Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Türev

Türev kavramı ilk bakışta birbiri ile ilgisiz gibi görünen bir eğriye teğet çizilmesi ile hareketin değişme hızının belirtilmesi problemlerinin incelenmesi sırasında ortaya çıkmıştır.

17. yüzyılda formülize edilen bu kavramın geliştirilmesinde en büyük katkı Alman matematikçi Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ve İngiliz matematikçi Sir Isaac Newton (1643-1727) tarafından yapılmıştır.

Matematiğin temel kavramlarından biri olan türev kavramı geometri, mekanik, fizik, kimya vb. hemen her alanda geniş bir uygulama sahasına sahiptir.

Türev
Türevin tanımı

Tanım 6.1.1. $X \subset R$, $f : X \to R$ bir fonksiyon, $x_0 \in X$ ve $x_0 \in X'$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti veya bununla eşdeğer olan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti mevcut ise bu taktirde **f fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilirdir** denir. Bu limit değerine f'nin x_0'daki türevi adı verilir ve

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad Df(x_0)$$

sembollerinden biri ile ifade edilir.

Türev
Sağ ve sol türev

Tanım 6.1.2. $X \subset R$, $f : X \to R$ bir fonksiyon, $x_0 \in X$ ve $x_0 \in X'$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{veya} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti mevcut ise bu taktirde **f fonksiyonuna x_0 noktasında sağdan türevlenebilirdir** denir. Bu limit değerine **f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağ türevi** adı verilir ve $f'(x_0 + 0)$ ile gösterilir.

Benzer olarak **f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sol türevi**

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıktır ki $f : [a, b] \to R$ biçiminde bir fonksiyon verildiğinde, f fonksiyonunun a, b uç noktalarında sırasıyla sadece sağ ve sol türevlerinden söz edilebilir.

Teorem 4.2.2 göz önüne alınırsa, bir x noktasında $f'(x)$ türevinin mevcut olması için gerek ve yeter şart $f'(x - 0)$, $f'(x + 0)$ türevlerinin mevcut ve $f'(x - 0) = f'(x + 0)$ olmasıdır.

Türev
Tanım uygulamaları

Örnek 1. Türevin tanımını kullanarak $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$, $f : R \to R$ fonksiyonun her noktada türevlenebilir olduğunu gösterip ve $f'(x)$ türevini bulunuz.

Örnek 2. $f(x) = \sqrt{x}$, $f : [0, \infty) \to R$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu noktaları bulup bu noktalardaki türevini hesaplayınız.

Örnek 3. $f(x) = |x|$, $f : R \to R$ fonksiyonunun x=0 noktasındaki türevini inceleyiniz.

Örnek 4. $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

olduğuna göre f fonksiyonunun x=0 noktasındaki türevini inceleyiniz.

Örnek 5. $f : R \to R$ fonksiyonu $n \in N$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

tanımlandığına göre f'nin $x = 1$ ve $x = \sqrt{3}$ noktalarındaki türevini inceleyiniz.

Türev
Türev ile süreklilik arasındaki ilişki

Teorem 6.2.1. $X \subset R$, $f : X \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebiliyorsa, aynı zamanda f bu noktada süreklidir.

