

1. $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin artan olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

olduğundan (a_n) artandır.

2. $\left(\frac{3n-1}{2n-7}\right)$ dizisinin monoton (artan veya azalan) olup olmadığını araştırınız.

Çözüm

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)-7} - \frac{3n-1}{2n-7} = \frac{(3n+2)(2n-7) - (3n-1)(2n-5)}{(2n-5)(2n-7)} = -\frac{19}{(2n-5)(2n-7)}$$

olur. n nin bazı değerleri için $a_{n+1} - a_n < 0$, bazıları için $a_{n+1} - a_n > 0$ olacağından (a_n) monoton değildir.

3. Genel terimi

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

olan dizinin artan olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \text{ olacağından}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

olduğundan (a_n) artandır.

4. Aşağıdaki dizilerin limitini hesaplayınız.

a) $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$

b) $\left(\frac{3n+1}{n}\right)$

c) $\left(\frac{n+2}{n}\right)$

Çözüm

a) $\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$ olduğundan $\left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2 + 0 = 2 \Rightarrow \left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2$

b) $\left(\frac{3n+1}{n}\right) = \left(3 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 3 + 0 = 3 \Rightarrow \left(\frac{3n+1}{n}\right) \rightarrow 3$

c) $\left(\frac{n+2}{n}\right) = \left(1 + \frac{2}{n}\right) \rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \left(\frac{n+2}{n}\right) \rightarrow 1$

5. (x_n) bir sıfır dizisi olduğuna göre, aşağıda genel terimleri verilen dizilerin limitini bulunuz.

a) $a_n = 2x_n - 3$

b) $b_n = \frac{5x_n}{3x_n + 4}$

c) $c_n = \frac{3x_n + 4}{2x_n + 5}$

Çözüm

a) $\lim a_n = 2 \lim(x_n) - \lim 3 = 2 \cdot 0 - 3 = -3$

b) $\lim b_n = \frac{5 \cdot \lim x_n}{3 \cdot \lim x_n + 4} = \frac{5 \cdot 0}{3 \cdot 0 + 4} = 0$

c) $\lim c_n = \lim \frac{3x_n + 4}{2x_n + 5} = \frac{3 \lim(x_n) + 4}{2 \lim(x_n) + 5} = \frac{3 \cdot 0 + 4}{2 \cdot 0 + 5} = \frac{4}{5}$

6. $((-1)^n)$ dizisinin yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Dizinin terimleri $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ olduğundan $\overline{\lim}(-1)^n = 1$, $\underline{\lim}(-1)^n = -1$ ve $\overline{\lim}(-1)^n \neq \underline{\lim}(-1)^n$ dir. O halde $(-1)^n$ dizisi yakınsak değildir.

7. (a_n) bir sınırlı dizi olsun. $\forall \alpha > 0$ için $\left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right)$ dizisinin bir sıfır dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\forall \alpha > 0$ için $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \rightarrow 0$ dir. (a_n) sınırlı olduğundan $\forall n \in \mathbf{N}$ için $|a_n| \leq K$ olacak biçimde en az bir K sayısı vardır. Bu durumda

$$-\frac{K}{n^\alpha} \leq \frac{a_n}{n^\alpha} \leq \frac{K}{n^\alpha} \Rightarrow \lim \left(-\frac{K}{n^\alpha}\right) \leq \lim \frac{a_n}{n^\alpha} \leq \lim \frac{K}{n^\alpha} \Rightarrow 0 \leq \lim \frac{a_n}{n^\alpha} \leq 0 \Rightarrow \lim \frac{a_n}{n^\alpha} = 0 \text{ bulunur.}$$

8. $\left(\frac{an+b}{cn+d}\right)$ dizisinin $\frac{a}{c}$ sayısına yakınsadığını gösteriniz. [Burada a, b, c, d reel sayılar olup $c \neq 0$ dir.]

Çözüm

$$\frac{an+b}{cn+d} = \frac{a + \frac{b}{n}}{c + \frac{d}{n}} \rightarrow \frac{a+0}{c+0} = \frac{a}{c}$$

9. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$

ç) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} \right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$

Çözüm

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{2n+1}{n^2} \right) = +\infty - 0 = +\infty$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

$$ç) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) + \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \dots + \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[n + \frac{n(n+1)}{2n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right) = \frac{3}{4}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)}{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \frac{\left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right)}{\left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)} = 3.$$

10. $((-1)^n)$ dizisinin farklı 5 alt dizisini bulunuz Bu dizinin başka alt dizileri var mıdır?

