13.05.2024

KUVVET SERİLERİ

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n}_{} = a_0 + a_1.(x-c) + a_2.(x-c)^2 + \ldots x + a_n.(x-c)^n + \ldots y$$

formundaki seri olup, x=c ‘nin kuvvet serisi veya x’in c civarındaki kuvvet serisi de denir. Burada a_0, a_1, a_2, …, a_n katsayılardır. Bu seri x’in değişkeni olup (x’in alacağı değerlere bağlı olup) yakınsak veya ıraksak olabilir. Örneğin;

-1<x<1 için

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

olup, eşitliğin solundaki geometrik seri eşitliğin sağındaki $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonu ile temsil edilmektedir.

Kolaylıkla görüleceği üzere x=1 ve $|x| > 1$ için eşitliğin solundaki seri yakınsak değildir. Dolayısıyla eşitliğin sağ tarafındaki $\frac{1}{1-x}$ fonksiyonu bu noktaların tamamını ifade etmez.

Herhangi bir

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n}_{}$$

kuvvet serisi için aşağıdaki durumlar söz konusu olabilir.

1-) Seri sadece x=c için yakınsak olabilir.
2-) Seri $\forall\ x \in$ R için yakınsak olabilir.
3-) R pozitif bir reel sayı olmak üzere seri;

$-R < x-c < R$

$c-R < x < c+R$

$x \mapsto c$

$c+R$

$c-R$

< - $|x-c| < R$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinde yakınsak YAK

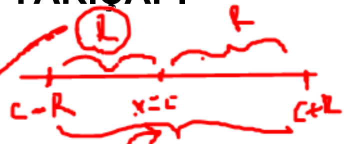
$x < c$ $c < x < R$

- $|x-c| > R$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinde ıraksak YAK

- Aralığın uç noktaları olan x=c-R ve x=c+R noktalarında yakınsak veya ıraksak olabilir.

$R < x < c$ c

YAKINSAKLIK ARALIĞI ve YARIÇAPI



$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n$$

kuvvet serisi x=c merkezli bir aralıkta yakınsak olmak üzere serinin yakınsak olduğu x=c merkezli aralığa "**Serinin Yakınsaklık Aralığı**" denir. Yakınsaklık Aralığının yarısına ise "**Yakınsaklık Yarıçapı**" denir. Dolayısıyla bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı ve yarıçapı için;

1-) Yakınsaklık Aralığı x=c 'de olabilir. [c, c] (Dejenere Kapalı Aralık)
   R=0

2-) Yakınsaklık aralığı $(-\infty. +\infty)$ olabilir.
   R=∞

3-) Yakınsaklık Aralığı [c-R, c+R] ; [c-R, c+R) ; (c-R, c+R] veya
   (c-R, c+R) olabilir.
   R=R

Bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı genel olarak Oran Testi ile bulunur. Dolayısıyla;

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$ limiti mevcut veya ∞ ise;

Bu durumda;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n$$

kuvvet serisi $R = \dfrac{1}{L}$ yakınsaklık yarıçapına sahiptir.

KUVVET SERİLERİ ÜZERİNE CEBİRSEL İŞLEMLER

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n$$

kuvvet serisinde yakınsaklım merkezini c=0 olarak almak suretiyle seriyi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

şeklinde ifade etmek mümkündür.
Bu şekilde ifade edilmiş olan bir kuvvet serisini x=y-c olarak almak suretiyle kolayca;

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(y-c)^n$$

formunda düzenleyebiliriz.

TEOREM:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^n$$

serileri R_a ve R_b yakınsaklık yarıçaplarına sahip iki kuvvet serisi ve c bir sabit sayı olmak üzere;

a-) $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n).x^n$ serisi R_a yakınsaklık yarıçapına sahiptir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n).x^n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$

(Burada $c\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ serisi yakınsaktır)

b-) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n).x^n$ serisi R_a ve R_b yakınsaklık yarıçaplarından küçük olanından daha büyük olacak şekilde R yakınsaklık yarıçapına sahiptir ($R \geq \min(R_a, R_b)$) ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n).x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^n$$

(Burada eşitliğin sağ tarafındaki her iki seri de yakınsaktır)

