1

DOĞRULTU TÜREVİ

1. Mertebeden $f_x(a,b)$ ve $f_y(a,b)$ kısmi türevleri $f(x,y)$'nin (a,b)'de pozitif x ve y yönündeki değişim oranını verir. Fakat bu noktada bir çok doğrultu vardır. f fonksiyonunun herhangi bir doğrultudaki değişim oranı DOĞRULTU TÜREVİ olarak adlandırılır. Bunun için daha çok BİRİM VEKTÖRÜ kullanırız.

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ bir birim vektör olsun. $\vec{u}$ birim vektörü f in tanım kümesindeki (a,b) noktasından geçen bir L doğrusunu belirler. L yi içeren dikey bir düzlem f in grafiğini C eğrisinde kessin. Bu eğrinin tepetinin $(a,b,f(a,b))$ deki eğimi $D_{\vec{u}} f(a,b)$ dir.

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}}$$

şeklinde tanımlanır.

Örn

yönlü (doğrultu) türev tanımı ile $P_0(1,2)$ noktasında $\vec{u} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$ vektörü $f(x,y) = x^2 + y.x$ fonksiyonunun yönündeki türevini bulun

$$D_{\vec{u}} f|_{P_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}, 2+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h/\sqrt{2})^2 + (2+h/\sqrt{2})(1+h/\sqrt{2}) - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}h + h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + h\right) = 5/\sqrt{2}$$

2

Tanım (Gradyent Vektör)

$f(x,y)$ fonksiyonunun gradyent vektörü

$$\boxed{\text{Grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}}$$

$\nabla \rightarrow$ nabla operatörü

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}$$

TEOREM: Eğer $f(x,y)$, $P_0(a,b)$'i içeren bir bölgede türevlenebilir ve $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ birim vektör ise o zaman f in $P_0(a,b)$ de $\vec{u}$ yönündeki doğrultu (yönlü) türevi

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{u}\,\nabla f(a,b)}$$ dir.

Not: Bir vektörü ($\vec{v}$), birim vektöre çevirmek için bu vektörü $\|\vec{v}\|$'e böleriz

$\vec{v}$ herhangi bir vektör

$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \vec{v}$ ile aynı yönde birim vektör

$$\boxed{D_{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}} f(a,b) = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\nabla f(a,b)}$$

Örn

$f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ nin $(0,1)$ noktasında yönündeki türevleri bulun

a) $i+2j$ b) $\vec{j}-2\vec{i}$ c) $3\vec{i}$ d) $i+j$

a) $\vec{u} = \frac{v}{\|\vec{v}\|} = \frac{i+2j}{\sqrt{5}}$

$D_u f(0,1) = \vec{u}\,\nabla f(0,1) = \frac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{5}}(2\vec{i}+4\vec{j})$

$= \frac{2.1+2.4}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$

$= 2\sqrt{5}$

$\nabla f(x,y) = f_x\vec{i} + f_y\vec{j}$

$= (2y^3+2xy^2)i + (4y^3+4xy^2+2x^2y)j$

$\nabla f|_{(0,1)} = 2i+4j$

3

b) $D_{\frac{-2i+j}{\sqrt{5}}} f(0,1) = 0$

$(-2i+j \perp \nabla f(0,1))$

c) 2

d) $3\sqrt{2}$

<u>Not:</u> $z=f(x,y)$ nin $D_{\vec{u}} f(a,b)$ de türevi:

1) $\vec{u}$ yönünde P_0 daki yönlü türev

2) " " " artış hızı

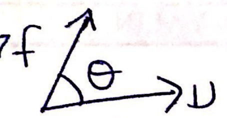
3) " " " azalış "

4) " " " değişim oranı anlamına gelir.

