbrace{a_n = \frac{2n+1}{3n}}_{a_n} \leq \frac{2n+n}{3n} = 1$$

n=1 için eşitlik hali olur. n>1 için pay sol tarafın payına göre artar.

Yukarıdaki iki ifade birleştirilirse:

$\frac{2}{3} < a_n \leq 1$ olarak (a_n) dizisi sınırlıdır.

$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} \right)$ dizisi için E.B.A.S ve E.K.Ü.S değerlerini bulunuz.

Dizinin terimleri $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $(n=1,2,3,\dots)$ için oluşacağından;

$$a_1 = \sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5}$$

$$a_2 = \sum_{k=1}^{n=2} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{6}{25}$$

$$a_3 = \sum_{k=1}^{n=3} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{31}{625}$$

$\vdots$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

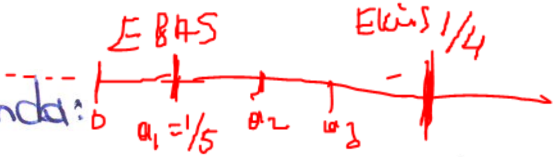
$$= \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{<1}\right]$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n < 1$ dir. Dolayısıyla:

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}_{<1} < \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

Bu durumda:



$a_1 = \frac{1}{5}$ ve $a_n < \frac{1}{4}$ olmak üzere

(a_n) dizisi için:

$E.B.A.S(a_n) = \frac{1}{5}$; $E.K.Ü.S(a_n) = \frac{1}{4}$

yazılabilir.

$(a_n) = \left(\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}\right)$ dizisi için E.B.A.S ve E.K.Ü.S değerlerini bulunuz.

Metod-1:

$(-1)^n$'den dolayı tek veya çift durumuna göre:

$n = 2k$ olsun

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{2k} \cdot (2k)}{2k+1} = \frac{1 \cdot 2k}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}$$

$$a_{2k} = 1 - \frac{1}{2k+1}$$

Bu ifadedeki $\frac{1}{2k+1}$ terimini dikkate alalım.

$0 < \frac{1}{2k+1}$ olarak yazabiliriz. (*)

Aynı şekilde;

$$\frac{1}{2k+1} \le \frac{1}{2\cdot 1+1} \quad (**)$$ yazabiliriz.

k=1 için eşitlik
k>1 için sağ taraf için kesrin paydası artar

(*) − (**) ifadeleri birleştirilirse:

$$0 < \frac{1}{2k+1} \le \frac{1}{3}$$ yazılır. (1)

$$a_{2k} = 1 - \frac{1}{2k+1}$$ olduğundan

(1) ifadesi −1 ile çarpılırsa:

$$0 > -\frac{1}{2k+1} \ge -\frac{1}{3} \quad (2)$$

a_{2k}'yı elde etmek için 1 ilave edilirse:

$$1 > 1 - \frac{1}{2k+1} \ge -\frac{1}{3} + 1$$

$$\frac{2}{3} \le \underbrace{1 - \frac{1}{2k+1}}_{a_{2k}} < 1$$

$$\frac{2}{3} < a_{2k} < 1 \;;$$

Benzer olarak:

$n=2k+1$ olursa:

$$a_{2k+1}=(-1)^{2k+1}\cdot\frac{(2k+1)}{2k+1+1}=-\frac{2k+1}{2k+2}$$

$$a_{2k+1}=-1+\frac{1}{2k+2}$$

Burada da $\frac{1}{2k+2}$ yi dikkate alırsak:

$$0<\frac{1}{2k+2}\leq\frac{1}{2\cdot1+2}=\frac{1}{4}$$

$$0<\frac{1}{2k+2}\leq\frac{1}{4}$$

$$0-1<\frac{1}{2k+2}-1\leq\frac{1}{4}-1$$

$$-1<\underbrace{-1+\frac{1}{2k+2}}_{a_{2k+1}}\leq-\frac{3}{4}$$

$$-1<a_{2k+1}\leq-\frac{3}{4}$$

Dizinin bütün terimleri a_{2k} ve a_{2k+1}'den terimlerle olacağından

$$-1 < a_n < 1$$

olacaktır.

Dolayısıyla $E.B.A.S(a_n) = -1$

$E.K.Ü.S(a_n) = 1$

olarak yazabiliriz.

Metod_2:

$|a_n| \leq M$ olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ varsa (a_n) sınırlı olacağından

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}\right| = \frac{|(-1)^n \cdot n|}{|n+1|} = \frac{|(-1)^n| \cdot |n|}{|n+1|}$$

$$= \frac{|-1|^n \cdot |n|}{|n+1|} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } \begin{matrix} n > 0 \\ n+1 > 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} \quad ; \frac{n}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}^+ \text{ için paydası büyük.}$$

$$|a_n| = 1 - \frac{n}{n+1} \leq 1$$

$|a_n| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a_n \leq 1$ olup $\begin{matrix} E.B.A.S(a_n) = -1 \\ E.K.Ü.S(a_n) = 1 \end{matrix}$

$(a_n) = \left(\frac{2^n}{(n+1)!} \right)$ dizisinin monotonluğunu inceleyiniz.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için dizi pozitif terimli olup;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n}$$

$$= \frac{2}{(n+2)\cdot(n+1)!} \cdot (n+1)!$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{2}{n+2} < 1$ olup

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+2} < 1$ olarak (a_n) dizisi monoton azalandır.

$(a_n) = \left(\frac{4n+1}{2n+1} \right)$ dizisinin sınırlı olduğunu gösteriniz. E.B.A.S ve E.K.Ü.S=?

$$|a_n| = \left| \frac{4n+1}{2n+1} \right| = \left| \frac{4n+1+1-1}{2n+1} \right| = \left| 2 - \frac{1}{2n+1} \right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ $(n=1,2,3,\ldots)$ için

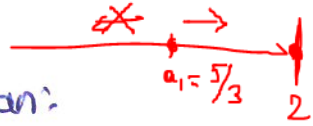
$|a_n| = \left| 2 - \frac{1}{2n+1} \right| \leq 2$ olarak sınırlıdır.

Dolayısıyla $-2 \leq a_n \leq 2$ dir.

$|f(x)| \leq a$

$-a \leq f(x) \leq a$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{2n+1} \right) = 2$$



Dizi pozitif terimli olduğundan:

$$a_1 = \frac{4.1+1}{2.1+1} = \frac{5}{3} \quad \text{olarak}$$

$$\frac{5}{3} \leq a_n \leq 2 \quad \text{olarak} \quad E.B.A.S(a_n) = \frac{5}{3}$$

$$E.K.Ü.S(a_n) = 2$$

Genel terimi

$(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right)$ olarak verilen dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Dizi yakınsak ise monoton ve sınırlı olmalıdır.

a_n ve a_{n+1} dizileri ile işlem yapmak için dizinin baştan ve sondan üçer terimi yazılırsa:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+(n-2)} + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{2n}$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

Monotonluk için:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \quad \text{olup monoton artandır.}$$

Sınırlılık için:

$$|a_n|=\left|\frac{1}{n+1}+\underbrace{\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}}\right|$$

Bunların paydalarını n+1 olarak yazmak kesirsel değeri büyütür.

$$|a_n|\leq\left|\underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}}_{n \text{ tane}}\right|$$

$$|a_n|\leq\left|n\cdot\frac{1}{n+1}\right|$$

$$|a_n|\leq\left|\frac{n}{n+1}\right|$$

$$|a_n|\leq\left|1-\frac{n}{n+1}\right|$$

$\forall n\in N^{+}$ için $\frac{n}{n+1}\in R$ ve $1-\frac{n}{n+1}<1$

olacağından;

$$|a_n|<1$$

olarak sınırlıdır.

Dolayısıyla (a_n) dizisi hem monoton (artan) hem de sınırlı olduğundan -YAKINSAK-tır.

$\left(\frac{1-2n}{1+n}\right)$ dizisinin limitinin -2 olduğunu ε tekniğiyle gösteriniz.

Bir (a_n) dizisinin limiti L ise, $\varepsilon>0$ olacak şekilde seçilebilen bir reel sayı olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ mevcut olmalı.
Bir başka deyişle ε seçiminden tamamen bağımsız olarak dizinin "hemen hemen her terimi L'nin ε komşuluğu içinde olmalıdır."

Dolayısıyla;
$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$$|a_n - (-2)| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1-2n}{1+n} + 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1-2n+2+2n}{1+n}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3}{1+n}\right| < \varepsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $1+n>0$

$$\frac{3}{1+n} < \varepsilon$$

$$n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

$$n \geq \underbrace{\left[\left|\frac{3}{\varepsilon} - 1\right|\right] + 1}_{N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+}$$

mevcut olduğundan limit noktası -2'dir.
$[\![\ ]\!] \rightarrow$ Tam Değer fonksiy

$\left(\frac{1-2n}{1+n}\right)$ dizisinin limitinin 2 olmadığını gösteriniz.

Dizinin limiti 2 ise:

$\forall n \in N^+$ için $|a_n - 2| < \varepsilon$ olmalıdır.

$$\left|\frac{1-2n}{1+n} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1-2n-2-2n}{1+n}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-1-4n}{1+n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|-1-4n|}{|1+n|} < \varepsilon \text{ ; } \forall n \in N^+ \text{ için } -1-4n<0$$

$$\frac{-(-1-4n)}{1+n} < \varepsilon$$

$$1+4n < \varepsilon.(n+1)$$

$$4n - \varepsilon.n < \varepsilon - 1$$

$$n(4-\varepsilon) < \varepsilon - 1 \text{ ; } 4-\varepsilon > 0$$

$$n < \frac{\varepsilon-1}{4-\varepsilon} \Rightarrow n \leq \underbrace{\left[\left|\frac{\varepsilon-1}{4-\varepsilon}\right|\right]+1}_{N(\varepsilon)}$$

$N(\varepsilon)$ ifadesi ε değerine bağlı olarak N^+ sayı değeri aldığında örneğin M olsun $n \leq M$ olacaktır.

Bu durumda dizinin ilk M terimi 2'nin ε komşuluğunda olacak yani hepsi olmayacaktır. Dolayısıyla 2 limit değildir.

$\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)$ dizisinin $\frac{2}{3}$'e yakınsadığını gösteriniz.

$\frac{2}{3}$ değerine yakınsaması $\frac{2}{3}$'ün limit noktası olduğu anlamına geleceğinden:

$\forall n \in N^+$ için

$$\left|a_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{6n-3-6n-4}{3(3n+2)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-7}{3(3n+2)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{-(-7)}{3(3n+2)} < \varepsilon$$

$$3n+2 > \frac{7}{3\varepsilon}$$

$$n > \left(\frac{7}{3\varepsilon} - 2\right)/3$$

$$n > \frac{7-6\varepsilon}{9\varepsilon} \Rightarrow$$

$$n \geq \underbrace{\left[\left|\frac{7-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right|\right]+1}_{N(\varepsilon)}$$

$n \geq N(\varepsilon) \in N^+$ olacak şekilde ε'a bağlı $N(\varepsilon)$ sayısı mevcut olduğundan limit $\frac{2}{3}$ dür.

$\left(\frac{3n-2}{n+1}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu göstererek, limitini bulunuz.

Yakınsak olması için monoton ve sınırlı olması gerekir.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)-2}{(n+1)+1}-\frac{3n-2}{n+1}=\frac{5}{(n+1).(n+2)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için

$$a_{n+1}-a_n=\frac{5}{(n+1).(n+2)}>0$$ olup monoton artandır.

Sınırlı olması için:

$$|a_n|=\left|\frac{3n-2}{n+1}\right|=\left|\frac{3n-2+5-5}{n+1}\right|=\left|3-\frac{5}{n+1}\right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{5}{n+1} \in \mathbb{R}$ ve

$3-\frac{5}{n+1} \leq 3$ olup

$$|a_n|=\left|3-\frac{5}{n+1}\right| \leq 3$$

$|a_n| \leq 3$ olarak sınırlıdır.

Dizi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır.

Dolayısıyla dizinin limiti için:

$$L = \lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+1} = \lim_{n\to 0} \frac{n\left(3-2\cdot\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi yakınsak bir dizi ve limiti "0" olduğundan

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\left(3-2\cdot\cancel{\frac{1}{n}}_{0}\right)}{n\left(1+\cancel{\frac{1}{n}}_{0}\right)} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}\right) = 1$$

$L = 3$ olarak bulunur.

Metod 2:

$(a_n) = \left(\frac{3n-2}{n+1}\right)$ dizisi monoton artan ve $|a_n| \leq 3$ olacak şekilde sınırlıydı.

$|a_n| \leq 3$ ise

$-3 \leq a_n \leq 3$ demektir.

Ancak $a_1 = \frac{3.1-2}{1+1} = \frac{1}{2}$ ve dizi monoton artan olup

$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 3$

olacaktır. Bu durumda $E.B.A.S = \frac{1}{2}$, $E.K.Ü.S = 3$ olarak yakınsak dizinin ilk teriminin a_1 ve monoton artan olması durumunda dizinin limiti E.K.Ü.S değerine yakınsayacağından:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = E.K.Ü.S(a_n) = 3 \text{ olur.}$$

Benzer bir yorumla:

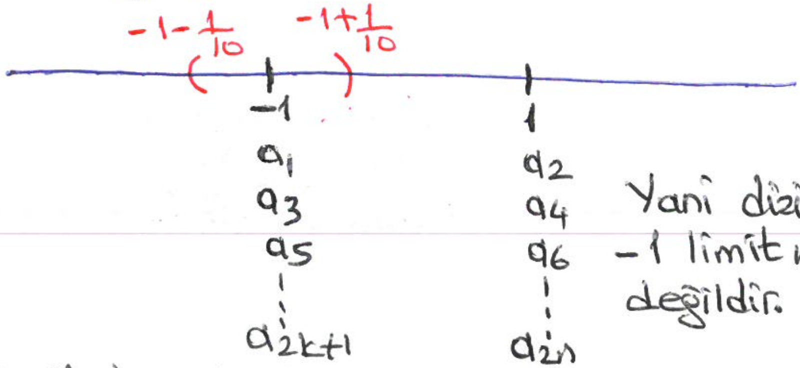
Yakınsak bir dizinin ilk terimi a_1 ve dizi monoton azalansa dizinin E.B.A.S değerine yakınsar.

$(a_n)=(-1)^n$ dizisinin Limitini -1'in $\frac{1}{10}$ komşuluğu için inceleyiniz.

$n=2k$ için dizinin terimleri 1

$n=2k+1$ " " " -1 gelir.

Dolayısıyla



Yani dizi için -1 limit noktası değildir.

$n=2k$ için dizinin -1 in $\frac{1}{10}$ komşuluğu dışında sonsuz terimi vardır.

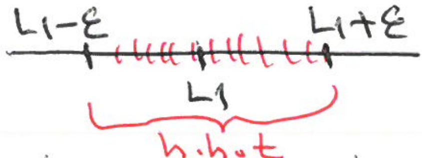
Bir dizinin limiti varsa tektir, gösteriniz.

(a_n) yakınsak bir dizi olmak üzere:

Dizinin L_1 ve L_2 gibi iki limiti olduğunu varsayalım.

L_1 limit ise:

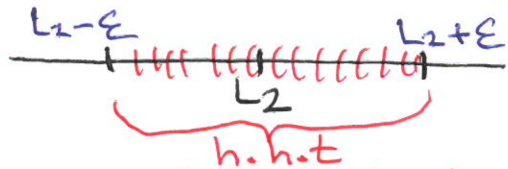
$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n - L_1| < \varepsilon$ 'dur.



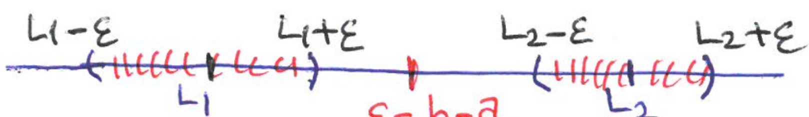
Yani dizinin hemen hemen her terimi L_1'in ε komşuluğu içerindedir.

L_2 limit noktası ise $(L_2 > L_1)$:

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n - L_2| < \varepsilon$ 'dur

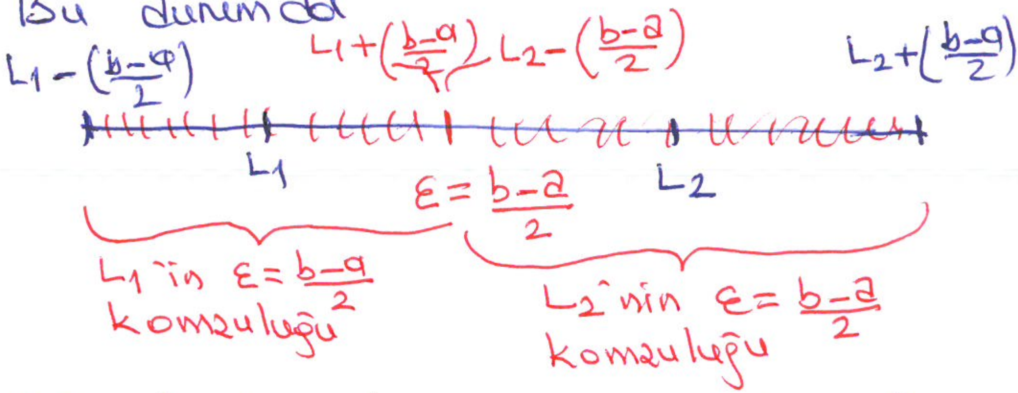


ε keyfi olduğundan $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2}$ seçilip iki şekil birleştirilir ise:



$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

Bu durumda



Eğer limit noktası L_1 ise bu durumda dizinin h.h.t'nin L_1'in ε komşuluğunda yani $(L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon)$ aralığında olması gerekir. Ancak görüldüğü gibi $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$'nin sağında da sonsuz terim vardır. Bu durumda L_1 limit olamaz.

Eğer limit L_2 ise bu durumda da dizinin h.h.t'nin $(L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon)$ komşuluğunda olması yani $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$'nin solunda sonlu terim olması (veya hiç olmaması) gerekir. Ancak görüldüğü gibi $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$'nin solunda sonsuz terim vardır. Dolayısıyla L_2 limit olamaz.

Bunun nedeni dizinin L_1 ve L_2 gibi iki limit noktası olamayacağı yani $L_1=L_2=L$'dir

$(a_n)=\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz, limitini bulunuz ve ε tekniğiyle doğrulayınız.

Yakınsak ise monoton ve sınırlı olmalı.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için;

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)-1}{4(n+1)+5}-\frac{3n-1}{4n+5}=\frac{19}{(4n+9)(4n+5)}>0$$

olup monoton artandır.

$$|a_n|=\left|\frac{3n-1}{4n+5}\right|=\left|\frac{3}{4}-\frac{19}{4.(4n+5)}\right|=\frac{1}{4}\left|3-\frac{19}{4n+5}\right|$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\left|3-\frac{19}{4n+5}\right| \leq 3$ olarak.

$$|a_n| \leq \frac{1}{4}.3=\frac{3}{4}$$

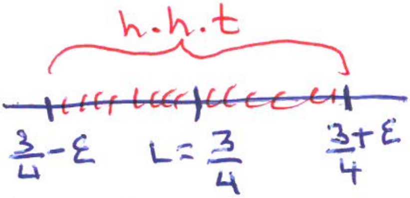
$$a_1=\frac{3.1-1}{4.1+5}=\frac{2}{9}$$

$\frac{2}{9} \leq a_n \leq \frac{3}{4}$ dizi sınırlı olup aynı zamanda E.B.A.S $=\frac{2}{9}$, E.K.Ü.S $=\frac{3}{4}$'dür.

$a_1=\frac{2}{9}$ ve dizi monoton artan olup, dizinin yakınsak olduğu bilindiğinden dizinin limiti E.K.Ü.S değerine yakınsar.

Yani $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)=$ E.K.Ü.S $\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)=\frac{3}{4}$

$L=\frac{3}{4}$ olur.



Dolayısıyla $\varepsilon>0$; $\varepsilon \in \mathbb{R}$ seçiminden bağımsız olarak $\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)$ dizisinin h.h.t.'i $\frac{3}{4}$'ün ε komşuluğunda olmalıdır.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için;

$$\left|\frac{3n-1}{4n+5}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde ε değerine bağlı $n>N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ sayısı mevcut olmalıdır.

$$\left|\frac{3n-1}{4n+5}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{12n-4-12n-15}{4.(4n+5)}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{|-19|}{4.(4n+5)}<\varepsilon$$

$$\frac{-(-19)}{4.(4n+5)}<\varepsilon$$

$4n+5>\frac{19}{4\varepsilon}$

$n>\underbrace{\frac{19-20\varepsilon}{16\varepsilon}}_{N(\varepsilon)}$ veya $n \geq \underbrace{\left[\left|\frac{19-20\varepsilon}{16\varepsilon}\right|\right]+1}_{N(\varepsilon)}$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n-3/4|<\varepsilon$ olacak şekilde $n \geq N(\varepsilon)$ sayısı mevcut olup limit $3/4$'tür.

02.11.2023

$(a_n) = \left(2^{\frac{n+1}{n+2}} \right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz, limitini bularak, ε-tekniğiyle gerçekleyiniz.

Yakınsaklık için monoton ve sınırlı olmalı.

Monotonluk için:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2}}}{2^{\frac{n+1}{n+2}}} = 2^{\frac{n+2}{n+3}} \cdot 2^{-\frac{(n+1)}{n+2}} = 2^{\frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{\frac{1}{(n+3)(n+2)}} \checkmark$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$

Dolayısıyla:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{\frac{1}{(n+3)(n+2)}} > 1$$ olup (a_n) monoton artan

Sınırlılık için:

$|a_n| = \left| 2^{\frac{n+1}{n+2}} \right|$; $\frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2}$ olarak

$$|a_n| = \left| 2^{\frac{n+1}{n+2}} \right| < \underbrace{\left| 2^{\frac{n+2}{n+2}} \right| = 2}$$

$|a_n| < 2$ yazılabilir.

$-2 < a_n < 2$?

EBAS EKÜS

?