Yukarıdaki teoremden de görüleceği üzere yakınsak bir kuvvet serisinin bir sabit ile çarpılması veya yakınsak iki kuvvet serisinin toplanması ile elde edilen kuvvet serinin yakınsaklığı üzerine çalışma yapmak oldukça kolaydır. Ancak kuvvet serilerinin çarpımı ve bölümü söz konusu olduğunda ortaya çıkan durum oldukça karmaşıktır. Aşağıda bu hususlarla ilgili olarak bazı sonuçlar verilecek fakat bunların ispatı burada incelenmeyecektir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^n$$

iki kuvvet serisi olmak üzere

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^n$$

Burada

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots\ldots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Yukarıdaki ifadede geçen

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n.x^n$ serisine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n.x^n$ serilerinin **Cauchy Çarpımı** denir. Kuvvet serilerinin toplanmasında olduğu gibi Cauchy Çarpım serisi de verilen serilerin yakınsaklık yarıçaplarından en azından küçük olan yakınsaklık yarı çapına eşit olacak şekilde yakınsaklık yarı çapına sahiptir.

ÖRNEK:

$\dfrac{1}{(1-x)^2}$ **serisini Cauchy Çarpımı ile elde ediniz.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad ; \qquad (-1 < x < 1)$$

olarak bu serinin kendisi ile Cauchy Çarpımı oluşturulursa;

$a_n = b_n = 1$ (n=0, 1, 2, ….)

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} 1 = n + 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots\dots == \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

olarak elde edilmiş olur.

NOT : İlgili seriyi cebirsel olarak elde etmek de mümkündür.

$$\begin{array}{r}
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots = 1/1 - x \\
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots = 1/1 - x \\
\hline
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots \\
x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots \\
x^2 + x^3 + x^4 + \dots\dots \\
x^3 + x^4 + \dots\dots \\
x^4 + \dots\dots \\
\hline
1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots\dots
\end{array}$$

KUVVET SERİLERİNİN TÜREV VE İNTEGRASYONU

Eğer bir kuvvet serisi Pozitif yakınsaklık yarıçapına sahipse seri terim terim türetilebilir veya integre edilebilir. Bu şekilde türetme veya integre etme sonucunda elde edilecek olan seri, başlangıçta verilen serinin yakınsaklık aralığının uç noktaları haricinde (bazı durumlarda olmayabilir) bu serinin toplamına yakınsayacaktır. Bu husus kuvvet serilerinin tıpkı polinom fonksiyonları veya basit fonksiyonlar gibi ele alınıp bunların türevlerinin veya integrallerinin alınabilmesi açısından önemlidir. Dolayısıyla bir çok durumda kuvvet serileriyle işlem yapmak basit olmadığı halde bu serilerin yerine yazılabilecek daha basit polinom fonksiyonları ile türev ve integrasyon işlemi yapmak daha kolay olacaktır. Bu amaçla aşağıdaki iki temel teoremi incelemiş olalım.

TEOREM I: Kuvvet Serilerinin Terim-Terim Türevi ve İntegrasyonu:

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ kuvvet serisi R>0 olmak üzere (-R, R) aralığında f(x)

toplamına yakınsarsa yani;

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.. \qquad ; \quad (-R<x<R)$$

ise bu durumda f(x) fonksiyonu (-R, R) aralığında türetilebilir bir fonksiyondur. Yani;

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n . x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots.. \qquad ; \quad (-R<x<R)$$

olur. Dolayısıyla f(x) fonksiyonu bu aralıkta türevli olduğundan integralini de;

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \ldots...$$

olarak yazabiliriz.

ÖRNEK:

$1/(1-x)^2$ **fonksiyonunun Kuvvet Serisi gösterilimini ifade ediniz.**

Verilen ifade için öncelikle $\dfrac{1}{(1-x)}$ fonksiyonunun geometrik seri açılımı yazılırsa;

$$\frac{1}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

verilen seri için uygun türev, integral veya dönüşüm (değişken değiştirme) yoluyla gerekli işlemler yapılarak aranan çözüm elde edilmiş olur.
Bu amaçla serinin terim terim türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)}=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

ÖRNEK:

$\dfrac{1}{(1-x)^3}$ fonksiyonunun Kuvvet Serisi gösterilimini ifade ediniz.

Bir önceki soruda elde edilen seri (-1 < x < 1) için bir mertebe daha türetilirse;

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots \; ; (-1 < x < 1)$$

$$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=(1.2)+(2.3)x+(3.4)x^2+(4.5)x^3+\ldots$$

Bu seri 2 ile bölünürse;

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}=1+2x+6x^2+10x^3+\ldots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

olarak elde edilmiş olur.