<u>Doğrultu Türevinin özellikleri</u>

$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \vec{u} = \underbrace{|\vec{u}|}_{1} . |\nabla f(a,b)| . \cos\theta$

$= |\nabla f(a,b)| . \cos\theta$



→ $\cos\theta = 1$ yani $\theta = 0$ olduğunda f fonksiyonu en hızlı şekilde artar. (en büyük yönlü türev değerine ulaşır.) $\vec{u}$ ile ∇f <u>aynı</u> yöndedir yani f en çok P_0 daki gradyent vektörü yönünde artar. Bu yöndeki türev

$D_u f = |\nabla f| . \cos\underset{\searrow 0}{\theta} = |\nabla f|$

→ Benzer şekilde f fonks. en fazla "$-\nabla f$" yönünde azalır $(\theta = \pi)$. Bu yöndeki türev

$D_u f = |\nabla f| . \cos\theta_{\searrow\pi} = -|\nabla f|$

→ $\nabla f \neq 0$ gradyentine dik olan herhangi bir $\vec{u}$ sıfır değişimin yönüdür. $\theta = \pi/2$ dir.

yönü

$D_u f = |\nabla f| \cos\frac{\pi}{2} = 0$

(4)

$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ nin aşağıdaki durumlarda yönünü bulun.

a) (1,1) de en çok artan

b) (1,1) de en çok azalan

c) (1,1) de f deki sıfır değişimin yönleri nedir?

$\nabla f(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$

$\nabla f(1,1)=\vec{i}+\vec{j}$

a) $\vec{u}=\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|}=\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$ → ∇f ile aynı yöndeki birim vektör

(fonksiyon (1,1) de ∇f in yönünde en hızlı artar)

b) $-\vec{u}=-\frac{i-j}{\sqrt{2}}$

(fonksiyon (1,1) de $-\nabla f$ in yönünde en hızlı azalır)

c) (1,1) de sıfır değişimin yönü ∇f e dik olan vektördür

$\vec{n}=\frac{-\vec{i}}{\sqrt{2}}+\frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$ ve $-\vec{n}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}-\frac{\vec{j}}{\sqrt{2}}$

$\mp n \perp \nabla f \Rightarrow \mp n \cdot \nabla f=0$

$\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}+\frac{j}{\sqrt{2}}\right)(i+j)=0$

ya da

$\left(\frac{i}{\sqrt{2}}-\frac{j}{\sqrt{2}}\right)(i+j)=0$

($\vec{n}$ ⇒ herhangi bir $\vec{u}$ yönü)

Teorem: $f(x,y)$ türevlenebilir fonksiyonun tanım kümesinin her (x_0,y_0) noktasında, f in gradyent vektörü ∇f, (x_0,y_0) da seviye eğrisine **normaldir**.

$f(x,y)$ fonksiyonu $\vec{r}=g(t)\vec{i}+h(t)\vec{j}$ eğrisi boyunca sabit değer alıyorsa

$f(g(t),h(t))=c$ dir

$$f_x\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{g'(t)}+f_y\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{h'(t)}=0$$

yada

$$\underbrace{(f_x\vec{i}+f_y\vec{j})}\,(g'(t)\vec{i}+h'(t)\vec{j})=0$$

$\nabla f\cdot\vec{r}'(t)=0$ → teğet vektör

→ normal vektör.

örn

$\frac{x^2}{4}+y^2=2$ elipsine $(-2,1)$ de teğet olan doğru denk?

$\frac{x^2}{4}+y^2=2$ elipsi

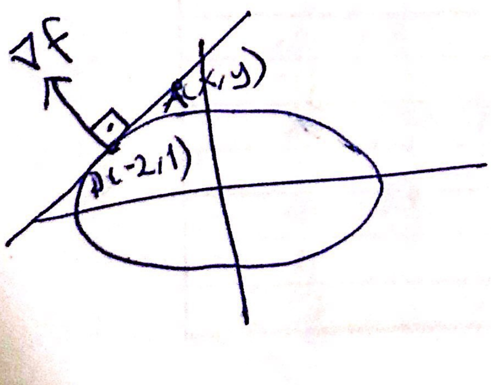
$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$ fonksiyonun seviye eğrisidir.

$$\nabla f(-2,1)=\frac{x}{2}\vec{i}+2y\vec{j}\Big|_{(-2,1)}=-\vec{i}+2\vec{j}$$

$\vec{\nabla} f\cdot\vec{AP}=0$

$(-1)(x+2)+2(y-1)=0$

$x-2y=-4$



6

Gradyentler için Cebirsel kurallar.