EBAS $\neq -2$ dizi pozitif terimli

Her ne kadar;

$|a_n| < 2$ ise de

$a_1 = 2^{\frac{1+1}{1+2}} = 2^{2/3}$ olarak

$\underbrace{2^{2/3}}_{a_1} \leq a_n < \underbrace{2}_{L}$ olur. $\begin{cases} EBAS = 2^{2/3} \\ EKÜS = 2 \end{cases}$

$\xrightarrow{n. \text{ artan}}$ a_1 ... $E.K.Ü.S = L$

(a_n) dizisi monoton artan, sınırlı ve $a_1 = 2^{2/3}$ olduğuna göre dizinin limiti E.K.Ü.S değerine yakınsar. Dolayısıyla

$$L = \lim_{n\to\infty} (a_n) = E.K.Ü.S = 2 \text{ 'dir.}$$

ε-tekniği ile gerçekleme:

$\forall n \in N^+$ için;

$|a_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $n \geq N(\varepsilon) \in N^+$ olmalı. (? $N(\varepsilon)$)

(Yani dizinin h.h.t'si L'nin ε komşuluğunda olmalı)

$$\left| 2^{\frac{n+1}{n+2}} - 2 \right| < \varepsilon$$

$\forall n \in N^+$ için $2^{\frac{n+1}{n+2}} < 2$ olduğundan

$$-\left(2^{\frac{n+1}{n+2}} - 2\right) < \varepsilon \,; \; n = ? \quad n = N(\varepsilon)$$

$$2^{\frac{n+1}{n+2}} > 2 - \varepsilon$$

$$\frac{n+1}{n+2} > \log_2(2-\varepsilon)$$

$$n > \frac{2\log_2(2-\varepsilon) - 1}{1 - \log_2(2-\varepsilon)} \quad \log_2(2-\varepsilon) \to < 1$$

$$n \geq \underbrace{\left[\left| \frac{2\log_2(2-\varepsilon) - 1}{1 - \log_2(2-\varepsilon)} \right|\right] + 1}_{N(\varepsilon)}$$

$\{a_n\}$ dizisi için: $\forall n \in N^+$; $(n=1,2,3,\ldots)$ için

$a_1 = 1$; $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$

olarak verilmektedir. $\{a_n\}$ dizisinin limitinin varlığını gösterek bulunuz.

Dizinin limitinin varlığını göstermek için "yakınsak" bir dizi olduğu gösterilmelidir.

Yakınsaklık için ise monoton ve sınırlı olduğu incelenmelidir.

Burada dizinin genel terimi açık olarak verilmediğinden "tümevarım" prensibinden yararlanılabilir.

$a_1 = 1$ olarak veriliyor.

$a_2 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} > a_1$

$\underbrace{a_k < a_{k+1}}_{\text{Kabul}} \; ? \; a_{k+2}$

Verilen hali ile eğer

$a_{k+1} > a_k$ kabul edilirse

$\boxed{a_{k+2} > a_{k+1}}$ olduğu gösterilmelidir.

$a_{k+2} > a_{k+1}$ midir?

$$a_{k+2} = \sqrt{6+a_{k+1}} \overset{?}{>} \sqrt{6+a_k} = a_{k+1}$$

$a_{k+1} > a_k$ kabul

$a_{k+1} > a_k$ kabul edildiğinden $6+a_{k+1} > 6+a_k$'dır.

Dolayısıyla:

$$\underbrace{\sqrt{6+a_{k+1}}}_{a_{k+2}} > \underbrace{\sqrt{6+a_k}}_{a_{k+1}}$$

Bu durumda dizi monoton artandır.

$a_1 = 1 < 3$

$a_2 = \sqrt{6+1} < 3$

$a_3 = \sqrt{6+a_2} = \sqrt{6+\sqrt{7}} < 3$

yazılabilir.

Aynı şekilde eğer;

$a_k < 3$ kabul edilirse

$a_{k+1} < 3$ gösterilebilirse $a_n < 3$ olarak sınırlıdır

$a_{k+1} = \sqrt{6+\underbrace{a_k}_{<3}}$; $a_k < 3$ kabul edildiğinden

($a_k = 3$ kabul edilse 3 çıkar)

$a_{k+1} < 3$ olur.

Dolayısıyla $a_n < 3$ olarak sınırlıdır.

$a_1 = 1$; (a_n) monoton artan olduğundan yakınsak bir dizidir. (a_n) ile bütün alt dizileri aynı limit değerine yakınsar.

lim, artan

$a_1 = 1 \leftarrow l \rightarrow 3$

$1 < L < 3$

$$L = \lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1})$$

$$\underbrace{a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n}$$

$$L = \sqrt{6+\lim_{n\to\infty}(a_n)}$$

$$L = \sqrt{6+L}$$

$$L^2 = 6+L$$

$$L^2 - L - 6 = 0$$

$$(L-3)(L+2) = 0 \qquad 1 < L < 3$$

$$L = 3 \; ; \; \cancel{L = -2}$$

Dizinin ilk terimi $a_1 = 1$ ve dizi monoton artan olduğundan $L=-2$ değerine yakınsaması söz konusu olmayacağı için $L=3$ limittir.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 3 \text{ 'tür.}$$

Not: (a_n) dizisi için $1 \leq a_n \leq 3$ olarak $\left\{ \begin{array}{l} EBAS = 1 \\ EKÜS = 3 \end{array} \right.$ olduğuna dikkat ediniz.

(a_n) dizisi için;

$a_1=1$; $(a_{n+1})=\left(\sqrt{1+2a_n}\right)$ olarak veriliyor.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için (a_n) dizisinin limitinin varlığını gösteriniz ve bulunuz.

Limitin varlığı için yakınsak, yakınsak olması için de monoton ve sınırlı olmalıdır.

$a_1=1$

$a_2=\sqrt{1+2.1}=\sqrt{3}>a_1$

olarak eğer

$a_{k+1}>a_k$ kabul edilirse;

$a_{k+2}>a_{k+1}$ olduğu gösterilmelidir.

$$a_{k+2}=\sqrt{1+2.a_{k+1}} \overset{?}{>} \sqrt{1+2.a_k}=a_{k+1}$$

$a_{k+1}>a_k$ kabul edildiğinden

$$1+2a_{k+1}>1+2a_k$$

$$\underbrace{\sqrt{1+2a_{k+1}}}_{a_{k+2}} > \underbrace{\sqrt{1+2a_k}}_{a_{k+1}}$$

Dolayısıyla,

$a_{k+2}>a_{k+1}$ yani dizi monoton artandır.

Sınırlılık için;

$a_1=1 < 3$

$a_2=\sqrt{3} < 3$

? yazılabilir.

Eğer $a_k<3$ kabul edilirse ve

$a_{k+1}<3$ olduğu gösterilebilirse $a_k<3$ kabulü doğru olur ve $a_n<3$ olur.

? ?

$a_{k+1}<3$

$\sqrt{1+2.\underbrace{a_k}_{<3}} < \sqrt{1+2.3}=\sqrt{7}<3$

kabul edildi.

$a_k=3$ olduğunda bile $\sqrt{7}$.
$a_k<3$ kabul edildiğinden kesin olarak <3 olur.

Dolayısıyla:

$\underbrace{\sqrt{1+2.a_k}}_{a_{k+1}}<3$

$a_{k+1}<3$ olduğu $a_k<3$ kabulü gösterildiğinden $a_n<3$'tür ve (a_n) sınırlıdır.

(a_n) monoton artan ve sınırlı olup yakınsaktır ve limiti vardır.

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2.a_n}$;

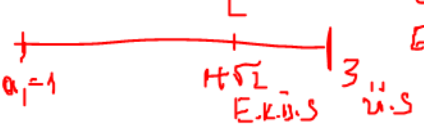
$L=\sqrt{1+2L}$

$L^2-2L-1=0$

$L=1+\sqrt{2}$ ✓

$\cancel{1-\sqrt{2}}$ ✗ $\to <0$

$1\leq a_n \leq 1+\sqrt{2}$



E.B.A.S $=1$

E.K.Ü.S $=1+\sqrt{2}$

$a_1 = 3; \quad a_{n+1} = \sqrt{15 + 2 . a_n}$

olarak verilen dizinin limitinin varlığını göstererek bulunuz.

Dizi yakınsak olmalı. Yakınsaklık için monoton ve sınırlı olmalı.

Monotonluk için:

$a_1 = 3$

$a_2 = \sqrt{15 + 2.3} = \sqrt{21} > a_1$

Dizi için

$a_{k+1} > a_k$ olduğunu kabul edelim.

$a_{k+2} \overset{?}{>} a_{k+1}$ olduğu gösterilmeli

$a_{k+2} = \sqrt{15 + 2.a_{k+1}} \overset{?}{>} \sqrt{15 + 2.a_k} = a_{k+1}$

$\sqrt{15 + 2a_{k+1}} > \sqrt{15 + 2.a_k}$ $\quad a_{k+1} > a_k$ kabul edildi.

$a_{k+2} > a_{k+1}$ doğrudur.

Dolayısıyla dizi monoton artandır.

Dizi sınırlı mı?

$a_1 = 3 < 5$

$a_2 = \sqrt{21} < 5$

yazılabilir.

$a_k < 5$ kabul edelim.

Eğer

$a_{k+1} < 5$

olursa $a_k < 5$ kabulü doğru olup

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n < 5$ olarak sınırlı olur.

$a_k < 5$ (kabul) ✓

$a_{k+1} < 5$ (?) ?

$$a_{k+1} = \sqrt{15 + 2.a_k} = \sqrt{25} = 5$$

<5 kabulü ↳ 5 olarak alınsa

olur. Oysa $a_k < 5$ kabul edildiğinden

$a_{k+1} < 5$ 'dir. Dolayısıyla $a_n < 5$ 'dir.

(a_n) monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır ve limiti vardır.

$a_1 = 3 \leftarrow L \rightarrow 5$

$3 < L < 5$

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{15 + 2.a_n})$$

$$L = \sqrt{15 + 2L}$$

$$L^2 - 2L - 15 = 0 \Rightarrow L = \begin{cases} 5 \ ✓ \\ \cancel{-3} \ ✗ \end{cases}$$

Ü.S → E.K.Ü.S

$\underbrace{a_1 = 3}_{\text{E.K.A.S}} \leq a_n \underset{\downarrow}{\cancel{<} 5}$

$\text{E.K.Ü.S} = L$

$a_1=1;\; a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{a_n+3}$; $n=1,2,3,\dots$

olarak verilen dizinin limitinin varlığını gösterererek bulunuz.

Limiti varsa yakınsak, yakınsaksa monoton ve sınırlı olmalıdır.

$a_1=1$ veriliyor.

$$a_2=\frac{1+1}{1+3}=\frac{1}{2}<a_1$$

$\forall k\in N^+$ için;

$a_{k+1}<a_k$ kabul edilsin ve $\underbrace{a_{k+2}<a_{k+1}}_{?}$ olduğu gösterilsin.

$$a_{k+2}=\frac{a_{k+1}+1}{a_{k+1}+3}\overset{?}{<}\frac{a_k+1}{a_k+3}=a_{k+1}$$

$$\frac{a_{k+1}+1}{a_{k+1}+3}<\frac{a_k+1}{a_k+3}$$; $\forall n\in N^+$ için $a_n+1>0$, $a_n+3>0$

olup;

$$\frac{a_k+3}{a_k+1}<\frac{a_{k+1}+3}{a_{k+1}+1}$$

$$1+\frac{2}{a_k+1}<1+\frac{2}{a_{k+1}+1}$$

$$\frac{1}{a_k+1}<\frac{1}{a_{k+1}+1}$$; $a_k+1>0$, $a_{k+1}+1>0$

$$a_{k+1}+1<a_k+1$$

$a_{k+1}<a_k$ → Kabulümüz doğru.

olup dizi monoton azalandır.

Sınırlılık için:

$a_1 = 1 > 0$, $a_2 = \frac{1}{2} > 0$ ve dizinin monoton azalan olduğu bilindiğine göre dizi alttan sınırlı olmalıdır. Yani;

$\forall k \in \mathbb{N}^+$ için

$a_k > 0$ kabul edilsin.

Eğer?

$a_{k+1} > 0$ olduğu gösterilebilirse dizinin alttan sınırlı olduğu gösterilmiş olur.

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 1}{a_k + 3} \overset{?}{>} 0$$

>0 kabul

$\frac{a_k + 1}{a_k + 3}$ ifadesi için $a_k > 0$ kabul edildiğinden $a_k + 1 > 0$ ve $a_k + 3 > 0$ olarak oranı "1" den küçük fakat > 0 olan bir büyüklüğe işaret eder.

>0 kabul

$a_n > 0$

Dolayısıyla:

$\frac{a_k + 1}{a_k + 3} > 0$ dır. O halde $a_k > 0$ kabulü doğru yani dizi alttan sınırlıdır. $a_n > 0$

Bu durumda;

$a_1=1$, dizi monoton azalan ve alttan sınırlı olduğuna göre yakınsaktır.

$$0 < a_n \leq 1$$

Burada "0" bir alt sınır (fakat E.B.A.S değil) ancak "1" dizinin E.K.Ü.S değeridir.

Yakınsak dizinin bütün alt dizileri de dizi ile aynı limite yakınsayacağından:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n+3}\right)$$

$$L=\frac{L+1}{L+3}$$

$$L^2+2L-1=0$$

$$(L+1)^2-2=0$$

$$L+1=\mp\sqrt{2} \Rightarrow L_{1,2}= \begin{cases} L_1=-1-\sqrt{2} \times \\ L_2=-1+\sqrt{2} \checkmark \end{cases}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $a_n>0$ olduğundan $L_2=-1+\sqrt{2}$ değeri dizinin limit değeridir.

Dolayısıyla;

$$-1+\sqrt{2}\leq a_n \leq 1 \quad \text{olarak}$$

E.B.A.S $=-1+\sqrt{2}=L$

E.K.Ü.S $=1$ olarak yazılabilir.

$a_1=\sqrt[3]{6}$; $a_{n+1}=\sqrt[3]{6+a_n}$ olarak verilen dizinin monotonluğunu, alt ve üst sınırlarını, yakınsak veya ıraksaklığını, eğer varsa limitini bulunuz.

Monotonluk için:

$a_1=\sqrt[3]{6}$

$a_2=\sqrt[3]{6+a_1}=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}>a_1$

$a_{k+1}>a_k$ olduğunu kabul edelim.

Eğer $a_{k+2}>a_{k+1}$ olursa dizi monoton artan.

$$a_{k+2}=\sqrt[3]{6+a_{k+1}}\overset{?}{>}\sqrt[3]{6+a_k}=a_{k+1}$$

$a_{k+1}>a_k$ kabul edildiğinden

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+a_{k+1}}}_{a_{k+2}}>\underbrace{\sqrt[3]{6+a_k}}_{a_{k+1}}$$ 'dır.

$a_{k+2}>a_{k+1}$ olup $a_{k+1}>a_k$ kabulü doğrudur. Yani $\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $a_{n+1}>a_n$ olarak dizi monoton artandır.

Sınırlılık için:

$a_1 = \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8} = 2$

$a_2 = \sqrt[3]{6 + a_1} = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}} < 2$

yazılabilir. Dolayısıyla;

$\forall k \in \mathbb{N}^+$ için;

$a_k < \sqrt[3]{8} = 2$ kabul edilirse

$a_{k+1} < \sqrt[3]{8} = 2$ olduğu gösterilmelidir.

$a_{k+1} = \sqrt[3]{6 + a_k} \overset{?}{<} \sqrt[3]{8} = 2$ mi?

$a_k < 2$ kabul edildiğinden ($a_k = 2$ alınsa bile) $\sqrt[3]{6+2} = \sqrt[3]{8} = 2$ olur.

$\underbrace{\sqrt[3]{6 + a_k}}_{a_{k+1}} < 2$ 'dir.

$a_{k+1} < 2$ olduğundan $a_k < 2$ kabulü doğrudur. Dolayısıyla

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\underline{a_n < 2}$ dir. Yani dizi sınırlıdır.

(a_n) dizisi için, dizi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır. İlk terimi a_1 ve monoton artan bir dizinin limiti en küçük üst sınırına yakınsar. Ayrıca yakınsak bir dizinin bütün alt dizileri de aynı limit değerine yakınsar.

Dolayısıyla;

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = L \text{ olarak}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{6+a_n}\right)$$

$$L = \sqrt[3]{6+L}$$

$$L^3 = 6+L \Rightarrow L^3 - L - 6 = 0$$

$$(L-2)(L^2+2L+3)=0$$

$$L_1 = 2 \checkmark ; \quad L_{2,3} = \frac{-2 \mp \sqrt{4-4.3}}{2}$$

$$\underbrace{L_{2,3} = -1 \mp 2\sqrt{2}\, i}_{\notin R} ; \quad i = \sqrt{-1}$$

Dizi için $a_1 = \sqrt[3]{6}$ ve monoton artan olduğundan $L_1 = 2$ değeri dizinin limit değeri olup

$$\underbrace{\sqrt[3]{6}}_{a_1} \leq a_n < 2$$ olmak üzere E.B.A.S $= \sqrt[3]{6}$
E.K.Ü.S $= 2$ 'dir.

(a_n) ve (b_n) yakınsak iki dizi olmak üzere

$(a_n) \to a$
$(b_n) \to b$ olarak veriliyor. $(a_n).(b_n) \to a.b$ olduğunu ispatlayınız.

$(a_n).(b) \to a.b$ demek

$(a_n.b_n) \to a.b$ olacağından

$\forall n \in N^+$ için

$|a_n.b_n - a.b| < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \in R$ olmalıdır.

Yani $(a_n.b_n)$ dizisinin h.h.t.i $a.b$'nin ε komşuluğu içerisinde olmalıdır. ($n \geq N(\varepsilon)$ olacak şekilde ε değerine bağlı $N(\varepsilon) \in N^+$ bulunabilmelidir)

$$\underbrace{|a_n.b_n - ab|}_{} < \varepsilon$$

$$= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab|$$
$$= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)|$$
$$\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|$$
$$\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \quad (*)$$

$(a_n) \to a$ olarak verildiğine göre

$\forall n \in N^+$ için $|a_n| < M_1$ dir. (Yani sınırlıdır)

Aynı şekilde;

$|a_n - a| < \varepsilon_1$ yazılabilir.

$(b_n) \to b$ olduğuna göre

$|b_n| < M_2$ ve $|b_n - b| < \varepsilon_2$ yazılabilir.

Burada $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ keyfi sonsuz küçük pozitif reel sayılardır.

Dolayısıyla; (*) ifadesi için:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon$$

$$\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$

ifadesi için:

$$\leq M_1 \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$

$$\leq M_1 \cdot \varepsilon_2 + |b| \cdot \varepsilon_1$$

ε_1 ve ε_2 keyfi seçilebilen sonsuz küçük reel değerler olduğundan

$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2M_1}$ seçilirse;

$|a_n b_n - ab| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olarak ispat tamamlanır.

$(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$ ise $(a_n \mp b_n) \to a \mp b$ olduğunu ispat ediniz.

$(a_n + b_n) \to a + b$ için

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$

olduğunu göstermeliyiz. Burada ε istenildiği kadar küçük pozitif bir reel sayıdır.

$$(a_n) \to a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(b_n) \to b \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir.

$(a_n + b_n) \to a + b$ için

$|a_n + b_n - a - b| < \varepsilon$ olduğu gösterilmeli.

$$\underbrace{|(a_n - a) + (b_n - b)|} \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon_1} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\varepsilon_2}$$

Benzer bir işlemle $(a_n - b_n) \to a - b$ de gösterilir.

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dolayısıyla

$|a_n + b_n - a - b| < \varepsilon$ olur.

$(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$ ise $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$ olduğunu ispatlayınız.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$; $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ olduğu gösterilmelidir.

$(a_n) \to a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

$(b_n) \to b \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$

$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon$ olduğu gösterileceğinden:

$$\left|\frac{a_n b - a.b_n}{b.b_n}\right| = \left|\frac{a_n b - ab_n - ab + ab}{b.b_n}\right|$$

$$= \left|\frac{b(a_n - a) - a(b_n - b)}{b.b_n}\right| \leq \frac{|b(a_n - a)| + |a(b_n - b)|}{|b|.|b_n|}$$

$$\leq \frac{|b|.|a_n - a| + |a|.|b_n - b|}{|b|.|b_n|}$$

$|a_n - a| < \varepsilon_1$ idi. ε_1 keyfi olduğundan $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon.|b|}{4}$

$|b_n - b| < \varepsilon_2$ ve ε_2 " " $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon.b^2}{4.|a|}$

seçilsin. Ayrıca $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ yazılabileceğinden

$$< \frac{\frac{|b|.\varepsilon.|b|}{4} + \frac{|a|.\varepsilon.b^2}{4.|a|}}{|b|.\frac{|b|}{2}} = \frac{\frac{\varepsilon.b^2}{4} + \frac{\varepsilon.b^2}{4}}{\frac{b^2}{2}} = \varepsilon$$ olarak ispat yapılır.

(a_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır. İspat ediniz.

TANIM: $\forall\, n,m \in N(\varepsilon)$ için $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına karşılık $N(\varepsilon)$ mevcutsa (a_n) Cauchy dizisidir.

$(a_n) \to a$ olacak şekilde yakınsak bir dizi olsun.
Cauchy dizisi tanımına göre
$\forall\, n \in N^+$ için $|a_n - a| < \varepsilon_1$
$\forall\, m \in N^+$ için $|a_m - a| < \varepsilon_2$
olacak şekilde $m,n \geq N(\varepsilon)$ sayıları mevcut olmalıdır.
Cauch tanımı gereği:
$|a_n - a_m| < \varepsilon$ olması gerekeceğinden

Bu ifadenin $<\varepsilon$ olduğu gösterilmedi.

$$
\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_n - a_m - a + a| \\
&= |a_n - a + (a - a_m)| \\
&\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\
&< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad ; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \text{ seçilirse}
\end{aligned}
$$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$
olarak gösterilmiş olur.

$(a_n) \to a$
$(b_n) \to b$ ise $(k_1 . a_n + k_2 . b_n) \to k_1 a + k_2 b$ olduğunu ispatlayınız.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için;

$|k_1 a_n + k_2 b_n - k_1 a - k_2 b| < \varepsilon$ olduğu gösterilmelidir.

$(a_n) \to a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

$(b_n) \to b \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$ yazılabilir.

$$\underbrace{|k_1 a_n + k_2 b_n - k_1 a - k_2 b|}_{< \varepsilon \text{ olduğu gösterilmeli.}} < \varepsilon$$

$$|k_1 a_n + k_2 b_n - k_1 a - k_2 b|$$

$$= |k_1(a_n - a) + k_2(b_n - b)|$$

$$\leq |k_1(a_n - a)| + |k_2(b_n - b)|$$

$$\leq |k_1| . \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon_1} + |k_2| . \underbrace{|b_n - b|}_{< \varepsilon_2}$$

$\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2|k_1|}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2|k_2|}$ olarak seçilirse

$< \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olarak

$|k_1 a_n + k_2 b_n - k_1 a - k_2 b| < \varepsilon$ olduğu gösterilmiş olur.

$(a_n) \to a \Rightarrow \left(\dfrac{k_1}{k_2 a_n}\right) \to \dfrac{k_1}{k_2 a}$

olduğunu ispat ediniz.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $\left|\dfrac{k_1}{k_2 a_n} - \dfrac{k_1}{k_2 a}\right| < \varepsilon$ olduğu gösterilmelidir.

$$\left|\frac{k_1}{k_2 a_n} - \frac{k_1}{k_2 a}\right| = \left|\frac{k_1 a - k_1 a_n}{k_2 . a . a_n}\right|$$

$$= \frac{|k_1 (a - a_n)|}{|k_2| . |a| . |a_n|} \leq \frac{|k_1|}{|k_2|} \frac{|a_n - a|}{|a| . |a_n|}$$

$$\left|\frac{k_1}{k_2 a_n} - \frac{k_1}{k_2 a}\right| \leq \frac{|k_1| . |a_n - a|}{|k_2| . |a| . |a_n|}$$

$(a_n) \to a$ olduğundan;

$|a_n - a| < \varepsilon_1$ ve ayrıca $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$

yazılabilir.

$$< \frac{|k_1| . \varepsilon_1}{|k_2| . |a| . \frac{|a|}{2}}$$

ε_1 keyfi seçilebilecek pozitif bir küçük sayı olduğundan; $\varepsilon_1 = \dfrac{|k_2| . a^2}{2 . |k_1|} . \varepsilon$ seçilirse

$\left|\dfrac{k_1}{k_2 a_n} - \dfrac{k_1}{k_2 . a}\right| < \varepsilon$ gösterilmiş olur.

