Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fakültesi Matematik Mühendisliği

MKT2521 Nümerik Analiz I

Dr. Öğr. Üyesi Fatih Aylıkcı

Sayısal İntegrasyon

Sayısal integrasyon, kuadratür olarak da bilinir. Kuadratür

$$I = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

ile

$$\int_a^b f(x)dx$$

belirli integraline yaklaşır.
Sayısal integrasyon yöntemleri iki gruba ayrılır:

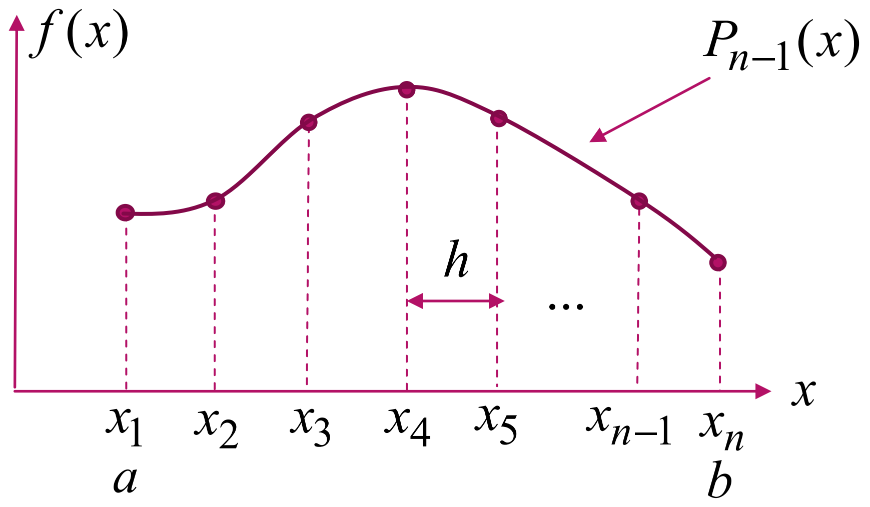
- Newton-Cotes formülleri
- Gauss kuadratürü

Newton-Cotes formülleri eşit aralıklı yatay eksenler (apsisler) ile karakterize edilir, Yamuk ve Simpson kuralı gibi iyi bilinen yöntemleri kapsar. f(x) eşit aralıklarla zaten hesaplanmışsa veya zaten hesaplanabiliyorsa en faydalı olanlarıdır. Newton-Cotes formülleri lokal interpolasyona dayandığından yalnızca polinomlara uyacak şekilde parçalara ihtiyaç duyarlar.

Sayısal İntegrasyon

Newton-Cotes Formülleri

$$\int_a^b f(x)dx$$



-İntegrasyon aralığı (a,b)'yi h=(b-a)/(n-1) uzunluğunda n-1 eşit aralığa bölelim.

-Tüm nodları kesiştiren (n-1). dereceden polinomla f(x)'e yaklaşalım.

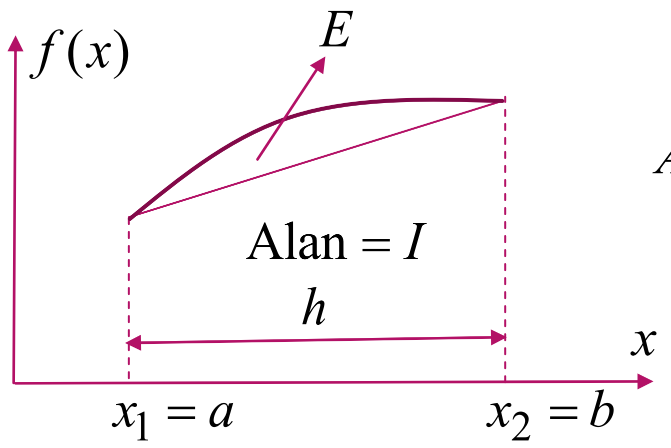
- Bu polinomun Lagrange formu, ($l_i(x)$ asal fonksiyonlar)

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

$$\text{İntegral: } I = \int_a^b P_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i = 1,2,\dots,n$$

Sayısal İntegrasyon

Yamuk Kuralı



$$n = 2 \text{ ise } l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x-b}{h} \qquad l_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x-a}{h}$$

