KOORDİNATLAR VE DOĞRULAR

VEKTÖR

$\bullet x$'in n elemanından oluşan $P=(x_1,x_2,...x_n)$ dizisi n-boyutlu vektör olarak isimlendirilir.

$\bullet x_1,x_2,...,x_n$ elemanları P 'nin koordinatları ve x_i, i. koordinat olarak isimlendirilir.

$\bullet$Dikkatimizi reel vektörlerle yani koordinatları reel sayılar olan vektörler ile sınırlayacağız.

$\ast$Koordinatlarının tümü sıfır olan vektöre sıfır vektör denir ve 0 ile belirtilir.

$\ast$Reel vektör, n-boyutlu reel Öklid uzayındaki bir noktanın orijini O olan sabit bir koordinat sistemine göre temsili olarak yorumlanabilir.

$\ast O$ 'dan P 'ye yönlendirilen $\overrightarrow{OP}$ doğru parçası olarak da yorumlanabilir.

BAZI ÖZELLİKLER

•$P=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Q(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere iki vektörün toplamı $P+Q,$ i. koordinatı P ve Q 'nun i. koordinatları toplamı x_i+y_i olan $(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$ vektörüdür.

∗<u>Lemma 1</u>. Vektör toplamı komütatiftir, yani tüm P ve Q vektörleri için $P+Q=Q+P$ 'dir.

*<u>Lemma 2</u>. Vektör toplamı asosyatiftir, yani tüm P,Q ve R vektörleri için $(P+Q)+R=P+(Q+R)$ 'dir.

∗<u>Lemma 3</u>. 0 vektörü tüm P vektörleri için $P+0=P$ özelliğine sahiptir.

∗<u>Lemma 4</u>. $P=(x_1,x_2,...,x_n)$ olsun. $-P$ vektörü $-P=(-x_1,-x_2,...,-x_n)$ ile tanımlıdır ve $P+(-P)=0$ özelliğine sahiptir.

BAZI ÖZELLİKLER

*Lemma 5. P ve Q herhangi iki vektör olsun. $P+X=Q$ denklemi $X=Q+(-P)$ çözümüne sahiptir. Bu vektör Q ve P 'nin farkıdır ve $X=Q-P$ biçiminde yazılır. $Q-P$ 'nin i. koordinatı Q ve P 'nin i. koordinatlarının farkıdır.

SKALER ÇARPIM

• Skaler Çarpım: Eğer a bir sayı ve $P=(x_1,x_2,...,x_n)$ bir vektör ise P 'nin a ile skaler çarpımı

$$aP=(ax_1,ax_2,...,ax_n)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanımdan hareketle $1P=P,(-1)P=-P,0P=0$ eşitlikleri açıktır.

Tüm P ve Q vektörleri ve a ve b skalerleri için

$$a(bP)=(ab)P, \quad (a+b)P=aP+bP, \quad a(P+Q)=aP+aQ$$

eşitliklerinin doğruluğunu kontrol ediniz.

$*P_i$ vektörlerinin a_i skalerleri ile skaler çarpımı olan a_iP_i 'lerin

$$P=a_1P_1+...+a_mP_m$$

toplamı $P_1,P_2,...,P_m$ 'lerin bir lineer kombinasyonu olarak isimlendirilir.

SKALER ÇARPIM TANIMI:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{\mathrm{a}}|.|\vec{\mathrm{b}}|.\cos\theta$$

ALIŞTIRMALAR

$P=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Q=(y_1,y_2,...,y_n)$ sıfır vektörler değilse P ve Q ancak ve ancak Q, P 'nin bir skaler ile çarpımı ise lineer bağımlıdır.

#Aşağıdaki üç vektörden oluşan kümelerin lineer bağımsız kümeler olup olmadığını bulunuz.

a) $(1,-1,2),(1,1,0),(0,-1,1)$

b) $(2,1,1),(1,-1,1),(5,4,2)$

c) $(1,0,-2),(2,-1,2),(4,-3,10)$

d) $(1,-1,1),(-1,2,1),(-1,2,2)$

LİNEER BAĞIMLILIK

• $a_1P_1 + a_2P_2 + ... + a_mP_m$ lineer kombinasyonu ancak ve ancak $a_1, a_2, ..., a_m$ hepsi birden sıfır olduğunda, sıfır oluyorsa $P_1, P_2, ..., P_m$ vektörleri lineer bağımsız vektörlerdir.

• $P_1, P_2, ..., P_m$ lineer bağımsız değillerse bu vektörlerin lineer bağımlı olduklarını söyleyebiliriz.

• E_i i. koordinatı 1 olan ve diğer koordinatlarının tümü sıfır olan bir vektör olsun. Bu durumda

$$P = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1E_1 + x_2E_2 + ... + x_nE_n$$

Her vektör $E_1, E_2, ..., E_n$ 'lerin bir lineer kombinasyonudur.

Eğer $x_1E_1 + x_2E_2 + ... + x_nE_n = P = 0$ ise $(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$'dır, yani $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ 'dır.

Bu durumda $E_1, E_2, ..., E_n$ vektörlerinin lineer bağımsız vektörler olduğunu görmüş oluruz.

İÇ ÇARPIMLAR

•İç çarpım: Eğer $P=(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $Q=(y_1, y_2, ..., y_n)$ herhangi iki vektör ise

$$P \bullet Q = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

sayısına P ve Q 'nun iç çarpımı denir. $P \bullet Q = Q \bullet P$ olduğu açıktır.

∗Bir P vektörünün normu

$$P \bullet P = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

iç çarpımı ile tanımlıdır.

∗Eğer P herhangi bir reel vektör ise $P \bullet P \geq 0$ 'dır ve negatif olmayan karekökü

$$t = \sqrt{P \bullet P} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

P 'nin uzunluğu olarak isimlendirilir.