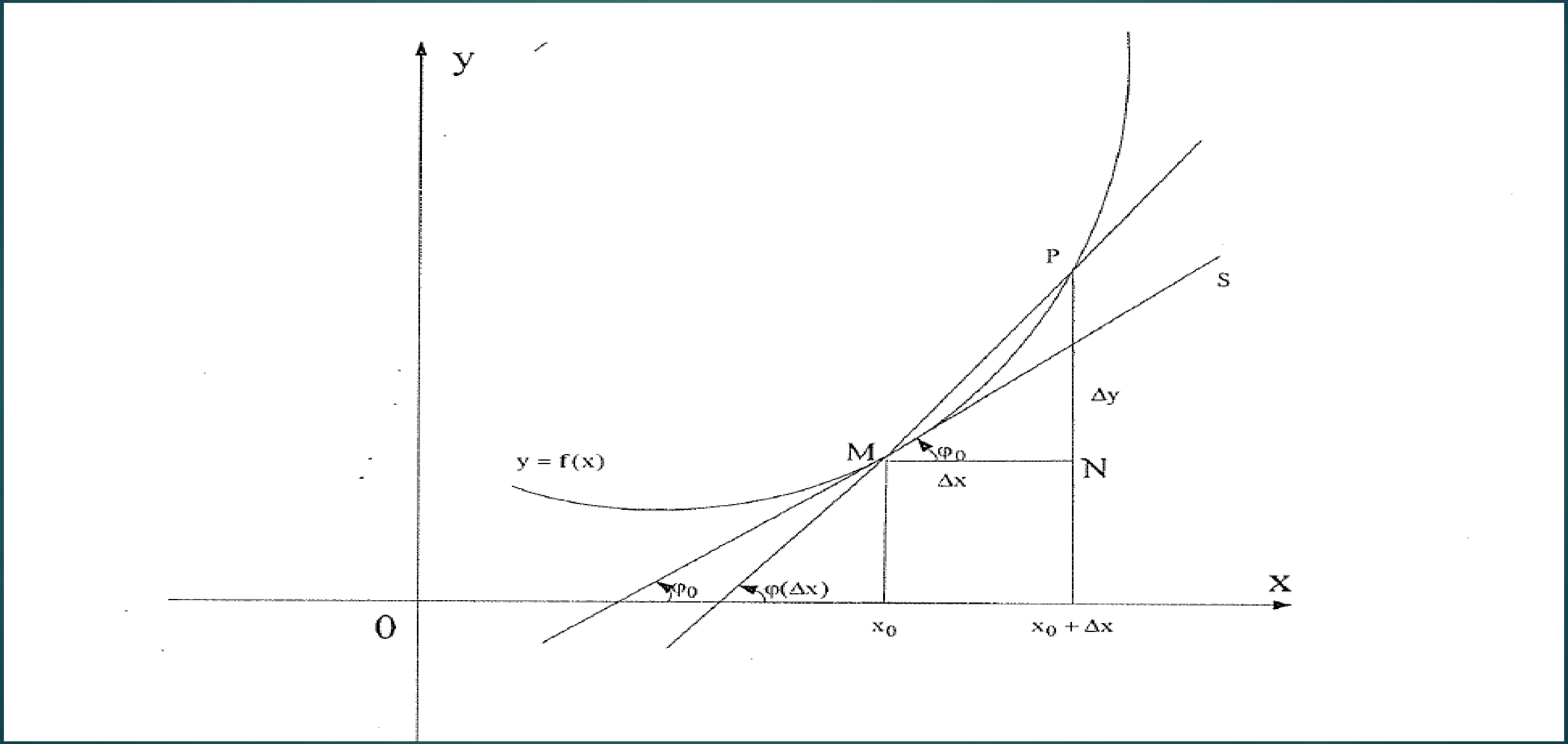
Türev
Türevin geometrik anlamı

Kabul edelim ki y=f(x) eşitliği ile tanımlı $f:(a,b)\to R$ fonksiyonu sürekli olsun. M, f'nin grafiği üzerindeki bir noktayı ve x_0'da M noktasının apsisini göstersin. x_0'a Δx artması vererek apsisi $x_0+\Delta x$ olan P noktasını oluşturalım. MP kirişi ile 0x ekseni arasında kalan açıyı $\varphi(\Delta x)$ ile ifade edelim. Bu durumda $\varphi(\Delta x)$ açısının Δx'e bağlı olduğu açıktır. P noktası M noktasına yaklaştığında MP kirişi konum değiştirip $M(x_0,y_0)$ noktasından geçen teğete yaklaşmakta ve bu noktaların çakışması durumunda kiriş de S teğeti ile çakışmaktadır. Diğer bir değişle $\Delta x\to 0$ için MP kirişi S teğetine yaklaşır. Şekil1'den görüldüğü üzere

$$\tan(\varphi\Delta x)=\frac{|PN|}{|MN|}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

olduğu görülür. Buradan

Türev
Türevin geometrik anlamı



Türev
Türevin geometrik anlamı

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan \varphi(\Delta x) = \tan \varphi_0$$

elde edilir. Burada φ_0, S teğetinin 0x eksen ile yaptığı açıdır. Böylece

$$\tan \varphi_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

elde edilir. Demek ki f'nin x_0 noktasındaki türevi fonksiyonun grafiğinin $M(x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğetinin eğimine eşittir. Buna göre, eğriye $M(x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğetin denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

olur. Ayrıca aynı noktadan geçen normalin denklemi ise

$$y - f(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

dır. Çünkü, teğetin ve normalin eğimleri m_t ve m_n olmak üzere $m_t . m_n = -1$ olduğundan $m_n = -1/m_t = -1/f'(x_0)$ dır.

Türev
Türevin geometrik anlamı - uygulama

Örnek 6. $y = f(x) = (2/3)x^5 - (1/9)x^3$ eğrisine x=1 noktasından çizilen teğetin 0x ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.

