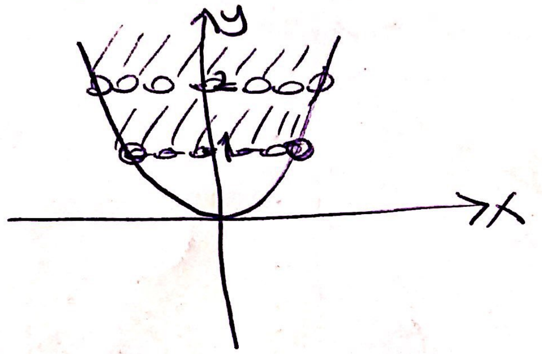
① $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(y-1)}$ fonksiyonun tanım kümesini belirleyin ve şeklini çizin.

$\sqrt{y-x^2}$: $y-x^2 \geqslant 0 \Rightarrow y \geqslant x^2$

$\ln(y-1)$: $y-1>0 \Rightarrow y>1$

$\dfrac{1}{\ln(y-1)}$: $\ln(y-1) \neq 0 \Rightarrow y-1 \neq 1 \Rightarrow y \neq 2$

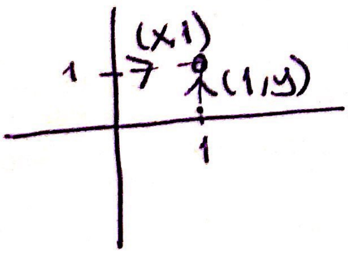


② $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \dfrac{x+y-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2-y}} = ?$

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \frac{\cancel{(x+y-2)}(\sqrt{x}-\sqrt{2-y})}{\underbrace{(\sqrt{x}+\sqrt{2-y})(\sqrt{x}-\sqrt{2-y})}_{\cancel{(x-(2-y))}}}$$

$= 0 //$

③ $f(x,y)=\dfrac{x\cos\frac{\pi}{2}y}{x+y-2}$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasındaki limitinin varlığını inceleyin.



$f(1,y)=\dfrac{1.\cos(\pi/2y)}{1+y-2}=\dfrac{\cos(\pi/2 \cdot y)}{1+y-2}$

$\lim\limits_{y\to1} f(1,y) = \lim\limits_{y\to1}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}y)}{1+y-2} = \lim\limits_{y\to1} -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{0}{0}\right)^B$

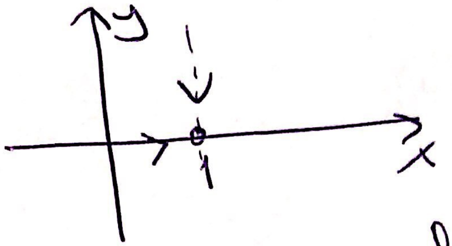
$= -\dfrac{\pi}{2}$

$f(x,1)=\dfrac{x\cos\pi/2}{x-1}=0$

$\lim\limits_{x\to1} f(x,1)=\lim\limits_{x\to1} 0 = 0$

$\neq$ yoktur

④ $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x+3y-1)}{x+y-1}$$
limitininin mevcut olmadığını gösterin



$$f(x,0) = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x,0) = \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$$

yada

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$f(1,y) = \frac{\sin 3y}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} f(1,y) = \lim_{y \to 0} \frac{\sin 3y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin 3y}{3y} \cdot 3$$

$$= 3$$

$1 \neq 3$ limit yok!

⑤ $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonun orijin hariç her yerde sürekli olduğunu gösterin.

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ ∄ limitinin olmadığını ~~olmadığını~~ göstermeliyiz.
($f(0,0)$ değeri tanımlı olmadığı için)

$y = mx$ boyunca yaklaşalım

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (y=mx \text{ boyunca})}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2}$$

sonuç m e bağlı olduğundan limit yoktur.

(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^4}=0$ olduğunu gösterin (δ-ε ile)

$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken

$\left|\dfrac{x^3y}{x^2+y^4}-0\right|<\varepsilon$ o.ε $\delta=\delta(\varepsilon)$ arıyoruz.