ÖRNEK:
Ln(1+x) fonksiyonunun Kuvvet Serisi gösterilimini ifade ediniz.

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

serisinde x yerine –t yazılırsa;

$$\frac{1}{(1+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \ldots ; (-1 < t < 1)$$

olur. Bu seriyi ($|x| < 1$) olarak t=0’dan t=x’e kadar integre edersek;

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t)} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt$$

$$\mathrm{Ln}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n + 1}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad ; (-1 < x \leq 1)$$

Bu seri x=1 noktasında şartlı yakınsak olmak üzere -1 < x < 1 aralığında yakınsaktır. Ln(1+x) fonksiyonu x=1 noktasında sürekli olduğundan seri x=1 noktasında fonksiyona yakınsamak zorundadır.

Dolayısıyla alterne harmonik serinin Ln2 değerine yakınsayacağını söyleyebiliriz.

$$\mathrm{Ln}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

ÖRNEK:
Bir önceki soruda elde ettiğiniz geometrik seriyi kullanarak Arctanx fonksiyonunun Kuvvet Serisi Gösterilimi bulunuz.

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

serisinde x değişkenini $-t^2$ ile değiştirirsek (-1 < t < 1) için ($-1 \leq t^2 < 1$);

$$\frac{1}{(1+t^2)} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \ldots \qquad ; (-1 < t < 1)$$

Bu ifadeyi olarak t=0'dan t=x'e kadar integre edersek;

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)} dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \ldots\right) dt$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc}\tan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad ; \quad ; (-1 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

Bu serinin x=-1 ve x=1 noktalarında şartlı yakınsak olduğu açıktır. Arctanx fonksiyonu x=-1 ve x=1 noktalarında sürekli olduğundan yukarıdaki seri bu noktalardaki değere sahip olacaktır. Eğer elde ettiğimiz seride x=1 değerini verirsek;

$$\operatorname{Arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

elde edilir ki bu ifade π sayısının yaklaşık değerini elde etmek için kullanabileceğimiz sağlıklı bir yöntem değildir.

ÖRNEK:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ **Serisinin toplamını öncelikle serinin kuvvet serisinin toplamını bulmak suretiyle bulunuz**.

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

srisini x ile çarparsak;

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n}=x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots \qquad ; (-1 < x < 1)$$

Bu ifadenin türevini alırsak;

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n}=\frac{d}{dx}\left(x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots\right)$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=1+4x+9x^2+16x^3+\dots$$

itenen seriyi elde etmek için bu ifadeyi tekrar x ile çarparsak;

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n}=x+4x^2+9x^3+16x^4+\dots$$

Serinin türetilmesi veya x ile çarpılması serinin yakınsaklık yarıçapını değiştirmeyeceğinden bu seri -1 < x < 1 için verilen fonksiyona yakınsar. Dolayısıyla x=1/2 yazılmak suretiyle;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\left.\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right|_{x=1/2}=\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}}=6$$

olarak serinin toplamı bulunmuş olur.

ÖRNEK:

$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **fonksiyonunun (x-1) in kuvvetlerine göre olan Kuvvet Serisini elde ederek, bu serinin yakınsaklı aralığını bulunuz.**

t= x-1 olmak üzere x=t+1 olarak;

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{3^2} - \frac{t^3}{3^3} + \frac{t^4}{3^4} - \dots\right) \qquad ; (-1 < t/3 < 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} \qquad ; (-3 < t < 3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} \qquad ; (-2 < x < 4)$$

Buradan kolaylıkla görüleceği üzere serinin yakınsaklık yarıçapı 3 olup, yakınsaklık merkezinden olan uzaklık ise -2 den 1’e kadardır.

(**Not:** Bu tür kuvvet serilerinin yakınsaklık merkezi ve yakınsaklık yarıçapı bulunduğunda yakınsaklık aralığının (veya yakınsaklık aralığı bulunduğunda yakınsaklık merkezi ve yakınsaklık yarıçapının) bulunması daha önceki konularda ayrıntılı olarak anlatılmıştı.)