Örnek 7. $f(x) = x^2$ eğrisine x=1/2 noktasından çizilen teğetin denklemini bularak 0x ekseni ile yaptığı açıyı hesap ediniz.

Örnek 8. $f(x) = 4x - x^2$ eğrisinin hangi noktasından çizilen teğeti 2y=3x-5 doğrusuna paraleldir.

Türev
Türevin fiziksel anlamı

Hareket eden bir cismin t zamanında aldığı yolu $s = s(t)$ ile gösterelim. Bu durumda cismin $\Delta t = (t + \Delta t) - t$ zaman aralığında aldığı yol Δs ile gösterilirse, $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ olacağından cismin Δt zaman aralığındaki **ortalama hızı**

$$V_{ort} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

olur. Fakat cismin değişken hızlarla hareket etmesi durumunda ortalama hızı herhangi bir t anındaki hızı ifade etmez. Ancak Δt zaman aralığı çok küçük alınırsa ortalama hız t anındaki hıza çok yakın olur ve hatta $\Delta t \to 0$ için ortalama hız t anındaki hıza dönüşür. Buna göre cismin t anındaki hızı $V(t)$ ile ifade edilirse,

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

elde edilir. Yani hareket eden bir cismin hızı cismin aldığı yolun zamana göre türevidir.

Benzer olarak cismin Δt zaman aralığındaki **ortalama ivmesi**

$$m_{ort} = \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

ve herhangi bir t anındaki $a(t)$ ivmesi ise

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V'(t) = s''(t)$$

olur. Demek ki, hareket eden bir cismin ivmesi ortalama hızın zamana göre türevidir.

Türev
Türevin fiziksel anlamı - uygulama

Örnek 9. Bir cisim 0x ekseni boyunca her t için $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 27$ fonksiyonuna uygun biçimde hareket ediyor. Bu cismin t=1 ile t=9 arasında aldığı yolu, t=10. saniyenin sonundaki hızını ve ivmesini bulunuz.

Türev
Toplam, çarpım ve bölüm türevi

Teorem 6.5.1. $X \subset R$, $f,g : X \to R$ fonksiyonları $x \in X$ için türevlenebilir olsun. Bu taktirde $\alpha,\beta \in R$ için $(\alpha f + \beta g)$, $(f.g)$ ve (f/g) fonksiyonları x noktasında türevlenebilir ve

(a) $\alpha,\beta \in R$ için $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

(b) $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

(c) $(f/g)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $\quad (g(x) \neq 0)$.

Türev
Sabit fonksiyonun türevi

1. Sabit fonksiyonun türevi sıfırdır.

Çünkü, c bir sabit olmak üzere f(x)=c ile tanımlanan herhangi bir sabit fonksiyon için

$$(c)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

bulunur.

Buna göre sabit çarpanı türev işaretinin dışına çıkarılabilir, yani $(c.f(x))' = cf'(x)$ dır. Zira Teorem 6.5.1'den dolayı $(c.f(x))' = c'f(x) + cf'(x) = 0.f(x) + cf'(x) = cf'(x)$ dır.

Türev
Kuvvet fonksiyonunun türevi

2. Her n doğal sayısı için $f(x) = x^n$ ile tanımlınan $f : R \rightarrow R$ fonksiyonu her noktada türevlenebilirdir ve $f'(x) = nx^{n-1}$ dir.

Gerçekten, Newton binom formülünden

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right\} = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}$$

elde edilir.

Türev
Trigonometrik fonksiyonların türevleri

3. Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

a-) $f(x) = \sin x,\ f: R \to R$ fonksiyonu her noktada türevlenebilir ve $f'(x) = \cos x$ dir. Çünkü,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x.\cosh + \cos x.\sinh) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x.. \frac{\sinh}{h} \right).$$

$$= \sin x. \lim_{h \to 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x. \lim_{h \to 0} \frac{\sinh}{h}$$

$$= \sin x. \lim_{h \to 0} \left(- \frac{2\sinh^2 (h/2)}{h} \right) + \cos x.$$

$$= \sin x. \lim_{h \to 0} (-h/2). \left(\frac{\sin(h/2)}{h/2} \right)^2 + \cos x = \cos x$$

bulunur.

Türev
Trigonometrik fonksiyonların türevleri

b-) Benzer şekilde $(\cos x)' = -\sin x$ elde edilir.

c-) $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 1,2,\cdots)$ olmak üzere $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ dır. Çünkü

Teorem 6.5.1' den

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x.\cos x - \sin x.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Türev
Trigonometrik fonksiyonların türevleri

d-) $x \neq n\pi \quad (n = 1,2,\cdots)$ olmak üzere $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$.