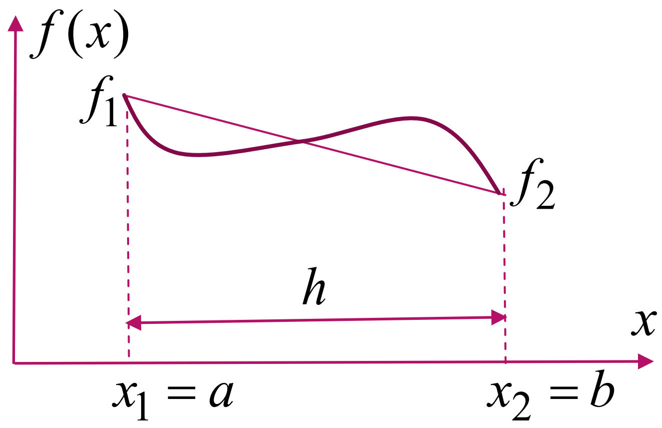
$$A_1 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x-b)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2} \qquad A_2 = \frac{1}{h}\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2}$$

$$\text{Yaklaşık Alan: } I = [f(a) + f(b)]\frac{h}{2}$$

Buna yamuk kuralı denir.

$$\text{Hata: } E = \int_a^b f(x)dx - I$$

Sayısal İntegrasyon



$$P_2(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2$$

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \; i = 1,2$$

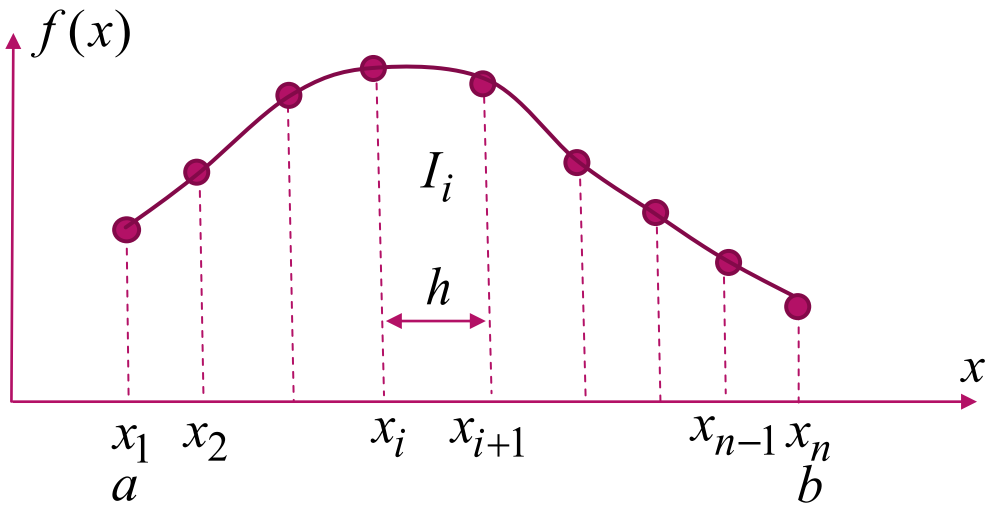
$$A_1 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x-b)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2}$$

$$A_2 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \Rightarrow I = [f(a) + f(b)]\frac{h}{2}$$

Sayısal İntegrasyon

Karma (Kompozit) Yamuk Kuralı



-İntegre edilecek f(x) fonksiyonuna her panelde düz bir çizgi ile yaklaşılıyor. Yamuk kuralından tipik bir i. Panelin yaklaşık alanı;

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]\frac{h}{2}$$

-Toplam alan veya integral: (Karma (Kompozit) yamuk kuralı)

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i = [f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\frac{h}{2}$$

- Hata ise benzer şekilde; $E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i$