Çözüm

$((-1)^n)$ dizisinin farklı 5 tane alt dizisini bulalım.

$$((-1)^{2n}) = (1, 1, \dots), ((-1)^{2n+1}) = (-1, -1, -1, \dots)$$

$$(-1, -1, 1, 1, \dots), (-1, -1, -1, 1, 1, 1, \dots), ((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

⋮

Bu dizinin başka alt dizileri de vardır.

11. $S_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ olsun. (s_n) dizisine eşit olan bir dizi bulunuz.

Bu dizi yakınsak mıdır?

Çözüm

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow 1 = A(n+2) + Bn \Rightarrow$$

$$1 = (A+B)n + 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \end{aligned}$$

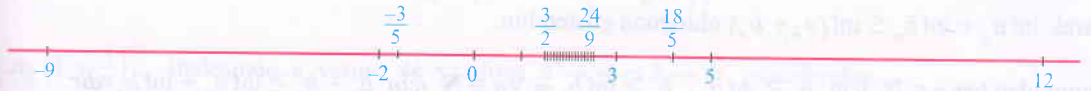
$$\text{olur. } \lim s_n = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

$$t_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \text{ alınırsa } (s_n) = (t_n) \text{ olur.}$$

12. $\left(\frac{3n}{2n-7} \right)$ dizisinin en küçük üst sınırını (sup) ve en büyük alt sınırını (inf) bulunuz.

Çözüm

$$s_n = \left(\frac{3n}{2n-7} \right) \text{ dizisinin terimleri sayı doğru üzerinde işaretlenirse}$$



$$\sup \left(\frac{3n}{2n-7} \right) = 12, \inf \left(\frac{3n}{2n-7} \right) = -9 \text{ olduğu görülür.}$$

$2n - 7 = 0$ denkleminin kökü $n = \frac{7}{2}$ dir. Bu sayıya en yakın iki sayı 3 ve 4 tür. $n = 3$ ve $n = 4$ için en büyük ve en küçük terimlerin elde edildiğine dikkat ediniz.

13. $\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$ dizisinin kaç terimi $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100} \right)$ aralığının dışındadır?

Çözüm

$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ dizisinin sıfırın $\frac{1}{100}$ komşuluğu olan $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ aralığı dışındaki terimlerini bulalım.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow n \leq 100 \text{ olacağından ilk 100 terim komşuluğun dışındadır.}$$

14. $|a| < 1$ için $(1 + a + a^2 + \dots + a^n)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

Çözüm

$|a| < 1$ için $s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$ olsun.

$$s_{n+1} - s_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1} - (1 + a + \dots + a^n) = a^{n+1} > 0 \Rightarrow s_n < s_{n+1}$$

yani verilen dizi monoton artandır.

$$|s_n| = |1 + a + a^2 + \dots + a^n| = \frac{|1 - a^{n+1}|}{1 - a} < \frac{1 + |a|^{n+1}}{1 - a} < \frac{2}{1 - a} \Rightarrow (s_n) \text{ sınırlı}$$

dolayısı ile verilen dizi yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$

15. $\inf a_n + \inf b_n \leq \inf(a_n + b_n) \leq \sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

İlk olarak $\inf a_n + \inf b_n \leq \inf(a_n + b_n)$ olduğunu gösterelim.

\inf tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq \inf a_n$, $b_n \geq \inf b_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n + b_n \geq \inf a_n + \inf b_n$ dir.

Buradan $\inf(a_n + b_n) \geq \inf(a_n) + \inf b_n$ bulunur.

Şimdi $\sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$ olduğunu gösterelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n + b_n \leq \sup a_n + \sup b_n \Rightarrow \sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$ olur. Ayrıca (2)

$\inf(a_n + b_n) \leq \sup(a_n + b_n)$ olduğu açıktır. (3)

(1), (2) ve (3) den istenilen eşitsizlik gerçekleşir.

16. $\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ olduğundan dizi monoton azalandır.

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} = 1 \Rightarrow (a_n) \text{ dizisi sınırlıdır.}$$

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır.

17. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n-5}$

Çözüm

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^5 = e^5$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e} = e^{-1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n}$, ifadesinde n yerine $4k$ yazılırsa $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow k \rightarrow \infty$ olacağından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{5n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{20k} = e^{20}$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n-5}$ ifadesinde n yerine $3k$ yazılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n-5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{6k-5} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^6 \left[1 + \frac{1}{k}\right]^{-5} = e^6 \cdot 1 = e^6$$