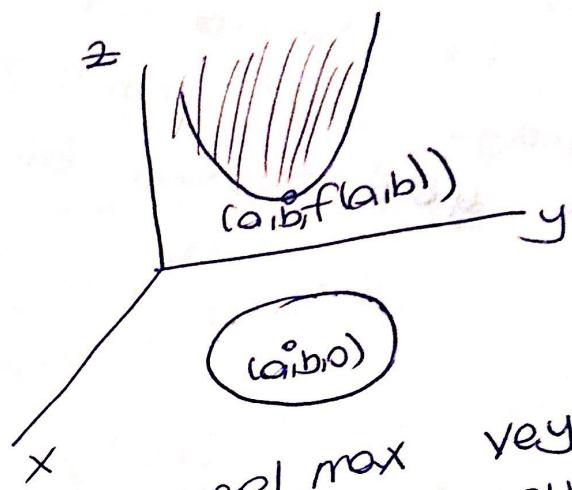
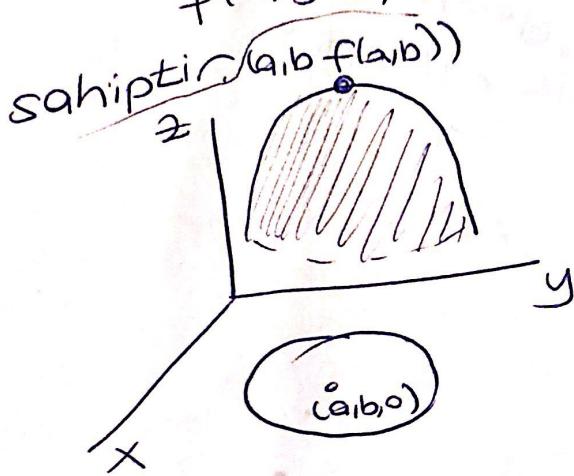


Kısmi Türevlerin Uygulamaları:

Ekstronum Degreri:

$f(x,y)$, \mathbb{R}^2 de toplu bir fonksiyon, $(a,b) \in D$ olsun, Eger (a,b) nin uygun bir konvexitetindeki tüm (x,y) ler için

$f(x,y) \leq f(a,b)$ ise $f(x,y)$, (a,b) 'de yerel maksimum'a
 $f(x,y) \geq f(a,b)$ ise $f(x,y)$, (a,b) 'de yerel minimum'a



Eger $f(x,y)$ bir nokta bir noktada $f(x,y)$ nin \circ noktası sahip ise $f(x,y)$ nin \circ noktası $f(x,y)$ nin \circ noktası $f(x,y)$ nin \circ noktası $f(x,y)$ bir ekstronuma sahip olduguunu söylez.

Tanım: Bir $f(x,y)$ fonks. toplu kumesindeki bir (a,b) noktasının asağıdakilerden birini sağlıyorsa (a,b) bir kritik noktasıdır.

$$\Rightarrow f_x(a,b) = 0 \text{ ve } f_y(a,b) = 0$$

Eger noktası : $f(x,y)$ bir (a,b) kritik noktası $f(x,y)$ bir (a,b) degilse, bu noktası $f(x,y)$ bir ekstronuma sahip deildir.

Eger (sonra) noktası deildir.

→ Bir (a, b) kritik noktası ve yetenice
küçük her h, k sayısı için
 $\rightarrow f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0 \Rightarrow f'(a, b)$ de yeel minimum
 $\rightarrow f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0 \Rightarrow f'(a, b)$ de yeel maksimum
 olmaktadır.

Örn
 $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonun
 kritik noktolarını
 bulup sınırların.
 $f_x = 2x \quad f_y = 2y$
 $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases} \quad x = y = 0$
 $(0, 0)$ kritik noktası.

$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = h^2 + k^2 \geq 0$
 $(0, 0)$ yeel minimum noktası.

Örn
 $f(x, y) = (x+y)^2 + y^4$ oynasını?

$f_x = 2x+2y = 0 \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$
 $f_y = 2x+2y+4y^3 = 0 \quad (0, 0)$ kritikn.

