Bölüm 9

Diziler

Tanım 9.1

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{9.1}$$

biçiminde sıralanmış sayılar kümesine *dizi* denilir. $\{a_n\}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibi gösterimler kullanılır. Bu gösterimlerde, i doğal sayısına indis, a_i sayısına dizinin $i-$inci terimi denilir. İndisler için herhangi bir değişken kullanılabilir. n, i, k, m gibi harfleri kullanmak bir alışkanlık haline gelmiştir. Dizinin indisleri 0'dan başlamak yerine herhani bir doğal sayıdan başlayabilir: $\{a_n\}_{n=7}^{\infty}$. Bu kitapta $(0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ indislerini doğal sayı, a_n nesnelerini birer gerçel sayı kabul edeceğiz. Bazen indisleri doğal sayıların $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n < \ldots$ koşulunu sağlayan bir alt kümesi olarak da alabiliriz. Bu durumda dizi tanımı

$$a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}, \ldots \tag{9.2}$$

biçimini alır. İndis kümesi *sonlu* ise dizi sonlu bir dizi, indis kümesi sonsuz ise dizi *sonsuz* bir dizi olur.

Tabii, Burada yaptığımız dizi tanımı, genel dizi tanımına kısıt koymaktadır. Daha genel biçimiyle indisler tam sıralı bir kümeden ve a_i nesneleri her hangi bir matematik uzaydan (yapı) alınabilir. Topolojik uzaylarda dizi kavramı ağ (nets) ve süzgeç (filters) kavramlarına genelleşir. Ancak bu kitapta yukarıda söylediğimiz gibi dizileri kısıtlı tanımıyla inceleyeceğiz. Fonksiyon kavramını kullanarak dizileri şöyle de tanımlayabiliriz:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \tag{9.3}$$

fonksiyonu bir dizidir. İnsilerin bütün doğal sayıları doldurmadığı hali şöyle tanımlayabiliriz: $M \subset \mathbb{N}$ olamak üzere,

$$g : M \to \mathbb{R} \tag{9.4}$$

fonksiyonu bir dizidir.

Dizileri göstermek için terimlerini $\{\}$ parantezi içine yazarız. Örneğin,

$$\{0, 1, 2, 3 \dots\}$$

tamsayılar dizisini gösterir. Ancak parantez içine yazdığımız sonlu sayıda terim, dizinin öteki terimlerini belirleyen bir kuralı içermelidir. Örneğin,

$$\{2, 4, 6 \dots\}$$

çift tamsayılar dizisini,

$$\{2^1, 2^2, 2^3 \dots\}$$

dizisi 2 nin ardışık kuvvetlerini gösterir. Ama rasgele

$$\{3, 19, 35, 37, \dots\}$$

dizisi verildiğinde dizinin öteki terimlerini bulmaya yarayan bir kural çıkaramayız. O durumda söz konusu dizi ile biraz sonra göreceğimiz dizi işlemlerini yapamayız. O nedenle, genellikle, diziyi, terimlerini belirli kılan kural ile birlikte tanımlarız: Bunun için bazen diziyi tanımlayan fonksiyonu ya da dizinin terimlerini belirleyen kuralı yazarız: $M \subset \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\{n| \quad n \in M\}$$

$$\{2n| \quad n \in M\}$$

$$\{2^n| \quad n \in M\}$$

dizilerinin terimleri apaçık belirli olur. Bazen kısalığı sağlamak için, a_i terimleri belirli ise ya da genel bir diziden söz ediyorsak

$$\{a_i\}_{i \in M}$$

yazacağız. İndislerin hangi kümeden alındığı belli ise M kümesini yazmaya gerek kalmaz.

9.1 Sıfır Dizisi

Limiti 0 olan dizilere *sıfır dizisi* denilir.

Örnek 9.1 *bütün trimleri 0 olan dizi bir sıfır dizisidir.*

$$\{0\} = \{0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

dizisi bir sıfır dizisidir. Bu dizinin 0'a yakınsadığı apaçıktır.

9.2 Sabit Dizi

a sabit bir sayı olmak üzere her i indisi için $a_i = a$ olan diziye sabit dizi denilir. Sabit dizi,

$$\{a\} = \{a, a, a, \ldots\} \tag{9.5}$$

biçiminde her terimi sabit bir sayıya eşit olan dizidir.