TAYLOR ve MACLAURIN SERİLERİ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n$$

kuvvet serisi eğer R>0 olacak şekilde yakınsaklık yarıçapına sahipse bu durumda seri toplamı (c-R, c+R) aralığında f(x) fonksiyonunu tanımlar. Bu durumdaki kuvvet serisine verilen aralıkta f(x) fonksiyonunun ifadesidir denir ve

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x-c)^n = a_0 + a_1.(x-c)+......+a_n.(x-c)^n+.....$$

olarak ifade edilir.

f(x) fonksiyonu c-R < x < c+R (R>0) için yakınsak olduğundan

$$a_k=\frac{f^{(k)}(c)}{k!} \quad ; k=0, 1, 2, ...$$

yazılabilir.

İSPAT:
Yukarıda verilen f(x) fonksiyonu art arda türetilmek suretiyle;

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2.(x-c)+3a_3.(x-c)^2+.....$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1).a_n.(x-c)^{n-2} = \boxed{2a_2}+6a_3.(x-c)+12a_4.(x-c)^2+.....$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2).....(n-k+1).a_n(x-c)^{n-k}$$

$$=k!a_k+\frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(x-c)+\frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}(x-c)^2+.......$$

olarak yazılabilir. Her seri

c-R < x < c+R için yakınsak olup x=c için düzenlenirse;

$$f^{(k)}(c) = k!.a_k$$

olarak elde edilmiş olur..
f(x) fonksiyonu x=c merkezli ve pozitif yakınsaklık yarıçaplı seriyi temsil ettiğine göre x=c yi içeren aralıkta bütün mertebeden türevlere sahip olmak ve x-c'nin kuvveti olarak sadece ve sadece tek bir gösterilime sahip olmak zorundadır. Dolayısıyla;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ...$$

olarak yazılacaktır.
Yukarıdaki seriye f(x) fonksiyonunun x=c noktasındaki ((x-c) nin kuvvetlerine göre) **Taylor Serisi** denir.

Eğer c=0 ise seriye f(x) fonksiyonunun x=0 noktasındaki (x in kuvvetlerine göre) **Maclaurin Serisi** denir.

$$\underbrace{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + ...}_{f(x)in..Taylor..Serisi}$$

$$\underbrace{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + ...}_{f(x)in..Maclaurin..Serisi}$$

ANALİTİK FONKSİYON

f(x) fonksiyonu x=c noktasını içeren açık bir aralıkta Taylor Serisine sahip ve bu seri x=c noktasında f(x) fonksiyonuna yakınsıyor ise f(x) fonksiyonuna x=c noktasında **Analitik Fonksiyon** denir. Eğer f(x) fonksiyonu bu aralığın her noktasında analitik ise fonksiyona bu aralıkta nalitik bir fonksiyon denir.

BAZI ELAMENTER FONKSİYONLARIN TAYLOR VE MACLAURIN SERİLERİ

Verilen bir fonksiyonun Taylor veya Maclaurin Serisi'ni elde etmek için daha önce elde ettiğimiz;

$$\underbrace{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots}_{f(x)\text{ fonrksiyonunun Taylor Seri açılımı}}$$

$$\underbrace{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots}_{f(x)\text{ fonrksiyonunun Maclaurin Seri açılımı}}$$

açılımlarından da görüleceği üzere fonksiyondan ilk birkaç türevi hesaplamak, hesaplanan bu türevlerden yararlanmak suretiyle fonksiyonun n. mertebe türevini formüle etmek ve bu sayede ilgili seri açılımlarını yazmak mümkün olmaktadır. Bu nedenle bu başlık altında verilecek olan örnekler veya uygulamalar bahsi geçen durum nedeniyle (fonksiyonun n. mertebe türevini formüle etmek kolay olsun diye) $(ax+b)^r$, e^{ax+b} , $\mathrm{Ln}(ax+b)$, $\mathrm{Sin}(ax+b)$, $\mathrm{Cos}(ax+b)$ gibi fonksiyonlar ya da bunların toplamlarından oluşan fonksiyonlar olacaktır.

BAZI FONKSİYONLARIN MACLAURIN SERİLERİ

$$\frac{1}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+x^{3}+\ldots \quad ; \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{(1-x)^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^{2}+4x^{3}+\ldots \quad ; \quad (-1 < x < 1)$$

$$\mathrm{Ln}(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{n}+1}{n+1}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\ldots \quad ; \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\mathrm{Arc}\tan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\frac{x^{9}}{9}-\ldots ; \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots \quad ; \quad (\text{her } x \text{ için})$$

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{n}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}-\ldots \quad ; \quad (\text{her } x \text{ için})$$

$$\mathrm{Sinh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\frac{x^{7}}{7!}+\ldots ; \quad (\text{her } x \text{ için})$$

$$\mathrm{Cosh}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{x^{6}}{6!}+\ldots \quad ; \quad (\text{her } x \text{ için})$$

NOT :
Bazı fonksiyonların Maclaurin Seri açılımın yazılmasında yukarıdaki temel fonksiyonlara ait Maclaurin seri açılımlarının bilinmesi büyük ölçüde işlem kolaylığı sağlar. Aksi halde ilgili türevlerin hesaplanması ve Maclaurin Seri açılımında yazılması gerekmektedir.