1. $\nabla(f \mp g) = \nabla f \mp \nabla g$
2. $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$
3. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
4. $\nabla(kf) = k\nabla f \quad k \in \mathbb{R}$
5. $\nabla f^n = n f^{n-1} \nabla f$

3 değişkenli fonksiyonlar için gradyent ve doğrultu türevi:

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ birim vektör ve $f(x,y,z)$ diferansiyellenebilir bir fonk ise

$$\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z k$$

ve

$$D_u f = \nabla f \vec{u} = f_x u_1 + f_y u_2 + f_z u_3 \text{ dir.}$$

Daha önce 2 değişkenli fonk. için belirttiğimiz kurallar 3 değişkenli fonk için geçerlidir.

Örn $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ nin $P_0(1,1,0)$ noktasında $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ yönündeki türevi bulunuz. P_0 da f en hızlı olarak hangi yönde değişir Bu yöndeki değişim oranı nedir?

$D_{v_1} f = \nabla f \cdot \vec{v_1} \Rightarrow \nabla f = (3x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j} - k$

$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2i - 2j - k$

$\vec{v}$ birim vektör değil $\Rightarrow v_1 = \frac{2i - 3j + 6k}{\sqrt{4+9+36}}$

(7)

$D_{v_1} f = \nabla f \cdot v_1$

$= 2\cdot\frac{2}{7} + 2\cdot\left(+\frac{3}{7}\right) - 1\cdot\frac{6}{7}$

$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$

Fonksiyon en hızlı olarak $\nabla f = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ yönünde artar ve $-\nabla f$ yönde azalır. Bu yönlerde değişim oranları
$|\nabla f| = 3$ $\quad -|\nabla f| = -3$ dür.

TEĞET DÜZLEM ve NORMAL DOĞRU

$f(x,y,z)=c$ fonksiyonu için

→ $\nabla f|_{P_0}$ vektörü, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen teğet düzleme diktir

→ $\nabla f|_{P_0}$ vektörü, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ dan geçen normal doğruya paraleldir.

$z=f(x,y)$ nin (a,b) de teğet düzlem denk:

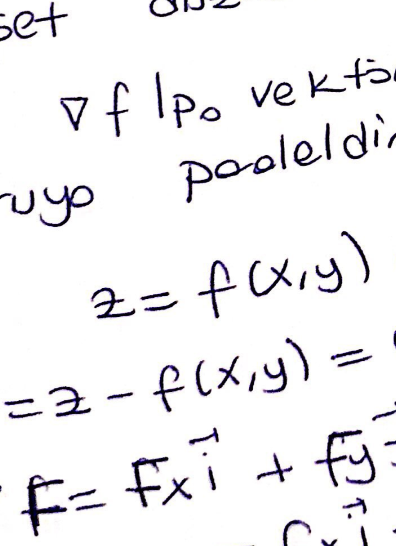
$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$

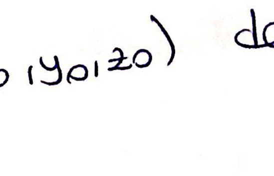
$\nabla F = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + 1\vec{k}$ bir

$= f_x\vec{i} + f_y\vec{j} - \vec{k}$

$= f_x(a,b)\vec{i} + f_y(a,b)\vec{j} - \vec{k} = \vec{n}$

$\nabla F|_{(a,b,f(a,b))}$





$\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$

$(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)\cdot(x-a, y-b, z-f(a,b$

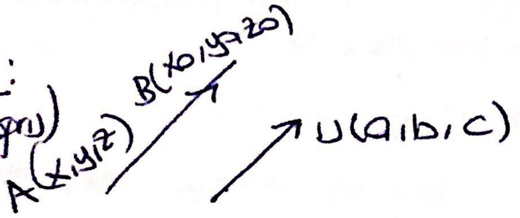
(8)

$P(a,b,f(a,b))$ den geçen <u>teğet düzlem</u> denk:

$$f_x(a,b)\cdot(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

Normal doğru denk:

Not: (Uzayda doğru)



Uzayda doğru denk;

$\vec{AB} \parallel \vec{u} \Rightarrow \vec{AB}=t\cdot\vec{u}$ vektörel denk.

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

standart denk.

yada

$$\left.\begin{aligned} x&=at+x_0\\ y&=bt+y_0\\ z&=ct+z_0\end{aligned}\right\}$$ parametrik denk

$\nabla f|_{P_0}$ vektörü $p(a,b,f(a,b))$ den geçen normal doğruya paralel olduğundan

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)}=\frac{y-b}{f_y(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}=t$$

$$\boxed{\frac{x-a}{f_x(a,b)}=\frac{y-b}{f_y(a,b)}=\frac{z-f(a,b)}{-1}=t}$$

normal doğru denk.