∗Bir P vektörü eğer $P \bullet P = 1$ ise birim vektör olarak isimlendirilir. Bundan dolayı bir reel birim vektör, uzunluğu (ve normu) 1 olan bir vektördür.

İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI

$\bullet$Eğer $P=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $Q=(y_1,y_2,...,y_n)$ herhangi iki reel sıfır olmayan vektör ise 0° ile 180° arasında

$$\cos\theta=\frac{P\bullet Q}{\sqrt{P\bullet P}\sqrt{Q\bullet Q}}$$

sağlayan bir θ açısı vardır. Bu θ açısı, P ve Q vektörleri arasındaki açı olarak tanımlıdır.

$*$Eğer $\cos\theta=0$ ise iki vektör ortogonal (yani, dik) olarak isimlendirilir. P ve Q ancak ve ancak

$$P\bullet Q=x_1y_1+...+x_ny_n=0$$

ise ortogonaldir.

$*$Bundan dolayı P ve Q herhangi iki vektör ise, karşılıklı koordinatları çarpıp toplarız. Elde edilen toplam, ancak ve ancak P ve Q ortogonal ise sıfırdır.

ALIŞTIRMALAR

#Aşağıdaki P ve Q vektör çiftlerinin her biri için $P \bullet Q$ 'yu hesaplayınız.

$(a)\ (1,1,-1),(1,0,1)$ $(f)\ (1,-1,1,1),(1,1,1,0)$

$(b)\ (1,2,3),(-1,1,-1)$ $(g)\ (2,3,-1,6),(3,-2,6,1)$

$(c)\ (1,1,2),(0,-1,-1)$ $(h)\ (1,2,3,4),(2,-1,-1,1)$

$(d)\ (-1,0,1),(2,1,1)$ $(i)\ (4,-6,1,2),(1,2,-1,2)$

$(e)\ (-1,3,2),(1,1,-1)$ $(j)\ (3,1,-1,1),(0,1,1,0)$

#Hangi vektör çiftleri ortogonaldir?

#Ortogonal olmayan her vektör çifti için $\cos\theta$ 'yı hesaplayınız.

VEKTÖREL ÇARPIM

•İki vektörün vektörel (ya da çapraz) çarpımı:

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta)\vec{n}$$

olarak tanımlıdır. $\vec{n}$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ 'nin her ikisine de dik olan birim vektördür.

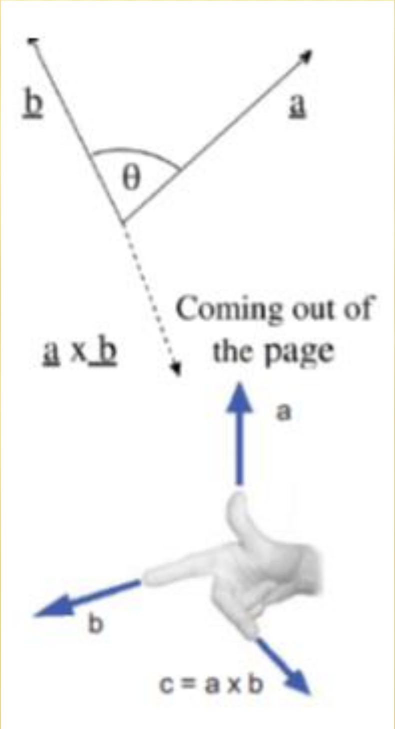
$*\vec{a}\times\vec{b}$ 'nin yönünün bulmak için sağ el kuralı:

·i) Sağ elin baş, işaret parmağı ve bu ikisinin oluşturduğu düzleme dik olan orta parmak ile bir yön kümesi oluşturulur.

·ii) Baş parmak ilk vektör $\vec{a}$ 'dır.

·iii) İşaret parmağı $\vec{a}$ ile olabilecek en küçük açı ile $\vec{b}$ vektörüdür.

·iv) Orta parmağın yönü $\vec{a}\times\vec{b}$ 'nin yönünü verir.



VEKTÖREL ÇARPIMIN ÖZELLİKLERİ

$*(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c}):$ dağılma

$*\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}:$ komütatif değil

$*(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}):$ asosyatif değil

$*$Eğer m bir skaler ise

$$m(\vec{a}\times\vec{b})=(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{b})m$$

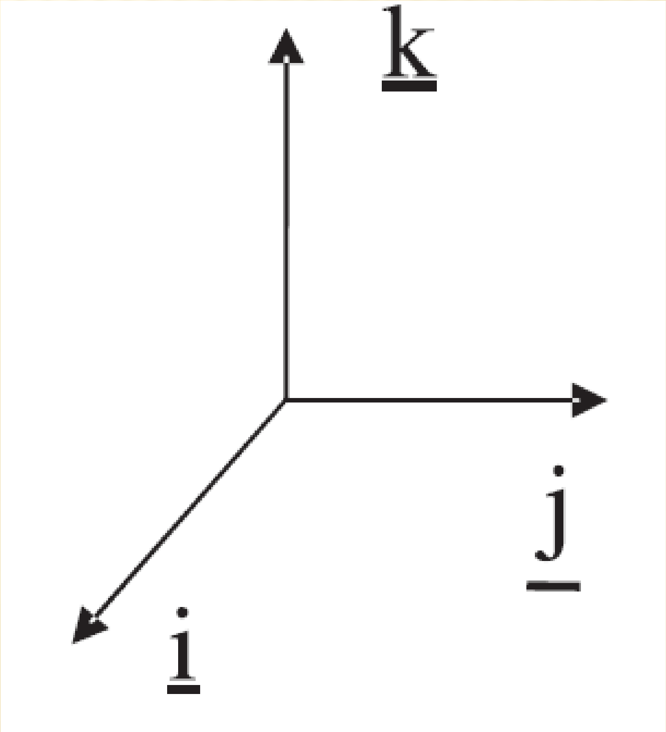
$*$Eğer vektörler paralelse (0°) $\vec{a}\times\vec{b}=0,$ yani $\vec{a}\times\vec{a}=0.$

BİRİM VEKTÖRÜN VEKTÖREL ÇARPIMI

$*$Baz vektörleri vektörel çarpımların dairesel permütasyonları ile bağlıdır.