Örnek 9.2 *{1}= 1,1,1,. . .*

dizisi her terimi 1 olan sabit bir dizidir.

Almaşık Dizi:

$$\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \tag{9.6}$$

ifadesinde soldaki gösterim sağdaki diziyi belirlemeye yeterlidir. Genel olarak ardışık iki terimi farklşı işaretli olan dizilere emphalmaşık (alterne) dizi denilir.

9.3 Parçalı Dizi

Bazen dizinin terimleri parçalı fonksiyon tanımı gibi yazılabilir:

$$b_n = \begin{cases} n, & n \text{ tek ise} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

9.4 Sınırlı Dizi

i indisine bağlı olmaksızın

$$-K \leq a_i \leq K \tag{9.7}$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir $K > 0$ sayısı varsa $\{a_i\}$ dizisine sınırlı, değilse sınırsız bir dizi denilir. Örneğin $\{\frac{1}{n}\}$, $\{(-1)^n\}$ ve $\{sin(nx)\}$ dizileri sınırlı, $\{n\}$, $\{n!\}$ ve $\{2^n\}$ dizileri sınırsızdır.

Çarpansal Dizi

$$\{n!\} = \{1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, \ldots\} = \{1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \ldots\}$$

dizisine çarpansal (faktöryel) dizi denilir.

9.5 Yinelgen Formül

Bazen dizinin terimleri yinelgen (recursive) formülle tanımlanbilir. Örneğin,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dizisinin terimleri

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots\}$$

dir. Bu diziye *Fibonacci* dizisi denilir. Bu dizi doğada çoğalma formülü olarak bilinir.

Yukarıda yazdığımız $\{n!\}$ serisini yinelegen bir formülle de yazabiliriz:

$$a_1 = 1, \qquad n \geq 2 \Rightarrow a_n = na_{n-1}$$

Dizileri fonksiyon olarak tanımlarsak, dizilerin özeliklerini ortaya koyarken fonksiyonların bütün özeliklerini kullanabiliriz.

9.6 Monoton Dizi

Tanım 9.2

- $\{a_n\}$ dizisinin ardışık terimleri arsında $a_n < a_{n+1}$ bağıntısı varsa $\{a_n\}$ dizisine *artan dizi* denilir.

- $\{a_n\}$ dizisinin ardışık terimleri arsında $a_n > a_{n+1}$ bağıntısı varsa $\{a_n\}$ dizisine *azalan dizi* denilir.
- $\{a_n\}$ dizisinin ardışık terimleri arsında $a_n \leq a_{n+1}$ bağıntısı varsa $\{a_n\}$ dizisine *azalmayan* dizi denilir.
- $\{a_n\}$ dizisinin ardışık terimleri arsında $a_n \geq a_{n+1}$ bağıntısı varsa $\{a_n\}$ dizisine *artmayan* dizi denilir.

Tanım 9.3 *Artan, azalan, artmayan ya da azalmayan dizilere* monoton *dizi denilir.*

Farklı kaynaklarda azalmayan terimi artan, artmayan terimi yerine azalan terimleri kullanılmaktadır. Bazılarında anlamı güçlendirmek amacıyla $\leq, \geq$ yerine $<>$ operatörleri gelince "kesin azalan" (stricly decreasding) ya da "kesin artan" nitelemeleri kullanılır. Bu kitapta Tanım (9.2) tanımları kullanılacaktır.

9.7 Aritmetik Dizi

Bir dizinin ardışık iki terimi arasındaki fark sabit bir c sayısına eşitse, dizi bir aritmetic dizidir. c sayısına ortak fark denilir. , Aritmetic dizinin bir terimi ve orta fark biliniyorsa, bütün dizi oluşturulabilir.

Örnek 9.3 $\{n\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Doğal sayılar dizisi ortak farkı 1 olan bir aritmetik dizidir.

Örnek 9.4 $3, 1, 19, 27, 35, \ldots$

dizisi ortak farkı 8 olan bir aritmetik dizidir.

9.8 Geometrik Dizi

Bir dizinin ardışık iki teriminin birbirlerine oranı sabit bir λ sayısına eşitse, dizi bir geometrik dizidir. λ sayısına ortak oran denilir. Afrdışık iki terimden büyük indisli terimi küçük indisli terime bölmek bir gelenektir. Geometrik dizinin bir terimi ve ortak oranı biliniyorsa, bütün dizi oluşturulabilir.