$(a_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisinin limitini ε-tekniği ile bulunuz.

Binom açılımı ile;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0+\binom{n}{1}(1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1+\dots+\binom{n}{n}1^0\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

olduğu hatırlanırsa;

$$=1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\,\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\,\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}+\dots+$$

Bu açılım basitçe: $\dfrac{1}{n!}\,\dfrac{(n-1).(n-2)}{n^2}\cdot\cdot\cdot\dfrac{3}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\,\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}+\frac{1}{3!}\,\frac{n}{n}\,\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}+$$

$$\frac{1}{4!}\,\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{n}+\dots+$$

$$\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{n}\cdot\cdot\cdot\frac{4}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

ifadesinden yazılan basit bir açılımdır.

Bu ifade düzenlenecek olursa:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

olarak yazılabilir. (Yukarıdaki 1+1 hariç geri kalan toplamı ilerisi için M ile gösterelim)

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için yukarıdaki ifadede ( ) içleri daima 1'den küçüktür. Dolayısıyla;

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

yazılabilir.

Burada $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadesini (a_n) olarak gösterirsek,

$$(a_n) < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

Eşitsizliğin sağ kısmını yine bir dizi olarak alabiliriz. Yani

$$(a_n) < \underbrace{1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}}_{(b_n)}$$

Bu durumda:

$(a_n) < (b_n)$ gibi bir form oluşur.

Bu durumda eğer (b_n) dizisinin yakınsak olduğu gösterilebilirse benzer olarak (a_n) dizisinin de yakınsak olduğu gösterilebilir (ya da $a_n < b_n$ ve b_n yakınsak olacağından a_n de yakınsak)

Cauchy yakınsaklık tanımı gereği:

$\forall\, n, m \geq N(\varepsilon)$ için $\quad n \quad n+1 \quad n+2 \ldots m$

$|a_n - a_m| < \varepsilon$ olmalıydı.

$$|a_n - a_m| = \left|\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)\right|$$

$$=\left|\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\right.\right.$$

$$=\left|\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right| \quad ; \quad \left.\left.\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)\right]$$

Bu ifade için:

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{m!} < \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}$$

yazılabilir.

$$(n+1)! = (n+1).n.(n-1)\ldots 3.2.1 > 2.2.2\ldots 2 = 2^n$$

Dolayısıyla;

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}}=\frac{1}{2^n}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{m-n}}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k=1+r+r^2+\dots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$$

$$2^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$n-1>\mathrm{Log}_2(1-\varepsilon)$$

$$n>\mathrm{Log}_2(1-\varepsilon)+1$$

$$n\geq\underbrace{\left[\left|\mathrm{Log}_2(1-\varepsilon)+1\right|\right]+1}_{N(\varepsilon)}$$

$n\geq N(\varepsilon)$ olacak şekilde $N(\varepsilon)$ mevcut olduğu için dizinin limiti vardır. Yani yakınsaktır.

(103. sayfadaki)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+M=2+M$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+M$$

dikkate alınarak bu eşitlikten yaklaşık hesap ile $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ gösterilebi

$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Verilen problem aslında bir önceki problemdir. Bu kez farklı bir yaklaşım ile:

Bernoulli eşitsizliği ile:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+n\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n} \quad ; \quad 1-\frac{1}{n}>0 \text{ olup.}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} > \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{a_{n-1}}$$

olarak bulunur.

Bu $a_n > a_{n-1}$ yani dizinin monoton artan olması demektir.

Sınırlılık için ise:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

olduğu bir önceki problemde gösterilmişti.

Dolayısıyla:

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2} \; ; \; \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 2+\frac{1}{2}\cdot\left[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-2}}\right]$$

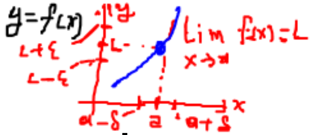
$$< 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$< 2+1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

olup $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dizisi sınırlıdır. Monoton artan ve sınırlı olduğundan YAKINSAK-tır.



09.11.2023

FONKSİYONLARIN LİMİTİ

f(x) fonksiyonu x=a ∈ R noktası hariç a noktasının civarındaki bütün x noktalarında tanımlı olsun. x bağımsız değişkeni a noktasına yeterince yakın değerler alırken (fakat a noktasına eşit değil), f(x) fonksiyonu da x bağımsız değişkeninin aldığı bu değerlere bağlı olarak L ∈ R değerine yeterince yakın değerler alıyorsa bu durumda;

x a'ya yaklaşırken f(x) fonksiyonu L limitine (limit değerine) yakınsıyor denir ve;

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$ → f(x)'in a'daki limiti

şeklinde ifade edilir.

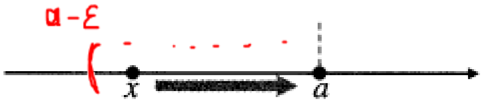
Bu tür yapılan bir tanımlamada "yakınlık" kavramı yeterince açık değildir. Yani gerek x bağımsız değişkeninin a değeri için, gerekse fonksiyonun alacağı değerin L değeri ile mukayese edilmesinde kullanılacak olan "**yakınsak**", "**yeterince yakın olması**", "**yakınsaması**" gibi ifadeler kesinlik ifade etmeyen, çoğu kez farklılık gösterebilecek bir kavramdır. Dolayısıyla bu tür bir tanımlamada bu hususun da dikkate alınması gerekir.

Limitin yukarıda ifade edilen tanımından da anlaşılacağı üzere "**Limit**", bağımsız değişkeninin belli bir değere yakın değerler alırken fonksiyonun alacağı değerin yakınsadığı değeri belirleyebilmemizi sağlayan bir yöntemdir. Özellikle fonksiyonlar için belirsizlik veya fonksiyonun bir noktanın solunda veya sağında (veya her iki tarafında) tanımlı olmadığı durumlarda fonksiyonun bu noktadaki davranışını (alacağı muhtemel değeri-yakınsadığı değeri) "**Limit**" kavramı ile belirlememiz mümkündür.

TEK YÖNLÜ LİMİT

Fonksiyonun bağımsız değişkenin a değerine herhangi bir taraftan (soldan artarak veya sağdan azalarak) yaklaşırken fonksiyonun alacağı değeri belirleme yöntemidir. y=f(x) için f(a)=?

SOL LİMİT :



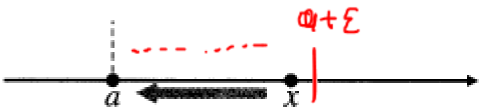
f(x) fonksiyonu (b,a) aralığında tanımlı olmak üzere x bağımsız değişkeni a noktasının solundan artarak a noktasına yeterince yakın değerler alarak yaklaşırken eğer fonksiyon $L_1 \in R$ gibi bir değere yakınsıyorsa bu durumda,

f(x) fonksiyonu x=a noktasında Sol Limite sahiptir denir ve;

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$ Sol Limit.

olarak ifade edilir.

SAĞ LİMİT :



f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı olmak üzere x bağımsız değişkeni a noktasının sağından azalarak a noktasına yeterince yakın değerler alarak yaklaşırken eğer fonksiyon $L_2 \in R$ gibi bir değere yakınsıyorsa bu durumda,

f(x) fonksiyonu x=a noktasında Sağ Limite sahiptir denir ve;

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$ → Sağ limit

olarak ifade edilir.

SOL - SAĞ LİMİT İLİŞKİSİ:+

f(x) fonksiyonu x=a noktasında sol ve sağ limitlere sahip ve bu iki limit değeri (sol ve sağ limit) birbirine eşit ise bu durumda f(x) fonksiyonu x=a noktasında limite sahiptir (f(x) fonksiyonunun x=a noktasında limiti vardır) denir ve;

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$$

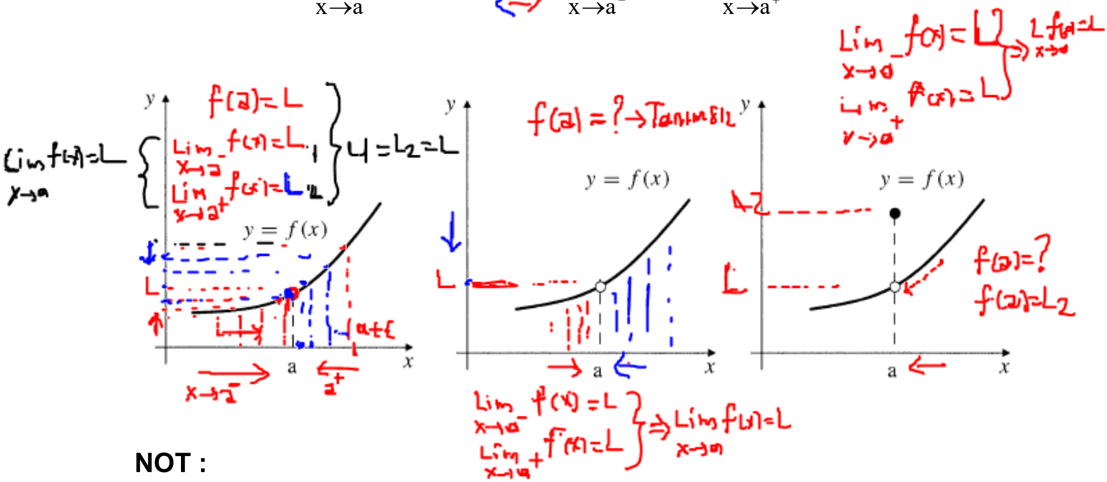
olarak ifade edilir. Bu durumda;

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L} \quad ; (L_1 = L_2 = L)$$

olduğu açıktır.

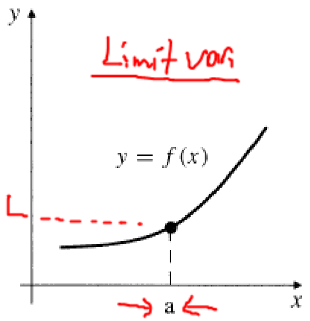
Bu doğrultuda bir fonksiyonun bir noktada limitinin olabilmesi için fonksiyonun sol ve sağ limitlerinin mevcut ve de birbirine eşit olması gerekir. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Yani eğer bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa, bu fonksiyonun sol ve sağ limitleri vardır ve de birbirine eşittir.

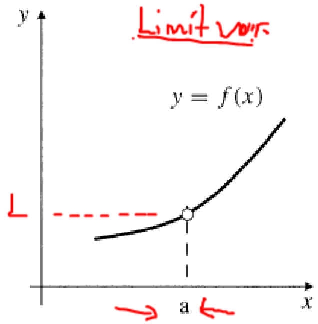
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\text{ ise }\Longleftrightarrow\; \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

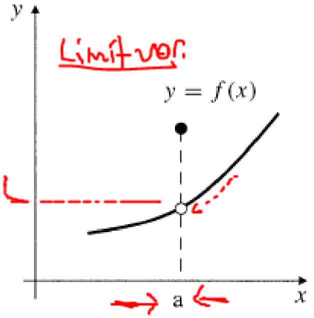


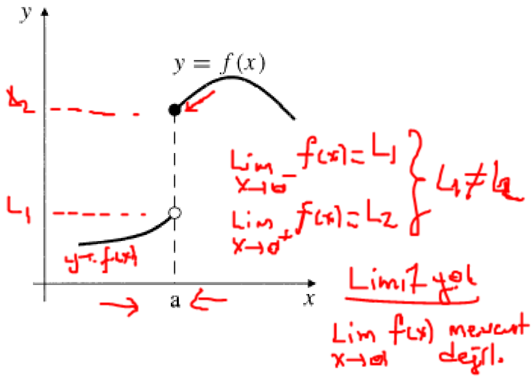
NOT :

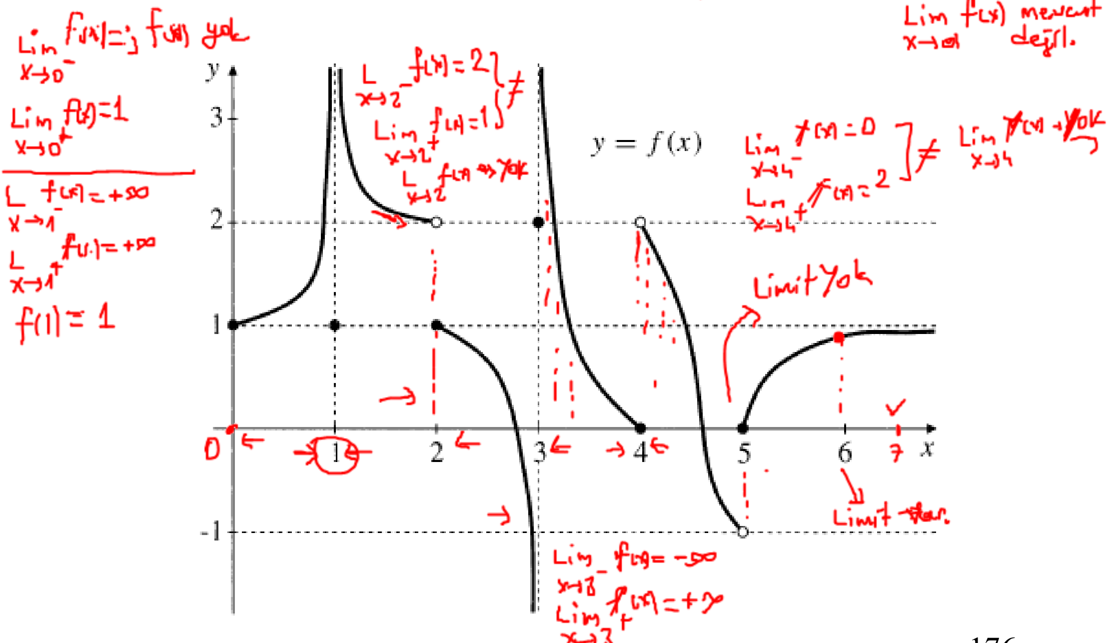
1- Bir fonksiyon bir noktada tanımlı olduğu halde o noktada limiti olmayabilir.
2- Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada mutlaka tanımlı olması gerekmez.
3- Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa fonksiyon bu noktada kesin olarak tanımlıdır denilemez.


Limit var
y = f(x)
L
a
x
y


Limit var
y = f(x)
L
a
x
y


Limit var
y = f(x)
L
a
x
y


y = f(x)
L2
L1
a
x
y
Lim f(x) = L1 (x→a⁻)
Lim f(x) = L2 (x→a⁺)
L1 ≠ L2
Limit yok
Lim f(x) mevcut değil.


y = f(x)
Lim f(x) = ; f(x) yok (x→0⁻)
Lim f(x) = 1 (x→0⁺)
L f(x) = +∞ (x→1⁻)
L f(x) = +∞ (x→1⁺)
f(1) = 1
L f(x) = 2 (x→2⁻)
Lim f(x) = 1 (x→2⁺)
L f(x) yok (x→2)
Lim f(x) = 0 (x→4⁻)
Lim f(x) = 2 (x→4⁺)
Lim f(x) yok (x→4)
Limit yok
Limit var.
Lim f(x) = −∞ (x→3⁻)
Lim f(x) = +∞ (x→3⁺)
0
1
2
3
4
5
6
7
x
-1
y

SOL ve SAĞ LİMİT İÇİN (ε) TEKNİĞİ

Bu teknik, daha önce

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

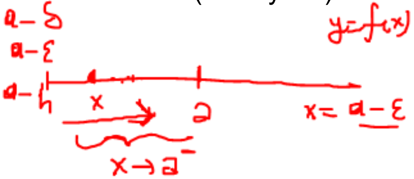
olarak ifade edilen sol ve sağ limitin değişik bir ifadesidir. Bir fonksiyonun belirli bir noktadaki limitinin değil de sol veya sağ limitinin sorulduğu, ya da limiti sorulan noktada fonksiyonun tanımsız olduğu (özel tanımlı fonksiyonlar için kök teşkil ettiği) vb gibi hususların söz konusu olması durumunda bu tekniğin uygulanması **Limit Hesabı**nın yapılmasında kolaylık sağlar.

SOL LİMİT İÇİN (ε) TEKNİĞİ :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(a-\varepsilon)$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

Sol Limit ifadesinde x bağımsız değişkeni x=a'nın solundan artarak a'ya çok yakın değerler alarak yaklaşırken fonksiyonun aldığı değerin de L_1 gibi bir değere yaklaştığını ifade etmekteydi. Dolayısıyla x bağımsız değişkeninin a'nın solundan artarak a'ya çok yakın değerler alarak yaklaşması x ile a arasındaki mesafenin (ε veya h) limit olarak "sıfıra" yaklaşması ile eşdeğerdir.



$x = a-\varepsilon \Rightarrow a = x+\varepsilon$

a=x+ε
x=a-ε

olarak Sol Limit ifadesi;

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} f(a-\varepsilon)$$

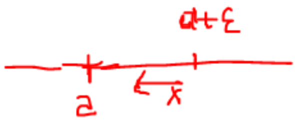
olacaktır.

SAĞ LİMİT İÇİN (ε) TEKNİĞİ :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Sağ Limit ifadesinde x bağımsız değişkeni x=a'nın sağından azalarak a'ya çok yakın değerler alarak yaklaşırken fonksiyonun aldığı değerin de L_2 gibi bir değere yaklaştığını ifade etmekteydi. Dolayısıyla x bağımsız değişkeninin a'nın sağından azalarak a ya çok yakın değerler alarak yaklaşması x ile a arasındaki mesafenin (ε veya h) limit olarak "sıfıra" yaklaşması ile eşdeğerdir.

x=a+ ε



olarak Sağ Limit ifadesi;

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a + \varepsilon)$$

olarak düzenlenebilecektir.

(ε) TEKNİĞİ İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

BAZI LİMİT TEOREMLERİ

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = M \in \mathbb{R}$$

ve k $\in$ R olmak üzere;

1-) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$

2-) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$

3-) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x) = L.M$

4-) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$; $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

5-) $\lim_{x\to a}[kf(x)] = k.\lim_{x\to a} f(x) = k.L$

6-) $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt{L}$

$\sqrt[2r]{f(x)}$, $r \in N^{+}$

$\underbrace{\;\;\hookrightarrow f(x) \geq 0\;\;}$

7-) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim_{x\to a} g(x)} = L^{M}$

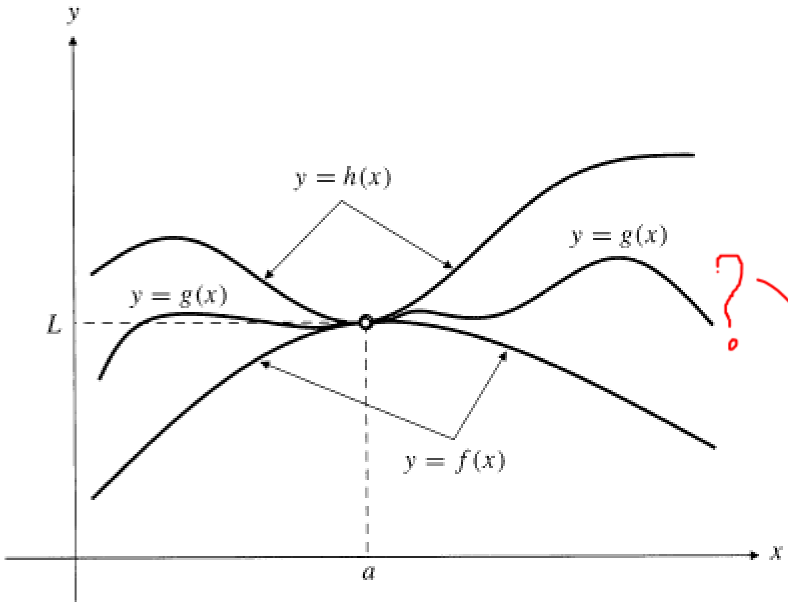
8-) $\lim_{x\to a}(f(x))^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ise $\begin{cases} n = 2k \text{ ise } L^{m} > 0 \\ \cancel{m < 0 \text{ ise } L \neq 0} \end{cases}$ olmalıdır.

?

$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)^m} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)^m}$

$= \sqrt[n]{\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^m}$

9-) Squeeze (Sıkıştırma Teoremi)



?

x=a hariç verilen bir aralığın her noktasında

$$\boxed{f(x) \le g(x) \le h(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x) \le \lim_{x\to a} h(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

$$L \le \lim_{x\to a} g(x) \le L$$

olsun. Bu durumda;

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

olur.

Bu ifade benzer olarak Sol ve Sağ Limitler için de yazılabilir.

POLİNOM ve RASYONEL FONKSİYONLARININ LİMİTİ

Fonksiyonların tanım kümelerinden hatırlanacağı üzere;

f(x)=P(x)= $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

polinom fonksiyonu x in her değeri için tanımlı olup fonksiyonun tanım (D(f))kümesi Reel Sayılar Kümesi ($(-\infty, \infty)$) olarak tanımlıydı. Dolayısıyla bu tür fonksiyonlar reel sayılar kümesindeki bütün sayılar için tanımlı olduklarından bu noktalarda alacakları değerler aynı zamanda limit değeri olacaktır. Bir başka deyişle polinom fonksiyonları için sol ve sağ limit değerleri daima mevcut ve de birbirine eşit olacaktır. Bu noktadan hareketle polinom fonksiyonlarının limitlerinin bulunmasında sol ve sağ limitler ayrı ayrı bulunup birbirlerine eşit olup olmadıklarının kontrolü yapılmaksızın direkt olarak fonksiyonun o noktadaki değeri bulunarak limit hesabı yapılır. Dolayısıyla;

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} P(x) = P(a) = L$$

ifade edilebilir. Benzer olarak;

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to a} P(x)}{\lim_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \qquad ; \quad \lim_{x \to a} Q(x) \neq 0$$

olarak bulunur.

Eğer x=a için Q(a)=0 oluyorsa bu durumda **(ε,h) tekniğiyle sol ve sağ limite** bakılır.

NOT:

Bu tür limit hesaplarında da x=a paydanın tekil dereceden tek katlı kökü ise elde edilecek olan limit farklı sonsuza, çift dereceden tekil kökü ise elde edilecek olan limit aynı sonsuza ıraksayacaktır.

SONSUZDA LİMİTLER

Fonksiyondaki bağımsız x değişkeninin $x \to -\infty$ veya $x \to \infty$ olması durumunda (yeterince küçük/büyük değerler alarak $-\infty$ veya ∞ 'a ıraksaması durumunda) fonksiyonun davranışının belirlenmesidir. Bu tür limitlerin hesabında yukarıda da belirtilen iki durum söz konusudur.