(Bir diğer iyi yol sağ el kuralıdır.)

- $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
- $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
- $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$



VEKTÖREL ÇARPIMIN BİLEŞENLERİ

Çok kullanışlı bir özellik:

- $\vec{a}\times\vec{b}=(a_x,a_y,a_z)\times(b_x,b_y,b_z)=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$
- $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ ve $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ olduğundan

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

- Vektörel çarpımın determinant formda yazılması daha kullanışlıdır:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

VEKTÖREL ÇARPIMIN GEOMETRİK YORUMU

∗Vektörel çarpım bir üçgenin alanı ile ilişkilidir:

•Üçgenin yüksekliği: $h = a\sin\theta$

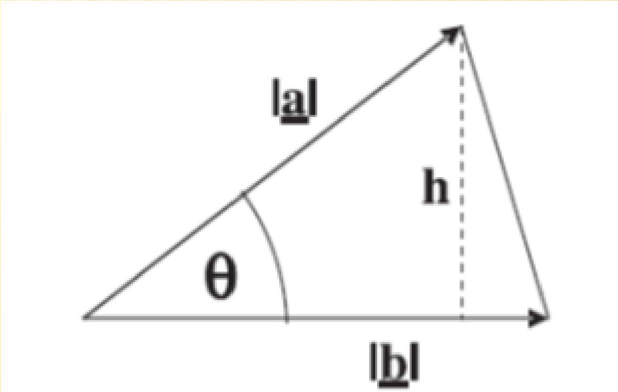
•Üçgenin Alanı: $A_{\text{üçgen}} = (1/2)\times(\text{Taban})\times(\text{Yükseklik}) = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{ab\sin\theta}{2} = \dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{2}$

•Paralelkenarın Alanı: $A_{\text{paralelkenar}} = |\vec{a}\times\vec{b}|$

•Bunun sonucu olarak "Vektör Alanı"

$$\vec{A}_{\text{paralelkenar}} = \vec{a}\times\vec{b}$$

Vektör paralelkenar düzlemine diktir.



ÖRNEK

Örnek:

$(0,0,0),(1,3,4)$ ve $(2,1,3)$ koordinatları ile tanımlı paralelkenarın alanını bulunuz.

- Vektörleri oluşturalım: $\vec{a} = (\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$ ve $\vec{b} = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

- $\vec{a} \times \vec{b} = (3\times 3 - 4\times 1)\vec{i} - (1\times 3 - 4\times 2)\vec{j} + (1\times 1 - 3\times 2)\vec{k} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k}$
- Bundan dolayı, alan $\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$

ÖRNEK

Eğer bazı λ skalerleri için $\vec{a} = \vec{b} + \lambda\vec{c}$ ise $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$ olduğunu gösteriniz.

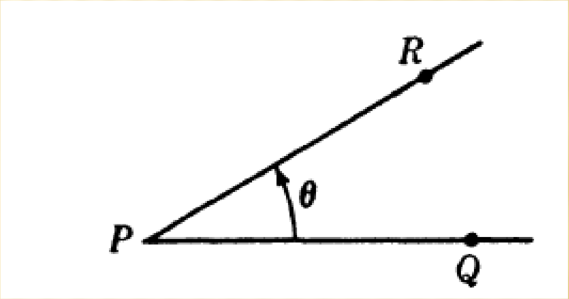
Çözüm:

$\vec{a} = \vec{b} + \lambda\vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{c} = (\vec{b} + \lambda\vec{c}) \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} + \lambda\vec{c} \times \vec{c}$

$\vec{c} \times \vec{c} = 0$ olduğundan $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$ 'dir.

DİKEY İZDÜŞÜM

•P ve Q herhangi iki nokta ise P ile Q 'yu birleştiren ve P 'den Q 'ya yönlendirilen $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasını belirleyebiliriz. Yönlü bir L doğrusu üzerindeki P ve Q 'nun dikey olarak izdüşümü alınır ve P' ve Q' izdüşümleri elde edilir. Böylece $\overrightarrow{PQ}$ 'nun L üzerindeki dikey izdüşümünü $\overline{P'Q'}$ işaretli uzunluğu ile tanımlamış oluruz. Buradan $\overrightarrow{QP}$ 'nin dikey izdüşümü $\overrightarrow{PQ}$ dikey izdüşümünün $\overline{Q'P'}$ negatif uzunluklu halidir.



•Teorem: θ, PQ ile L arasındaki açı olsun. Bu durumda L üzerindeki $\overrightarrow{PQ}$ izdüşümü $|PQ|\cos\theta$ 'ya eşittir.

UZAYDAKİ BİR VEKTÖRÜN UZUNLUĞU

•$\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçası genellikle bir vektör olarak isimlendirilir ve (x, y, z) sayı dizisine verdiğimiz ismin ilham kaynağı budur. Şimdi eğer $P = (x, y, z)$ ise OP uzunluğunun

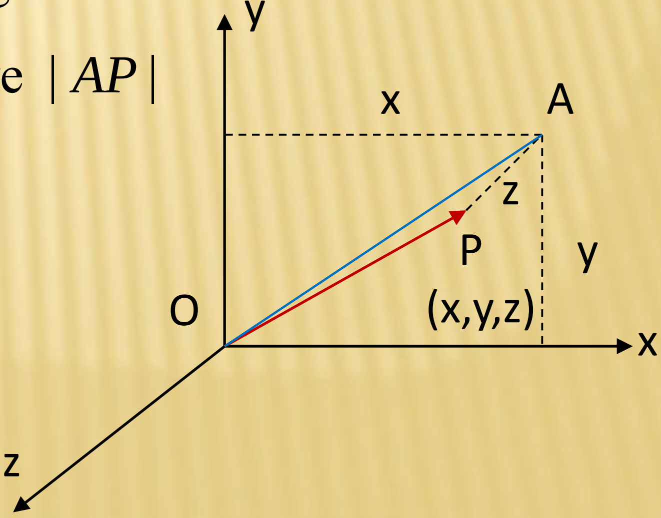
$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

formülü ile verileceğini göstereceğiz.