Çünkü,

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\left(1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\right) = -\left(1 + \cot^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

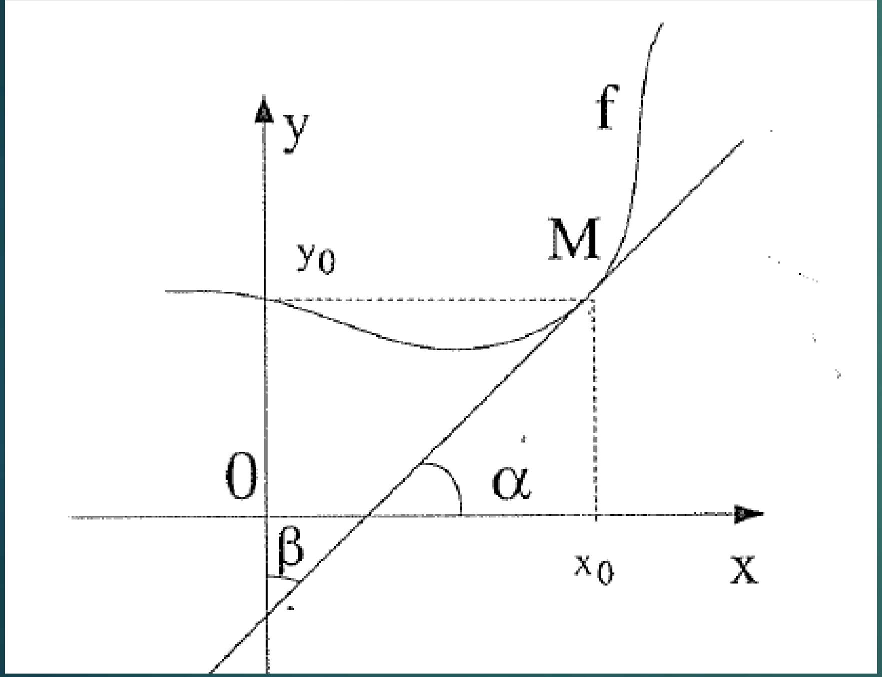
Türev
Ters fonksiyon türevi

Teorem 6.7.1. $X, Y \subset R$, $f : X \to Y$ fonksiyonu bire-bir ve örten olsun. Eğer f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise bu taktirde f^{-1} ters fonksiyonu $y_0 = f(x_0) \in Y$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dır.

Türev
Ters fonksiyon türevinin geometrik anlamı



f eğrisine M noktasından çizilen teğetin 0x ekseni ile yaptığı açıyı α dersek, bu durumda 0y ekseni ile yaptığı açı $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ olur. f ve f^{-1} eğrilerinin M noktasındaki türevleri bu noktadan çizilen teğetin eğimleri olacağına göre $f'(x_0) = \tan\alpha$ ve $(f^{-1})'(y_0) = \tan\beta$ bulunur. Böylece

$$(f^{-1})'(y_0) = \tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

elde edilir.

Türev
Ters fonksiyon türevi - uygulama

Örnek 10. $y = f(x) = x^3 + x \quad (x \in R)$ olduğuna göre f^{-1} ters fonksiyonun türevini ve $\left(f^{-1}\right)'(2)$ hesap ediniz.

Örnek 11. $n \in N$ olmak üzere $x > 0$ için $y = x^{1/n}$ fonksiyonun türevini hesap ediniz.

Türev
Ters trigonometrik fonksiyonların türevi

1-) $f(x)=\arcsin x$ ile tanımlı $f:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonun türevini hesap ediniz.

Çözüm. y=arcsinx fonksiyonunun ters fonksiyonu x=siny olduğuna göre ters fonksiyonların türevi nedeniyle $|x|<1$ için

$$(\arcsin x)' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}$$

dır. Fakat cosy , $(-\pi/2,\pi/2)$ aralığında pozitif olduğundan

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bulunur.

Türev
Ters trigonometrik fonksiyonların türevi

2-) Benzer olarak, $f(x) = \arccos x$, $f : [-1,1] \to [0,\pi]$ fonksiyonunun $|x| < 1$ için

$$f'(x) = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

dır.

3-) $f(x) = \arctan x$, $f : R \to (-\pi/2, \pi/2)$ olduğuna göre $f(x) = ?$

Çözüm. $y=f(x)=\arctan x$ 'in ters fonksiyonu $x=\tan y$ olduğuna göre, ters fonksiyonun türevi nedeniyle her x için

$$(\arctan x)' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$(\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

dır.

Türev
Bileşke fonksiyonun türevi

Teorem 6.9.1. Eğer g fonksiyonu x noktasında ve f fonksiyonu g(x) noktasında türevlenebilir ise bu taktirde fog bileşke fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir ve

$$(fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

dir.