$x \to -\infty$ **DURUMU :**
Fonksiyondaki bağımsız değişkenin yeterince küçük değerler alarak $-\infty$'a ıraksaması durumunda fonksiyonun alacağı limit değerinin (davranışının) belirlenmesidir. Bu durumda fonksiyon $(-\infty,b)$ aralığında tanımlı olup x bağımsız değişkeni yeterince küçük değerler alıp $-\infty$ 'a ıraksarken (yaklaşırken) fonksiyon da L limit değerine yaklaşır denir ve;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

olarak ifade edilir.

$x \to \infty$ **DURUMU :**
Fonksiyondaki bağımsız değişkenin yeterince büyük değerler alarak ∞'a ıraksaması durumunda fonksiyonun alacağı limit değerinin (davranışının) belirlenmesidir. Bu durumda fonksiyon (a,∞) aralığında tanımlı olup x bağımsız değişkeni yeterince büyük değerler alıp ∞ 'a ıraksarken (yaklaşırken) fonksiyon da L limit değerine yaklaşır denir ve;

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

olarak ifade edilir.

NOT:
Cebirsel olarak $-\infty$ veya ∞ ile işlem yapılamaz. Bir ifade veya değişkenin bu tür büyüklüklere eşitliğinden ziyade ilgili değişken veya büyüklüklerin çok çok küçük değerler alarak $-\infty$'a ıraksaması veya çok çok büyük değerler alarak ∞'a ıraksaması anlaşılmalıdır.

SONSUZ İLE YAPILAN BAZI İŞLEMLER

1-) $\infty + k = \infty$

2-) $\infty - k = \infty$

3-) $-\infty + k = -\infty$

4-) $-\infty - k = -\infty$

5-) $-\infty + (-\infty) = -\infty$

6-) $\infty + \infty = \infty$

7-) $\infty . \infty = \infty$

8-) $(-\infty) . \infty = -\infty$

9-) $(-\infty).(-\infty) = \infty$

10-) $k.\ \infty = \begin{cases} \infty & ;k > 0 \\ -\infty & ;k < 0 \end{cases}$

11-) $k.(-\infty) = \begin{cases} -\infty & ;k > 0 \\ \infty & ;k < 0 \end{cases}$

Yukarıdaki işlemlerde $k \in R$

12-) $\dfrac{\infty}{k} = \begin{cases} \infty & ;k > 0 \\ -\infty & ;k < 0 \end{cases}$

13-) $\dfrac{-\infty}{k} = \begin{cases} -\infty & ;k > 0 \\ \infty & ;k < 0 \end{cases}$

14-) $\dfrac{k}{\mp\infty} = 0$

15-) $\dfrac{k}{0} = \begin{cases} -\infty & ;k < 0 \\ \infty & ;k > 0 \\ \text{Belirsiz} & ;k = 0 \end{cases}$

16-) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\infty} = \begin{cases} \infty & ;|a| > |b| \\ 0 & ;|a| < |b| \\ \text{Belirsiz} & ;a = b \end{cases}$

(a ile b aynı işaretli)

17-) $(k)^{\infty} = \begin{cases} \infty & ;k > 1 \\ 0 & ;0 < k < 1 \\ \text{Belirsiz} & ;k = 1 \end{cases}$

18-) Belirsizlikler (Belirsiz Şekiller)

$\dfrac{0}{0}$ = Belirsiz

$\dfrac{\infty}{\infty}$ =Belirsiz

$\infty - \infty$ = Belirsiz

∞ . 0=Belirsiz

1^{∞} =Belirsiz

∞^{0} = Belirsiz

0^{0} =Belirsiz

SONSUZLUK LİMİTLERİ

Fonksiyonun herhangi bir noktadaki limitinin değerinin $-\infty$ veya ∞ olarak elde edilmesi, bir başka deyişle fonksiyonun bağımsız değişkeni bir reel değere yaklaşırken (yakınsarken) fonksiyonun aldığı değerin (limit değerinin, limitinin) çok çok küçük değerler alarak $-\infty$ veya çok çok büyük değerler alarak ∞'a ıraksamasıdır. (Söz konusu sonsuzluk limitleri belirli bir noktadaki sol, sağ veya her iki limit için de söz konusu olabilir.) Bu anlatılanları

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

veya

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

olarak ifade etmek mümkündür.

NOT: Bu tür fonksiyonların limitleri genel olarak ε tekniği kullanılarak sol ve sağ limitlere bakılmak suretiyle bulunur.

LİMİT İÇİN ($\varepsilon - \delta$) TEKNİĞİ

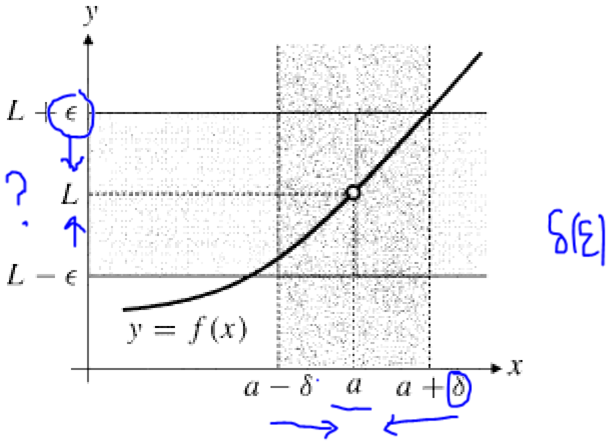
Buraya kadar fonksiyonların limitlerinin bulunmasına ilişkin yöntemler ele alınmış ve uygulanmıştı. Bu başlık altında ele alınacak olan $(\varepsilon - \delta)$ **tekniği** fonksiyonların limitlerinin bulunmasına ilişkin bir yöntem olmayıp tam tersine limiti zaten belirli olan bir fonksiyonun limitini gerçeklemeye yarayan bir yöntemdir.

Daha önceden hatırlanacağı üzere;

Bir fonksiyonun x=a noktasında limiti varsa bu, $x \to a$ (x bağımsız değişkeni a'ya yaklaşırken) iken $f(x) \to L$ (f(x) fonksiyonu da L değerine yaklaşmaktadır) şeklinde ifade edilmiş ve:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

olarak gösterilmişti. Bu durumda fonksiyonun bağımsız değişkeni olan x, a noktasına yeterince yakın olan noktalarda (a'nın solunda veya sağında) değerler alarak a'ya yaklaşırken, f(x) fonksiyonu da benzer olarak L'ye yeterince yakın olan noktalarda (L'nin altında veya üstünde) değerler alarak L değerine yaklaşmaktadır. Burada vurgulanması gereken eğer fonksiyonun a noktasındaki limiti eğer gerçekten L ise, x bağımsız değişkeni a'ya yaklaşırken, fonksiyonun da L değerine yaklaşması keyfi olarak değil bu yaklaşma ile ilişkili olmalıdır. Bunun tersi de doğrudur. Yani bir fonksiyonun aldığı değer belirli bir L değerine yaklaşıyor ise bu durumda fonksiyonun x bağımsız değişkeni de bir a değerine yaklaşmaktadır. Bu anlatılanları fonksiyonun a değerine yakın olan bütün noktalar için genelleyerek ifade etmek istersek;



ε küçük pozitif sonsuz küçük bir sayı, $x \in D(f)$ olmak üzere;
$\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için

$$0 < |x - a| < \delta$$

iken

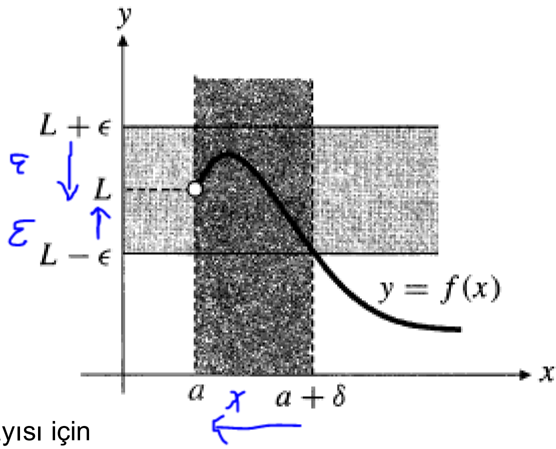
$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε değerine bağlı olarak $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı elde edilebiliyorsa bu durumda fonksiyonun x=a noktasındaki limiti L'dir denir. Bu ifadenin tersi de doğrudur.
Yukarıda da belirtildiği üzere bu yöntem bir fonksiyonun limitinin nasıl bulunacağını değil, zaten bilinen limitin doğruluğunu gerçeklemeye yarayan bir yöntemdir.

● **SAĞ LİMİT İÇİN ($\varepsilon - \delta$) TEKNİĞİ :**
Daha önce y=f(x) fonksiyonunun a noktasına soldan yaklaşırken limit ifadesi

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

olarak verilmişti. Bu ifadeyi $\varepsilon - \delta$ tekniği ile aşağıdaki gibi verebiliriz.



$\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için
x ∈ D(f) ; $a < x < a + \delta$
iken

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak $\delta(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur.

● **SOL LİMİT İÇİN ($\varepsilon - \delta$) TEKNİĞİ :**
Benzer olarak y=f(x) fonksiyonunun a noktasına soldan yaklaşırken ki limiti,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

olarak ifade gösterilmişti. Bu limit ifadesini de $\varepsilon - \delta$ tekniği ile aşağıdaki gibi verebiliriz.

$\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için
x ∈ D(f) ; $\underline{a - \delta < x < a}$
iken

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε sayısına bağlı olarak $\delta(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur.

SONSUZDA ve SONSUZLUK LİMİTLERİ İÇİN ($\varepsilon-\delta$) TEKNİĞİ

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ **LİMİTİ İÇİN ($\varepsilon-\delta$) TEKNİĞİ :**

Daha önce y=f(x) fonksiyonunun $x \to \infty$ için limitini;

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

olarak ifade etmiştik. Bu limit ifadesini $\varepsilon-\delta$ tekniği ile;

$\forall\ \varepsilon > 0$ sayısı için $x \in$ D(f) ve x > R olacak şekilde ε'a bağlı R reel

sayısı mevcutsa

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

olarak ifade edebiliriz.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ **LİMİTİ İÇİN ($\varepsilon-\delta$) TEKNİĞİ :**

Bu limit ifadesini de daha önce;

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

olarak ifade etmiştik. Bu limit ifadesini $\varepsilon-\delta$ tekniği ile;

$\forall\ B > 0$ sayısı için;

$$0 < |x - a| < \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını B'ye bağlı olarak bulabiliyorsak ($x \in$ D(f) ve f(x) > B) bu durumda;

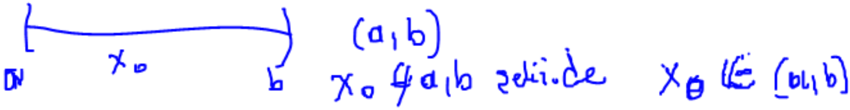
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

olarak yazılabilir.

SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK:

İÇ NOKTA : Bir nokta fonksiyonun tanım kümesi içinde yer alan herhangi bir açık aralığın elemanı ise bu noktaya iç nokta denir.



UÇ NOKTA : Eğer söz konusu nokta fonksiyonun tanım kümesindeki açık aralığa ait değilse yani fonksiyonun bir iç noktası değilse bu durumda noktaya **uç nokta** veya **sınır noktası** denir.

BİR İÇ NOKTADA SÜREKLİLİK:

x=a noktası y=f(x) fonksiyonunun bir iç noktası olmak üzere;

Eğer;

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

eşitliği gerçekleniyorsa f(x) fonksiyonu x=a noktasında **süreklidir** (sürekli bir fonksiyondur) denir. Bir başka deyişle eğer f(x) fonksiyonunun x=a noktasındaki limiti fonksiyonun bu noktada aldığı değere eşitse f(x) fonksiyonuna x=a noktasında süreklidir denir. Eğer:

- f(x) fonksiyonunun x=a noktasında limiti yoksa,
- f(x) fonksiyonunun x=a noktasında limiti var fakat f(a) değerine eşit değil,
- f(x) fonksiyonunun x=a noktasında limiti var fakat f(a) değeri tanımlı değil,

gibi durumlar söz konusu ise bu durumda f(x) fonksiyonu x=a noktasında **süreksizdir** (süreksiz bir fonksiyondur) denir.

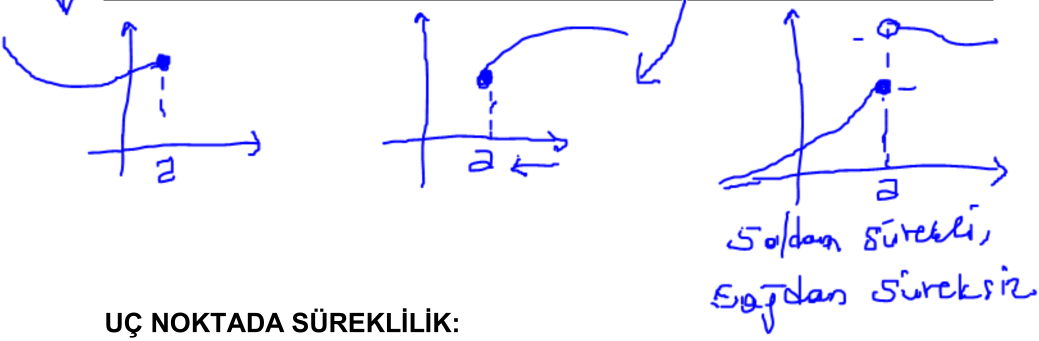
TEK YÖNLÜ SÜREKLİLİK

SOLDAN ve SAĞDAN SÜREKLİLİK:
y=f(x) fonksiyonu için;

Eğer;

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise fonksiyon x=a noktasında **soldan sürekli**

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise fonksiyon x=a noktasında **sağdan sürekli**



UÇ NOKTADA SÜREKLİLİK:
y=f(x) fonksiyonu için;

Eğer;

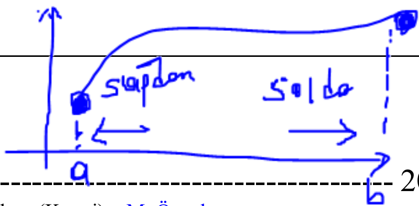
x=a noktası aralığın sağ uç noktası ve fonksiyon x=a'da soldan sürekli ise fonksiyona x=a **sağ uç noktasında sürekli**;

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

x=a noktası aralığın sol uç noktası ve fonksiyon x=a'da sağdan sürekli ise fonksiyona x=a **sol uç noktasında sürekli**;

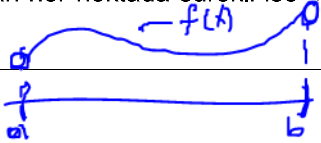
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

bir fonksiyon olarak adlandırılır.



BİR ARALIKTA SÜREKLİLİK ve SÜREKLİ FONKSİYON:

y=f(x) fonksiyonu için;
I verilen bir aralık olmak üzere eğer f(x) fonksiyonu bu aralığın her noktasında sürekli ise fonksiyona **I aralığında sürekli bir fonksiyon,** eğer bir fonksiyon tanım kümesini oluşturan her noktada sürekli ise bu durumda fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.



f(x); (a,b)-de süreklidir.

$\forall\ x_0 \in$ I olmak üzere;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ için fonksiyon **I aralığında sürekli**dir.

f(x)'in tanım kümesi

$\forall\ x_0 \in$ D(f) olmak üzere;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ için fonksiyon **sürekli fonksiyon**dur.

$y=f(x)=P(x) \Rightarrow$ bir polinom

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x)$ süreklidir.

$D(f(x))=D(f)=\mathbb{R}$

SÜREKLİLİK İÇİN ($\varepsilon - \delta$) TANIMI :

y=f(x) fonksiyonunun bir aralıktaki sürekliliğini önceki başlık altında vermiştik.

$\forall$ a $\in$ I olmak üzere;
a $\in$ D(f)=I, $\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısını

$$\text{iken} \quad \left.\begin{aligned} &|x - a| < \delta \\ &|f(x) - \underbrace{f(a)}_{L}| < \varepsilon \end{aligned}\right\}$$

olacak şekilde tekabül ettirebiliyorsak **f(x) fonksiyonu I aralığında düzgün sürekli bir fonksiyondur** denir.

SÜREKLİLİK – TEK YÖNLÜ SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ:

y=f(x) fonksiyonu ve x=a noktası verilsin.

Eğer;
● y(x) fonksiyonu x=a noktasında sürekli ise, fonksiyon bu noktada hem soldan hem de sağdan süreklidir.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \;\wedge\; \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

● Tersi olarak y(x) fonksiyonu x=a noktasında soldan ve sağdan sürekli ise, fonksiyon bu noktada süreklidir.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \;\wedge\; \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

SÜREKLİ FONKSİYON OLUŞTURMA

Fonksiyonların tanım kümelerinin incelenmesinden hatırlanacağı üzere;

- Polinom fonksiyonları bütün reel sayılar için
- Rasyonel fonksiyonlar tanım kümelerindeki bütün noktalar için,
- Sinx, Cosx, Tanx, Cotx, Secx, Cosecx gibi trigonometrik fonksiyonlar tanım kümelerindeki bütün noktalar için,
- Mutlak Değer fonksiyonu, işaret fonksiyonu, Tam değer fonksiyonu vs gibi özel tanımlı fonksiyonlar tanım kümelerindeki her nokta için,
- Üstel fonksiyon bütün reel sayılar için,
- Logaritma fonksiyonu tanım kümesindeki her nokta için,

Sürekli Fonksiyonlar olduğu kolaylıkla görülebilir.

TEOREM:
f(x) ve g(x) x=a'da aynı anda tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

f(x) + g(x)
f(x) - g(x)
f(x) . g(x)
kf(x) veya kg(x) ; $k \in R$
f(x) / g(x) ; $g(x) \neq 0$
$\left(f(x)\right)^{1/n}$; (eğer n çift ise f(a)>0)

gibi ifadelerin tamamı x=c noktasında süreklidir.

TEOREM:
Sürekli fonksiyonların bileşkesi süreklidir.

İspat :
Eğer f(g(x)) x=a noktasında tanımlı ve f(x) x=L 'de sürekli ise bu durumda;

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

dir. Dolayısıyla;

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \to a} g(x))$$

olacaktır. Eğer g(x) x=a'da sürekli ise (L=g(a)) $f \circ g$ x=a'da sürekli olacaktır.

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(c))$$

SÜREKSİZLİK, KALDIRILABİLİR SÜREKSİZLİK ve SÜREKLİLİK GENİŞLEMESİ

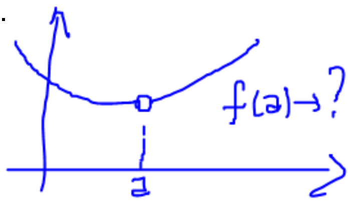
SÜREKSİZLİK:
Bir f(x) fonksiyonu verilen bir noktada sürekli değilse fonksiyona bu noktada **süreksiz bir fonksiyon** veya **kısaca süreksizdir** denir. Söz konusu noktaya da fonksiyonun **süreksizlik noktası** veya **esas süreksizlik noktası** denir. Daha önce kısaca değinildiği üzere bir fonksiyonun verilen bir noktada sürekli olmamasının değişik nedenleri olabilir. (Limitin olmaması, limitin mevcut fakat fonksiyonun değerine eşit olmaması, fonksiyonun tanımlı olmaması vs)

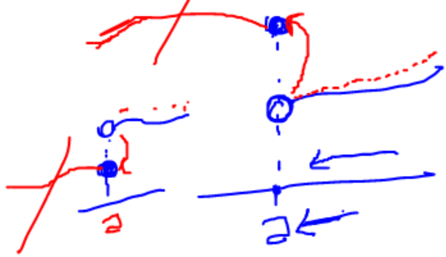
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$$

SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ:

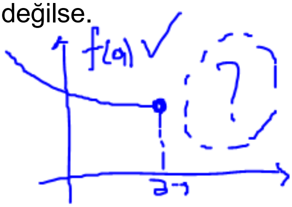
1.TİP SÜREKSİZLİKLER:

a) KAYIP NOKTA ~~(ÇIKARILMIŞ NOKTA)~~ SÜREKSİZLİĞİ:
Fonksiyon x=a noktasında limite sahip fakat bu noktada fonksiyon tanımlı değilse.



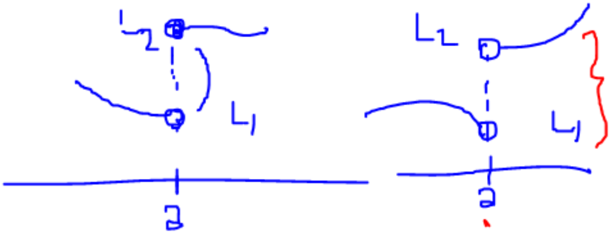


b) İZOLE NOKTA SÜREKSİZLİĞİ:
Fonksiyon x=a noktasında tanımlı fakat a'nın delinmiş komşuluğunda tanımlı değilse.



c) SONLU SIÇRAMA SÜREKSİZLİĞİ:

Fonksiyonun x=a noktasında limiti yoksa (sol ve sağ limitler mevcut fakat limit değerleri birbirine eşit değilse) bu tür süreksizliğe **sonlu sıçramalı süreksizlik,** limitler farkına da **sonlu sıçrama miktarı** denir.



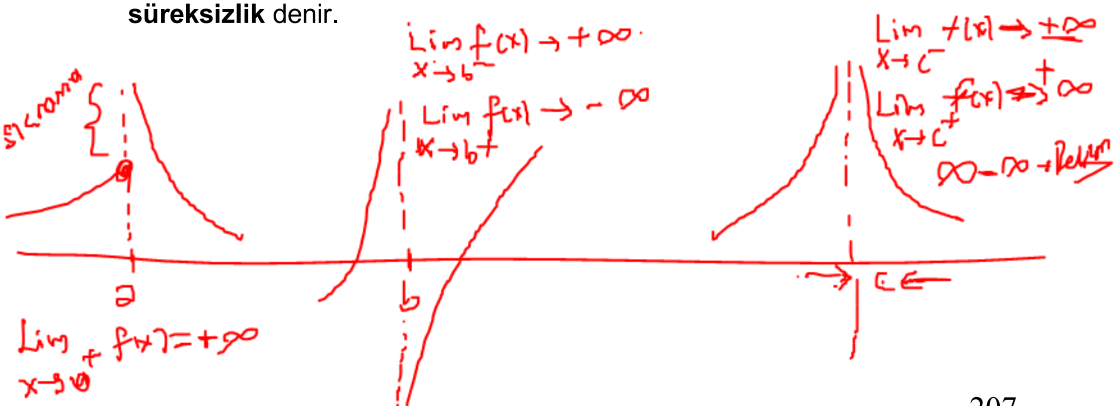
d) ÇIKARILMIŞ SÜREKSİZLİK:

Fonksiyonun x=a noktasında limiti var, fonksiyon bu noktada tanımlı fakat limit değeri f(a) değerine eşit değilse.