Yani, bir vektör uzunluğu için kullanılan formül üç boyutlu durumda da gerçek uzunluktur.

Sağdaki şekilde $|OA|$ x ve y kenarlı dikdörtgenin köşegenidir ve $|OA|^2 = x^2 + y^2$ 'dir. $\overline{AP} = z$ ve $|OP|$, kenarları $|OA|$ ve $|AP|$ olan dik üçgenin hipotenüsü olduğu için

$$|OP|^2 = |OA|^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ 'dir.}$$



ÖRNEK

Aşağıdaki vektörlerin uzunluklarını bulunuz.

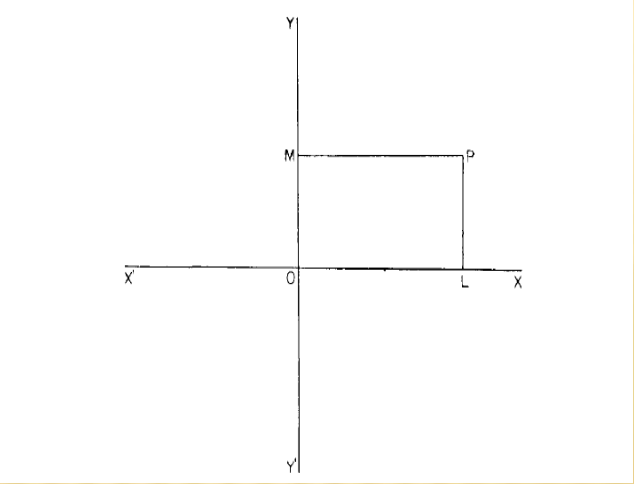
(*a*) $(-1, 2, 3)$	(*d*) $(-2, 2, 1)$	(*g*) $(0, 0, -3)$
(*b*) $(1, 1, 2)$	(*e*) $(3, 6, 0)$	(*h*) $(3, 0, -4)$
(*c*) $(1, -2, -2)$	(*f*) $(-1, 1, 1)$	(*i*) $(5, 7, -1)$

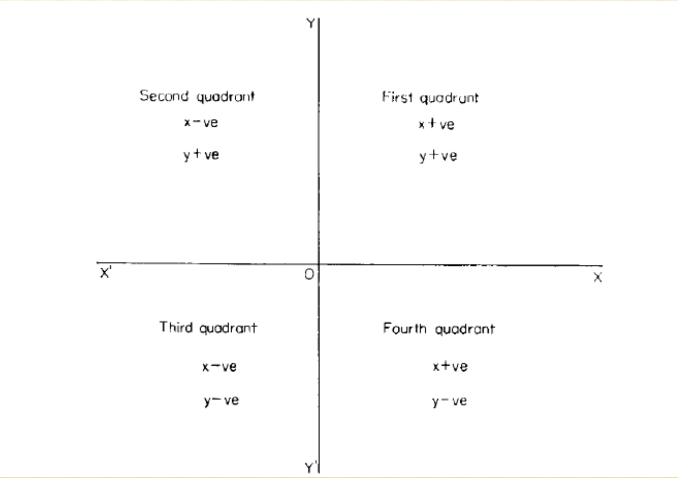
KOORDİNATLAR

Aşağıdaki şekilde birbirine dik $X'OX$ ve $Y'OY$ doğruları seçilir.

Bunlar sırasıyla x ekseni ve y eksenidir. Eksenler düzleminde bir P noktası seçilir ve sırasıyla x ve y eksenlerine dik PL ve PM çizilir. Sırasıyla x ve y ile belirttiğimiz MP ve LP uzaklıkları P noktasının verilen eksenlere göre koordinatları olarak isimlendirilir. P 'nin pozisyonu koordinatları tarafından tek şekilde belirtilir ve bir koordinat çifti, OX ve OY yönleri pozitif ve OX' VE OY' yönleri negatif iken düzlemdeki tek bir noktayı gösterir. Bu x ve y koordinatları sırasıyla apsis ve ordinat olarak isimlendirilir.

Eksenler düzlemi birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölge olmak üzere dört bölgeye ayırır.





KOORDİNATLAR

x ekseni üzerindeki tüm noktaların ordinatları ve y ekseni üzerindeki tüm noktaların apsisleri sıfırdır. Ek olarak, O noktasında her ikisi de sıfırdır ve orijin olarak isimlendirilir.

Koordinatları x ve y olan P noktası sıklıkla $P(x, y)$ veya (x, y) ile belirtilir.

(x, y) ve (y, x) noktalarının $x = y$ olmadıkça farklı noktalar olduklarına dikkat ediniz.

İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

P_1 ve P_2 sırasıyla (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olan noktalar olsun.