Sabit bir r sayısının kuvvetleri biçiminde olan diziler geometrik dizidir.

Örnek 9.5 $\{r^n\} = \{0, r, r^2, r^3, \ldots, r^n, \ldots\}$

dizisi ortak oranı r olan bir geometrik dizidir.

Örnek 9.6 $\{\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \ldots\}$

dizisi ortak oranı 3 olan bir geometrik dizidir.

9.9 Harmonik Dizi

Bir aritmetik dizinin terimlerinin çarpmaya göre terslerinden oluşan diziye harmonik dizi denilir. $\{x_n\}$ bir aritmetik dizi ise, onun ürettiği harmonik dizi,

$$\left\{\frac{1}{x_n}\right\} = \left\{\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}, \ldots\right\} \tag{9.8}$$

biçimindedir.

Örnek 9.7 $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$

dizisi doğal sayıların ürettiği harmonik dizidir. Genel olarak a,b,c sayıları arasında

$$\frac{2ac}{a+c} \qquad \text{(harmonik bağıntı)}$$

bağıntısı varsa, bu üç sayıya harmonik bağlıdır denilir. Bu durumda bağıntıya da harmonik bağıntı denilir. Harmonik dizinin ardışık üç terimi birbirlerine harmonik bağlıdır. harmonik seride ardışık üç terim arasında

$$\frac{2\left(\frac{1}{x_{n-i}}\right)\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{x_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)} \qquad (n \to infty)$$

bağıntısı vardır.

9.10 Dizinin Limiti

Diziyi bir fonksiyon olarak tanımladığımıza göre, fonksiyonlar için bildiğimiz limit tanımını dizilere de uygulayabiliriz:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L \tag{9.9}$$

ise $\{a_n\}$ dizisinin limiti vardır ve L'ye eşittir denilir. Bazen bunu

$$a_n \to L \quad (n \to \infty) \tag{9.10}$$

ile de gösteririz. Limit tanımını fonksiyonların limitinin özel bir hali olarak almadan, diziler için limit tanımını doğrudan yapabiliriz:

Her $\epsilon > 0$ için

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon \tag{9.11}$$

olacak biçimde bir $N > 0$ sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisinin limiti vardır ve L'ye eşittir. Bu koşulu sağlayan dizilere *yakınsak dizi*, sağlamayankara *ıraksak dizi* denilir.

Örnek 9.8 *Sabit dizi yakınsar*

İspat: Sabit dizi terimleri sabit olan dizidir. $\{a\}$ sabit dizisini $f(x) = a$ (a sabit) fonksiyonunun tanım bölgesi doğal sayılara kısıtlanmış özel hali olarak düşünürsek,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} a = a$$

gerektirmesinden çıkarabiliriz. Ama istersek, doğrudan dizinin limiti için Tanım (9.11)'i de sağlayabiliriz. Gerçekten $L = a$ konumyla her $\epsilon > 0$ için $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$ koşulu her n indisi için sağlanır.

Örnek 9.9 *Harmonik dizi yakınsar*

İspat: Harmonik dizi $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ dizisidir. Bu diziyi $f(n) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun özel hali olarak düşünürsek, ispatı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

gerektirmesinin sonucu olarak yazabiliriz. Ancak dizinin limiti tanımından gitmek istersek Tanım (9.11)'i de sağlayabiliriz. Her $\epsilon > 0$ için

$$n > N \Longrightarrow |a_n - 0| < \epsilon$$

koşulunu sağlayan bir $N > 0$ sayısının varlığını göstermeliyiz. Arşimed kuralından her n sayısından daha büyük bir N doğal sayısının varlığını biliyoruz. Verilen ϵ sayısı için

$$\left(\frac{1}{\epsilon} < N\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{N} < \epsilon\right) \Leftrightarrow \left(n > N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon\right)$$

olacaktır. buradan

$$n > N \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \Leftrightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

çıkar. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$ olur.

Örnek 9.10

$$\{(-1)^n\} \tag{9.12}$$

dizisi ıraksaktır.

Bu dizi

$$a_n \begin{cases} -1, & n \text{ (tek ise)} \\ +1, & n \text{ (n çift ise)} \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Her L | için $|a_n - L| \geq 1$ eşitsizliğini sağlayan n indileri var olacaktır. Öyleyse hiç bir $\epsilon < 1$ için (9.11) yakınsama koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla dizi ıraksaktır.