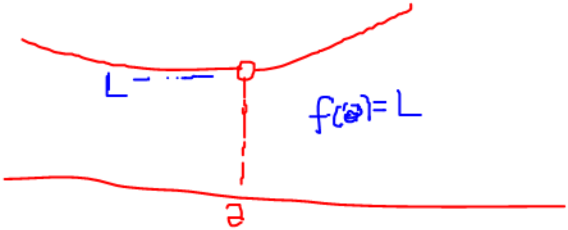
2.TİP SÜREKSİZLİKLER:

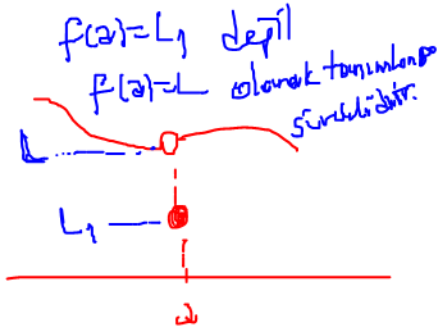
SONSUZ SIÇRAMA-ATLAMA SÜREKSİZLİKLERİ:

Fonksiyonun x=a noktasındaki limit değerlerinden en az birisinin sonsuza ıraksaması söz konusuysa bu tür süreksizliklere **sonsuz sıçramalı süreksizlik** denir.



KALDIRILABİLİR SÜREKSİZLİK:
Fonksiyon x=a noktasında limite sahip fakat x=a noktasında tanımlı değilse (ya da fonksiyon tanımlı fakat limit değeri bu değere eşit değilse) fonksiyonu x=a noktasında yeniden tanımlamak suretiyle sürekli hale getirilebilen süreksizliklere **kaldırılabilir süreksizlik**, x=a noktasına ise **kaldırılabilir süreksizlik noktası** denir.





SÜREKLİLİK GENİŞLEMESİ:
Fonksiyon x=a noktasında tanımlı olmadığı halde bu noktada limit değerine sahip olabilir. Yani;

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{fakat } f(a)=\text{tanımlı değil}$$

Bu durumda;

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in D(f) \\ L & ; x = a \end{cases}$$

olarak yeni bir fonksiyon tanımlarsak bu şekilde tanımladığımız F(x) fonksiyonu x=a noktasında sürekli olup bu fonksiyona **f(x) fonksiyonunun x=a noktasındaki süreklilik genişlemesi** denir.

Örneğin: Fonksiyonu için x=2 deki sürekliliğini süreksizliğini inceleyiniz.

$f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ fonksiyonu için f(2) değeri tanımlı değildir. Dolayısıyla f(2) değeri tanımlı olmamasına rağmen $x \neq 2$ olmak üzere;

f(2)=? tanımsız

$$f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x-2} = 1 \qquad \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

olarak bu fonksiyonu;

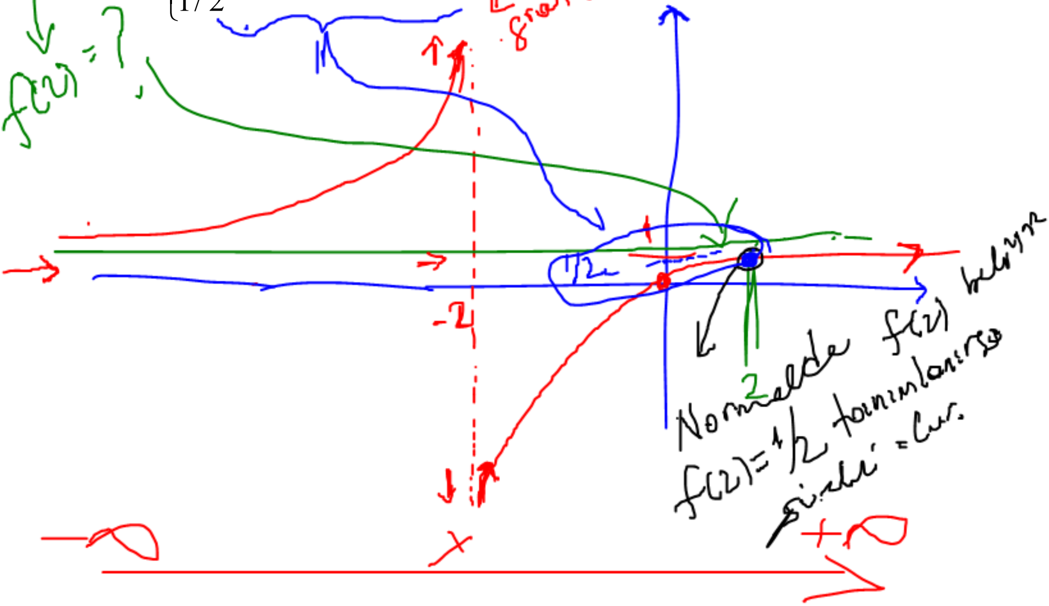
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x+2}\right) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} = f(2) \text{ olmalı}$$

$$F(x) = \frac{x}{x+2}$$

şeklinde ifade edersek bu fonksiyon $x \neq 2$ değerleri için f(x) fonksiyonuna eşit olacak aynı zamanda x=2 için değerini F(2)=1/2 almak suretiyle x=2 noktasında sürekli olacaktır. Dolayısıyla f(x) fonksiyonunun x=2 deki süreklilik genişlemesi F(x) olarak elde edilmiş olacaktır. f(x) ve F(x) fonksiyonlarının grafiklerinin f(x) fonksiyonunun grafiğinde x=2 noktasına karşılık gelen boşluk dışında aynı olduğu kolaylıkla görülebilir.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x+2} & ; x \in D(f) \\ 1/2 & ; x = 2 \end{cases}$$

grafiği



KAPALI SONLU BİR ARALIKTA SÜREKLİLİK

f(x) fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında sürekli ise, fonksiyonun $\left[a,b\right]$ aralığında **mutlak minimum değeri** ve **mutlak maksimum değeri** olmalıdır. Bu ifadeyi basit olarak f(x) fonksiyonunun bu aralıkta alacağı bütün değerlerin fonksiyonun bu aralıkta alacağı en yüksek ve en düşük değerlerinin arasında olacağı şeklinde özetlemek de mümkündür.

MAKSİMUM-MİNİMUM (MAX-MİN) DEĞER TEOREMİ :
f(x) fonksiyonu $\left[a,b\right]$kapalı, sonlu aralığında sürekli ise,

$\forall$ x $\in$ $\left[a,b\right]$ olmak üzere;

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

olacak şekilde p, q $\in$ $\left[a,b\right]$ sayıları mevcuttur. Dolayısıyla f(x) fonksiyonu

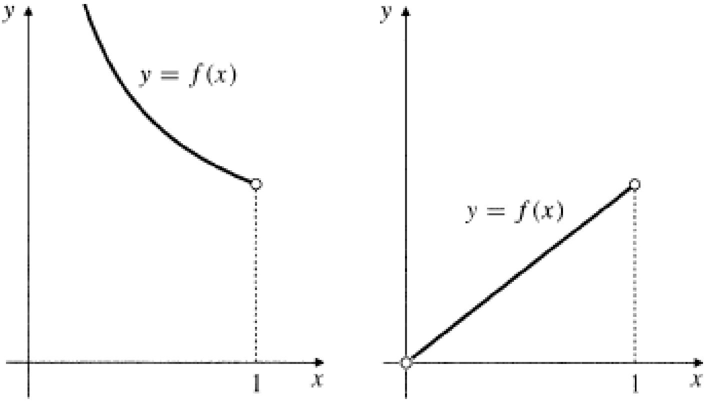
m=f(p) olacak şekilde x=p noktasında **mutlak minimum değere**
M=f(q) olacak şekilde x=q noktasında **mutlak maksimum değere**

sahiptir. Bu ifadeye **max-min değer teoremi** denir.
Bu teorem aynı zamanda kapalı sonlu bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun sınırlı olacağı anlamına da gelmektedir. Yani fonksiyon bu aralıkta gelişigüzel (rastgele, keyfi) olarak çok büyük pozitif veya çok küçük negatif değerler alamaz. Bunu;

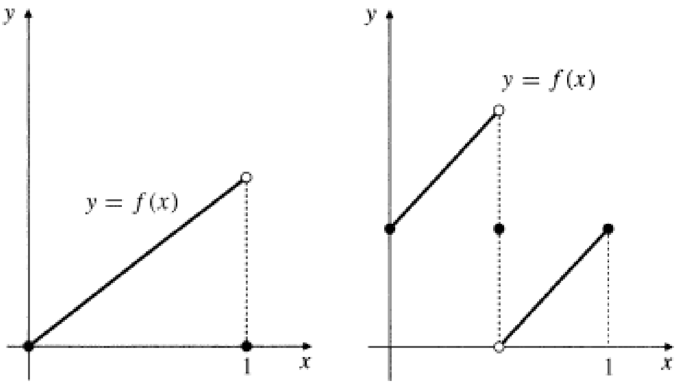
$$|f(x)| \leq K \qquad ; \quad -K \leq f(x) \leq K$$

olacak şekilde K $\in$ R sayısının varlığı ile ifade edebiliriz.
Max-Min Değer Teoremi matematikte önemli bir yere sahiptir. Ancak bu teorem bize kapalı sonlu bir aralıktaki sürekli bir fonksiyonun verilen aralıkta alabileceği maksimum veya minimum değerinin varlığını garanti eder. Bu teorem fonksiyonun mutlak minimum veya mutlak maksimum değerlerinin nasıl bulunulacağı hakkında bir fikir ifade etmez. Bu tür incelemeler ayrıca geliştirilmiş olan bazı tekniklerle yapılır.
Bu teorem için zayıf ya da tartışmalı olan nokta ise fonksiyonun verilen aralıkta sürekli olmadığı veya aralığın kapalı bir aralık olmadığı durumlarda teoremin nasıl uygulanacağıdır. Ayrıca bu teorem kapalı sonlu bir aralıkta sürekli olmayan bir fonksiyonun bu aralıkta maksimum veya minimum değerlerini alamayacağını ifade etmez.

ÖRNEK:



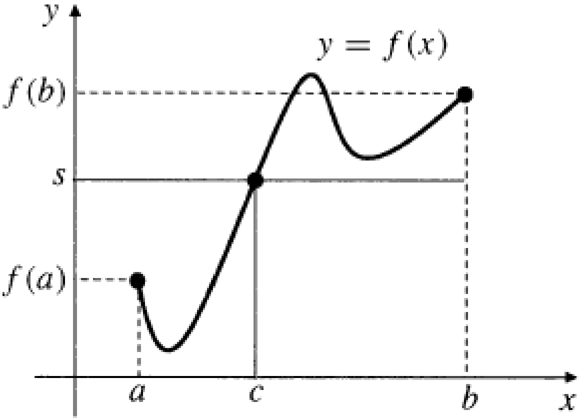
Solda grafiği verilen fonksiyon y=1/x fonksiyonu olup fonksiyon (0,1) açık aralığında süreklidir. Grafikten de görüleceği üzere fonksiyon bu aralıkta sınırlı olmadığından minimum veya maksimum değere sahip değildir.
Sağdaki grafikte verilen fonksiyon ise y=x olup (0,1) açık aralığında süreklidir. Fonksiyon (0,1) açık aralığında sınırlı fakat minimum veya maksimum değere sahip değildir.



Soldaki fonksiyon [0,1] kapalı aralığında tanımlı, aynı zamanda sınırlıdır. x=1 için fonksiyon sürekli olmadığından, [0,1) aralığında süreklidir. Fonksiyon x=0 da f(0)=0 olarak minimum değere sahip fakat maksimum değere sahip değildir.

Sağdaki fonksiyon ise [0,1] kapalı aralığında tanımlı olup aynı zamanda sınırlıdır. fonksiyon [0,1] tanım kümesi içinde süreksizlik noktasına sahiptir. Grafiğe göre fonksiyon minimum veya maksimum değere sahip değildir.

ARA DEĞER TEOREMİ :



f(x) fonksiyonu $[a,b]$ kapalı sonlu aralığında sürekli bir fonksiyon ve

$$f(a) < s < f(b)$$

olacak şekilde s $\in$ R sayısı mevcutsa bu durumda;

f(c)=s olacak şekilde c $\in$ (a,b) sayısı mevcuttur şeklinde ifade edilen teoreme **Ara-Değer Teoremi** denir.

Özel olarak, minimum değeri (m) ve maksimum değeri (M) olacak şekilde bu değerler arasında bütün değerleri alacak şekilde kapalı sonlu bir aralıkta tanımlı ve sürekli olan bir f(x) fonksiyonu için tanım kümesi $[m,M]$ şeklinde kapalı sonlu bir aralık olacaktır.

ÖRNEK:

$y = f(x) = x^3 - 4x$ fonksiyonu için pozitif ve negatif olduğu aralıkları belirleyiniz.

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$; x=0, x=-2, x=2

f(-3)=-15<0, f(x) negatif , $(-\infty,-2)$

f(-1)=3>0, f(x) pozitif , $(-2,0)$

f(1)=-3<0, f(x) negatif , $(0,2)$

f(3)=15>0, f(x) pozitif , $(2,\infty)$

LİMİT ve SÜREKLİLİK UYGULAMALARI

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x+1$ ise $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ olduğunu $\varepsilon-\delta$ tekniği ile gösteriniz.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$; $|x-2|<\delta$ iken $|f(x)-5|<\varepsilon$ olmalıdır.

$$|x-2|<\delta \Rightarrow 2|x-2|<2.\delta$$
$$|2x-4|<2.\delta$$
$$|2x+1-1-4|<2.\delta$$
$$|\underbrace{(2x+1)}_{f(x)}-\underbrace{5}_{L}|<2.\delta$$

o halde $2\delta \leq \varepsilon$ alsak $\delta=\delta(\varepsilon)\leq \frac{\varepsilon}{2}$ olur.

Yani $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olarak keyfi seçildiğinde $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ veya $\frac{\varepsilon}{2}$ den daha küçük seçilirse en az bir tane $\delta(\varepsilon)$ sayısı bulunabilir. Yani

$$|f(x)-L|<\delta$$
$$|(2x+1)-5|<\delta$$ olacak şekilde δ mevcuttur.

Bu durumda
$$\lim_{x\to 2}(2x+1)=5 \text{ dir.}$$

Yöntem-2

Tersi durumu yani $|f(x)-L|<\varepsilon$ için $|x-a|<\delta$ halini inceleyelim.

$|f(x)-L|<\varepsilon$

$|(2x+1)-5|<\varepsilon$

$|2x-4|<\varepsilon$

$|2(x-2)|<\varepsilon$

$2|x-2|<\varepsilon$

$|\underbrace{x}_{x}-\underbrace{2}_{a}|<\frac{\varepsilon}{2}$

$|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ olarak mevcuttur.

$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ veya $\frac{\varepsilon}{2}$ den küçük seçilirse limit gerçekleşir.

$\lim\limits_{x\to 1}(1-4x)=-3$ olduğunu ε-δ tekniği ile gösteriniz.

$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+$ için $\exists\ \delta(\varepsilon)\in\mathbb{R}^+$;

$|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ mevcut olmalı.

$|x-1|<\delta$

$|1-x|<\delta$

$4|1-x|<4\delta$

$|4-4x|<4\delta$

$|3+1-4x|<4\delta$

$|\underbrace{(1-4x)}_{f(x)}-\underbrace{(-3)}_{L}|<4\delta$

$4\delta\leq\varepsilon$

$\delta(\varepsilon)\leq\dfrac{\varepsilon}{4}$

veya

$|f(x)-L|<\varepsilon$

$|(1-4x)-(-3)|<\varepsilon$

$|1-4x+3|<\varepsilon$

$|4-4x|<\varepsilon$

$4|1-x|<\varepsilon$

$|1-x|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

$|-(x-1)|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

$|\underbrace{x}_{x}-\underbrace{1}_{a}|<\dfrac{\varepsilon}{4}=\delta(\varepsilon)$

Her iki durumda da $\forall\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+$ için $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)$ mevcut olduğundan limit gösterilmiş olur.

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+4)=4$ olduğunu ε-δ ile gösteriniz.

$\forall\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+$ için; $\exists\ \delta(\varepsilon)\in\mathbb{R}^+$; $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ gösterilmeli.

$|x-0|<\delta$

$|x|<\delta$

$|x|.|x|<\delta^2$

$|x|^2<\delta^2$

$|x^2|<\delta^2$

$|x^2+4-4|<\delta^2$

$|(x^2+4)-4|<\delta^2$

$|\underbrace{(x^2+4)}_{f(x)}-\underbrace{4}_{L}|<\delta^2$

$\delta^2\leq\varepsilon \Rightarrow \delta\leq\mp\sqrt{\varepsilon}$

$\delta>0$ olması gerektiğinden

$\delta\leq\sqrt{\varepsilon}$

$\lim\limits_{x\to 1} (2x^2+x-1) = 2$ olduğunu ε-δ tekniği ile gösteriniz. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists\, \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$; $|x-a|<\delta$: $|f(x)-L|<\varepsilon$ gösterilmeli

$|x-1|<\delta$ veya $|f(x)-L|<\varepsilon$

$6.|x-1|<6.\delta$

$x\to 1$ için $|2x+3|<6$ dır.

$|x-1|.|2x+3|<6.\delta$

$|(x-1).(2x+3)|<6.\delta$

$|2x^2+x-3|<6\delta$

$|\underbrace{(2x^2+x-1)}_{f(x)} - \underbrace{2}_{L}|<6.\delta$

$6\delta \leq \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\delta}_{\delta(\varepsilon)} \leq \dfrac{\varepsilon}{6}$

$|2x^2+x-1-2|<\varepsilon$

$|2x^2+x-3|<\varepsilon$

$|(2x+3)(x-1)|<\varepsilon$

$|2x+3|.|x-1|<\varepsilon$

$x\to 1$ için $|2x+3|<6$ dır.

$6.|x-1|<\varepsilon$

$|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{6}$

$\delta = \delta(\varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon}{6}$

Dolayısıyla $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$ veya $\dfrac{\varepsilon}{6}$ dan daha küçük seçilecek şekilde mevcuttur. Yani limit "2" dir.

$\lim\limits_{x\to 0} (x^3+2) = 2$ olduğunu ε-δ tekniği ile gösteriniz.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için; $\exists\, \delta(\varepsilon)$; $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ gösterilmeli

$|x-0|<\delta$

$|x|<\delta$

$|x|^3<\delta^3$

$|x^3|<\delta^3$

$|x^3+2-2|<\delta^3$

$|\underbrace{(x^3+2)}_{f(x)} - \underbrace{2}_{L}|<\delta^3$

$\delta^3 \leq \varepsilon \Rightarrow \delta = \delta(\varepsilon) \leq \sqrt[3]{\varepsilon}$ mevcut olup $\lim\limits_{x\to 0} (x^3+2) = 2$ dir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ VE BELİRSİZLİKLER

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = ?$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}^{=1}\cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx} = 1$ olup

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 3x}{1\cdot 5x} = \frac{3}{5}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$|PH| < |\overset{\frown}{PQ}| < |RQ|$

$\sin x < x < \tan x$

$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} 1 < \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} < \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}$

$1 < \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} < 1$

$1 < \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} < 1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 5x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\tan 5x}{5x}\cdot 5x};$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{kx} = 1}$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{kx} = 1$ olup

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 3x}{1\cdot 5x} = \frac{3}{5}$$

Not:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = 1$$

Benzer olarak;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan kx}{kx}$; $kx = u$ alınsa $x\to 0$ için $u\to 0$

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\tan u}{u} = 1$ dur.

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin 3u}{\tan 5u} = ?$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\frac{\sin 3u}{3u}\cdot 3u}{\frac{\tan 5u}{5u}\cdot 5u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1\cdot 3u}{1\cdot 5u} = \frac{3}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & ; \ x<0 \\ [\![x+2]\!] & ; \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = ?$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} f(0-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{\sin(2(0-\varepsilon))}{0-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{\sin(-2\varepsilon)}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\cdot \underbrace{\frac{\sin(-2\varepsilon)}{-2\cdot\varepsilon}}_{=1}$$

$$\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(0+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\![0+\varepsilon+2]\!]$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [\![2+\varepsilon]\!] = 2 \qquad f(0)=2$$

Sol ve sağ limit eşit olup $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ dir.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x - \tan x}{\sin x} = ?$$ Normal denenirse $\left[\frac{0}{0}\right]^{B}$ görüntüsü verir.

Düzenlenirse;

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x - \tan x}{\sin x} = \lim_{x\to\pi}\left[1 - \frac{\tan x}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[1 - \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right]; \quad \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\sin x} = 1$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[1 - \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$\lim_{x\to\pi} \cos x = -1 \text{ olup}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[1 - \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$= 1 - (-1) = 2.$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = ?$$ $x\to 4$ için $\left[\frac{0}{0}\right]^{B}$ olur.

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\underbrace{x-4}_{\sqrt{x}^2-2^2}} = \lim_{x\to 4} \frac{\overbrace{\sqrt{x}-2}^{=1}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} ; \quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = 1 \text{ olup.}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4} \checkmark$$

metod-2

$$\lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)\overbrace{(\sqrt{x}+2)}^{\text{eşlenik}}}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\overbrace{(x-4)}^{=1}}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

16.11.2023

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{a}-\underbrace{x}_{b}}=?\qquad x\to1 \text{ için } \left[\frac{0}{0}\right]^{B} \text{ belirsiz}$$

$a^3\mp b^3=(a\mp b)(a^2\pm ab+b^2)$ olduğu hatırlanırsa

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sqrt[3]{x}-x}=\lim_{x\to1}\frac{(1-x)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\sqrt[3]{x}+x^2)}{(\underbrace{\sqrt[3]{x}-x}_{a-b})\cdot(\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\sqrt[3]{x}+x^2)}=(\sqrt[3]{x})^3-x^3 = x-x^3 = x(1-x^2)$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(1-x)}\cdot(\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\sqrt[3]{x}+x^2)}{x\cdot\cancel{(1-x)}(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{1}+1\cdot\sqrt[3]{1}+1^2}{1\cdot(1+1)}=\frac{3}{2}$$

Yukarıdaki payda:

$$(\sqrt[3]{x}-x)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+x\cdot\sqrt[3]{x}+x^2)=x-x^3=x(1-x^2)=x(1-x)(1+x)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{a}-\underbrace{1}_{b}}=?\qquad x\to1 \text{ için } \left[\frac{0}{0}\right]^{B} \text{ belirsiz}$$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1-2)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{1+1+1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=?\qquad x\to 0 \text{ için } \frac{1-1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]^{B}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x\cdot(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$$

$\cos(a\mp b)=\cos a.\cos b\pm\sin a.\sin b$

$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{0}{1+1}=0\checkmark$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 3x}=?\qquad x\to 0 \text{ için } \frac{1-1}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]^{B}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin^2 x}{\sin 3x}$$

$$=\lim_{x\to 0} 2.\frac{x^2.\frac{\sin^2 x}{x^2}}{3x.\frac{\sin 3x}{3x}}=\lim_{x\to 0} 2.\frac{x^2.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{3x.\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$$

$$=\lim_{x\to 0} 2.\frac{x^2}{3x}=0\;;\quad \lim_{x\to 0}2.\frac{x.\overbrace{\cancel{x}}^{=1}}{3\,\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}.x=0$$

$\sqrt{f^2_{(x)}} = |f(x)|$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{x} = ? \quad x \to 0 \text{ için } \frac{\sqrt{1-1}}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]^{B}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-(1-2\sin^2 2x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\,.\,|\sin 2x|}{x}$$

$x \to 0$ tanımsızlık oluşturduğu için sol ve sağ limite bakılmalıdır.