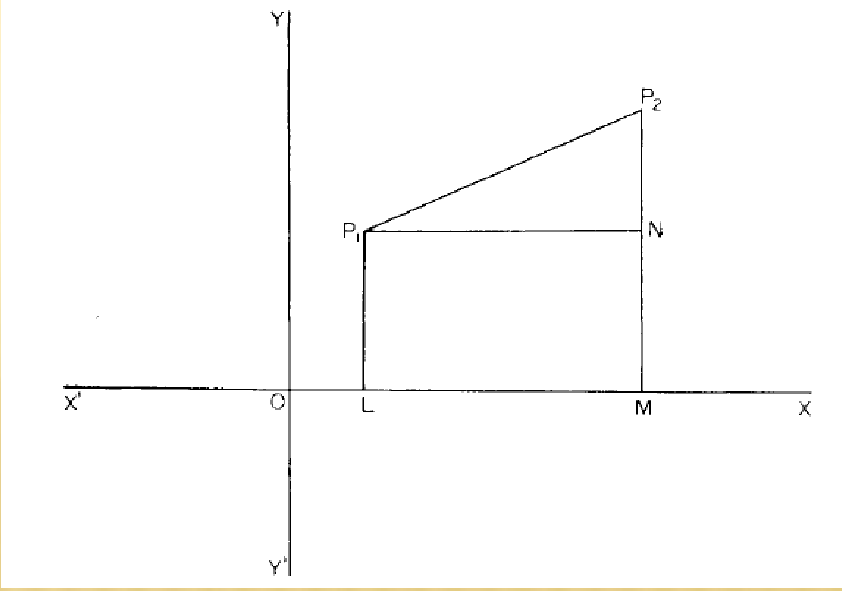
$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1N}^2 + \overline{NP_2}^2$ olan P_1NP_2 sağ açılanmış üçgeni düşünelim.

$P_1N = OM - OL = x_2 - x_1$ ve $NP_2 = MP_2 - LP_1 = y_2 - y_1$ dir.

Bu durumda

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Özel olarak, P_1 'in orijine uzaklığı $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ 'dir.



E_3 ‘TE BİR DOĞRUNUN DENKLEMLERİ

Bir vektör, üç boyutlu uzayın bir dönüşümüdür, bu sebeple üç boyutlu Öklid uzayının temelleri çalışılmalıdır: Noktalar, doğrular ve düzlemler.

R={O;$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$} kartezyen referans olsun. $M \in E_3$ için M noktasının koordinatları $\overrightarrow{OM}$ vektörü pozisyonu ile açıklanır.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ise $M(x,y,z)$ 'dir.

BİR NOKTA VE SIFIR OLMAYAN BİR VEKTÖR İLE BELİRLENEN DOĞRU

E_3 'te bir doğru

(1) bir nokta ve sıfır olmayan bağımsız bir vektör

(2) iki belirli nokta

(3) iki düzlemin kesişimi

yolları ile belirlenebilir.

$M_0 \in E_3, M_0(x_0, y_0, z_0)$ ve $\vec{v} \in V_3 \setminus \{\vec{0}\}, \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ olsun.

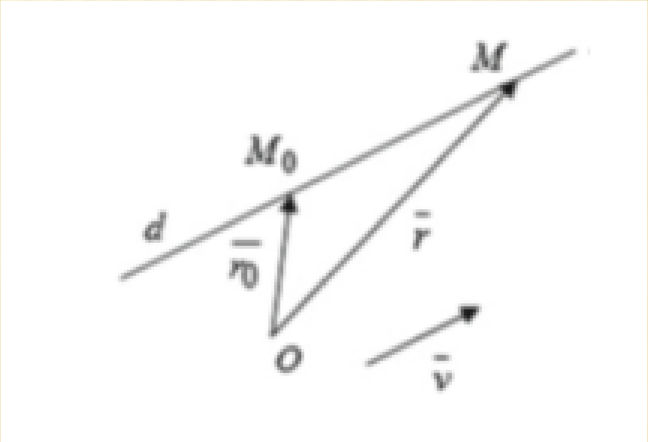
M_0 noktası ve sıfır olmayan $\vec{v}$ vektörü ile belirlenen $d = (M_0, \vec{v})$ ile tanımlı doğrunun denklemini bulmaya çalışalım.

$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OM_0} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$

olsun. $M \in E_3, M(x, y, z)$ olsun ve

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ diyelim.

Bu durumda $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}$ ve $\vec{v}$ doğrudaştır.



BİR NOKTA VE SIFIR OLMAYAN BİR VEKTÖR İLE BELİRLENEN DOĞRU

Bu durumda $\overrightarrow{M_0M} \times \vec{v} = 0$ 'dır.

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ olduğundan $d = (M_0, \vec{v})$ doğrusunun vektörel denklemi:

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) \times \vec{v} = 0 \text{ 'dır.}$$

$\vec{v}$ doğrunun doğrultu vektörü olarak isimlendirilir.

Eğer $\overrightarrow{M_0M}$ ve $\vec{v}$ doğrudaş ise

$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}$ olacak şekilde $\exists t \in \mathbb{R}$ vardır.

Bu durumda sonuç $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t\vec{v}$ olur ve d doğrusunun

$$\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

vektörel parametrik denklemini elde ederiz.

BİR NOKTA VE SIFIR OLMAYAN BİR VEKTÖR İLE BELİRLENEN DOĞRU

Denklem

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}+ta\vec{i}+tb\vec{j}+tc\vec{k}$$

şeklinde yazılabilir.

d doğrusunun parametrik denklemlerini

$$\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+tc \end{cases}$$

olarak elde ederiz. Burada t parametresini yok edersek d doğrusunun

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

kartezyen denklemlerine ulaşırız.

Burada eğer paydalardan birisi sıfıra eşitse payı da sileriz.

İKİ BELİRLİ NOKTA İLE BELİRLENEN DOĞRU

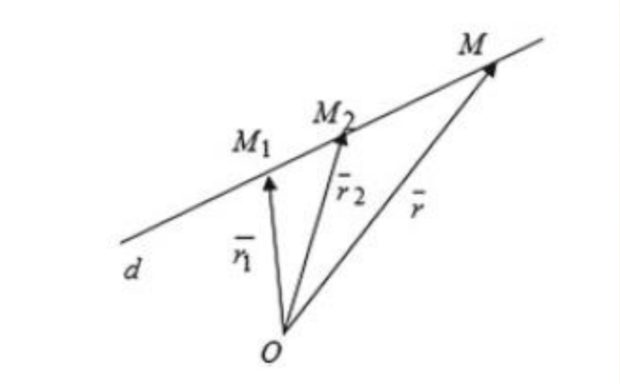
$M_1 \in E_3, M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$

$M_2 \in E_3, M_2(x_2, y_2, z_2), \vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$ olsun.