TAYLOR, MACLAURIN SERİ UYGULAMALARI

ÖRNEK:

e^x fonksiyonunun x=c noktasındaki Taylor Serisini yazarak elde ettiğiniz serinin yakınsaklık aralığını bulunuz, fonksiyonun nerede analitik olduğunu inceleyiniz, Maclaurin Serisini yazınız.

verilen fonksiyonun türevleri bulunmak istenirse;

$$f(x)=e^x \quad ; \quad f(c)=e^c$$

$$f'(x)=e^x \quad ; \quad f'(c)=e^c$$

$$f''(x)=e^x \quad ; \quad f''(c)=e^c$$

$$f'''(x)=e^x \quad ; \quad f'''(c)=e^c$$

.

.

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad ; \quad f^{(n)}(c)=e^c$$

$$f(x)=\sum a_n\cdot(x-c)^n=\sum\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\dots$$

$$=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3+\dots$$

olarak fonksiyonun Taylor Serisi için bu değerler;

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n=f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\dots..$$

Taylor Seri Açılımında yazılırsa;

$$e^x=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^c}{n!}(x-c)^n}_{=\sum a_n(x-c)^n}=e^c+e^c(x-c)+e^c\frac{(x-c)^2}{2!}+e^c\frac{(x-c)^3}{3!}+\dots..+\frac{e^c}{n!}(x-c)^n+\dots$$

olarak elde edilmiş olur.
Bu serinin yakınsaklık yarıçapı;

$$L=\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^c}{(n+1)!}}{\frac{e^c}{(n)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$$R=\frac{1}{0}=\infty$$

0−R   0+R

x=c=0

yak. Aralığı

$-R<x<R$ için YAK.

seri $\forall x\in\mathbb{R}$ için yak.

olarak seri her x değeri için yakınsaktır.

$$g(x)=e^c+e^c(x-c)+e^c\frac{(x-c)^2}{2!}+e^c\frac{(x-c)^3}{3!}+.....$$

toplamını ele alalım. Bu ifadenin türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dx}g(x)=g'(x)=0+e^c+e^c\,2\frac{(x-c)}{2!}+e^c\,3\frac{(x-c)^2}{3!}+e^c\,4\frac{(x-c)^3}{4!}+.....$$

olarak eşitliğin sağ tarafı sonsuz terimli bir seri olduğundan;

$$g'(x)=e^c+e^c(x-c)+e^c\frac{(x-c)^2}{2!}+e^c\frac{(x-c)^3}{3!}+.....=g(x)$$

Dolayısıyla;

$$g'(x)=g(x)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu ifadenin çözümünden C integral sabiti olmak üzere;

$$g'(x)=g(x)=Ce^x$$

$f(x)=e^x=\underbrace{\sum \frac{e^c}{n!}(x-c)^n}_{\text{Taylor Serisi}}$

ifadesinde x=c yazılarak;

$$g'(x)=e^c=g(c)=Ce^c$$

olarak C=1 olarak bulunur.
Dolayısıyla verilen fonksiyonun Taylor Serisi (x-c) nin kuvvet serisine her x değeri için yakınsar. Dolayısıyla;

c=0 için Maclaurin seri

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$

Taylor

$$=e^c+e^c(x-c)+e^c\frac{(x-c)^2}{2!}+e^c\frac{(x-c)^3}{3!}+.....\quad ;\ (\text{her x için})$$

Bu ifadeden de görüleceği üzere fonksiyon Reel eksende her noktada analitiktir. Fonksiyonun Maclaurin Serisini elde etmek için ise c=0 yazılırsa;

Maclaurin

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}.....\qquad ;\ (\text{her x için})$$

ÖRNEK:

Sinx fonksiyonunun Maclaurin Serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz. $f(x)=\sin x$

$f(x) \approx \sum a_n x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$

$$f'(x)=\text{Cos}x \quad ; \qquad f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\text{Sin}x \; ; \qquad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\text{Cos}x \qquad ; f'''(0)=-1$$
$$f^{(4)}(x)=\text{Sin}x \qquad ; f^{(4)}(0)=0$$
$$f^{(5)}(x)=\text{Cos}x \qquad ; f^{(5)}(0)=1$$

. .