9.11 Dizilerde Cebisel İşlemler

Dizileri birer fonksiyon olarak gördüğümüz zaman foksiyonlar üzerinde yapılan cebirsel işlmlerin diziler üzerinde de yapılabileceği ortaya çıkar. Diziler kümesinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri, fonksiyonlar için yaptıklarımıza benzer olarak tanımlanabilir:

Tanım 9.4

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ iki dizi ve λ bir sabit sayı ise

$$\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\} \tag{9.13}$$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \tag{9.14}$$

$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\} \tag{9.15}$$

$$\{a_n\}.\{b_n\} = \{a_n.b_n\} \tag{9.16}$$

$$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \frac{a_n}{b_n} \qquad (b_n \neq 0) \tag{9.17}$$

(9.18)

Bu tanımlaradan anlaşıldığı üzere, diziler üzerinde dört işlem, aynı indisli terimler üzerinde yapılan işlemler cinsinden ifade edilmektedir. Cebirsel işlemleri böyle tanımlayınca, dizilerin limitleri için de benzer tanımlar yapılabilir.

Teorem 9.1

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ve λ sabit gerçel sayı ise,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda\{a_n\}) = \lim_{n\to\infty}\{\lambda a_n\} = \lambda a$$
$$\lim_{n\to\infty}(\{a_n\}+\{b_n\}) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a+b$$
$$\lim_{n\to\infty}(\{a_n\}-\{b_n\}) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a-b$$
$$\lim_{n\to\infty}(\{a_n\}.\{b_n\}) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = a.b$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad (b_n, b \neq 0)$$

olur. Bu sonuçlar tamamen fonksiyonlar için Bölüm 9'de ifade edilen Teorem (10.8)'nin dizilere uygulanmış halidir.

Uyarı 9.1 *Limiti olan bir dizide baştan sonlu sayıda terimin atılması ya da onların başka sayılarla değiştirilmesi limit değerine etki etmez.*

Bunu görmek kolaydır. Dizide baştan itibaren atılan ya dadeğeri değiştirilen sonlu terimlerin sayısı M tane ise limit tanımında $M < N$ almak yetecektir.

Bu uyarı gereğince yukarıda paydaya baştan sonlu sayıda 0 geliyorsa, o terimleri içeren sonlu sayıda terim atılır; geriye kalan sonsuz terimle işlem yapılır. İşlem sonucu değişmez. Yine, iki dizinin baştan sonlu sayıdaki terimleri hariç, geri kalan bütün terimlerde aynı indisli terimler birbirlrine eşit oluyorsa, sözkonusu iki dizinin limitleri birbirlerine eşit olur. O nedenle, yakınsak diziler kümesinde limitlerin eşitliği, bir denklik bağıntısı oluşturur. Bu bağıntıya göre denklik sınıflarını dizi olarak tanımlayabiliriz. Böylece aynı nitelikteki dizilerin işlevlerinin çakışmasından kurtulabiliriz.

Teorem 9.2 *Yakınsak her dizi sınırlıdır.*

İspat:

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ise, tanım uyarınca öyle bir M doğal sayısı var ki her $\epsilon > 0$ için $n > N \Rightarrow L-\epsilon \leq a_n \leq L+\epsilon$ olmasını gerektirir. $\epsilon = 1$ alalım. $n > M$ ise $|a_n| \leq L+1$ olur. $K = max\{a_0, a_1, a-2, \ldots, a_n\}$ olsun $N = max\{K, M\}$ olmak üzere her n indisi için $a_n \leq N$ olocaktır. O halde yakınsak $\{a_n\}$ disisi sınırlıdır.

Teorem (9.2)'nin zayıf karşıtını şöyle ifade edebiliriz:

Teorem 9.3 *Sınırsız her dizi ıraksaktır.*

İspat: İspat olmayana ergi ile yapılabilir. Dizi yakınsak olsaydı Teorem (9.2) uyarınca sınırlı olurdu.