Sayısal İntegrasyon

Yinelemeli (Tekrarlı) Yamuk Kuralı

$I_k,\ 2^{k-1}$ **panel kullanılarak karma yamuk kuralı ile hesaplanmış integral olsun. k bir arttığında panel sayısının iki katına çıktığını unutmayalım.**

$$k=1\ (1\ \text{panel}): I_1=[f(a)+f(b)]\frac{H}{2},\quad H=b-a$$

$$k=2\ (2\ \text{panel}): I_2=\left[f(a)+2f\left(a+\frac{H}{2}\right)+f(b)\right]\frac{H}{4}=\frac{1}{2}I_1+f\left(a+\frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}$$

$$k=3\ (4\ \text{panel}): I_3=\left[f(a)+2f\left(a+\frac{H}{4}\right)+2f\left(a+\frac{H}{2}\right)+2f\left(a+\frac{3H}{4}\right)+f(b)\right]\frac{H}{8}$$

$$=\frac{1}{2}I_2+\left[f\left(a+\frac{H}{4}\right)+f\left(a+\frac{3H}{4}\right)\right]\frac{H}{4}$$

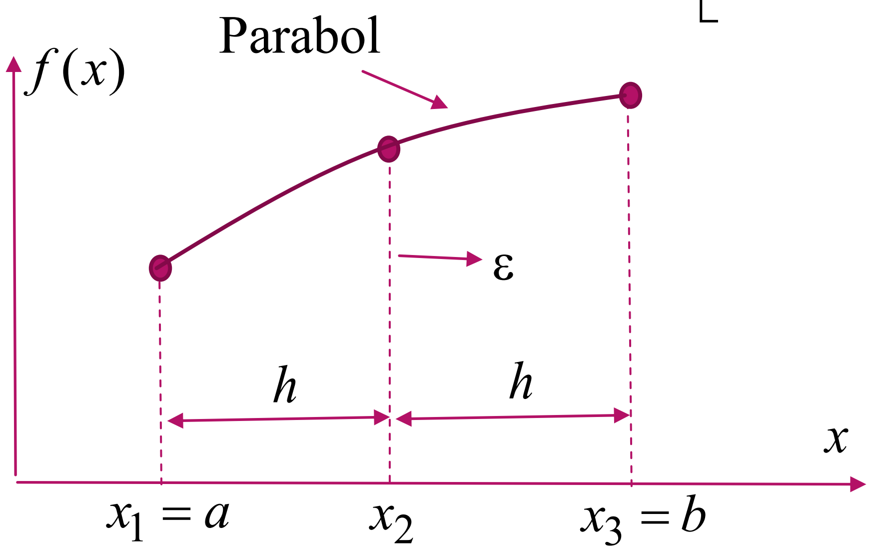
$$\text{Keyfi } k>1 \text{ için } I_k=\frac{1}{2}I_{k-1}+\frac{H}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left[a+\frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right],\quad k=2,3,\ldots$$

Sayısal İntegrasyon

Simpson Kuralı

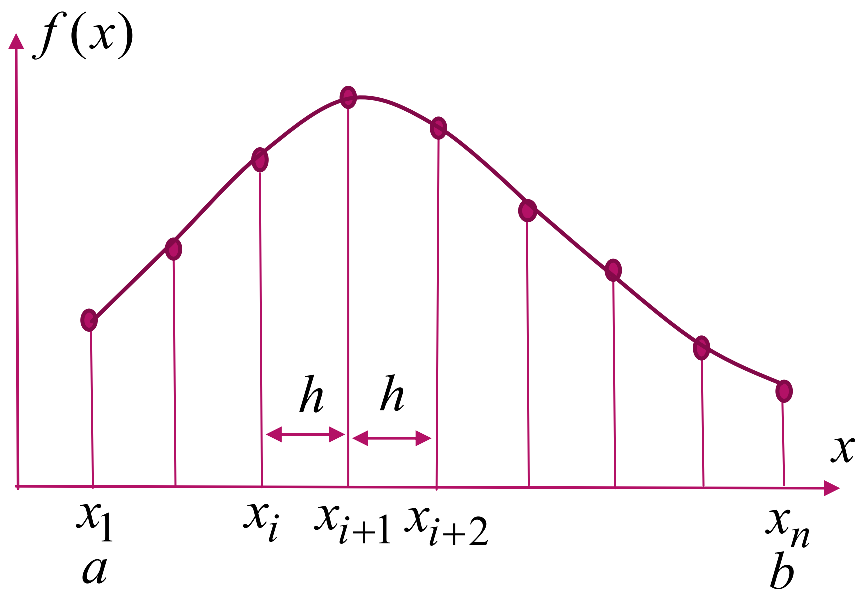
Simpson'ın 1/3 kuralı; üç bitişik noddan parabolik bir interpolasyon geçirerek (n=3) → Newton Cotes formüllerinden elde edilir. Parabolün altındaki alan;

$$I = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]\frac{h}{3}$$



Sayısal İntegrasyon

Karma Simpson 1/3 kuralını elde etmek için, integrasyon aralığı (a,b) n-1 (n tek) panele (her biri h=(b-a)/(n-1) genişliğinde) bölünür.