Türev
Bileşke fonksiyonun türevi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buna göre fog fonksiyonunun türevini hesap etmek için önce (fog)'nin g'ye göre türevini alıp sonra bunu g'nin türevi ile çarpmak yeterlidir. Bileşke fonksiyonunun bu türev alma kuralına zincir kuralı adı verilir. Zincir kuralı ikiden fazla bileşik fonksiyonlar için de kullanılır. Örneğin, bileşik fonksiyon $y = f(g(\varphi(x)))$ biçiminde verilmişse bu durumda

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

Türev
Bileşke fonksiyonun türevi - uygulama

Örnek12. Aşağıdaki bileşik fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

a−) $y = (2x^3 + 5)^4$

b−) $y = \tan^2(x^2 + 1)$

c−) $y = e^{\arctan^2 x}$

d−) $y = \arcsin \dfrac{2x^2}{1 + x^4} \quad (|x| < 1)$

Türev
Logaritma fonksiyonunun türevi

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y = f(x) = \log_a x$ ile tanımlanan $f : R^+ \to R$ fonksiyonu $\forall x \in R^+$ için türevlenebilir ve

$$f'(x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

dir.

İspat. Logaritma fonksiyonun sürekliliğinden

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} . \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \log_a \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}\right]$$

yazılabilir. $\frac{h}{x} = \frac{1}{k}$ denirse, $h \to 0 \Leftrightarrow k \to \infty$ olacağına göre

$$f'(x) = \log_a \left[\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{1/x} = \log_a e^{1/x} = \frac{1}{x} \log_a e$$

elde edilir.

Türev
Logaritma fonksiyonunun türevi

Bununla birlikte bileşik fonksiyonların zincir kuralı göz önüne alınarak

$$\left(\log u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}\log_a e$$

eşitliği bulunur.

Türev
Üstel fonksiyonun türevi

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f : R \to R^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu her $\forall x \in R$ için türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

dır. Gerçekten, y=f(x) fonksiyonu logaritma fonksiyonunun ters fonksiyonu olduğundan $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ dır. Ters fonksiyonun türevi ve $\log_a b = 1/\log_b a$ eşitliği nedeniyle

$$\left(a^x\right)' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a$$

olur. Özel olarak $\left(e^x\right)' = e^x$ dır ve bileşik fonksiyonların türevinden de

$$\left(a^{u(x)}\right)' = u'(x).a^{u(x)}.\ln a \quad \text{ve} \quad \left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$$

olduğu açıktır.

Türev
Üstel fonksiyonun türevi - uygulama

Örnek 13. a herhangi bir sabit olmak üzere $\forall x > 0$ için $\left(x^{a}\right)' = ax^{a-1}$ olduğunu gösteriniz.

Türev
Hiperbolik fonksiyonun türevi

$$(\mathrm{shx})' = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \mathrm{chx}$$

$$(\mathrm{chx})' = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \mathrm{shx}$$

$$(\mathrm{thx})' = \left(\frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chx}}\right)' = \frac{\mathrm{chx.chx} - \mathrm{shx.shx}}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$(\mathrm{cthx})' = \left(\frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shx}}\right)' = \frac{\mathrm{shx.shx} - \mathrm{chx.chx}}{\mathrm{sh}^2 x} = \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

Türev
Logaritmik türev

Kabul edelim ki u $(u > 0)$ ve v fonksiyonları türevlenebilir olsun. Bu durumda $y = (u(x))^{v(x)}$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyonun türevi önce eşitliğin her iki tarafının türevi, logaritma, bileşke fonksiyonların türevleri kullanılarak hesaplanır. Sonra eşitlikten y' türevi çekilerek türev alma işlemi tamamlanır ;

$$\ln y = v(x)\ln u(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{v(x)} \Rightarrow$$

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Türev
Logaritmik türev - uygulama

Örnek 14. $y = x^{x^x}$ fonksiyonunun türevini hesap ediniz.

Türev
Parametrik fonksiyonun türevi

Kabul edelim ki y=f(x) fonksiyonu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilmiş olsun. Biliyoruz ki, $x = \varphi(t)$ ve $y = \psi(t)$ denklemlerinden t parametresi yok edilerek $y = f(x)$ elde edilebilir. Bu durumda parametrik fonksiyonun türevi aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 6.14.1. $x = \varphi(t)$ ve $y = \psi(t)$ fonksiyonları t_0 noktasının bir komşuluğunda türevlenebilir olsunlar. Eğer bu komşulukta $\varphi'(t) > 0$ veya $\varphi'(t) < 0$ ise y=f(x) fonksiyonu $x_0 = \varphi(t_0)$ noktasında türevlenebilir ve

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

dir.