Teorem (9.3)'yi tamamlayarak Teorem (9.2)'in karşıtını veren önemli sonuç şudur:

Teorem 9.4 *Sınırlı her monoton dizi yakınsar*

İspat: $\{a_n\}$ sınırlı monoton artan ya da azalmayan bir dizi olsun. Sınırlılık nedeniyle, her n indisi için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu M sayısı dizinin bir üst sınırı olur. Tabii, dizinin sonsuz çoklukta üst sınırı vardır ve $M < K$ ise K sayısı da bir üst sınır olur. Gerçel sayıların tamlığı nedeniyle dizinin üst sınırları arasında en küçük olan bir L sayısı vardır. Bu sayı $\{a_n\}$ dizisinin *ek küçük üst sınırıdır (eküs, sup, supremum)*. Eküsün tanımı gereğince her $\epsilon > 0$ için

$$L - \epsilon \leq a_n \leq L + \epsilon$$

olur. Söylediklerimizden şu sonuç çıkar: Her $\epsilon > 0$ için öyle bir M sayısı vardır ki

$$n > M \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

çıkar. Bu ise $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olması demektir.

Şimdi de $\{a_n\}$ sınırlı monoton azalan ya da artmayan bir dizi olsun. $\{-a_n\}$ sınırlı monoton artan ya da azalmayan bir dizi olur. Teorem (9.3) uyarınca $-L$ limitine yakınsar. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -(-L) = L$$

çıkar.

Yığılma Noktası: Yakınsak dizi geometrik olarak şunu söyler: ϵ ne kadar küçük olursa olsun, yakınsak dizinin sonlu sayıdaki terimi hariç geri kalan sonsuz çokluktaki terimi $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ aralığındadır. Bu durum analizde dizinin terimleri L ye yığılıyor diye açıklanır. Dizinin limiti onun bir yığılma noktasıdır. Ama her yığılma noktası limit noktası olmayabilir. Bunun tipik örneği (9.12) almaşık dizisidir. Dizinin terimleri -1 ve 1 noktalarına yığılıyor. Ama o yığılma noktalarından hiç birisi dizinin limit noktası değildir.

9.12 Alt Dizi

$\{a_n\}$ dizisi verilsin $\{n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots\}$ olmak üzere $\{a_{n_k}\}$ için $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ kapsaması sağlanıyorsa $\{a_{n_k}\}$ dizisine $\{a_n\}$ dizsinin bir alt dizisi denilir.

Aşağıdaki ifadelerde, soldaki diziler sağdakilerin alt dizisidir.

$$\left\{\frac{1}{2n}\right\} \subset \left\{\frac{1}{n}\right\}$$
$$\left\{\frac{1}{3n}\right\} \subset \left\{\frac{1}{n}\right\}$$
$$\left\{r^{2n}\right\} \subset \left\{r^{n}\right\}$$
$$\left\{1^{n}\right\} \subset \left\{(-1)^{n}\right\}$$
$$\{\sin 2nx\} \subset \{\sin nx\}$$

Lemma 9.1 *Her dizinin ya azalmayan ya da artmayan bir alt dizisi vardır.*

İspat: $\{a_n\}$ dizisi verilsin. İndsler kümesine her $n_1 < m$ için $a_m < a_{n_1}$ koşulunu sağlayan n_1 indisine *doruk noktası* diyelim. Başka bir deyişle, kendisinden sonra gelen bütün terimlerden daha büyük olan terimin indisine *birinci doruk* diyoruz. a_{n_1} den sonra gelen terimlerin en büyüğünün indisine n_2 diyelim. Bu eylemi sürdürürsek,

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \ldots > a_{n_j} > \ldots \tag{9.19}$$

doruklarını elde ederiz. Burada iki durum ortaya çıkabilir.

1. Doruklar sonsuz çokluktadır.

2. Doruklar sonlu sayıdadır.

Doruklar sonsuz çoklukta ise, (9.19) dizisi monoton azalan bir dizidir.

Dorukların sayısı sonlu ise, son doruk noktasının indisine N diyelim. $n_1 = N+1$ olsun. $n_1 > N$ olduğundan a_{n_1} bir doruk nokta değildir. Öyleyse, $a_{n_1} \leq a_{n_2}$ eşitsizliğini sağlayan bir n_2 indisi var olmalıdır. Aynı düşünüşle, a_{n_2} bir doruk olmadığına göre $a_{n_2} \leq a_{n_3}$ eşitsizliğini sağlayan bir n_3 indisi var olmalıdır. Bu eylemi sürdürüsek

$$a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \ldots < a_{n_j} < \ldots \tag{9.20}$$

olacak şekilde monoton artan bir a_{n_k} dizisini kurabiliz. (9.19) ile (9.19) dizileri isteneni sağlar. Yukarıdaki ifadelerde gerekiyors, $<, \quad >$ operatörleri yerine $\leq \ , \quad \geq$ operatöreri konulabilir.