örn

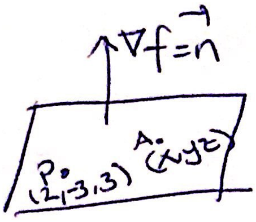
$x^2+y^2-z^2=4$ yüzeyininin $(2,-3,3)$ noktasındaki teğet düzlem ve normal doğru denk?

$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4=0$

$F_x=2x \quad F_y=2y \quad F_z=-2z$

$\nabla f|_{(2,-3,3)}=4\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}$ → Teğet düzleme dik ve normal doğruya paralel vektör.

9



$$\nabla f \cdot \vec{AP} = 0$$

$$(4\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k})\,(\underbrace{x-2,\ y+3,\ z-3}_{(x-2)i + (y+3)j + (z-3)k}) = 0$$

$$\boxed{T:\ 4(x-2) - 6(y+3) - 6(z-3) = 0 \quad \text{teğet düzlem denk}}$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-3}{-6} = t$$

$$x = 4t + 2$$
$$y = -6t - 3$$
$$z = -6t + 3$$

Normal doğru denk

Örn

$z = x\cos y - ye^x$, $(0,0,0)$ noktasındaki teğet düzlem denk nedir?

$$F(x,y,z) = z - x\cos y + ye^x$$

$$F_x = -\cos y + ye^x \qquad F_x\big|_{(0,0,0)} = -1$$

$$F_y = x\sin y + e^x \qquad F_y\big|_{(0,0,0)} = 1$$

$$F_z = 1$$

$$\nabla f = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow (-1)(x-0) + 1\cdot(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$-x + y + z = 0$$

10

$x^2yz - y + z - 7 = 0$ yüzeyinin $(1,2,3)$ noktasındaki normal doğru denklemini bulun.

$F(x,y,z) = x^2yz - y + z - 7$

$F_x = 2xyz$ $\quad F_x|_{(1,2,3)} = 12$

$F_y = x^2z - 1$ $\quad F_y|_{(1,2,3)} = 2$

$F_z = x^2y + 1$ $\quad F_z|_{(1,2,3)} = 3$

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = t$$

$x(t) = 12t + 1$

$y(t) = 2t + 2$

$z(t) = 3t + 3$

<u>örn</u>

$\ln(x+y+z) = 2$, $P(-1, e^2, 1)$ de teğet düzlem ve normal denk?

$F(x,y,z) = \ln(x+y+z) - 2 = 0$

$F_x = \frac{1}{(x+y+z)}$ $\quad F_y = \frac{1}{x+y+z}$ $\quad F_z = \frac{1}{x+y+z}$

$$F_x|_p = \frac{1}{-1+e^2+1} = \frac{1}{e^2} = F_y|_p = F_z|_p$$

$$T: \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right) \cdot (x+1, y-e^2, z-1) = 0$$

$$\frac{x+1}{e^2} + \frac{y-e^2}{e^2} + \frac{z-1}{e^2} = 0$$

$T: \quad x + y + z = e^2$

$$n: \quad \frac{x+1}{e^2} = \frac{y-e^2}{e^2} = \frac{z-1}{e^2} = t$$

$x = t - 1$

$y = t + e^2$

$z = t + 1$

(11)

Örn

g türevlenebilir bir fonk ve $g(0)=2$ olmak üzere, $z = xy \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$ yüzeyine $P(1,0,0)$ noktasında teğet olan düzlem denk?

$F = z - xy \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

$F_x = -\left(y\, g\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot \frac{-1}{x^2}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

$F_y = -\left(x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) + xy \cdot \frac{1}{x}\, g'\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

$F_x|_p = -\left(0 \cdot g(0) + (-0 \cdot g'(0)\right) = 0$

$F_y|_p = -(1 \cdot g(0) + 0 \cdot g'(0)) = -2$

$F_z = 1$

$\nabla F|_p = -2\vec{j} + \vec{k}$

$(x-1,\ y,\ z)\ (0,-2,1) = 0$

$0 \cdot (x-1) - 2y + z = 0$

$T: \boxed{2y = z}$