Sol limit:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{2}\,.\,|\sin 2x|}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \sqrt{2}\,.\,\frac{|\sin(2(0-\varepsilon))|}{0-\varepsilon}$$

$$= \sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{|\sin(-2\varepsilon)|}{-\varepsilon} = \sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{|-\sin 2\varepsilon|}{-\varepsilon}$$

$$= -\sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{|-\sin 2\varepsilon|}{\varepsilon} = -\sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{-(-\sin 2\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$= -\sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon}}_{=1} . 2 = -2\sqrt{2}$$

Sağ limit:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{2}\,\frac{|\sin 2x|}{x} = \sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|\sin(2(0+\varepsilon))|}{0+\varepsilon}$$

$$= \sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|\sin 2\varepsilon|}{\varepsilon} = \sqrt{2}\,.\,\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon} . 2 = 2\sqrt{2}$$

$x \to 0$ için sol ve sağ limit farklı olup limit yok.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x-3} = ? \qquad x\to 3 \text{ için } \frac{\sin 0}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]^{B}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x-3} \cdot \frac{x+3}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}}_{=1} \cdot (x+3) \; ;$$

Not: $\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9}$ için

$u = x^2-9$

$x\to 3$ için $u\to 0$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x^2-9)}{x^2-9} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x+3) = 6$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - x = ? \qquad x\to\infty \text{ için } [\infty-\infty]^{B} = \text{belirsiz}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x}-x)\cdot(\sqrt{x}+x)}{\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-x^2}{\sqrt{x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)} \; ; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ olarak}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot x = -\lim_{x\to\infty} x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(0-1)}{x(0+1)} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2}{x} \to -\infty$$

Fonksiyonun limiti $-\infty$ 'a ıraksar.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=?\qquad x\to 2 \text{ için } \frac{4}{0}-\frac{1}{0}$$
$$\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-(x+2)}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$(2-x)$

$-(2-x)$

$$=\lim_{x\to 2}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}(\text{Cotg}x-\text{Cosec}x)=?\qquad x\to 0 \text{ için } \text{Cotg}0-\frac{1}{\sin 0}$$

$$\frac{\cos 0}{\sin 0}-\frac{1}{\sin 0}$$
$$\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$$
$$\infty-\infty$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\sin x.(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{\sin x.(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{\sin x.(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x}{\cos x+1}=-\frac{0}{1+1}=0$$

Not: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x}$ ifadesinde $\cos x=1-2.\sin^2\frac{x}{2}$, $\sin x=2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$ alınarak da işlem yapılabilir.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x+1-\sqrt{4x^2-2x+3}\right) = ?$$

$(2x-\frac{1}{2})^2 +$

$\frac{1}{4} + ? = 3$

$? = \frac{11}{4}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[x+1-\sqrt{\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[x+1-\sqrt{\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2 \left[1+\frac{11}{4\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2}\right]}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[x+1-\left|2x-\frac{1}{2}\right| \cdot \sqrt{1+\frac{11}{4\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2}}\right]$$

$x \to -\infty$ için $\left(2x-\frac{1}{2}\right) < 0$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[x+1+\left(2x-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{1+\frac{11}{4\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[3x+\frac{1}{2}\right] \to -\infty$$

Not: Yukarıda verilen ifadeyi pay ve paydayı $\left(x+1+\sqrt{4x^2-2x+3}\right)$ çarparak da işlem yapılabilir.

Doğal olarak cebirsel işlemleri fazla olacaktır.

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(1-\cos\theta)}{\cos\theta-1}=? \qquad \theta\to0 \Rightarrow \frac{\sin(1-1)}{1-0}=\frac{0}{0}$$

$x=1-\cos\theta$; $\theta\to0 \Rightarrow x=0$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{-x}=-1$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{t^2\cdot\cot 3t}=? \qquad t\to0 \text{ için } \frac{\tan 0}{0^2\cdot\cot 0}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{\frac{\cos 3t}{\sin 3t}}=\lim_{t\to0}\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{=1}\cdot\frac{\sin 3t}{t\cdot\cos t\cdot\cos 3t}$$

$$=\lim_{t\to0} 3\cdot\underbrace{\frac{\sin 3t}{3t}}_{=1}\cdot\frac{1}{\cos t\cdot\cos 3t}=\lim_{t\to0}\frac{3}{\cos t\cdot\cos 3t}=3$$

***

$$\boxed{\lim_{x\to0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=?} \qquad x\to0 \text{ için } 0\cdot\sin\left(\frac{1}{0}\right)=0$$

Ancak bu limiti daha teknik olarak,

$$-x^2\le x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$-x^2\le x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le x^2$ olarak limit alınırsa

$$0\le\lim_{x\to0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\le 0$$

Sıkıştırma teoremi gereği $\lim_{x\to0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-7x-4}-\sqrt{x^2-2x+3}\right]=?$$

$x\to\infty$ için $-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty$
$=\infty-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\underbrace{-4-\frac{49}{4}}_{A}}-\sqrt{(x-1)^2+3-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\left[1+\frac{A}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}\right]}-\sqrt{(x-1)^2\left[1+\frac{2}{(x-1)^2}\right]}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left|x-\frac{7}{2}\right|\cdot\sqrt{1+\frac{A}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}-|x-1|\cdot\sqrt{1+\frac{2}{(x-1)^2}}\right]$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}$ için $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2\to+\infty$; $\frac{A}{(x-7/2)^2}=0$

$(x-1)^2\to+\infty$ $\frac{2}{(x-1)^2}=0$

olarak

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left|x-\frac{7}{2}\right|-|x-1|\right]$$; $x\to-\infty$ için mutlak değerlerin içi <0 olup.

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\left(x-\frac{7}{2}\right)+(x-1)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -x+\frac{7}{2}+x-1=\frac{5}{2}$$ bulunur.

NOT: $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}.\lim_{x\to\infty}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x}=?\quad x\to 0 \text{ için } \frac{\sin(1-1)}{0}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}}_{=1}\cdot\frac{(1-\cos x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2.\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2}}{2.\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=?\quad x\to 0 \text{ için } \frac{\sin(\sin 0)}{0}=\frac{\sin 0}{0}=$$

$$=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1}$$

$x\to 0$ için $\sin x\to 0$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}_{=1}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$u=\sin x$

$x\to 0 \Rightarrow u\to 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}\frac{\sin u}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}\underbrace{\frac{\sin u}{u}}_{=1}\cdot\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sin\sqrt{x}} = ? \qquad x\to 0 \text{ için } \frac{\sin 0}{\sin\sqrt{0}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sin\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \frac{x}{\sin\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}}_{=1} \cdot \sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{x} = ? \qquad x\to 0 \quad \frac{\sin(0^2+0)}{0} = \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{x} \cdot \frac{(x^2+x)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}}_{=1} \cdot \frac{x^2+x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9} = ? \qquad x\to 9 \text{ için } \frac{\sin(\sqrt{9}-3)}{9-9} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}^2-3^2}$$

$$= \lim_{x\to 9} \underbrace{\frac{\sin(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)}}_{=1} \frac{1}{(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{a-x}}{x-2}$$ limitinin var olduğu bilindiğine göre bu limiti bulunuz.

$x \to 2$ için $x-2=0$; $\frac{1}{x-2} \to \infty$ olacağından normal koşullarda fonksiyon için tanımsızlık olur. Ancak limitinin var olduğu belirtildiğine göre bu durumda $(x-2)$ ortak çarpandır. Yani $x\to 2$ durumunda pay kısmı da "0" dır.

O halde;

$$\lim_{x\to 2} (3-\sqrt{a-x}) = 0 \Rightarrow 3=\sqrt{a-2}$$

$$9 = a-2 \Rightarrow a=11$$

Bu durumda;

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{11-x}}{x-2} = \frac{0}{0} \text{ olup;}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(3-\sqrt{11-x})}{x-2} \cdot \frac{(3+\sqrt{11-x})}{(3+\sqrt{11-x})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(9-(11-x))}{(x-2)(3+\sqrt{11-x})} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2).(3+\sqrt{11-x})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{3+\sqrt{11-x}} = \frac{1}{6}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & ; x<1 \\ 1 & ; x=1 \\ 1+\ln x & ; x>1 \end{cases}$ f(x) ; x=1 de sürekli midir?

$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \text{ olmalıdır.}}$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ için $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1+\ln x) = 1+\ln 1 = 1$$

Dolayısıyla fonksiyonun x=1 de limiti vardır. Bu limit f(1)=1 'e eşit olduğundan x=1 'de süreklidir.

$f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x<1 \\ 1 & ; x=1 \\ \ln x & ; x>1 \end{cases}$ fonksiyonu için x=1 'deki süreklilik durumunu inceleyiniz.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0$$

Yani sonlu sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

Fonksiyon x=1 noktasında ne soldan, ne sağdan sürekli değildir. Dolayısıyla süreksizdir.

$$f(x): R \to R : \begin{cases} [|x|]+b & ; x<2 \\ 4 & ; x=2 \\ \log_a(x+14) & ; x>2 \end{cases}$$

$f(x)$ fonksiyonu $x=2$'de sürekli ise

Sürekli ise:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \text{ 'dir}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [|x|]+b$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-} [|(2-\varepsilon)|]+b$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1+b \; ; \; \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$b+1=4$$

$$\boxed{b=3}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \log_a(x+14) = \log_a(2+14)$$

$$\lim_{x\to 2^+} = \log_a 16 = 2\log_a 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2\cdot\log_a 4 = 4$$

$$\boxed{a=2}$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x < 2 \\ 2 & ; x = 2 \\ x - 2 & ; x > 2 \end{cases}$$

için $x=2$ 'deki süreksizliği inceleyiniz.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - x^2) = 4 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

Fonksiyon için

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 \neq f(2)$$

şeklindedir. Fonksiyon $x=2$ 'de sürekli değildir. Ancak bu süreksizlik "kaldırılabilir süreksizliktir". Yani $f(2)=0$ olarak tanımlanırsa sürekli olur.

Dolayısıyla;

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x < 2 \\ 0 & ; x = 2 \\ x - 2 & ; x > 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsa sürekli olacaktır.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

olarak verilen fonksiyonun süreksizliğini kaldırınız.

Fonksiyon sürekli olacaksa

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

olmalıdır.

Fonksiyon için $f(0)=1$ olarak tanımlıdır.

Ancak;

Gerek sol $(x<0)$, gerek sağ $(x>0)$ limiti aynı fonksiyon ile $x \neq 0$ şeklinde tanımlı olup;

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-4}{2-x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-2)(x+2)}{2-x} = -2$$

Bu durumda $x=0$ noktasında sürekli değildir.

Dolayısıyla fonksiyon $f(0)=1$ yerine $f(0)=-2$ olarak tanımlanırsa süreksizlik kaldırılmış olur.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2-x} & ; x \neq 0 \\ -2 & ; x = 0 \end{cases}$$

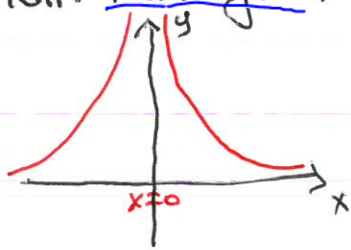
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonunun $x=0$ 'daki sürekliliğini inceleyiniz.

$x\to 0$ için $f(x)\to\infty$ tanımsız

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^-} f(0-\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{1}{(0-\varepsilon)^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(0+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{(0+\varepsilon)^2}=\infty$$

Fonksiyon $x=0$ noktasında $L\in R$ olacak şekilde bir limite sahip değildir. Fonksiyonun sonsuz süreksizliği vardır.



$$f(x)=\begin{cases} x-2 \; ; & x<2 \\ 4-x^2 \; ; & x>2 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=2$ 'de sürekli midir?

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-2)=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(4-x^2)=0$$

Eğer fonksiyon $f(2)=0$ olarak tanımlanırsa sürekli olur.

Fonksiyonun $x=2$ noktasında sol ve sağ limiti vardır ve birbirine eşittir. Yani fonksiyonun $x=2$ 'de limiti vardır. Ancak fonksiyon bu ~~noktada~~ noktada tanımlı olmadığından süreksizdir.

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{1-2.\sin\frac{x}{3}}$$ -ün süreklilik durumunu inceleyiniz.

$$1-2.\sin\frac{x}{3}=0 \Rightarrow \sin\frac{x}{3}=\frac{1}{2} \; ; \; \frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}$$

Bu durumda:

I. bölge için $\frac{x}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+6k\pi$

II. " " $\frac{x}{3}=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\frac{5\pi}{2}+6k\pi$

$k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere fonksiyon bu noktalarda süreksizdir. O halde fonksiyon

$R-\left\{\left(\frac{1}{2}+6k\right)\pi, \left(\frac{5}{2}+6k\right)\pi\right\}$ kümesinde süreklidir.

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{2.\cos\left(\frac{2x}{3}\right)-1}$$ fonksiyonu için sürekli olduğu aralığı bulunuz.

$$2.\cos\left(\frac{2x}{3}\right)-1=0 \Rightarrow \cos\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{2x}{3}=\mp\frac{\pi}{3}+2k\pi \; ; \; k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\mp\frac{\pi}{2}+3k\pi$$

Fonksiyon bu noktalarda süreksiz olup

$R-\left\{x \mid x=\mp\frac{\pi}{2}+3k\pi \; ; \; k\in\mathbb{Z}\right\}$ de süreklidir.

PAYLAŞILAN UYGULAMA

$f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 5$ olduğunu

ε-δ ile gösteriniz.

$\varepsilon, \delta > 0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

→ Burada $|f(x) - L| < \varepsilon$ iken $|x - a| < \delta$ olduğu yani $\delta(\varepsilon)$ mevcut olduğu gösterilmeli ibaresi olmalı.

$|\underbrace{x^2 - 4}_{f(x)} - \underbrace{5}_{L}| < \varepsilon$

$= |x^2 - 9| < \varepsilon$

$= |x^2 \underset{+}{+6x} \underset{-}{-6x} - 9 \underset{+}{+9} \underset{-}{-9}| < \varepsilon$ → $x \to 3$'e gittiği için $(x-3)$ elde etmek için $6x$ eklenip çıkarıldı (ve 9)

$= |\underbrace{(x-3)^2}_{x^2-6x+9} + \underbrace{6(x-3)}_{6x-9-9} < \varepsilon$

$\leq |x-3|^2 + 6|x-3| < \varepsilon = \delta^2 + 6\delta$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$|x-a| < \delta$ $\quad$ $|x-a| < \delta$

$|x-a|^2 < \delta^2$ $\quad$ $6 \cdot |x-a| < 6 \cdot \delta$

Çözümde 7δ olarak gösterilmiş neden? (*)

Yukarıda -SİYAH- olarak yer alan kısım (çözüm için) paylaşılan kısım olup ilgili açıklamaların -KIRMIZI- ile yer almaktadır.

(*) Son durumda $\delta^2 + 6\delta \to 7\delta$ alındığı ve nedeni soruluyor. Yani $\delta^2 + 6\delta = 7\delta = \varepsilon$

$\delta^2 + 6\delta$ için $\delta^2 < \delta$ dır. (δ: $0 < \delta < 1$) sonsuz küçük. $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{7}$.

Unutmayınız $\delta^n < \delta$ 'dır. δ sonsuz küçük ve ε değerine bağlı keyfi olup δ^2 yerine bundan daha küçük olan δ seçilebilir. Dolayısıyla

Ancak daha önce de belirtildiği üzere bazı problemlerin çözümü tek türde olmak zorunda değildir. Farklı teknikler de olabilir. Aynı soru için:

$f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 5$; ε-δ ile;

$\forall\ \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}^+$ için

$|x-a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ mevcut olmalı. (Ya da tersi de geçerlidir)

Tersini dikkate alalım.

$|f(x) - L| < \varepsilon$ iken $|x-a| < \delta$ olduğu gösterilsin.

$|(x^2-4) - 5| < \varepsilon$

$|x^2 - 9| < \varepsilon$

$|(x-3)(x+3)| < \varepsilon$

$\underbrace{|x-3| \cdot |x+3|}$ $< \varepsilon$

$x \to 3$ için $|x+3| < 7$ -dir.
x 3 e giderken $|x+3|$ değeri 7'den küçüktür. Dolayısıyla

$|x-3| \cdot |x+3| < |x-3| \cdot 7 < \varepsilon$

$|x-3| \cdot 7 < \varepsilon$

$\underbrace{|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}}$

Burası $|x-a| < \delta$ formudur.

Dolayısıyla;

$|x-3| < \frac{\varepsilon}{7} = \delta(\varepsilon)$

$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{7}$

mevcut olup limit 5 dir.

yani δ sayısı $\frac{\varepsilon}{7}$ veya daha küçük seçilmelidir

Bu defa da:

$\forall\, \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}^+$ için

$|x-a| < \delta$ iken $|f(x)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ mevcut olmalı şeklinde bir yol izlensin.

$a=3;\ L=5;\ f(x)=x^2-4$ olduğundan

$$|x-3| < \delta$$

$$|x-3|^2 < \delta^2$$

$$|(x-3)^2| < \delta^2$$

$$|x^2-6x+9| < \delta^2$$

$f(x)=x^2-4$ olduğundan

$$|x^2-4+4-6x+9| < \delta^2$$

$$|\underbrace{x^2-4}_{f(x)}-6x+13| < \delta^2$$

$f(x)-L \to f(x)-5$ formu için

$$|(x^2-4)-5+5-6x+13| < \delta^2$$

$$|\underbrace{(x^2-4)-5}_{\substack{f(x)-L \\ x^2-9}}\ \underbrace{-6x+18}_{-6(x-3)}| < \delta^2$$

$$|(x^2-9)-6(x-3)| < \delta^2$$

$$\underbrace{|(x^2-9)-6(x-3)|}\ < \delta^2$$

$$\leq |x^2-9|-|6(x-3)| < \delta^2$$

$$\leq |x^2-9|-6|x-3| < \delta^2$$

$|x-3| < \delta$ olduğundan

$$\leq |x^2-9|-6.\delta < \delta^2$$

$$|x^2-9| < \delta^2+6\delta$$

δ; ε değerine bağlı çok küçük reel sayı olup $\delta^2 < \delta$ olduğundan $\delta^2 \to \delta$ alınsa

$$|x^2-9| < \delta+6\delta = 7\delta$$

$$7\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{7}$$

δ; $\frac{\varepsilon}{7}$ veya daha küçük seçilmeli.

Not: Görüldüğü $f(x)$ fonksiyonu polinom olduğunda bu tür bir yöntem daha fazla işlem gerektirir. Bir önceki yöntem tavsiye edilir.

3

LİMİT ve SÜREKLİLİK UYGULAMALARI

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2}{x+1} = -2$ olduğunu ε-δ ile gösteriniz.

$\forall\, \varepsilon>0,\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+$ için $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ mevcut olmalı. (Ya da tersi)

$a=1,\ L=-2$

$|f(x)-L|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x^2-2}{x+1}-(-2)\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x^2-2}{x+1}+2\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x^2-2+2x+2}{x+1}\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x\cdot(x+2)}{x+1}\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x}{x+1}\cdot(x+2)\right|<\varepsilon$

$\left|\dfrac{x}{x+1}\right|\cdot|x+2|<\varepsilon$

$x\to 1$ için $x>0$; $x+1>0$ ve $\dfrac{x}{x+1}<1$ olduğundan

$$\left|\left(\frac{x}{x+1}\right)\right||x+2| = \overbrace{\frac{x}{x+1}}^{<1}\cdot|x+2|<\varepsilon$$

$$< |x+2|<\varepsilon$$

$$|x+2|<\varepsilon \Rightarrow |\underbrace{x}_{x}-\underbrace{(-2)}_{a}|<\varepsilon$$

$|x-(-2)|<\varepsilon=\delta$ olup $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ mevcuttur.

Yani $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$ dir.

$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x^2-2x}{x^2+1} = -\frac{3}{5}$ olduğunu ε–δ ile gösteriniz

$\forall\, \varepsilon>0;\in\mathbb{R}^+$ için $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)>0\in\mathbb{R}^+$ olduğu gösterilmeli. (Bunun tersi de doğrudur)

Yani

$\forall\, \varepsilon>0,\in\mathbb{R}^+$ için $|f(x)-L|<\varepsilon$ iken $|x-a|<\delta$ olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)>0,\in\mathbb{R}^+$ mevcut olmalıdır.

Bu tür sorularda ikincisini tercih etmek kolaylık sağlar

→ Buradan hedef $|x-a|<\delta$ yani $|x-\frac{1}{2}|<\delta$ formuna ulaşmaktır.

$$\left|\frac{x^2-2x}{x^2+1}-\left(-\frac{3}{5}\right)\right|<\varepsilon \,;$$

$$\left|\frac{x^2-2x}{x^2+1}+\frac{3}{5}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{5(x^2-2x)+3(x^2+1)}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{8x^2-10x+3}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon$$

$$\underbrace{8x^2-10x+3}$$

$$\begin{matrix}4x & -3\\ 2x & -1\end{matrix}$$

$(2x-1)\cdot(4x-3)$

$$\left|\frac{(2x-1)\cdot(4x-3)}{5(x^2+1)}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{|2x-1|\cdot|4x-3|}{|5(x^2+1)|}<\varepsilon$$

$$\frac{2\cdot|x-\frac{1}{2}|\cdot 4|x-\frac{3}{2}|}{5\cdot|x^2+1|}<\varepsilon$$

$$\frac{|x-\frac{1}{2}|\cdot|x-\frac{3}{2}|}{|x^2+1|}<\frac{5\cdot\varepsilon}{8}$$

Burada amaç $|x-a|<\delta$ görüntüsüne ulaşmaktır. Dolayısıyla $|x-\frac{1}{2}|$ yi yalnız bırakmak amacıyla

$x\to\frac{1}{2}$ için

$|x-\frac{3}{2}|>0$

olarak bu terim ile çarpılır veya bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez.

Aynı şekilde

$x \to \frac{1}{2}$ için $|x^2+1|$ daima pozitiftir.

Dolayısıyla

$$\underbrace{\frac{\left|x-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right|}{|x^2+1|}}< \frac{5}{8} \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\left|x-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right|}{|x^2+1|} < \frac{\left|x-\frac{1}{2}\right| \left|x-\frac{3}{2}\right|}{|x^2+1|}$$

yazılabilir.

$$\frac{\left|x-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|x-\frac{3}{2}\right|}{\underbrace{|x^2+1|}_{+}} < \frac{5}{8} \cdot \varepsilon \; ; \; \left|x-\frac{1}{2}\right|$$ yalnız bırakılırsa

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{5}{8} \cdot \varepsilon \cdot \frac{|x^2+1|}{\left|x-\frac{3}{2}\right|}$$

Burada dikkat edilecek olan $x \to \frac{1}{2}$ için $|x^2+1| \to \leq 2$ olacak şekilde sınırlıdır. Ya da $\frac{5}{4}$ alınabilir. $x \to \frac{1}{2}$ için $\left|x-\frac{3}{2}\right| \to 1$'dir. Ya da en azından sınırlıdır.