Türev
Parametrik fonksiyonun türevi - uygulama

Örnek 15. y=f(x) fonksiyonu $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$ ile tanımlandığına göre $y' = \dfrac{dy}{dx}$ türevini hesap ediniz.

Örnek 16. y=f(x) fonksiyonu $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$ $(0 < t < \pi/2)$ ile tanımlandığına göre $y' = \dfrac{dy}{dx}$ türevini hesap ediniz.

Türev
Kapalı fonksiyonun türevi

Diyelim ki, x'in y fonksiyonu $F(x,y)=0$ denklemi ile verilmiş olsun. Bu durumda $F(x,y)=0$ denkleminden değişkenlerden herhangi birini çekmek her zaman mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda kapalı türevler son derece faydalıdır. Bu metot, y'nin x'in bir fonksiyonu olduğu göz önüne alınarak zincir kuralını uygulamaktan ibarettir. Yani, $F(x,y)=0$ denkleminin her iki tarafının x'e göre türevi alınıp elde edilen denklemden y' türevi çekilir.

Türev
Kapalı fonksiyonun türevi - uygulama

Örnek 17. y=f(x) fonksiyonu $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$ denklemi ile verildiğine göre $y' = dy/dx$ türevini hesap ediniz.

Örnek 18. $x^y = y^x$ olduğuna göre dx/dy türevini hesap ediniz.

Örnek 19. y=f(x) fonksiyonu $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ ile verildiğine göre x=6 noktasındaki y' türevini bulunuz.

Türev
Yüksek mertebeden türevler

X kümesi üzerinde tanımlı türevlenebilir f fonksiyonunu verildiğinde f' yeni bir fonksiyon tanımlar. Eğer bu f' fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında türevlenebilir, yani

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

limiti mevcut ise bu durumda **f'ye x_0 noktasında ikinci mertebeden türevlenebilirdir** ve $f''(x_0)$ değerine de ikinci mertebeden türevi adı verilir. İkinci mertebeden türev

$$y'',\ f''(x_0),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\ D^2f(x_0)$$

sembollerinden biri ile ifade edilir. Bu düşünce tekrar edilerek f fonksiyonunun n. mertebeden türevi tanımlanabilir.

Türev
Yüksek mertebeden türevler – genel tanım

Tanım 6.16.1. $f : X \to R$ fonksiyonu x_0 noktasında (n-1)'inci mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

limit mevcutsa bu limit değerine f'nin x_0 noktasındaki n. mertebeden türevi denir ve

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x_0),\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\ D^n f(x_0)$$

ile gösterilir. Burada $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0)\right)'$ olduğu açıktır.

Türev
Yüksek mertebeden türevler – uygulama

Örnek 20 $y = |x|^2$ fonksiyonun $x_0 = 0$ noktasında 2. mertebeden türevlenebilir olup olmadığını inceleyiniz.

Örnek 21. Aşağıdaki fonksiyonların n. mertebeden türevlerini hesap ediniz.

a-) $f(x) = x^{\alpha} \quad (\alpha \in R)$

b-) $f(x) = a^{x} \quad (a > 0, \; a \neq 1)$

c-) $f(x) = \sin x$

Türev
Yüksek mertebeden türevler – uygulama

Örnek 22. Parametrik denklemi $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $(0 < t < 2\pi)$ olan y=f(x) fonksiyonunun $y'' = d^2y/dx^2$ türevini hesap ediniz.

Örnek 23. y=y(x), $|x| > |a|$ için $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ eşitliği ile tanımlanan pozitif bir fonksiyon olduğuna göre d^2y/dx^2 türevini bulunuz.

Türev
Yüksek mertebeden türevler - Leibniz Teoremi

Teorem 6.16.2. (Leibnitz Teoremi). Eğer bir X kümesinde $u=u(x)$ ve $v=v(x)$ fonksiyonları n. mertebeden türevlenebilir ise bu taktirde u.v fonksiyonu n. mertebeden türevlenebilir ve $u^{(0)}=u$ ve $v^{(0)}=v$ olmak üzere

$$(u.v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}.v^{(n-k)}$$

dır.

Türev
Yüksek mertebeden türevler - Leibniz Teoremi - uygulama

Örnek 24. $y = f(x) = x^2 \cos x$ fonksiyonunun n. $((n \geq 2)$ mertebeden türevini hesap ediniz.