Bundan dolayı;

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \left[f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})\right]\frac{h}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-2}\left[\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = [f(x_1)+4f(x_2)+2f(x_3)+4f(x_4)+\ldots 2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]\frac{h}{3}$$

Sayısal İntegrasyon

Simpson 1/3 kuralı panel sayısının çift olmasını gerektirir. Bu koşul yerine getirilmezse Simpson'ın kübik interpolasyona dayanan 3/8 kuralına göre integre edebiliriz:

$$I = [f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]\frac{3h}{8}$$

n aralık için: $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \ldots + f(x_n)]$$

Sayısal İntegrasyon

Örnek: $\int_{0}^{2.5} f(x)dx$ *'i tablodaki datalardan tahmin ediniz.*

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
f(x)	1.5	2	2	1.6364	1.25	0.9565

Çözüm: Yamuk kuralına göre daha kesin olduğundan Simpson Kuralını kullanalım. Panel sayısı tek olduğundan, integrali ilk üç panel için Simpson 3/8 kuralıyla, son iki panel için Simpson 1/3 kuralıyla hesaplayacağız.

$$I = [f(0) + 3f(0.5) + 3f(1) + f(1.5)]\frac{3\times 0.5}{8} + [f(1.5) + 4f(2) + f(2.5)]\frac{0.5}{3}$$

$$= 2.8381 + 1.2655 = 4.1036$$

Sayısal İntegrasyon

Romberg İntegrasyonu

Romberg integrasyou, kompozit yamuk kuralını Richardson ekstrapolasyonu ile birleştirir.

$I_i = \int_a^b f(x)dx$ **olmak üzere** $R_{i,1} = I_i \quad 2^{i-1}$ **panel kullanılarak yinelemeli yamuk kuralı ile hesaplanır.**

Hata: $E = c_1 h_2 + c_2 h_4 + \ldots \quad (h_i = (b-a)/2^{i-1}$ genişliğinde paneller$)$

$R_{1,1} = I_1$ (1 panel)

$R_{2,1} = I_2$ (2 panel)

Sayısal İntegrasyon

Richardson ekstrapolasyonu ile hata ortadan kaldırılır. p=2 kullanılırsa (hata terimindeki üs)

$$R_{2,2} = \frac{2^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} R_{2,1} - \frac{1}{3} R_{1,1} \quad \begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ R_{2,1} & R_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$R_{3,2} = \frac{4}{3} R_{3,1} - \frac{1}{3} R_{2,1} \quad \begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ R_{2,1} & R_{2,2} \\ R_{3,1} & R_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$R_{3,3} = \frac{2^4 R_{3,2} - R_{2,2}}{2^4 - 1} = \frac{16}{15} R_{3,2} - \frac{1}{15} R_{2,2} \quad \begin{bmatrix} R_{1,1} & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix}$$

Sayısal İntegrasyon

Genelleştirme:

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \quad i > 1, \quad j = 2,3,\ldots,i$$

$$\begin{tikzcd}
R_{i-1,j-1} \arrow[dr] & & \\
& \alpha \arrow[dr] & \\
R_{i,j-1} \arrow[r] & \beta \arrow[r] & R_{i,j}
\end{tikzcd}$$

j	2	3	4	5	6
α	$-1/3$	$-1/15$	$-1/63$	$-1/255$	$-1/1023$
β	$4/3$	$16/15$	$64/63$	$256/255$	$1024/1023$

Sayısal İntegrasyon

Örnek: $f(x) = \sin x$ *ise* $\int_0^{\pi} f(x)dx$ *'i Romberg integrasyonu ile hesaplayınız.*