. .

Bu türev ifadeleri Maclaurin açılımında yerine yazılırsa;

$$g(x)=0+x+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\frac{x^7}{7!}+\dots..$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots..$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum a_n \cdot x^n$$

Yakınsaklık yarıçapı için;

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\cancel{x^{2(n+1)+1}}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cancel{x^{2n+1}}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\cancel{x^2}\right|=\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\left|\cancel{x^2}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\left|\cancel{x^2}\right|$$

$$=0 \Rightarrow \frac{1}{R}=0 \Rightarrow R=\frac{1}{0}=\infty$$

Y. Yarıçapı ∞ için seri $\forall x \in \mathbb{R}$ için YAK.

$R = \infty$ olarak seri her x reel değeri için (reel eksende) yakınsaktır.

Dolayısıyla yukarıda elde ettiğimiz;

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

fonksiyonu her x değeri için Sinx fonksiyonuna yakınsayacağından bu durumda g(x) yerine Sinx yazabiliriz. Dolayısıyla Sinx fonksiyonunun ~~Taylor~~ Maclaurin Serisi,

$$\text{Sinx} = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}_{} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}_{} \quad ;\ (\text{her } x \text{ için}) \checkmark$$

$\forall x \in \mathbb{R} \checkmark$

olarak elde edilmiş olur.

ÖRNEK:

$f(x) =$ **Cosx fonksiyonunun Maclaurin Serisini ve yakınsaklık aralığını bulunuz.**

$f(x) = \cos x \quad ; \quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\text{Sinx} \quad ; \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\text{Cosx} \quad ; \quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = +\text{Sinx} \quad ; \quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = +\text{Cosx} \quad ; \quad f^{(4)}(0) = +1$

$f^{(5)}(x) = -\text{Sinx} \quad ; \quad f^{(5)}(0) = 0$

. .

. .

. .

$$f(x) = \text{Cosx} = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + \ldots = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$L = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)}{\ldots} \right|$$

$\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = \infty$

Bu türev ifadeleri Maclaurin Açılımında yerine yazılırsa;

$$\text{Cosx} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots}_{} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \checkmark \quad ;\ (\text{her } x \text{ için})$$

olarak elde edilmiş olur. Yakınsaklık aralığı incelenirse serinin $(-\infty, \infty)$ aralığında yakınsak olduğu görülür.

14.05.2024

ÖRNEK : $f(x) = \sum a_n x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

$f(x) =$ $e^{-x^2/3}$ **fonksiyonunun Maclaurin serisini yazınız.**

$e^x = \sum \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x} = \sum \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

Verilen fonksiyon için;

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

ifadesinde x değişkeni yerine $x^2/3$ yazılırsa;

$$e^{-x^2/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^4 - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x^2}{3}\right)^4 - \dots$$

$\sum b_n . x^n$

ÖRNEK :

$f(x) =$ $\mathrm{Sin}(x^2)/x$ **fonksiyonunun Maclaurin serisini yazınız.**

Verilen fonksiyon için;

$$\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

açılımında x yerine x^2 yazılıp bulunan ifade x'e bölünürse;

$$f(x) = \frac{\mathrm{Sin}(x^2)}{x} = \frac{(x^2) - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \frac{(x^2)^7}{7!} + \dots}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1}}{x}$$

$$= x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$$

NOT :

Kolaylıkla görüleceği üzere $\dfrac{\operatorname{Sin}(x^2)}{x}$ fonksiyonu x=0 noktasında tanımlı değildir. Fakat $x \to 0$ için limite sahiptir. Dolayısıyla eğer fonksiyonu x=0 noktasında f(0)=0 olarak tanımlarsak (yani x=0 noktasında süreklilik genişleme fonksiyonunu f(x) olur) bu durumda seri her x değeri için f(x) fonksiyonununa yakınsamış olur.