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{5}{8} \cdot \varepsilon \cdot \frac{2}{1}$$

$$\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{5}{4} \cdot \varepsilon = \delta$$

$\delta = \frac{5}{4} \cdot \varepsilon$ olarak mevcut olup limit mevcuttur.

$\delta : \frac{5}{4} \cdot \varepsilon$ veya daha küçük olmalı.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+1}{x^3-1} = -1$ olduğunu $\varepsilon - \delta$ ile.

$x \to -1$ herhangi bir tanımsızlık oluşturmaz. Dolayısıyla

$\forall \varepsilon > 0, \in \mathbb{R}^+$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ iken $|x-a| < \delta$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ mevcut olduğu gösterilmeli.

$$\left| \frac{x^2+1}{x^3-1} - (-1) \right| < \varepsilon$$

→ amaç $|x-a| < \delta$ formuna ulaşmal

$|x-(-1)| < \delta$

$|x+1| < \delta = \delta(\varepsilon)$

$$\left| \frac{x^2+1+x^3-1}{x^3-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^2+x^3}{x^3-1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^2.(x+1)}{x^3-1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{|x^2| . |x+1|}{|x^3-1|} < \varepsilon$$

Buradan $|x-a| < \delta$ elde etmeliyiz. Yani $|x+1| < \delta$ gibi bir form.

$x \to -1$ durumunda

$|x^2| > 0$

$|x^2-1| > 0$ olacağından

$$|x+1| < \frac{\varepsilon . |x^3-1|}{|x^2|}$$

$x \to -1$ için ister limit durumu isterse $|x^3-1|$ ve $|x^2|$ için sınırlı olacağı değerler alınsın $\dfrac{|x^3-1|}{|x^2|}$ bir reel sayı verir. Limit durumu bile dikkate alınsa

$x \to -1$ için $|x^3-1| \to 2$

$|x^2| \to 1$

olarak

$$|x+1| < \frac{\varepsilon . 2}{1} = \delta(\varepsilon)$$

$|x+1| < 2\varepsilon = \delta(\varepsilon)$

Dolayısıyla $\delta(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur.

$\delta(\varepsilon) \leq 2\varepsilon$ alındığı sürece limit mevcut olur.

7

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n^2}{3+n^2}\right)^n = ?$$ $n \to \infty$ için $1^\infty \to$ Belirsiz

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2+3}\right)^n$$

Burada

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ sayısının tanımı

veya bunun muhtelif formları hatırda tutulmalıdır. (Notlarınız arasında var)

Bu bağlamda örneğin

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x \text{ 'dir.}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{k}{x^3}\right) = x \text{ 'dir.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+x^2\right)\frac{1}{x} = x \text{ 'dir.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(k+x^2\right)\cdot\frac{1}{x} = x \text{ 'dir.}$$

Bu hususlar çok basit olarak görülebilir.

Dolayısıyla;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2+3}\right)^n$$

ifadesi için:
Buradaki n üssü için (bunu e tanımındaki ifadeye benzetmek için)

$\lim_{n\to\infty} n$ yerine $\lim_{n\to\infty} (n^2+3)\cdot\frac{1}{n}$ yazılabilir

Zira $\lim_{n\to\infty} (n^2+3)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(n+\underbrace{\cancel{\frac{3}{n}}}_{\to 0}\right) = n$

olacaktır.
Bu durumda:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2+3}\right)^{(n^2+3)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n^2+3}\right)^{n^2+3}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[e^{-2}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2}{n}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k \\ \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x = e^{-k}\end{array}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)} = e^0$$

$$= 1$$

9

Not! $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{P(x)}\right)^{P(x)} = e^{a}$ 'dır.

Ancak ve ancak $\lim_{x\to\infty} P(x)\to\infty$ olmalıdır.

$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = ?$ $x\to 1$ için $1^{\frac{1}{1-1}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$

belirsiz

$$=\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)}\right]^{\frac{1}{x-1}}$$

Bu ifade yazılırken x'in üssü dikkate alınıp buradan yola çıkılarak (e'nin tanımı da dikkate alınarak) payda da bu ifade oluşturuldu.

Dolayısıyla;

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)}\right]^{\frac{1}{x-1}}$$ için;

Her ne kadar e'nin tanımına uygun bir formu veriyorsa da (Yani bunun e olduğu belliyse de)

$u=\frac{1}{x-1}$ alınsa. $x\to 1$ için $u\to\infty$ olur.

Dolayısıyla

$=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}$ olarak bu ifade e'nin bilinen, açık (uygun)

10

$$\lim_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}} = ? \quad x\to 2 \Rightarrow (2-1)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Bu limiti e sayısının tanımına uyarlamak için

$$\lim_{x\to 2}\left[1 \; \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{x-2}\right)}}\right]^{\frac{1}{x-2}}$$ düşünülebilir.

?

↳ Burası $x-2$ vereceğine göre $(x-1)$ in oluşması için sol tarafa $1+$ gelmelidir.

$$= \lim_{x\to 2}\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{x-2}\right)}\right]^{\frac{1}{x-2}}$$

Böylece $\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p} = e$ formu oluşmuş oldu.

$u = \frac{1}{x-2}$ alınsa

$x \to 2 \Rightarrow u \to \infty$ olur.

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{(x-2)}\right)}\right]^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{u\to\infty}\left[1+\frac{1}{u}\right]^{u}$$

$= e$ dir.

11

$$\lim_{x\to 3} (2x-5)^{\frac{1}{3x-9}} = ? \quad x\to 3 \Rightarrow (6-5)^{\frac{1}{9-9}} = 1^{\infty}$$

Burada da $\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p = e$ tanımından

faydalanmak üzere;

$$\lim_{x\to 3} (2x-5)^{\frac{1}{3(x-3)}} = \lim_{x\to 3}\left[\overset{\substack{?\\ \text{işaret}\\ \uparrow}}{} \frac{1}{\left(\frac{1}{(x-3)}\right)}\right]^{\frac{1}{3(x-3)}}$$

formunda yazılarak.

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x-3}\right)} = x-3 \quad \text{olacaktır.}$$

Dolayısıyla sol tarafta da "1" olduğu bilindiğine göre buradan $2x-5$ gelmesi için işaretin "+" payın da "2" olması gerekir.

$$= \lim_{x\to 3}\left[1 + \frac{2}{\left(\frac{1}{x-3}\right)}\right]^{\frac{1}{3(x-3)}}$$

Burada da $u = \frac{1}{x-3}$ seçilirse ~~x→3~~ için $u\to\infty$

$$= \lim_{u\to\infty}\left[1+\frac{2}{u}\right]^{\frac{u}{3}} = \lim_{u\to\infty}\left\{\underbrace{\left[1+\frac{2}{u}\right]^{u}}_{e^2}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{e^2\right\}^{\frac{1}{3}} = e^{2/3}$$

$$= \sqrt[3]{e^2}$$

12

MTM1501_ANALİZ-I
ÇIKMIŞ SINAV SORULARI

2021-2022 Güz-V1

$1*1!+2*2!+3.3!+\dots+n*n! = (n+1)!-1$
olduğunu tümevarım ile ispatlayınız.

$n=1$ için $1.1! = (1+1)!-1$

$1 = 2!-1$

$1 = 1$ Doğru.

$\forall k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere:

$n=k$ için

$\underbrace{1.1!+2.2!+3.3!+\dots+k.k!}_{P(k)} = (k+1)!-1$ Doğru kabul edilsin. (1)

$n=k+1$ için

$1.1!+2.2!+3.3!+\dots+k.k!+(k+1).(k+1)! = (k+2)!-1$ (2)

olduğu gösterilmelidir.

(1) ifadesinin sol ve sağına $(k+1).(k+1)!$ ilave edilirse;

$\underbrace{1.1!+2.2!+3.3!+\dots+k.k!+(k+1).(k+1)!}_{\text{n=k+1 için ispatlanmak istenen (2) ifadesinin sol tarafıdır. O halde sağ tarafın (k+2)!-1 olduğu gösterilmelidir. (P(k+1))}} = (k+1)!-1+(k+1).(k+1)!$

$P(k+1) = (k+1)!-1+(k+1).(k+1)! = (k+1)!\,[1+k+1]-1$

$P(k+1) = (k+1)!\,(k+2)-1$

$= (k+2)!-1$ olarak $P(k+1)$ doğru. O halde

$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$; $(x_n) = \left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)$

olduğunu ε_tekniği ile gösteriniz.

$\lim_{n\to\infty} (a_n) = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0; \in \mathbb{R}^+$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde $n \geq N(\varepsilon)$ mevcut olmalıdır. Yani dizinin sonsuz terimi (h.h.t) a'nın ε komşuluğunda bulunmalıdır.

$$\left|\frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3(2n+3) - 2(3n+4)}{3(3n+4)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{9-8}{3(3n+4)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|3(3n+4)|} < \varepsilon$$

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $(3n+4) > 0$

$$\frac{1}{3.(3n+4)} < \varepsilon \ ; (\varepsilon > 0)$$

$$3n+4 > \frac{1}{3\varepsilon} ;$$

$$3n > \frac{1-12\varepsilon}{3\varepsilon}$$

$$n > \frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}$$

$$n \geq \underbrace{\left[\left|\frac{1-12\varepsilon}{9\varepsilon}\right|\right] + 1}_{N(\varepsilon)}$$

Keyfi olarak seçilen her $\varepsilon > 0 : \in \mathbb{R}^+$ sayısı için ε değerine bağlı $n \geq N(\varepsilon)$ olacak şekilde $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ mevcut olduğundan dizinin hemen hemen her terimi $\frac{2}{3}$'ün ε komşuluğundadır. Yani Limit $\frac{2}{3}$'dür.

$a_1 = 6^{\frac{1}{3}}$; $a_{n+1} = (6+a_n)^{\frac{1}{3}}$

olarak verilen dizinin monotonluğunu, alt ve üst sınırlarını, yakınsak veya ıraksaklığını, eğer limiti varsa limitini bulunuz.

Cevap:

uygulama notlarının 92-94. sayfalarında bu soru mevcuttur.

$$a_n=\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{2+2^3}+\dots+\frac{1}{2+2^n}$$

olmak üzere $\{a_n\}$ dizisinin yakınsaklığını gösteriniz.

$\{a_n\} \to$ Yakınsak ise monoton $\left(\begin{matrix}\text{artan}\\ \text{azalan}\end{matrix}\right)$ ve sınırlıdır.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+2^k} \quad ; \quad a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2+2^k}$$

monotonluk için:

$$a_{n+1}-a_n=\left[\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{2+2^3}+\dots+\frac{1}{2+2^n}+\frac{1}{2+2^{n+1}}\right]-\left[\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{2+2^3}+\dots+\frac{1}{2+2^n}\right]$$

$=\dfrac{1}{2+2^{n+1}}$; $\forall\, n\in\mathbb{N}^+$ için bu ifade pozitiftir.

$=\dfrac{1}{2+2^{n+1}}>0$; Dolayısıyla dizi monoton artandır.

Sınırlılık için:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+2^k}=\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{2+2^3}+\dots+\frac{1}{2+2^n}$$

$$|a_n|=\left|\frac{1}{\underbrace{2+2}_{2}}+\frac{1}{\underbrace{2+2^2}_{2^2}}+\frac{1}{\underbrace{2+2^3}_{2^3}}+\dots+\frac{1}{\underbrace{2+2^n}_{2^n}}\right|$$

Yukarıdaki paydaların yerine kırmızı işaretli olacak şekilde kabul yapılsa paydalar

küçülür yani kesirsel ifadeler büyür.
Bu durumda;

$$\underbrace{\left|\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+2^2}+\frac{1}{2+2^3}+\dots+\frac{1}{2+2^n}\right|}_{|a_n|}<\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}\right|$$

$$|a_n|<\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}\right|$$

$$<\left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right|$$

$$<\frac{1}{2}\underbrace{\left|1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right|}_{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}$$

Not: $1+r+r^2+\dots+r^{n-1}=\dfrac{1-r^n}{1-r}$

$$<\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right|$$

$$|a_n|<\left|1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|$$

$\forall n\in\mathbb{N}^+$ için $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$ 'dir.

Dolayısıyla $|a_n|<1$ olarak sınırlıdır.

$\{a_n\}$, monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır.

Not: Bu sonuçta dizinin genel teriminin $a_n=\frac{1}{\dots}$ olmadığına dikkat ediniz. (toplamdır)

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$ olduğunu limit tanımı ile (ε-tekniği) gösteriniz

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$ ise

$\forall \varepsilon>0, \in R^+$ için $|a_n-a|<\varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı $n\geq N(\varepsilon)\in N^+$ mevcut olmalıdır. Yani keyfi olarak seçilecek ε sayısından bağımsız olmak üzere dizinin hemen hemen her terimi "0"ın ε komşuluğunda olmalıdır.

$(a_n)=(\sqrt{n^2+1}-n)$; $a=0$ olmak üzere

$|\sqrt{n^2+1}-n|<\varepsilon$

$\forall n\in N^+$ için $\sqrt{n^2+1}>\sqrt{n^2}=|n|=n$ olduğundan

$\sqrt{n^2+1}-n>0$ dır.

$\sqrt{n^2+1}-n<\varepsilon$

$$\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}<\varepsilon$$

$$\frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}<\varepsilon$$

$\sqrt{n^2+1}+n>0$ olduğundan

$$\frac{1}{\varepsilon}<\sqrt{n^2+1}+n$$

$$\sqrt{n^2+1}>\frac{1}{\varepsilon}-n$$

$$n^2+1>\left(\frac{1}{\varepsilon}-n\right)^2$$

$$n^2+1>\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{2n}{\varepsilon}+n^2$$

$$\frac{2n}{\varepsilon}>\frac{1}{\varepsilon^2}-1$$

$$n>\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$n>\frac{1-\varepsilon^2}{2}$$

$$n\geq\underbrace{\left[\left|\frac{1-\varepsilon^2}{2}\right|\right]+1}_{N(\varepsilon)}$$

$\forall \varepsilon>0, \in N^+$ için $N(\varepsilon)\in N^+$ mevcut olup dizinin limiti "0" dır.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{1-x^2} = ?$$ (L'Hôpital veya başka bir yöntem (seri vs) kullanılmayacak)

$x \to$ için $\dfrac{\tan\pi}{1-0} = \dfrac{0}{0}$

$x\to 1$ için paydadaki "0" $(1-x)$ çarpanı nedeniyle geldiğinden

$u = 1-x$ olarak alınırsa $x = 1-u$ olur.

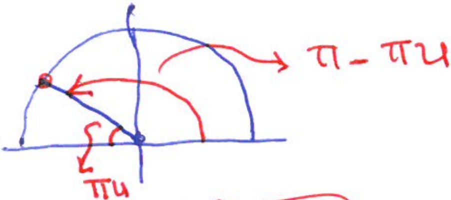
$x \to 1$ için $u \to 0$ olur.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi(1-u))}{u\cdot(1+1-u)} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi-\pi u)}{u\cdot(2-u)}$$

$\tan(\pi - \pi u)$ için

$\tan(\pi-\pi u) = -\tan(\pi u)$



$$= \lim_{u\to 0} -\frac{\tan(\pi u)}{u\cdot(2-u)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(kx)}{x} = k$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{(2-u)} = -\frac{\pi}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 119}(2x+1)=239$ olduğunu ε–δ ile gösteriniz.

$\forall\ \varepsilon,\delta>0 ;\ \in \mathbb{R}^+$ için $|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ mevcut olmalı.

$$|x-119|<\delta$$

$$2\cdot|x-119|<2\cdot\delta$$

$$|2x-238|<2\delta$$

$$|2x-238+1-1|<2\delta$$

$$|\underbrace{2x+1}_{f(x)}-\underbrace{239}_{L}|<2\delta$$

$$2\delta=\varepsilon \Rightarrow \delta=\frac{\varepsilon}{2}$$

$\delta=\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ mevcut olduğundan $f(x)$ için limit 239'dur.

$\delta(\varepsilon)$ sayısı $\frac{\varepsilon}{2}$ veya daha küçük seçilirse $x\to 1$ için fonksiyonun alacağı değerler 239'un ε komşuluğunda kalır.

veya $|f(x)-L|<\varepsilon$ iken $|x-a|<\delta$ gösterilmeli.

$$|2x+1-239|<\varepsilon$$

$$|2x-238|<\varepsilon$$

$$|2(x-119)|<\varepsilon$$

$$2|x-119|<\varepsilon$$

$$|x-\underbrace{119}_{a}|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$$

$|x-a|<\delta$ formuna ulaşılmış olup $\delta=\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$ mevcut olup limiti $x\to 1$ için 239'dur. (Yandaki açıklama geçerlidir)

$$f(x)=\begin{cases} 2x+(x-1).\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; x<1 \\ ax+2 & ; x\geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli olması için $a=?$

Sürekli olması için

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1) \text{ olmalıdır.}$$

Limit için ise

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

olmalıdır. Bunun sonucu olarak:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \rightarrow \text{soldan sürekli}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \rightarrow \text{sağdan sürekli}$$

Sol limit

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(2x+(x-1).\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[2x+\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}_{1=}\right]=\lim_{x\to 1} 2x=2$$

Bu limitin f(1) değerine eşit olması gerekeceğinden

$$2=f(2) \Rightarrow 2=(ax+2)\Big|_{x=1} \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}$$

$a_1=\sqrt{3}$; $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$

Dizinin yakınsaklığını araştırınız, varsa limitini bulunuz.

$a_1=\sqrt{3}$

$a_2=\sqrt{3+a_1}=\sqrt{3+\sqrt{3}} > a_1$

$n=k$ için

$a_{k+1} > a_k$ doğru kabul edilsin.

$n=k+1$ için

$a_{k+2} > a_{k+1}$ olduğu gösterilmelidir.

Dolayısıyla

$a_{k+2} > a_{k+1}$ (?)

$$a_{k+2}=\sqrt{3+\underline{a_{k+1}}} \overset{?}{>} \sqrt{3+\underline{a_k}} = a_{k+1}$$

$a_{k+1} > a_k$ kabul edildiğinden

$3+a_{k+1} > 3+a_k$

$\sqrt{3+a_{k+1}} > \sqrt{3+a_k}$

$a_{k+2} > a_{k+1}$ olur.

Dolayısıyla dizi monoton artandır.

Sınırlılık:

$a_1=\sqrt{3} < 3$

$a_2=\sqrt{3+\sqrt{3}} < 3$

yazılabilir.

$n=k$ için

$a_k < 3$ kabul ederek;

$n=k+1$ için

$a_{k+1} < 3$? olduğu gösterilmeli.

$a_{k+1}=\sqrt{3+a_k}$

↳ $a_k<3$ kabul edildiğinden ($a_k=3$ alınsa bile) $\sqrt{6}<3$ dür.

Dolayısıyla

$a_{k+1}<3$ olup $a_k<3$ kabulü doğrudur.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n<3$ dür.

Dizi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsaktır.

$a_1=\sqrt{3} < a_n < 3$ $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3} \to \text{E.B.A.S} \\ 3 \to \text{Bir üstsınır (E.K.Ü.S değil)} \end{array} \right.$

Yakınsak dizi ile alt dizileri aynı limite yakınsayacağından;

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3+a_n}\right) \Rightarrow a=\sqrt{3+a} \quad a^2-a-3=0$$

sayfanın sağ üstü.

$a^2-a-3=0$

$a_{1,2}=\dfrac{1\mp\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}$

$a_{1,2}=\dfrac{1\mp\sqrt{13}}{2}$

$a_1=\sqrt{3}$ ve monoton artan olup $a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ cevaptır.

$\sqrt{3} \leq a_n \leq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

E.B.A.S — E.K.Ü.S

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-x} = ? \quad x\to 1 \text{ için } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(3x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{x} = 4$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{\frac{x}{3}} = ? \quad x\to\infty \Rightarrow 1^{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{5}{x+1}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{5}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

$x\to\infty$ için $x+1\to\infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1-\frac{5}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{p\to\infty} \left(1\mp\frac{m}{p}\right)^{p} = e^{\mp m}$$

$$= \left[e^{-5}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= e^{-\frac{5}{3}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{x+8}-3} = ? \quad \text{(L'Hôpital kullanılmadan)}$$

$$x \to 1 \Rightarrow \frac{\cos(\pi/2)}{\sqrt{1+8}-3} = \frac{0}{0}$$

Bu durum $x\to 1$ için $(x-1)$ gibi bir durumdan kaynaklanacağı için bu elde edilirse:

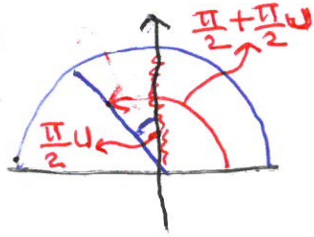
$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\underbrace{(x+8)-9}_{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1} \;;\; x\to 1 \text{ için } \frac{0}{0}$$

Bunun nedeni $(x-1)$ olup

$u = x-1$ alınırsa $x = u+1$; $x\to 1$ için $u \to 0$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(u+1)\right)\left(\sqrt{u+1+8}+3\right)}{u}$$



$$= \lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}u\right)\cdot\left(\sqrt{u+9}+3\right)}{u} \;;$$

Şekilden!

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}u\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)$$

$$= \lim_{u\to 0} -\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{u}}_{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\sqrt{u+9}+3\right) = -\frac{\pi}{2}\cdot(3+3) = -3\pi$$

$$= 1 . \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x-1}$$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ olarak fonksiyonun $x \to 0$ için limiti vardır ve "-1" dir.

Ancak fonksiyon $x=0$ için tanımlı değildir. Eğer fonksiyon $x=0$ noktasında $f(0)=-1$ olara tanımlanırsa "kaldırılabilir süreksizliğe" sahip olmuş olur. Dolayısıyla;

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+x)}{x^2-x} & ; x<0 \text{ veya } x>0 \\ -1 & ; x=0 \end{cases}$$

fonksiyonu "kaldırılabilir süreksizliğe" sahip fonksiyondur.

$f(x) = \dfrac{\sin(x^2+x)}{x^2-x}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları ve türünü belirleyiniz.

Bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar genelde fonksiyonu tanımsız yapan noktalardır. Süreklilik için

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

olması yani fonksiyonun $x = x_0$ noktasında tanımlı olması gerekir. Aksi halde limit mevcut olsa da fonksiyon "süreksiz" olacaktır.

Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$x = 0$; $x = 1$ noktalarında tanımsızdır.

$x = 0$ için:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \text{ olmalıdır.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{x^2-x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Belirsiz.}$$

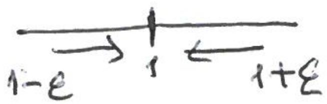
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{(x^2-x)} \cdot \frac{(x^2+x)}{(x^2+x)}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}}_{1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x}$$

$x=1$ noktası için:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2+x)}{x^2-x} = \frac{\sin(1+1)}{0} = \frac{\sin 2}{0} = \infty$$

Bu durumda sol ve sağ limite bakılmalıdır.