Şimdi Lemma (9.1) kullanılırsa, sınırlı dizilerin çok önemli bir özeliği oraya çıkar:

Teorem 9.5 *(**Bolzano-Weierstrass**) Sınırlı her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.*

Bu teorem gerçel sayılar kümesinin ve daha genel olarak n-boyutlu Öklid uzayının dizisel tıkız olduğunu söyler.

İspat: Sınırlı bir dizinin her alt dizini de sınırlı olur. (9.19) ile (9.19) alt dizileri monoton ve sınırlı dizilerdir. Artık istenen şey Teorem (9.4)'den çıkar.

Teorem 9.6 *Yakınsak bir dizinin her alt dizisi de aynı limite yakınsar.*

İspat: $\{a_n\}$ dizisi L limitine yakınsasın ve $\{a_{n_k}\}$ onun bir alt dizisi olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon \Longrightarrow \quad n_i > N \Rightarrow |a_{n_i} - L| < \epsilon \qquad \blacksquare$$

Aşağıdaki teorem $\mathbb{R}$ uzayında sürekliliğin bir sonucudur. $f(x)$ sürekli ise, her $a_n \to a$ için

Teorem 9.7 $a_n \to a \quad \Longleftrightarrow \quad f(a_n) \longrightarrow f(a) \qquad (n \to \infty)$

olur.

Not: $\mathbb{R}$ uzayında uzayındaki alışkın olduğumuz uzaklığa dayalı olan bu teorem Birinci Sayılabilme Beliti'ni sağlamayan uzaylarda geçerli değildir. Biraz ileri bilgi gerektiren bu teopemi ispatsız kabul ediyoruz.

Örnek 9.11 $\{a_n\} = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm 1: n yerine x koyarak Teorem (9.7)'yi kullanmak en kolay yoldur:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right)\\
&< \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{+2\sqrt{x}}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Çözüm 2: Diziler için limit tanımını kullanalım:

$$
\begin{aligned}
a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad & = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad & < \frac{1}{+2\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

çıkar. Şimdi $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\sqrt{y}-\sqrt{x}=\frac{y-x}{2\sqrt{t}}, \qquad (x<t<y)$$

olur. $x=n$ ve $y=n+1$ koyarsak,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{t}}, \qquad (x<t<n+1)$$

yazılabilir. $n\to\infty$ iken $t\to\infty$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0 \qquad \blacksquare$$

Uyarı 9.2 *$\{a_n\}$ dizisinde n yerine x konulduğunda elde edilen $f(x)$ fonksiyonu yeterince büyük bir $M>0$ sayısı için (M,∞) aralığında sürekli ise*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) \tag{9.21}$$

dir.

Dolayısıyla, dizilerin limitleri fonksiyonların $x\to\infty$ için limitleri gibi hesaplanabilir. Bu dönüşüm dizilerdeki limit problemlerini çok kolaylaştırır.

Örnek 9.12 $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ $\qquad (\alpha>0)$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm1: n yerine x koyarsak $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ fonksiyonu, $(0,\infty)$ aralığında süreklidir. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\equiv\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0 \qquad \blacksquare$$

Çözüm 2: Dizinin limiti tanımını uygulayalım. Arşimet kuralı uyarınca, her $\alpha>0$ için $\frac{1}{p}<\alpha$ olacak şekilde bir p doğal sayısı vardır. Öyleyse

$$0<\frac{1}{n^\alpha}=\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha<\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\frac{1}{n} \to 0\,(n \to \infty)$ olduğundan $u = \frac{1}{n}$ konumuyla $f(u) = u^{\frac{1}{p}}$ fonksiyonu $u = 0$ noktasında süreklidir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \\ &< \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{u\to 0} u^{\frac{1}{p}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0 \qquad (\alpha > 0) \tag{9.22}$$

elde edilir.