M_1 ve M_2 noktaları ile belirlenen $d = (M_1, M_2)$ doğrusunun denklemini elde etmeye çalışalım.

$M \in d, M(x, y, z)$ ve $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ olsun. M_1 ve $\overrightarrow{M_1M_2}$ ile belirlenen doğruyu düşünelim.

$\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$ 'dır.



İKİ BELİRLİ NOKTA İLE BELİRLENEN DOĞRU

Buradan, d doğrusunun

$$(\vec{r}-\vec{r_1})\times(\vec{r_2}-\vec{r_1})=\vec{0}$$

vektörel denklemine ulaşırız.

$\overrightarrow{M_1M}=t\overrightarrow{M_1M_2}$ sağlayan $\exists t\in\mathbb{R}$ olduğundan

$\vec{r}-\vec{r_1}=t(\vec{r_2}-\vec{r_1}),\forall t\in\mathbb{R}$ 'dir.

Yani, d doğrusunun vektörel parametrik denklemleri

$$\vec{r}=\vec{r_1}+t(\vec{r_2}-\vec{r_1}),\forall t\in\mathbb{R}$$

formundadır.

İKİ BELİRLİ NOKTA İLE BELİRLENEN DOĞRU

Parametrik denklemler:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Kartezyen denklemler:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

BİRBİRİNE PARALEL VE DİK DOĞRULAR

$$d_1 : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ ve } d_2 : \frac{x-x_2}{p} = \frac{y-y_2}{q} = \frac{z-z_2}{r}$$

biçiminde iki doğru verilmiş olsun.

Eğer bu doğrular birbirine paralel ise ($d_1 // \mathrm{d}_2$), doğrultuları da (a,b,c) ve (p,q,r) birbirine paraleldir:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

Eğer doğrular birbirine dik ise ($d_1 \perp \mathrm{d}_2$), $a.p + b.q + c.r = 0$ 'dır.

İKİ DOĞRUNUN KESİŞİMİ

İki doğru için 3 durum söz konusudur:

a) Doğrular kesişebilir.

b) Doğrular birbirine paraleldir.

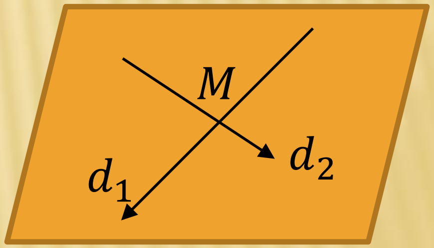
c) Doğrular aynı düzlem üzerinde değilse bu doğrular aykırı olabilir.

$$d_1 : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = t \text{ ve } d_2 : \frac{x - x_2}{p} = \frac{y - y_2}{q} = \frac{z - z_2}{r} = s$$

iki doğru olsun ve bu doğruların parametrik denklemleri bir noktada kesişsin.

$$\begin{array}{lllll} x = x_1 + at & x = x_2 + ps & & x_1 + at = x_2 + ps \\ y = y_1 + bt & y = y_2 + qs & \Rightarrow & y_1 + bt = y_2 + qs \\ z = z_1 + ct & z = z_2 + rs & & z_1 + ct = z_2 + rs \end{array}$$

lineer denklem sisteminin tek bir çözümü vardır.



ÖRNEK

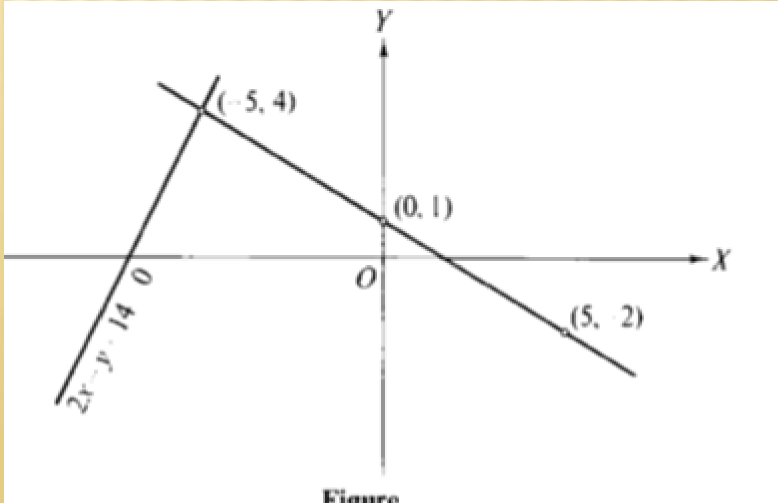
$2x - y + 14 = 0$ doğrusu ile $(0,1)$ ve $(5,-2)$ noktaları ile belirlenen doğrunun kesişim noktasını bulunuz.

$(0,1)$ ve $(5,-2)$ noktaları ile belirlenen doğrunun

eğimi $-\frac{3}{5}$ 'tir. Buradan; doğrunun denklemi:

$y - 1 = -\frac{3}{5}(x - 0)$ ya da $3x + 5y - 5 = 0$ 'dır.

Bu denklem ile $2x - y + 14 = 0$ denkleminin eş zamanlı çözümü ile elde edilen $(-5,4)$ noktası bu iki doğrunun kesişim noktasıdır.



Figure

İKİ DOĞRU ARASINDAKİ AÇI

Eğimleri m_1 ve m_2 olan iki doğru arasındaki ϕ açısını bulmak istiyoruz.

Eğimleri m_1 ve m_2 olan orijinden geçen doğruları düşünürsek;

$\tan\psi_1 = m_1$ ve $\tan\psi_2 = m_2$ 'dir.