$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = (h+k)^2 + k^4 \geq 0$
 $(0, 0)$ yeel min nok.

Örn
 $f(x, y) = x^2 - y^2$

$\begin{cases} f_x = 2x \\ f_y = 2y \end{cases} \quad x = y = 0$
 $(0, 0)$. kritikn.

$f(0+h, 0+k) - f(0, 0) = h^2 - k^2$
 $h^2 - k^2 \geq 0$ yada ≤ 0

olabilir
 $(0, 0)$ eyer noktası.

(3)

2. Türev. Testi:

$f(x,y)$ nin (a,b) noktasında bir kritik noktası sahip olduğunu kabul edelim. ($f_x(a,b)=0, f_y(a,b)=0$) Ayrıca $f(x,y)$ nin 1. ve 2. mertebe türevleri bu noktasında sürekli olsun.

$$A = f_{xx}(a,b), B = f_{xy}(a,b), C = f_{yy}(a,b)$$

$$\Delta = B^2 - A \cdot C \text{ olmak üzere}$$

- a) $\Delta < 0$ ve $A > 0$, $f, (a,b)$ de yerel minimum sahip
 b) $\Delta < 0$ ve $A < 0$, $f, (a,b)$ de yerel maximum sahip
 c) $\Delta > 0$ ise $f'(a,b)$ de bir eyer noktası
 d) $\Delta = 0$ ise test cevap vermez. $f(a,b)$ de bir \max / \min değeri veya eyer noktası olabilir.

Örn
 $f(x,y) = 3x^2 - 2y^3 + 6y^2 + 6x$ fonksiyonun kritik noktalarını bulun.

$$f_x(x,y) = 6x + 6y \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$f_y(x,y) = -6y^2 + 12y + 6x \Rightarrow -y^2 + 2y + x = 0$$

$$y^2 - y = 0$$

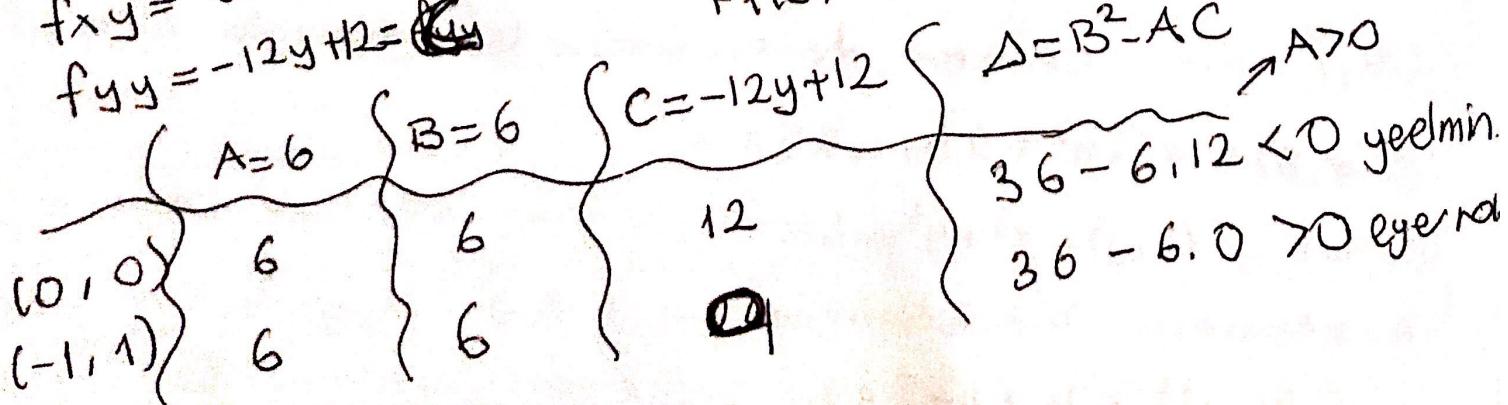
$$y(y-1) = 0$$

$$P_1(0,0) \quad P_2(-1,1)$$

$$f_{xx} = 6 = A$$

$$f_{xy} = 6 = B$$

$$f_{yy} = -12y + 12 = C$$



~~8)~~ $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ fark. kritik nok. bulun

ve sınıflandırın.