Örnek 25. $y = \dfrac{e^{2x}}{1-x}$ fonksiyonunun $x \neq 1$ için n. mertebeden türevini bulunuz.

Türev Diferansiyel

Kabul edelim ki y=f(x) ile tanımlı f fonksiyonu X kümesinde türevlenebilir olsun. x'e Δx artması verildiğinde f'nin aldığı artma miktarını Δy ile gösterelim. Bu durumda

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

olur. f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğundan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

olmak üzere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \text{ veya } \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x).\Delta x$$

eşitliği yazılabilir. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Türev
Diferansiyel - Tanım

Tanım 6.17.1. (5) ifadesindeki $f'(x)\Delta x$ terimine f fonksiyonun sabit x noktasına ve değişken Δx artmasına göre **diferansiyeli denir** ve

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{veya} \quad df(x) = f'(x)\Delta x$$

ile ifade edilir.

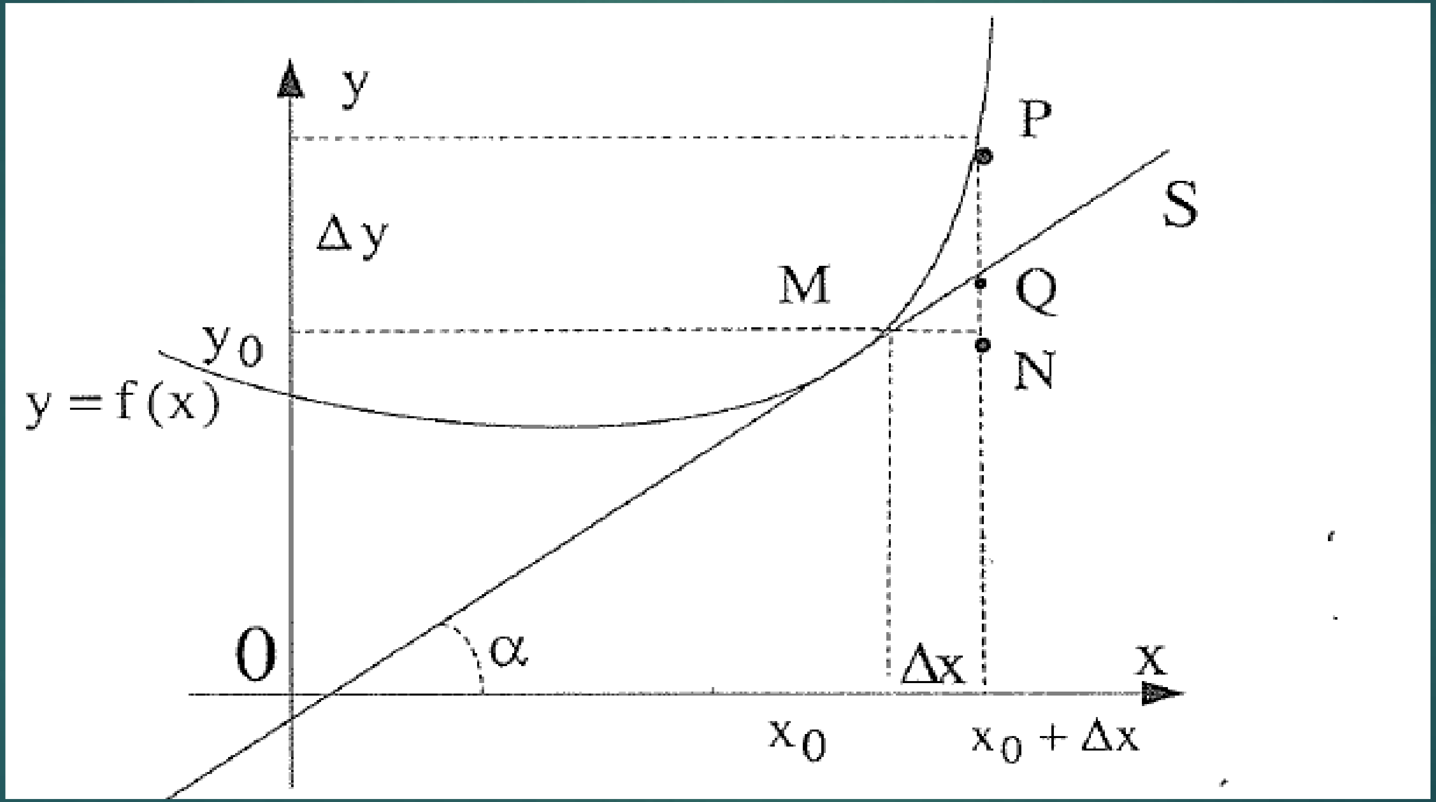
Bu tanıma göre y=f(x)=x fonksiyonun diferansiyeli hesap edilirse $f'(x) = 1$ olduğundan $dy = df(x) = dx = 1.\Delta x = \Delta x$ yani $dx = \Delta x$ bulunur. Şu halde