Örnek 9.13 $\{a_n\} = \left\{\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}\right\}$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm 1: $\{a_n\}$ dizisinde n yerişne x koyarsak,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &\equiv \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^3+7x^2+1}{4x^3-8x+63}\right) \\ &\equiv \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} \left(\frac{3+7/x+1/x^3}{4-8/x^2+63/x^3}\right) \\ &\equiv \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+0+0}{4-0+0}\right) \\ &\equiv \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Çözüm 2: Diziler için limit tanımı kullanılırsa, $f(x) = \frac{3x^3+7x^2+1}{4x^3-8x+63}\}$ dersek,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3+7/x+1/x^3}{4-8/x^2+63/x^3} = \frac{3}{4}$$

çıkar. Bu ifadede x yerine n koyarsak,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+7/n+1/n^3}{4-8/n^2+63/n^3} = \frac{3}{4}$$ ■

Örnek 9.14

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\} \tag{9.23}$$

dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm 1: $a_n = 1+\frac{1}{n}$ dizisini $\{b_n\} = \{1\}$ sabit dizisi ile $\{c_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ harmonik dizisinin toplamı olarak yazabiliriz. Sağdaki iki dizinin limitleri bilindiğine göre

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n \\ &= 1+0 \\ &= 1 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Çözüm 2:

Denk limitler tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &\qquad = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &\qquad = e \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

çıkar.

Çözüm 3: Dizinin limiti tanımını kullanalım. $t \in [1, 1+\frac{1}{n}]$ olan bir t sayısı seçelim.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \le \frac{1}{t} \le 1$$

olacağından

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,dt \le \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,dt \le \int_1^{1+\frac{1}{n}} 1\,dt$$

Burada ilk integral $\frac{1}{n+1}$, ikinci integral $ln(1+\frac{1}{n})$ ve üçüncü integral $\frac{1}{n}$'ye eşittir. Öyleyse,

$$\frac{1}{n+1} \le ln(1+\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Şimdi $n\to\infty$ iken sağ ve soldali limitler 0 olacağından, cendere teoremi uyarınca ortadak terimde sıfıra gider. Logaritması sıfır olan tek sayı 1 olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} ln a_n = \lim_{n\to\infty} ln(1+\frac{1}{n}) = 0$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \qquad \blacksquare$$

çıkar.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$e^a = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)$$

olduğunu biliyoruz. x yerine n alındığında da aynı limiti elde ederiz.

İspat:

9.13 Dizileri Karşılaştırma

Örnek 9.15 $0 \le |r| < 1$ *ise* $\{r^n\}$ *dizisi bir sıfır dizisidir.*

İspat:

$0 < r < 1$ ise her n için $r^n \le 1$ dir; yani $\{r^n\}$ dizisi sınırlıdır. Ayrıca $r^n > r^{n+1} = r^n.r$ olduğu da apaçıktır. $0 < r < 1$ olduğundan $r^{n+1} < r^n$ dir. O halde dizi sınırlı monoton artmayan bir dizidir. Teorem (9.4) uyarınca bir$L$ limitine yakınsar. Buradan

$$L = \lim_{n\to\infty} r^{n+1} = r \lim_{n\to\infty} r^n = rL$$

yazılabilir. $r \ne 1$ ise, en soldaki ve en sağdaki iki terimin eşitliği ancak $L = 0$ olmasıla mümkündür:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \qquad (0 < r < 1)$$

Şimdi $-1 < r < 0$ alalım. Yukarıdaki durum ile birleştirerek $0 < |r| < 1$ yazbilir ve $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Sonuçolarak,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \qquad (-1 < r < 0)$$

çıkar. Bu iki sonucu birleştirerek,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \qquad (-1 < r < +1) \tag{9.24}$$

genel sonucunu yazabiliriz. Bu sonucun karşıtını hemen ifade edebiliriz.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \pm\infty \qquad (|r| > 1) \tag{9.25}$$

olur; yani dizi ıraksaktır.

Örnek 9.16 $\frac{1+n}{n^2}$

dizisinin yakınsak olup olmadığını inceleyiniz. Yakınsaksa limitini bulunuz.

Çözüm: Limt tanımını uygulayarak çözüme gitmek mümkündür. Ama matematikte önceden elde ettiğimiz teorm ve donuçları birer alet olarak kullamak çözümde doğuşluk ve hız kazandırır. Bu problemin çözümü için iki dizin toplamının limitini kullanalım. Bunun için verilen diziyi iki dizinin toplamı biçiminde yazalım:

$$\frac{1+n}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Sağdaki iki serinin limitleri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0+0 = 0$$

olacaktır.