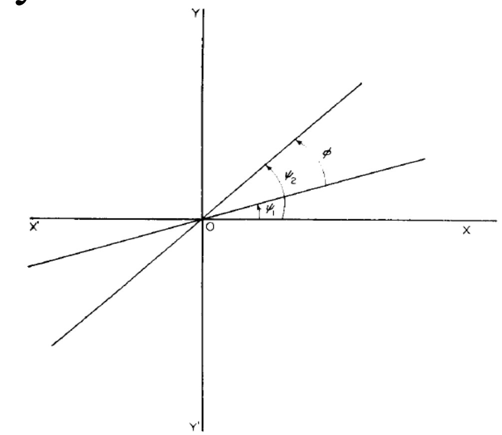


Fig. 12

Buradan

$$\tan\phi = \tan(\psi_2 - \psi_1) = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_2 \tan\psi_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

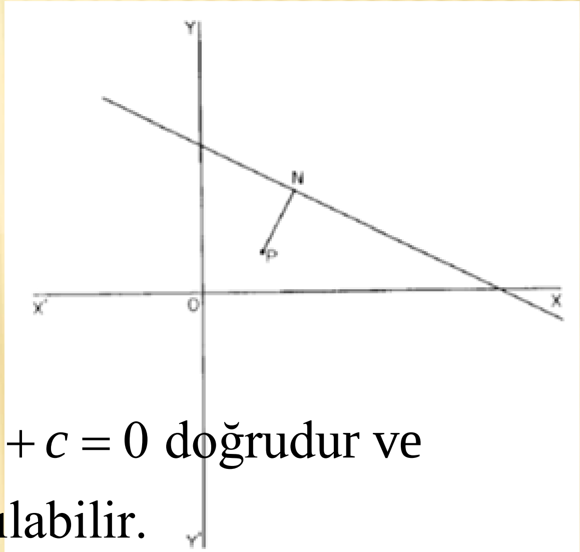
elde edilir. Bu formül ψ_2 'nin ψ_1 'den daha büyük veya daha küçük oluşuna göre iki doğru arasındaki sırasıyla dar veya geniş açıyı bulur.

İki doğru ancak ve ancak $\phi = \frac{1}{2}\pi$ olduğunda birbirine dik olur.

Yani, $\tan\phi$ sonsuzdur yani, $1 + m_1 m_2 = 0$ 'dır. Buradan, birbirine dik doğruların eğimlerinin çarpımının -1 olduğu sonucuna varırız.

BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA OLAN UZAKLIĞI

Bir $P(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan $d = PN$ dik uzaklığını hesaplamaya çalışalım.



PN doğrusunun denklemi

$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$ 'dır.

N 'nin koordinatları (α, β) olsun. Bu durumda

$b(\alpha - x_1) - a(\beta - y_1) = 0$ elde edilir.

N $ax + by + c = 0$ doğrusu üzerinde olduğundan $a\alpha + b\beta + c = 0$ doğrudur ve

$a(\alpha - x_1) + b(\beta - y_1) = -(ax_1 + by_1 + c)$ biçiminde de yazılabilir.

Bu denklemler

$(a^2 + b^2)[(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2] = (ax_1 + by_1 + c)^2$ biçiminde düzenlenirse;

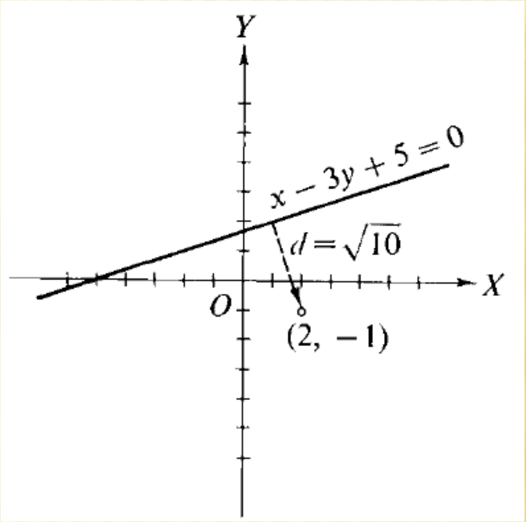
$$d = \pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

sonucuna ulaşılır.

ÖRNEK

$x-3y+5=0$ doğrusunun $(2,-1)$ noktasına olan yönlü uzaklığını bulunuz.

Sonucun işaretinin anlamını yorumlayınız.



Denklemi normal formda yazacak olursak;

$$-\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$$

Buradan,

$$d=-\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{3(-1)}{\sqrt{10}}-\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{-10}{\sqrt{10}}=-\sqrt{10}$$

elde edilir. Negatif işaret orijin ve $(2,-1)$ noktasının $x-3y+5=0$ doğrusunun aynı tarafında kaldığına işaret eder.

İKİ DOĞRU ARASINDAKİ AÇININ AÇIORTAYI

İki doğru arasındaki açının iç veya dış açıortayları üzerindeki herhangi bir noktanın doğrulara olan dik uzaklıkları birbirine sayısal olarak eşittir. Bu yüzden,

$u_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ve $u_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ doğruları arasındaki açının açıortaylarının denklemleri