$$f_x = 6x^2 - 6y = 0$$

$$f_y = -6x + 6y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$P_1(0,0), P_2(1,1)$$

$$A = f_{xx} = 12x$$

$$B = f_{xy} = -6$$

$$C = 6$$

	$A = 12x$	$B = -6$	$C = 6$	$\Delta = B^2 - AC$
$(0,0)$	0	-6	6	$36 - 0 = 36 > 0$ $(0,0)$ yeerndk.
$(1,1)$	12	-6	6	$36 - 12 \cdot 6 < 0$ $A = 12 > 0$ $(1,1)$ yeelmin

~~9)~~ $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$f_x = 2x \Rightarrow 2x = 0 \quad x = 0 \quad (0,0) \text{ K.N}$$

$$f_y = 2y \Rightarrow 2y = 0 \quad y = 0$$

$$f_{xx} = 2 = A, \quad B = f_{xy} = 0 \quad C = f_{yy} = 2$$

$$B^2 - AC = 0 - 4 < 0 \quad A > 0 \quad (0,0) \text{ yeel min.}$$

6. örn

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 3xy^2 - 3y^2$$

$$f_x = 3x^2 - 6x + 3y^2 = 0 \quad ①$$

$$f_y = 6xy - 6y = 0 \Rightarrow 6y(x-1) = 0, x=1, y=0$$

$$x=1 \xrightarrow{①} y^2 = 1 \rightarrow (1,1), (1,-1)$$

$$y=0 \xrightarrow{①} 3x^2 - 6x = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$$

(0,0) (2,0)
K.N

$$A = f_{xx} = 6x - 6$$

$$B = f_{xy} = 6y$$

$$C = f_{yy} = 6x - 6$$

		$A = 6x - 6$	$B = 6y$	$C = 6x - 6$	$\Delta = B^2 - AC$
(0,0)	-6	0	0	-6	$0 - 36 < 0, A - 6 < 0$ yeel max
(1,1)	0	6	0	0	$36 > 0$ eyen nok.
(1,-1)	0	-6	0	0	$36 > 0$ eyen nok.
(2,0)	16	0	16	-6	$-36 < 0, A = 6 > 0$ yeel m.

örn

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 ; \text{in } (0,0) \text{ noktası 2 kstronumda girer}$$

$$f_x = 2x + 2y = 0 \quad \} \quad x = -y$$

$$f_y = 2y + 2x = 0 \quad \}$$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 2 \quad f_{yy} = 2$$

$$B^2 - AC = 4 - 4 = 0 \quad \text{bu test sonucunu vermez!}$$

$$f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0 = f(0,0)$$

(0,0) noktasında yeel min'ı
sahiptir.

6

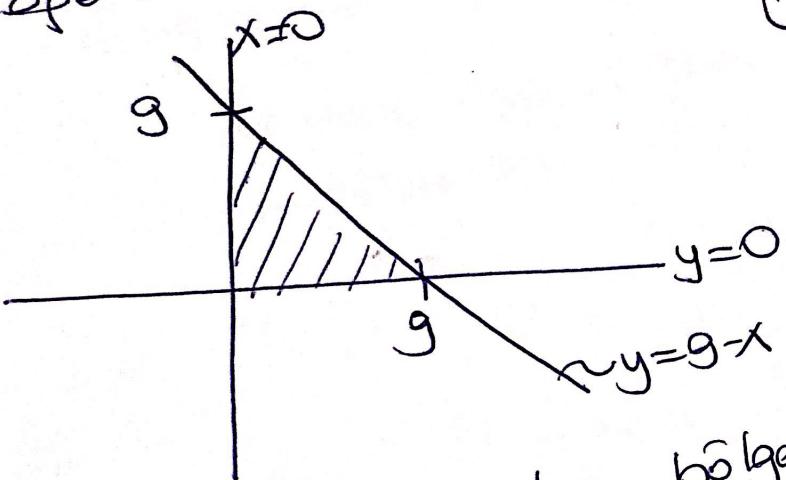
Sınırlı Bölgede Mutlak Max ve Min.