Çözüm: Yinelemeli yamuk kuralından;

$$R_{1,1} = I(\pi) = \frac{\pi}{2}[f(0) + f(\pi)] = 0$$

$$R_{2,1} = I(\pi/2) = \frac{1}{2}I(\pi) + \frac{\pi}{2}f(\pi/2) = 1.5708$$

$$R_{3,1} = I(\pi/4) = \frac{1}{2}I(\pi/2) + \frac{\pi}{4}[f(\pi/4) + f(3\pi/4)] = 1.8961$$

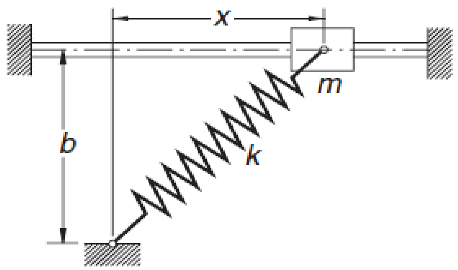
$$R_{4,1} = I(\pi/8) = \frac{1}{2}I(\pi/4) + \frac{\pi}{8}[f(\pi/8) + f(3\pi/8) + f(5\pi/8) + f(7\pi/8)] = 1.9742$$

Sayısal İntegrasyon

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1.5708 & 2.0944 & & \\ 1.8961 & 2.0046 & 1.9986 & \\ 1.9742 & 2.0003 & 2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

Yakınsıyor.

Ödev Sorusu



The mass m is attached to a spring of free length b and stiffness k. The coefficient of friction between the mass and the horizontal rod is μ. The acceleration of the mass can be shown to be (you may wish to prove this) $\ddot{x} = -f(x)$, where

$$f(x) = \mu g + \frac{k}{m}(\mu b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$

If the mass is released from rest at $x = b$, its speed at $x = 0$ is given by

$$v_0 = \sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

Compute v_0 by numerical integration using the data $m = 0.8$ kg, $b = 0.4$ m, $\mu = 0.3$, $k = 80$ N/m and $g = 9.81$ m/s^2.

Sayısal İntegrasyon

Gauss Formülleri:

Bazı kuadratür nodları $x_i \in [a,b]$ **ve kuadratür ağırlıkları** w_i **için tüm integrasyon formları;**

$$\int_a^b f(x)dx \ \mathrm{B} \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

formundadır. Gauss kuadratürü iyi seçilmiş x_i **nodlarını ve** w_i **ağırlıklarını kullanır.**

Sayısal İntegrasyon

Gauss – Legendre kuadratürü

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i)$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i, \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\text{Hata:} \quad E = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(c), \quad a<c<b$$

$\pm\xi_i$	A_i	$\pm\xi_i$	A_i
$n=2$		$n=5$	
0.577 350	1.000 000	0.000 000	0.568 889
$n=3$		0.538 469	0.478 629
0.000 000	0.888 889	0.906 180	0.236 927
0.774 597	0.555 556	$n=6$	
$n=4$		0.238 619	0.467 914
0.339 981	0.652 145	0.661 209	0.360 762
0.861 136	0.347 855	0.932 470	0.171 324

Sayısal İntegrasyon

Logaritmik tekillikli Gauss kuadratürü

$$\int_0^1 f(x)\ln(x)dx \approx -\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\text{Hata: } E = \frac{k(n)}{(2n)!} f^{(2n)}(c), \quad 0 < c < 1$$

$$k(2) = 0.00285, k(3) = 0.00017, k(4) = 0.00001$$

x_i	A_i	x_i	A_i
$n=2$		$n=5$	
0.112 009	0.718 539	(−1)0.291 345	0.297 893
0.602 277	0.281 461	0.173 977	0.349 776
$n=3$		0.411 703	0.234 488
(−1)0.638 907	0.513 405	0.677314	(−1)0.989 305
0.368 997	0.391 980	0.894 771	(−1)0.189 116
0.766 880	(−1)0.946 154	$n=6$	
$n=4$		(−1)0.216 344	0.238 764
(−1)0.414 485	0.383 464	0.129 583	0.308 287
0.245 275	0.386 875	0.314 020	0.245 317
0.556 165	0.190 435	0.538 657	0.142 009
0.848 982	(−1)0.392 255	0.756 916	(−1)0.554 546
		0.922 669	(−1)0.101 690

Eğer k parantez içinde verilmişse sayıyı 10^k ile çarpın.