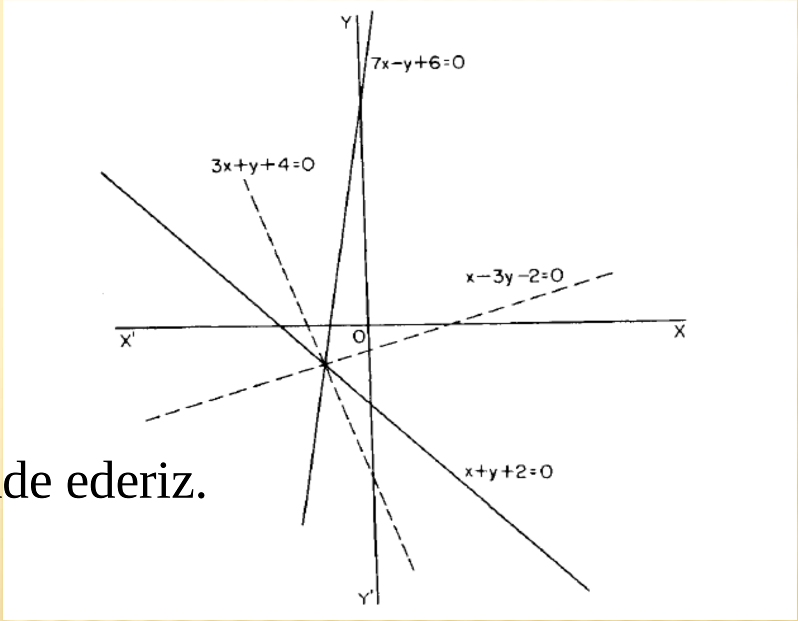
$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

biçimindedir.

Pozitif işaretin her zaman iç açıortayı temsil etmediğine dikkat edilmelidir. Doğrusu, $c_1 c_2$ pozitif ise $u_1 = 0$ ve $u_2 = 0$ 'ın orijine dik uzaklıkları aynı işaretlidir ve bu yüzden pozitif işaret orijini içeren açının açıortayını belirtir. Eğer $c_1 c_2$ negatifse benzer olarak negarif işaretin orijinden geçen açının açıortayını belirttiği görülür.

ÖRNEK

$7x - y + 6 = 0$ ve $x + y + 2 = 0$ doğruları arasındaki açının açıortaylarını elde ediniz.



Her iki açıortay

$$\frac{7x - y + 6}{\sqrt{49+1}} = \pm \frac{x + y + 2}{\sqrt{1+1}}$$

biçiminde verilir.

Burada, $7x - y + 6 = \pm 5(x + y + 2)$ olur ve

$x - 3y - 2 = 0$ ve $3x + y + 4 = 0$ denklemlerini elde ederiz.

İlk denklem geniş açılı açıortayı vermektedir.

DOĞRU AİLELERİ (İKİ DOĞRUNUN KESİŞİMİNDEN)

$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$

birbirine paralel olmayan doğrular olsun. k keyfi bir sabit, yani parametre olmak üzere

$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$

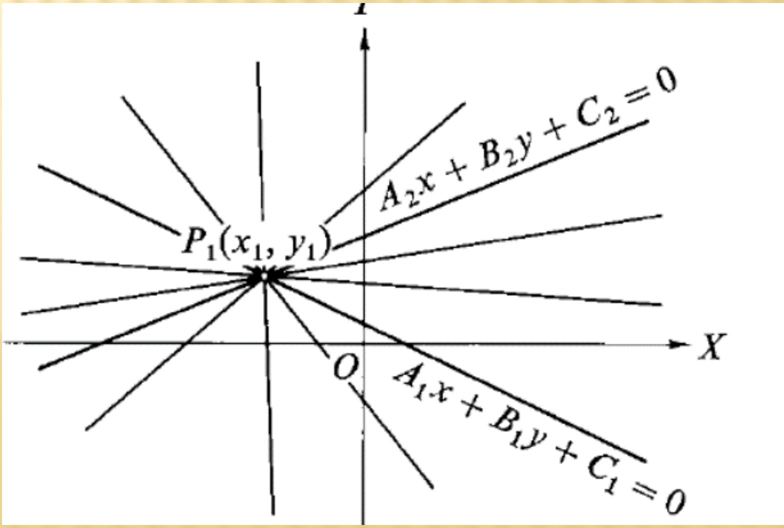
denklemini düşünelim. Bu bir doğrunun denklemidir, çünkü k 'nin herhangi bir değeri için bu, x ve y 'ye göre birinci dereceden bir denklemdir.

Daha da fazlası, k parametresi içerdiği için bir doğru ailesinin denklemidir.

Aile,

$k(A_1x + B_1y + C_1) + (A_2x + B_2y + C_2) = 0$

biçiminde de yazılabilirdi.



ÖRNEK

$2x-3y+4=0$ ve $x+y=3$ doğrularının kesişiminden ve $(-2,3)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

İki doğrunun kesişiminden geçen doğru ailesinin denklemi:
$(2x-3y+4)+k(x+y-3)=0$ 'dır.
Bu aileden $(-2,3)$ noktasından geçen doğruyu bulmak için
$(2(-2)-3(3)+4)+k(-2+3-3)=0 \Rightarrow 9-2k=0 \Rightarrow k=-{}^{9}\!/_{2}$
elde edilir. Buradan bu doğrunun denklemi:

$$(2x-3y+4)-\frac{9}{2}(x+y-3)=0 \Rightarrow x+3y-7=0$$

bulunur.

ÖRNEK

$x+2y-3=0$ ve $4x-y+7=0$ doğrularının kesişiminden geçen ve $5x+4y-20=0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Bu iki doğrunun kesişiminden geçen doğru ailesinin denklemi:

$(x+2y-3)+k(4x-y+7)=0$ 'dır.

Bu doğru ailesi denklemini

$(1+4k)x+(2-k)y+(-3+7k)=0$

biçiminde yazarsak bu ailenin herhangi bir doğrusunun eğimi:

$$m=\frac{1+4k}{k-2}$$

olur. Eğer bu aileden bir doğru $5x+4y-20=0$ doğrusuna paralelse

$$-\frac{5}{4}=\frac{1+4k}{k-2}$$

sağlanmalıdır. Buradan $k={}^{2}\!/_{7}$ 'dir. Bundan dolayı, bu doğrunun denklemi:

$$(x+2y-3)+\frac{2}{7}(4x-y+7)=0 \Rightarrow 15x+12y-7=0$$ 'dır.