$f(x,y)$ fonksiyonu kapalı ve sınırlı bir bölge de sürekli olmak üzere, bu fonksiyonun mutlak ekstronumeri iken

- ① Bölgenin eger kese koordinatları verse buna göre yerel max veya min noktasıdır.
 - ② Kritik noktaların kapalı bölgenin içinde olmaları yerel max veya min noktasıdır.
 - ③ Sınırlıda fonksiyonun ekstronumeri bulunur. (Kritik noktası)
 - ④ Bulunan değerlerden en büyük ve en mutlak mark. ve min dir.
- kijken

dik sistemine geçiliyor. Geçiş formüllerini elde ediniz.

$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ fonksiyonunun $x=0$,
 $y=0$ ve $y=9-x$ doğruları tarafından sınırlanan
 üçgensel bölge için ağırlıkcentri mutlak max/min
 değerini bulun.



① Köşe noktaları
 mutlak max/min
 adayıdır.

$$(0,9) (9,0) (0,0)$$

② Kritik noktelerden bölgein içe dislik olaydır.
 $f_x = 2 - 2x = 0 \quad (1,1)$
 $f_y = 2 - 2y = 0$

③ Kapalı bölgein sınırlarında max-min değer
 olabilir.

$$x=0 \Rightarrow f(0,y) = g(y) = 2 + 2y - y^2$$

$$g'(y) = 2 - 2y = 0 \Rightarrow y=1$$

$$y=0 \Rightarrow f(x,0) = g(x) = 2 + 2x - x^2$$

$$g'(x) = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x=1$$

$$y=9-x \Rightarrow f(x,9-x) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2$$

$$= -61 + 18x - 2x^2 = g(x)$$

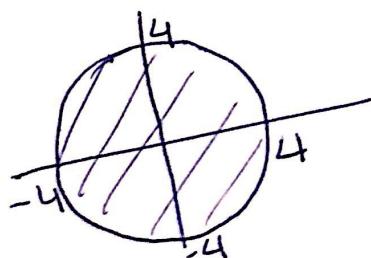
$$g'(x) = 18 - 4x = 0$$

$$x = \frac{9}{2}, y = \frac{9}{2}$$

$$(g_{1/2}, g_{1/2})$$

(8) $(0,0), (0,9), (9,0), (1,1), (0,1), (1,0), \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$
 $f(0,0)=2, f(0,9)=-61, f(9,0)=-61, f(1,1)=4$
 $f(0,1)=3, f(1,0)=3, f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$
 Mutlak max dēpēi 4 $(1,1)$ nok.
 Mutlak min " -61 dir
 $(9,0), (0,9)$ nok.

Örn
 $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 6y$ fonksiyonun $x^2 + y^2 \leq 16$
 Gen bei taraflardan sınırlanan bölge için
 alabileceğimizde mutlak max ve min dēpēelerini
 bulun.



① Kritik noktaların bölgelerin içine düşenler adaydır.
 $f_x = 4x = 0 \quad x=0$
 $f_y = -2y + b = 0 \quad y=3$
 $\boxed{(0,3)}$ ~ bölgein içine
 $f(0,3) = 9$

$$\begin{aligned} ② f(16-y^2, y) &= g(y) = 2(16-y^2) - y^2 + 6y \\ &= 32 - 3y^2 + 6y \end{aligned}$$

$$g'(y) = -6y + 6 = 0 \quad (-4 \leq y \leq 4)$$

$y=1, x=\pm\sqrt{15}$

kritik nok:
 $g(1) = 35$

\sinir noktalarında

$$\begin{cases} g(-4) = -40 \\ g(4) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-4, x=0 \\ y=4, x=0 \end{cases}$$

$$\boxed{(0,-4)} \quad \boxed{(0,4)}$$

(9) Değerler konsolentil arşinde $(0, -4)$ 'da mutlak minimum değeri -40 , $(-\sqrt{15}, 1)$ $(\sqrt{15}, 1)$ ian mutlak maksimum " 35 olağ bulunur.