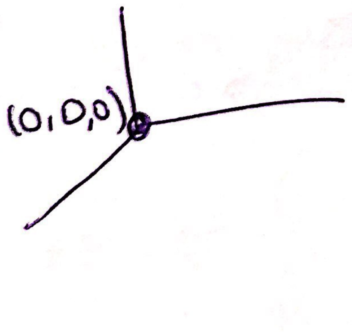
$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^4}\right| = |y|\left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| \le |y|\frac{|x^3|}{x^2}$$
$$=|y||x|$$

$|x|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta$
aynı şekilde
$|y|<\delta$

$\delta^2=\varepsilon$
$\delta=\sqrt{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$
olduğundan
limit doğrudur.

(7) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{y^2+3xz^2}{x^2+2y^2+z^4}$

$x=y=z=t$ boyunca yaklaşalım



$$\lim_{t\to0}\frac{t^2+3t.t^2}{t^2+2t^2+t^4}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1+3t}{3+t^2}=\frac{1}{3}$$

(8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2)=?$

$$\lim_{r\to0^+} r\sin\theta \ln r^2 = \lim_{r\to0^+}\frac{2\sin\theta \ln r}{1/r}$$

$$=2\sin\theta\lim_{r\to0^+}\frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}}=0$$

(9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+3y^4}$ limitinin olmadığını gösteriniz

$y=x$ boyunca:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 . x}{x^4+3x^4} = \frac{1}{4}$, $(x,0)$ boyunca:

$f(x,0) = \frac{x^3 . 0}{x^4+3.0^4} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$

$\neq$ limit yok.

(10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ olmadığını gösterin.

$y=x$ boyunca

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 . x}{x^6+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4+1} = 0$

$y=x^3$ boyunca

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 . x^3}{x^6+x^6} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$

$\neq$ limit yok

(11) $f(x,y) = \begin{cases} e^{3x+1} \frac{\sin(x^2+5y^2)}{x^2+5y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ e, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

fonksiyonun $(0,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyin.

1) $f(0,0)=e$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{3x+1} , \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+5y^2)}{x^2+5y^2}$

$= e . \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = e.1 = e$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = e$ olduğundan $(0,0)$ da süreklidir.

(12) $z = x^2 + y^2 \Rightarrow z_x(1,1)$ kısmi ve $z_x(0,0)$ kısmi türevleri tanımdan hesaplayın

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\rightarrow f_x(1,1) = z_x(1,1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 + \cancel{1} - \cancel{1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2+2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h+2 = 2$$

$$\rightarrow f_x(0,0) = z_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} h = 0$$

(13) Aşağıdaki şıklarda f_x ve f_y hesaplayın

a) $f(x,y) = (xy-1)^2 \Rightarrow f_x = 2(xy-1).y$, $f_y = 2(xy-1).x$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y) = \frac{x+y}{xy-1} \Rightarrow f_x = \frac{(xy-1) - (x+y).y}{(xy-1)^2}$

$f_y = \frac{(xy-1) - (x+y).x}{(xy-1)^2}$

d) $f(x,y) = \ln(x+y) \Rightarrow f_x = \frac{1}{x+y}$, $f_y = \frac{1}{x+y}$

e) $f(x,y) = x^y \Rightarrow f_x = y.x^{y-1}$, $f_y = 1.x^y.\ln x$

f) $f(x,y) = \log_y x \Rightarrow f_x = \frac{1}{x} \log_y e$

$f(x,y) = \frac{\log x}{\log y} \Rightarrow f_y = -\frac{\frac{1}{y}.\ln x}{(\ldots)^2}$

9) $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \quad (|xy| < 1)$

$f(x,y) = 1 + xy + x^2y^2 + \dots + x^n y^n$

$f_x(x,y) = 0 + y + 2y^2x + \dots + nx^{n-1}y^n = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n x^{n-1}$

$f_y(x,y) = 0 + x + 2x^2y + \dots + nx^n y^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n y^{n-1}$