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

olur. Görüldüğü üzere $f'(x)$ türevi sadece x'e bağlı olmasına rağmen $df(x) = f'(x)dx$ diferansiyeli x ve dx'e bağlıdır.

f fonksiyonunun diferansiyelini geometrik olarak aşağıdaki gibi açıklayabiliriz. Bunun için grafik üzerinde $M(x_0, y_0)$ noktasını alalım.

Türev
Diferansiyel - Tanım



Türev
Diferansiyel - Tanım

Eğri üzerinde absisi $x_0 + \Delta x$ olan noktayı P , eğriye M noktasından çizilen teğeti S ve S teğeti ile 0x ekseni arasındaki açıyı ise α ile gösterelim. S teğeti ile PN doğrusunun kesişim noktasını Q ile ifade edelim. Bu durumda $\overset{\Delta}{MNQ}$ dik üçgen olduğundan

$$|NQ| = (\tan\alpha)\Delta x = f'(x)\Delta x = dy$$

olur. Böylece şekilden görüldüğü üzere $|NQ| = |NP| - |PQ| = \Delta y - |PQ|$ olduğuna göre

$$dy = \Delta y - |PQ|$$

elde edilir. Yani $dy \cong \Delta y$ dır.

Türev kurallarından dolayı toplam, fark, çarpım ve bölümün diferansiyeli için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğu kolayca gösterilebilir : u=u(x) ve v=v(x) türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$$

$$d(u.v) = (u.v)' dx = (u'v + uv')dx = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

dir.

Türev
Diferansiyel - Tanım

Şimdi diferansiyel yardımıyla fonksiyonun yaklaşık değerinin nasıl hesaplanacağını görelim. Biliyoruz ki f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğunda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$ olmak üzere

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

yazılabilir. Bu durumda Δx çok küçük alınırsa

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x).\Delta x \Rightarrow f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

olur. Şu halde x_0 noktasının yeterince küçük komsuluğundaki her x icin

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dır.

Türev
Diferansiyel - Uygulama

Örnek 26. Sin 46^{o}'nın yaklaşık değerini bulunuz.

Türev
Yüksek mertebeden diferansiyeller

y=f(x) fonksiyonu X kümesinde türevlenebilir ve $x \in X$ bağımsız değişken olmak üzere f'nin diferansiyelinin

$$dy = f'(x)dx$$

olduğunu biliyoruz. Bu diferansiyele aynı zamanda **birinci mertebeden diferansiyel** denir. Bu kavrama bakarsak $f'(x)$ türevinin x' e bağımlı ve dx'in ise bağımsız x değişkenin artması olması nedeniyle sabit olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla dy diferansiyeli x'in bir fonksiyonu olacağına göre bunun bir kez daha diferansiyeli alınabilir. Buna **f'nin ikinci mertebeden diferansiyeli** adı verilir ve

$$d^2y = d(dy), \quad d^2f(x) = d(df(x))$$

ile gösterilir. Buna göre

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2 + f'(x).0.dx = f''(x)dx^2$$

olur.

Benzer olarak f'nin n. mertebeden diferansiyeli

$$d^ny = d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Türev
Yüksek mertebeden diferansiyeller

Eğer x bağımsız değişken değil, yani bir t değişkenin fonksiyonu ise bu taktirde dx sabit olmayıp t'nin fonksiyonu olacağından

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x).d(dx) = f''(x).dx^2 + f'(x).d^2x$$

ve 3. mertebeden diferansiyel

$$\begin{aligned} d^3y = d(d^2y) &= d(f''(x).dx^2 + f'(x).d^2x) = d(f''(x)dx^2) + d(f'(x).d^2x) \\ &= f'''(x)dx^3 + f''(x).d(dx^2) + f''(x)dx.dx^2 + f'(x).d(d^2x) \\ &= f'''(x)dx^3 + f''(x)2dx.d^2x + f''(x)dx.d^2x + f'(x)d^3x \\ &= f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak daha yüksek mertebeden türevler de hesaplanır.

Türev
Yüksek mertebeden diferansiyeller - uygulama

Örnek 27. $y = \sin x^2$ fonksiyonunun ikinci mertebeden diferansiyelini, a-) x'in bir bağımsız değişkenin fonksiyonu, b-) x'in bağımsız değişken olması durumunda hesap ediniz.