Sayısal İntegrasyon

Gauss – Laguerre kuadratürü

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\text{Hata: } E = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c), \quad 0 < c < \infty$$

x_i	A_i	x_i	A_i
$n = 2$		$n = 5$	
0.585 786	0.853 554	0.263 560	0.521 756
3.414 214	0.146 447	1.413 403	0.398 667
$n = 3$		3.596 426	(−1)0.759 424
0.415 775	0.711 093	7.085 810	(−2)0.361 175
2.294 280	0.278 517	12.640 801	(−4)0.233 670
6.289 945	(−1)0.103 892	$n = 6$	
$n = 4$		0.222 847	0.458 964
0.322 548	0.603 154	1.188 932	0.417 000
1.745 761	0.357 418	2.992 736	0.113 373
4.536 620	(−1)0.388 791	5.775 144	(−1)0.103 992
9.395 071	(−3)0.539 295	9.837 467	(−3)0.261 017
		15.982 874	(−6)0.898 548

Multiply numbers by 10^k, where k is given in parentheses

Sayısal İntegrasyon

Gauss – Hermite kuadratürü

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\text{Hata: } E = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2^2(2n)!} f^{(2n)}(c), \quad 0 < c < \infty$$

$\pm x_i$	A_i	$\pm x_i$	A_i
$n=2$		$n=5$	
0.707 107	0.886 227	0.000 000	0.945 308
$n=3$		0.958 572	0.393 619
0.000 000	1.181 636	2.020 183	(−1) 0.199 532
1.224745	0.295 409	$n=6$	
$n=4$		0.436 077	0.724 629
0.524 648	0.804 914	1.335 849	0.157 067
1.650 680	(−1)0.813 128	2.350 605	(−2)0.453 001

Multiply numbers by 10^k, where k is given in parentheses

Sayısal İntegrasyon

Örnek: $\int_{0}^{0.5} \cos(\pi x)\ln(x)dx$ *için Gauss kuadratürünü kullanınız.*

Çözüm: İntegrali ikiye ayıralım:

$$\int_{0}^{0.5} \cos(\pi x)\ln(x)dx = \overbrace{\int_{0}^{1} \cos(\pi x)\ln(x)dx}^{\mathrm{I}} - \overbrace{\int_{0.5}^{1} \cos(\pi x)\ln(x)dx}^{\mathrm{II}}$$

$x = 0$'da logaritmik tekillik var.

Sayısal İntegrasyon

I

$$n = 4 \text{ için } \int_0^1 \cos(\pi x)\ln(x)dx \approx -\sum_{i=1}^{4} A_i \cos(\pi x_i)$$

x_i	$\cos(\pi x_i)$	A_i	$A_i \cos(\pi x_i)$
0.041448	0.991534	0.383464	0.380218
0.245275	0.717525	0.386875	0.277592
0.556165	–0.175533	0.190435	–0.033428
0.848982	–0.889550	0.039225	–0.034892

$$\sum = 0.589490$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \cos(\pi x)\ln(x)dx = -0.589490$$

Sayısal İntegrasyon

II 2. integral için Gauss-Legendre kuadratürü kullanılır;

$$n = 4 \text{ için } \int_{0.5}^{1} \cos(\pi x)\ln(x)dx \approx 0.25\sum_{i=1}^{4} A_i \cos(\pi x_i)\ln(x_i) \quad \left[x_i = \frac{1+0.5}{2} + \frac{1-0.5}{2}\xi_i = 0.75 + 0.25\xi_i \right]$$

ξ_i	x_i	$\cos(\pi x_i)\ln(x_i)$	A_i	$A_i \cos(\pi x_i)\ln(x_i)$
–0.861136	0.534716	0.068141	0.347855	0.023703
–0.339981	0.665005	0.202133	0.652145	0.131820
0.339981	0.834995	0.156638	0.652145	0.102151
0.861136	0.965284	0.035123	0.347855	0.012218