(14) $w(p, v, \delta, \vartheta, g) = pv + \frac{v\delta\vartheta^2}{2g}$

$w_p, w_v, w_\delta, w_\vartheta, w_g = ?$

$w_p = v \qquad w_g = -\frac{v\delta\vartheta^2}{2g^2}$

$w_v = p + \frac{\delta\vartheta^2}{2g}$

$w_\delta = \frac{v\vartheta^2}{2g}$

$w_\vartheta = \frac{2v\delta\vartheta}{2g}$

(15) $f(x,y) = 1 - x + y - 3x^2y$, $f_x(1,2)$ ve $f_y(1,2)$ kısmi türevlerini limit tanımından bulun

$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0+h), y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$

$f_x(1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,2) - f(1,2)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1-(1+h)+2-3(1+h)^2.2 - (\cancel{1}-\cancel{1}+2-3.1.2)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{-6h^2-13h}{h} = \lim_{h \to 0} -6h-13 = -13$

$f_y(1,2) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$

$= \lim_{k \to 0} \frac{1-1+(2+k)-3.1(2+k)-(1-1+2-3.1.2)}{k}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h-4+4}{h} = \lim_{h \to 0} -2 = -2$

16) Sandwich yöntemini kullanarak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$ limitini bulun.

$\left(\cos u = 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\dots\right.$ seri açılımını kullanın$\left.\right)$

$\sqrt{|xy|}=u$ diyelim.

$$\cos u = 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\dots$$

$$1-\frac{u^2}{2!} < \cos u < 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}$$

$$1-\frac{|xy|}{2!} < \cos\sqrt{|xy|} < 1-\frac{|xy|}{2!}+\frac{x^2y^2}{4!}$$

$$4-2|xy| < 4\cos\sqrt{|xy|} < 4-2|xy|+\frac{x^2y^2}{6}$$

$$2|xy|-\frac{x^2y^2}{6} < 4-4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

$$2-\frac{|xy|}{6} < \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < 2$$

limite geçilirse

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(2-\frac{|xy|}{6}\right)}_{2} < \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} < \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2}_{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|} = 2$$

17) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ diferansiyellenebilir olmadığını $(0,0)$ da inceleyin.

$f(a+h,b+k)=f(a,b)+hf_x(a,b)+kf_y(a,b)$
$+r(h,k,a,b)\sqrt{h^2+k^2}$

$k,h\to 0$ iken $r\overset{?}{\to}0$

$f(h,k)=f(0,0)+h\,f_x(0,0)+kf_y(0,0)$
$+r(0,0,h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ $(*)$

$\to f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$

$\to f(0,0)=0$

$(*)$ de
$\sqrt{|hk|}=0+h.0+k.0+r(0,0,h,k)\sqrt{h^2+k^2}$

$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{xy}, & xy\geq 0\\ \sqrt{-xy} & xy<0\end{cases}$

$\to h.k\geq 0$ için

$\sqrt{hk}=r.\sqrt{h^2+k^2}$

$r(h,k)=\dfrac{\sqrt{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}}\Rightarrow\lim\limits_{h,k\to 0}\sqrt{\dfrac{hk}{h^2+k^2}}$

$h=mk$ için
$\lim\limits_{k\to 0}\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}\cdot\dfrac{k}{k}}$
$=\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}$

$hk\geq 0$ için limit yok diferansiyellenemez.

$\to hk<0$ için

$\sqrt{-hk}=r\sqrt{h^2+k^2}$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{-hk}}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$h=mk$ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\cancel{k}}{\cancel{k}}\sqrt{\dfrac{-m}{m^2+1}}=\sqrt{\dfrac{-m}{m^2+1}}$

$hk<0$ için de diferansiyellenemez.

Ödev

→ $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x} = ?$$

→ $z = x^2 + y^2 = f(x,y)$

$f_x(1,1)$ ve $f_x(0,0)$

limit teriminden bulun.

→ $$\sqrt{2.(2,2)^2 + e^{2\cdot(-0,2)}} = ?$$

→ $$f(x,y) = \begin{cases} 0 , & xy \neq 0 \\ 1 , & xy = 0 \end{cases}$$

a) f'in orijinde sürekli olmadığını gösterin

b) f_x ve f_y orijinde var olduğunu gösterin.