$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} f(1-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{\sin\left[(1-\varepsilon)(1+1-\varepsilon)\right]}{(1-\varepsilon)(1-1+\varepsilon)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{\sin\left[(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\right]}{(1-\varepsilon)\cdot\varepsilon}$$

$\varepsilon > 0, \in R^+$ için $(1-\varepsilon)$ "1" yakın pozitif

$(2-\varepsilon)$ "2"ye yakın pozitif

birer reel sayı olarak

$$\frac{\sin\left[(1-\varepsilon).(2-\varepsilon)\right] \to \text{Reel Sayı}}{(1-\varepsilon) \to \text{Reel Sayı}} \to \text{Reel Sayı. } (K_1)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{\sin\left[(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\right]}{(1-\varepsilon)\cdot\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{K_1}{\varepsilon} = +\infty$$

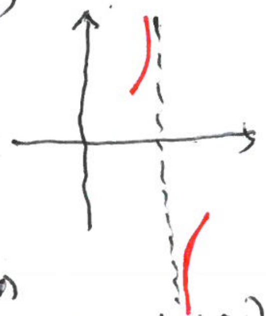
Sağ limit için

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{\varepsilon\to0^+} f(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\sin[(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)]}{(1+\varepsilon)(1-1-\varepsilon)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\sin[(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)]}{(1+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)}$$

Benzer olarak

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{K_2}{-\varepsilon}=-\infty$$

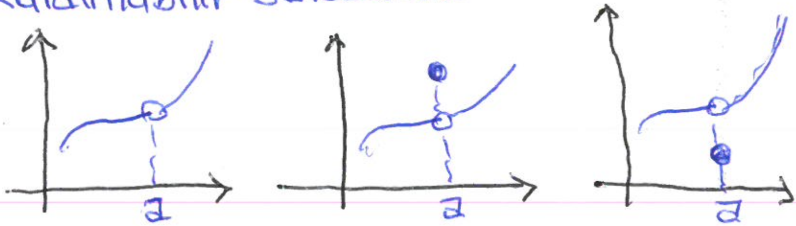


Fonksiyonun $x\to1$ için limiti zaten olmadığından (bir reel sayı olarak mevcut değil) fonksiyon $x\to1$ için limite sahip değildir. Limiti olmayan fonksiyonun (bu noktada tanımlı bile olsa) sürekliliği söz konusu olamaz. Dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $x\to1$ için "süreksiz" olup bu süreksizlik "sonsuz süreksizliği" ya da "sonsuz sıçramalı süreksizlik" olarak adlandırılabilir.

Not: Burada sol ve sağ limitin "$+\infty$" veya "$-\infty$" olması fonksiyonun "süreksiz" olmasını değiştirmez. Zira limitinin olması bir reel sayıya eşit olması anlamındadır. Fonksiyon bu gibi durumlarda yine "sonsuz süreksizliğine" sahip olur. Sadece sonsuz sıçrama söz konusu olmaz.

Not: Temelde üç çeşit süreksizlik vardır.

- Kaldırılabilir süreksizlik

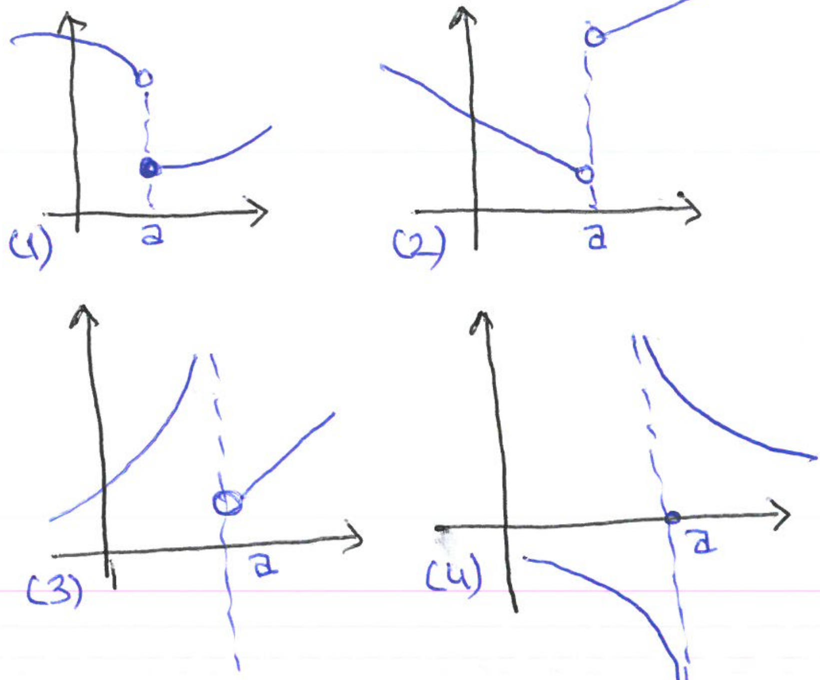


Her durumda $\lim_{x \to a} f(x)$ mevcuttur.

Fonksiyon ya $x=a$ noktasında tanımlı değil ya da $f(a)$ değeri limit değerine eşit değildir.

İlk grafikte $f(a)$ değerini limit değeri olarak, diğer iki grafikte ise tanımlı olan $f(a)$ değerini limit değerine eşit olacak şekilde yeniden tanımlamak süreksizliği ortadan kaldıracaktır.

- Sıçramalı süreksizlik

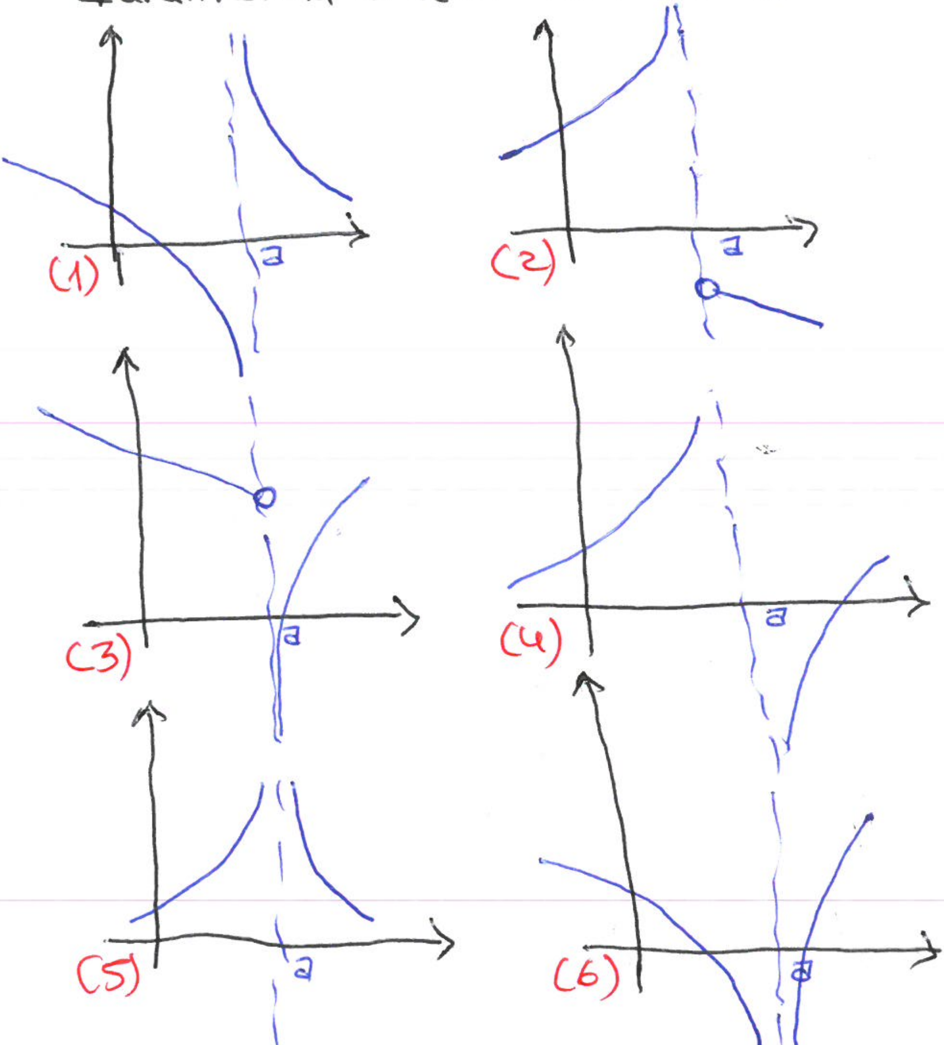


Sıçramalı süreksizlikte en temel unsur olarak limit yoktur. Yani sol ve sağ limit mevcut ancak eşit değildir. Bu bağlamda (1) ve (2) sonlu sıçramalı, (3) ve (4) sonsuz sıçramalı süreksizliği ifade etmektedir.

Ayrıca şu hususun da dikkate alınması gerekir ki; bu tür süreksizlikler "kaldırılabilir süreksizlik" değildir.

– Sonsuz süreksizliği.

Fonksiyonun sol (veya sağ) veya her iki limitinin sonsuza ($+\infty$ veya $-\infty$) ıraksaması durumunda oluşan süreksizliktir.



Tamamı için sonsuz süreksizliği vardır.

(1) : Sonsuz sıçramalı süreksizlik

(2) : " " "

(3) : " " "

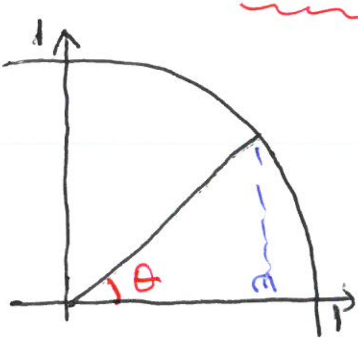
(4) : " " "

(5) : Sonsuz süreksizliği

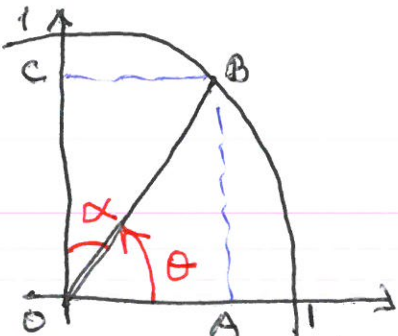
(6) : " "

Bu süreksizlikler "kaldırılabilir süreksizlik" değildir.

HATIRLATMA

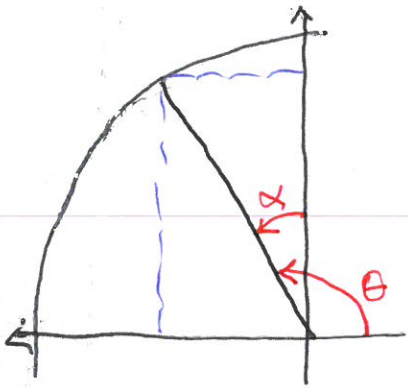


$\sin\theta > 0$
$\cos\theta > 0$
$tg\theta > 0$
$cotg\theta > 0$

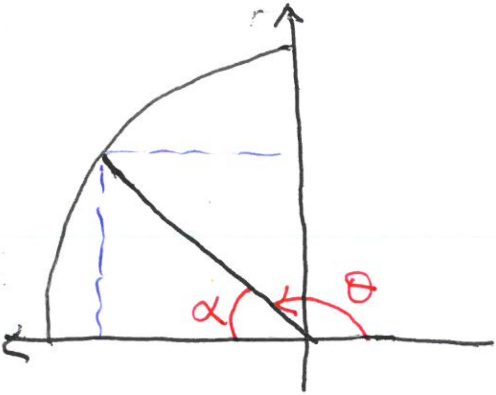


$\sin\theta = \cos\alpha$
$\cos\theta = \sin\alpha$
$\tan\theta = cotg\,\alpha$
$cotg\,\theta = \tan\alpha$

Dikkat! $\sin\theta$; $O\hat{A}B$'nin $|AB|$ kenarıdır
Aynı $|AB|$ kenarı $O\hat{C}B$'de $\cos\alpha$'yı temsil eder.



$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$tg\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -cotg\,\alpha$
$cotg\,\theta = cotg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

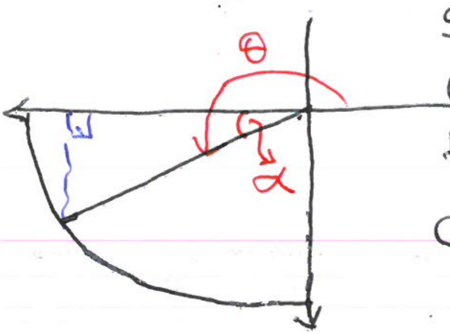


$\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan\theta = \tan(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$

$Cotg\,\theta = Cot(\pi - \alpha) = -Cotg\,\alpha$

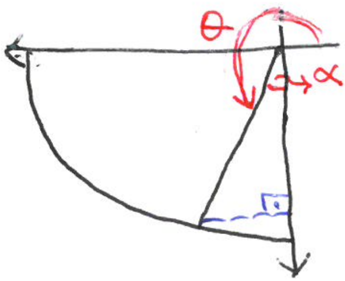


$\sin\theta = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos\theta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$tg\,\theta = \tan(\pi + \alpha) = tg\,\alpha$

$Cotg\,\theta = Cot(\pi + \alpha) = Cotg\,\alpha$

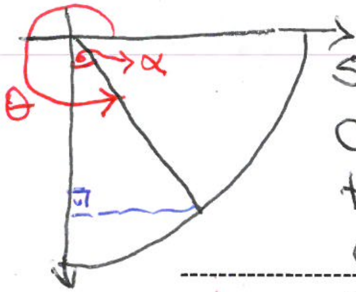


$\sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

$tg\,\theta = tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = Cotg\,\alpha$

$Cotg\,\theta = Cotg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$



$\sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$

$tg\,\theta = \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -Cotg\,\alpha$

$Cotg\,\theta = Cotg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{x-a}-1}{x-a} = ? \quad x\to a \text{ için } \frac{e^{a-a}-1}{a-a} = \frac{0}{0}$$

$x-a=u$ seçilsin.

$x=a+u$ olarak $x=a \Rightarrow u=0$

$$\lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} \; ; \; u\to 0 \text{ için } \frac{e^{0}-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Belirsizlik paydadaki u çarpanı kaynaklı olup;

$e^{u}-1=t$ seçilsin. $\{ u\to 0$ için $t\to 0$

$e^{u}=t+1$

$\ln(e^{u})=\ln(t+1) \Rightarrow u=\ln(t+1)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)\cdot \ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= \frac{1}{\ln\left\{\lim_{t\to 0} (t+1)^{\frac{1}{t}}\right\}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

$n=\frac{1}{x}$ alınsa $n\to\infty$; $x\to 0$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$= \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1}$$

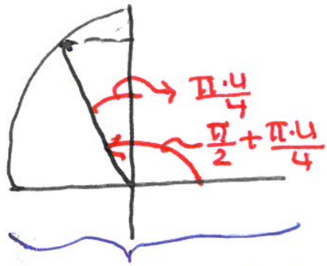
$$=1$$

$$\lim_{x \to 2} \tan\left(\frac{\pi . x}{4}\right) . \sin\left(\frac{x-2}{2}\right) = ?$$

$x \to 2$ için $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin 0 = \infty \cdot 0 \to$ Belirsiz.

$u = x-2 \Rightarrow x = u+2$; $x=2$ için $u=0$

$$= \lim_{u \to 0} \tan\left[\frac{\pi . (u+2)}{4}\right] \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$



$$= \lim_{u \to 0} \tan\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi . u}{4}\right] \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi u}{4}\right) = -\operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi u}{4}\right)$$

$$= \lim_{u \to 0} \left[-\operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi u}{4}\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$= -\lim_{u \to 0} \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi u}{4}\right)} \cdot \frac{u}{u}$$

$$= -\lim_{u \to 0} \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{u} \cdot \frac{u}{\tan\left(\frac{\pi u}{4}\right)} ;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan(kx)} = \frac{1}{k}$$

$$= -\lim_{u \to 0} \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{u} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{u}{\tan\left(\frac{\pi u}{4}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}} = ? \quad x\to 3^+ \text{ için } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}\cdot\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x\to 3^+} \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}}_{=1}\cdot\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}} = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 3^+} \underbrace{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}_{=1}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\tan x} = ? \quad x\to 0 \text{ için } \frac{e^0-1}{\tan 0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(e^x-1)(e^x+1)}{\tan x}\cdot\frac{x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{(e^x+1)}_{2}\cdot\underbrace{\frac{x}{\tan x}}_{=1}\cdot\frac{(e^x-1)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[2\cdot 1\cdot\frac{(e^x-1)}{x}\right] = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$u = e^x-1 \Rightarrow e^x = u+1, \quad x = \ln(u+1) \quad ; \quad x\to 0 \text{ için } u\to 0$$

$$= 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{u}\right)\cdot\ln(u+1)}$$

$$= 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} = 2\cdot\frac{1}{\ln\left\{\lim_{u\to 0}(u+1)^{\frac{1}{u}}\right\}}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\ln e} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \cdot \sin x^2} = ? \quad x\to 0 \text{ için } \frac{1-\cos 0}{0\cdot \sin 0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x^2)(1+\cos x^2)}{x^2 \cdot \sin x^2 \, (1+\cos x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x^2)^2}{x^2 \cdot \sin x^2 \cdot (1+\cos x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x^2)^2}{x^2 \cdot \sin x^2 \, (1+\cos x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2 \, (1+\cos x^2)}$$

$=1$

$$= \lim_{x\to 0} 1 \cdot \frac{1}{1+\cos x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Yöntem-2

$$\boxed{\cos 2a = 1-2\sin^2 a \Rightarrow 1-\cos 2a = 2\sin^2 a}$$

$1-\cos x^2 = 2\left[\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]^2$ yazılabilir

$\boxed{\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a}$ olarak

$$\sin x^2 = 2\cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

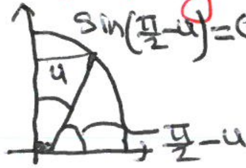
Dolayısıyla:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x^2)}{x^2 \cdot \sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}\cdot\left[\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]^{\cancel{2}}}{x^2 \cdot \cancel{2}\cdot \cancel{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}\cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}_{1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = ? \quad \text{(L'Hôpital kullanılmayacak)}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cos u$



$x\to\frac{\pi}{2}$ için $\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$ B

$u=\frac{\pi}{2}-x$ alınırsa $x=\frac{\pi}{2}-u$; $x\to\frac{\pi}{2}$ için $u\to 0$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1-\cos u)(1+\cos u)}{u\cdot(1+\cos u)} = \lim_{u\to 0}\frac{1-\cos^2 u}{u\cdot(1+\cos u)}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin^2 u}{u\cdot(1+\cos u)} = \lim_{u\to 0}\underbrace{\frac{\sin u}{u}}_{=1}\cdot\frac{\sin u}{(1+\cos u)} = 1\cdot\frac{0}{2}=0$$

Çözüm-2

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\underbrace{2\sin\left(\frac{\pi/2-x}{2}\right)}_{}\cdot\cos\left(\frac{\pi/2+x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-x}$$

$=\frac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi/2+x}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi+2x}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Çözüm-3

$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ olarak

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\underbrace{\frac{\pi}{2}-x}_{A \text{ olsun.}}}\cdot\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 A}{A\cdot(1+\cos A)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 A}{A\cdot(1+\cos A)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin A}{A}\cdot\frac{\sin A}{(1+\cos A)}$$

$=1$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)} = 1\cdot\frac{0}{2}=0$$

40

... olarak A ile işlem yapılır

$$\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin^2 x)\right]\cdot\left[\operatorname{Cotg}\left[\ln^2(1+x)\right]\right]=?$$

(L'Hôpital kullanılmayacak)

$x\to 0$ ise $\left[\ln(1+0)\right]\cdot\left[\operatorname{Cotg}\left[\ln^2(1+0)\right]\right]=\ln 1\cdot\operatorname{Cotg}0$
$=[0\cdot\infty]$ B.

$$=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+\sin^2 x)^{\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}}\right]\cdot\left[\operatorname{Cotg}\left[\ln^2(1+x)^{\frac{x}{x}}\right]\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\ln\underbrace{\left[(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right]}_{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e}{}^{\sin^2 x}\right]\cdot\left[\operatorname{Cotg}\left[\ln^2\underbrace{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}_{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}{}^{x}\right]\right]$$

$$\lim_{p\to 0}(1+p)^{\frac{1}{p}}=e \qquad \lim_{p\to 0}(1+p)^{\frac{1}{p}}=e$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\ln\left[e^{\sin^2 x}\right]\right]\cdot\operatorname{Cotg}\left[\ln^2\left[e^x\right]\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\sin^2 x\cdot\ln e\right]\cdot\operatorname{Cotg}\cdot\left[(\ln[e^x])^2\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin^2 x\cdot\operatorname{Cotg}\cdot\left[(x\cdot\ln e)^2\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin^2 x\cdot\operatorname{Cotg}(x^2)=\lim_{x\to 0}\sin^2 x\cdot\frac{\cos x^2}{\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin^2 x\cdot\frac{\cos x^2}{\sin x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{=1}\cdot\cos x^2\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\sin x^2}}_{=1}$$

$$=1\cdot 1\cdot 1=\underline{\underline{1}}$$

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x+2} = \dfrac{2}{3}$ olduğunu limitin tanımı ile gösteriniz.

$\forall \varepsilon > 0 \in \mathbb{R}^+$ sayısı için

$|x-a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde

ε sayısına bağlı $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut olmalı.

Bu tür ifadelerde;

$|f(x) - L| < \varepsilon$ iken $|x-a| < \delta$ şeklinde yaklaşım kolaylık sağlayacağından:

$$\left|\frac{x^2+1}{x+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3(x^2+1) - 2(x+2)}{3(x+2)}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3x^2+3-2x-4}{3x+6}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3x^2-2x-1}{3x+6}\right| < \varepsilon$$

$$\underbrace{3x^2-2x-1}$$

$3x \quad 1$

$x \quad -1$

* Not: Aşağıdaki izlem için

$$\frac{|3x+1| \cdot |x-1|}{|3x+6|} < \varepsilon$$

$x \to 1$ için $|3x+1|$ ve $|3x+6| > 0$

$|x-1| < \varepsilon \cdot \dfrac{|3x+6|}{|3x+1|} \rightarrow$ Reel sayı $k \in \mathbb{R}$

$|x-1| < k \cdot \varepsilon = \delta(\varepsilon)$

şeklinde de yorum yapılabilir.

$$\left|\frac{(3x+1) \cdot (x-1)}{3x+6}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|3x+1| \cdot |x-1|}{|3x+6|} < \varepsilon$$

$|3x+1| < |3x+6|$ 'dır.

$|3x+1| \cdot |x-1| < |3x+6| \, |x-1|$ olarak

$$\frac{|3x+6| \cdot |x-1|}{|3x+6|} < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \varepsilon$$

4)