$$\sum = 0.269892$$

Sayısal İntegrasyon

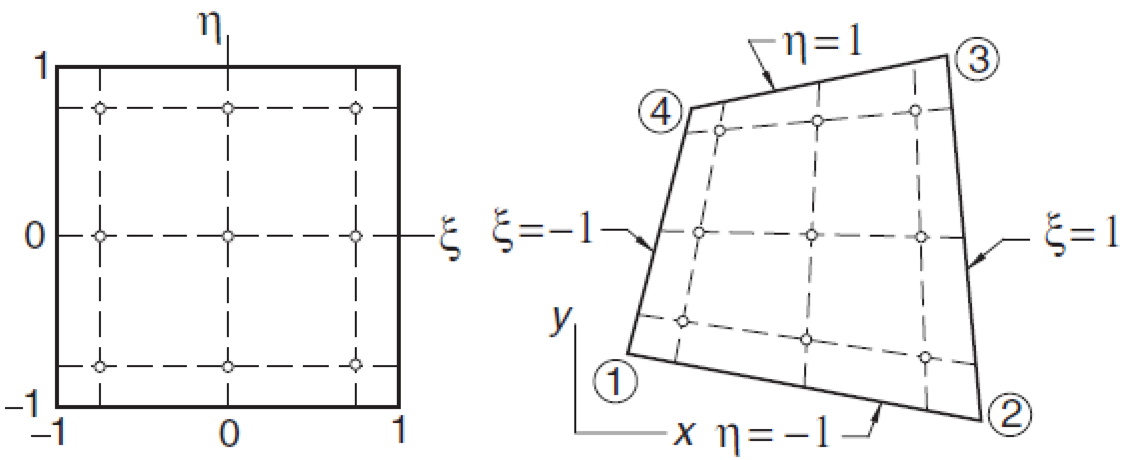
$$\int_{0.5}^{1} \cos(\pi x)\ln(x)dx \approx 0.25 \times 0.269892 = 0.067473$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} \cos(\pi x)\ln(x)dx \approx -0.589490 - 0.067473 = -0.656963$$

Sayısal İntegrasyon

Gauss-Legendre kuadratürü kullanılarak katlı integral hesabı

$\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$ **alan integralleri gibi katlı integraller kuadratür ile hesaplanabilir. A üstündeki integral sonlu elemanların üzerindeki integrallerin toplanması ile hesaplanabilir.**



Mapping a quadrilateral into the standard rectangle.

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$I=\int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i,\eta)d\eta=\sum_{j=1}^{n} A_j\left[\sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i,\eta_j)\right]$$

$$I=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_i A_j f(\xi_i,\eta_j)$$

Sayısal İntegrasyon

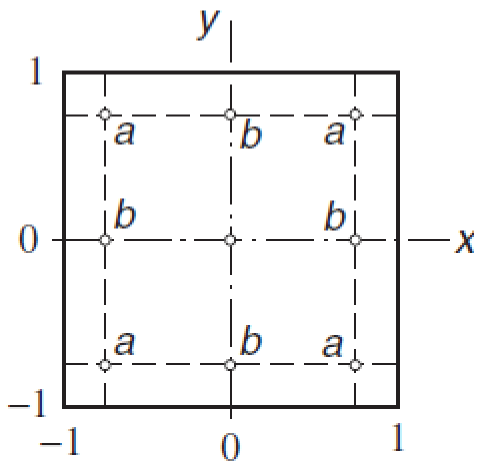
ξ, η, A_i, A_j aynı tablodan elde edilir.

$\pm\xi_i$	A_i	$\pm\xi_i$	A_i
$n=2$		$n=5$	
0.577 350	1.000 000	0.000 000	0.568 889
$n=3$		0.538 469	0.478 629
0.000 000	0.888 889	0.906 180	0.236 927
0.774 597	0.555 556	$n=6$	
$n=4$		0.238 619	0.467 914
0.339 981	0.652 145	0.661 209	0.360 762
0.861 136	0.347 855	0.932 470	0.171 324

Sayısal İntegrasyon

Örnek: $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)dxdy$ *integralini Gauss-Legendre kuadratürü ile 3. mertebeden çözünüz.*

Çözüm:



$$I = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_i A_j \cos\left(\frac{\pi x_i}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y_j}{2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} A_i \cos\left(\frac{\pi x_i}{2}\right)\sum_{j=1}^{n} A_j \cos\left(\frac{\pi y_j}{2}\right)$$

$$= \left[0.888889\cos(\pi.0) + 2(0.555556)\cos\left(\frac{0.774597\pi}{2}\right)\right] \times \left[0.888889\cos(\pi.0) + 2(0.555556)\cos\left(\frac{0.774597\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 1.623391$$