Teorem 9.8 *$\{b_n\}$ sınırlı bir dizi ve, $\{a_n\}$ bir sıfır dizisi ise*

$$\lim_{n\to\infty} b_n.a_n = 0 \tag{9.26}$$

olur.

İspat: $\{b_n\}$ sınırlı olduğundan

$$|b_n| \leq M \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olacak biçimde bir M sayısı vardır. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğundan

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N)(|b_n| \leq \frac{\epsilon}{M})$$

olur. O halde

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N)(|a_n.b_n| \leq M|a_n| < \epsilon)$$

çıkar ki bu $\lim_{n\to\infty} b_n.a_n = 0$ olması demektir.

Örnek 9.17 $\{\frac{sinn}{n}\}$

dizisinin varsa limitini bulunuz.

Çözüm:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ve her n için $|\sin n| \leq 1$ dir. Teorem (9.8) uyarınca $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$ olur.

Teorem 9.9 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = \infty \tag{9.27}$$

olur.

İspat:

$$(\forall M > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N)(0 < |a_n| < \frac{1}{M}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\forall M > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N)(\frac{1}{|a_n|} > M \qquad \blacksquare$$

Teorem 9.10 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0 \tag{9.28}$$

olur.

İspat:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N)(|a_n| > \frac{1}{\epsilon}$$

olur. Dolayısıyla

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N}) : (\forall n > N)(0 < \frac{1}{|a_n|} < \epsilon \qquad \blacksquare$$

Teorem 9.11 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *ve* $b > a$ *ise, yeterince büyük indisler için*

$$b_n > a_n \tag{9.29}$$

olur.

İspat: Yeterince büyük indisler için demek $\exists M : n > M$ demektir. Buna göre, $\frac{b-a}{2} >$ olduğundan,

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N} : (\forall n > N_1)\left(a_n < a + \frac{b-a}{2}\right)$$

ve

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N} : (\forall n > N_2)\left(b_n < b - \frac{b-a}{2}\right)$$

Bu ikisini birleştirirsek,

$$(\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} : (\forall n > max\{N_1, N_2\})\,(b_n - a_n > 0) \qquad \blacksquare$$

Sonuç 9.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *ve* $b > a$ *ise, yeterince büyük indisler için*

$$b > a_n \tag{9.30}$$

olur.

Teorem 9.12 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *ve* $b > a$ *ise, yeterince büyük indisler için*

$$b_n > a_n \tag{9.31}$$

oluyorsa $a \le b$ *dir.*

İspat: Olmayana ergi ile sonuç görülür.

Cendere teoremi:

Teorem 9.13 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *ve* $\{c_n\}$ *dizileri verilsin. Yeterice büyük bir M sayısı için*

$$n > M \Longrightarrow a_i \le b_i \le c_i \tag{9.32}$$

eşitsizliklei sağlanıyor ve $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$ *oluyorsa,* $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ *olur.*

Bu teoreme bazı kaynaklar sandviç teoremi der. İşin esası dizinin terimlerinin üstten ve alttan sınırlanması ve ütttekinin limitinin alttkinin limitine eşit olmasıdı. O zaman arada sıkışmış olan diznim limiti de ortak limite eşit olur.

Örnek 9.18 $\{n^{\frac{1}{n}}\}$

dizisinin yakoınsadığını gösteriniz.

Çözüm: Bu soruda limitin ne olduğu sorulmuyor, yalnızca yakınsaklığının gösterilmesi isteniyor. yakınsaklığı göstermek için dizinin monoton azalan ve alttan sınırlı olduğunu göstermek yetecekti. Dizinin azalan olduğunu göstermek için

$$n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$$

eşitsizliğinin geçerliğini göstermeliyiz. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (x \geq 1)$ fonksiyonunu düşünelim. $f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1-lnx)}{x^2}$ türevi $x \geq 3$ için negatiftir; yani teğetlein eğimi negatiftir. x yerine n konulursa $n \geq 3$ için $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$ eşitsizliği elde edilir. Dizinin terimleri azalıyor ve alttan 0 ile sınırlıdır. O halde yakınsaktır.