ÖRNEK :

$\operatorname{Sin}^2 x$ **fonksiyonunun Maclaurin serisini yazınız.**

Verilen fonksiyon için Maclaurin serisini ($\operatorname{Sin}^2 x$ fonksiyonunun trigonometrik eşitinin alınış şekline göre) değişik şekillerde yazmak mümkündür.

$$\operatorname{Sin}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

olarak alınırsa bu durumda,

$$\operatorname{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

serisinde x yerine 2x yazılıp verilen cebirsel eşitlik oluşturulursa;

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1-\left(1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^4}{4!}-\dfrac{(2x)^6}{6!}+\ldots..\right)}{2} = \frac{1-\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right)}{2}$$

$$\operatorname{Sin}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots..\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$\operatorname{Sin}^2 x = \frac{1}{2}\left(\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\ldots..\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$\sum a_n . x^n$

ÖRNEK :
Lnx fonksiyonunun (x-2) nin kuvvetlerine göre Taylor serisini bularak, bulduğunuz serinin nerelerde Lnx fonksiyonununa yakınsadığını belirleyiniz.

$t = \dfrac{x-2}{2}$ olarak seçilirse;

$$\mathrm{Ln}x = \mathrm{Ln}\big(2 + (x-2)\big) = \mathrm{Ln}\left[2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)\right] = \mathrm{Ln}2 + \mathrm{Ln}(1+t) \qquad (*)$$

$$\mathrm{Ln}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

olduğunu dikkate alırsak (*) ifadesini;

$$\mathrm{Ln}(x) = \mathrm{Ln}2 + \mathrm{Ln}(1+t) = \mathrm{Ln}2 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots$$

$$= \mathrm{Ln}2 + t - \frac{(x-2)^2}{2.2^2} + \frac{(x-2)^3}{3.2^3} - \frac{(x-2)^4}{4.2^4} + \ldots$$

$$= \mathrm{Ln}2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.2^n}(x-2)^n$$

Ln(1+t) serisi ($-1 < t \leq 1$) için yakınsak olduğundan Lnx serisi için elde ettiğimiz yukarıdaki seri;

$$-1 < t \leq 1$$

$$-1 < \frac{x-2}{2} \leq 1$$

$$0 < x \leq 4$$

için geçerli olur.

ÖRNEK :
Cosx fonksiyonunun $\pi/3$ noktası civarındaki Taylor serisini bularak, serinin geçerli olduğu aralığı bulunuz.

Bu soruyu değişik şekillerde çözmek mümkündür.

$$\mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{Cos}\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \mathrm{Cos}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} - \mathrm{Sin}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{Sin}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\mathrm{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

olarak yukarıdaki ifadeler bu açılımlardan düzenlenirse (veya Cosx fonksiyonu ilgili türevler hesaplanarak Taylor Serisine açılırsa);

$$\mathrm{Cos}x = \mathrm{Cos}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - ...\right]$$
$$- \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + ...\right]$$

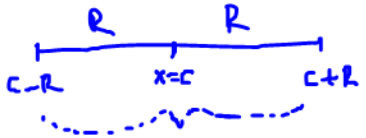
$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - ...$$

Serinin açılımından da görüleceği üzere seri analitik açılıma sahip olup reel eksende geçerlidir. (Bu ifade Sinx ve Cosx fonksiyonlarının seri açılımları ile elde edildiğinden aynı sonuç Sin ve Cos fonksiyonlarının x-c nin kuvvetlerine göre seriye açıldığında da kolaylıkla görülebilir.)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm-1

$\sum a_n.(x-c)^n$



Yakınsaklık aralığı

$-R < x-c < R$

$c-R < x < c+R$

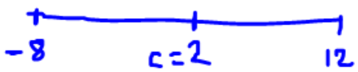
$(c-R, c+R)$

Uç noktalar?

$L = \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{1}{10^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10}$$

$\frac{1}{R} = \frac{1}{10} \Rightarrow R = 10 \rightarrow$ Yak. Yarıçapı



$\Rightarrow \underbrace{-8 < x < 12}_{\text{Yakınsaklık aralığı}}$

$x=-8$ ve $x=12$'deki seri davranışı??

Uç Noktalar için:

$x=-8 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-8-2)^n}{10^n} = \sum (-1)^n \rightarrow$ olarak seri "alterne seridir"

$1-1+1-1\ldots$

Alterne seri testine göre "seri IRAKSAK"tır.

$x=12$ ise:

$\sum \frac{(12-2)^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ olarak seri "IRAKSAK".

Dolayısıyla:

$\sum \frac{(x-2)^n}{10^n}$ için: $\begin{cases} R=10 \\ \underbrace{\text{Y. Aralığı}}_{\text{Tam Yakınsaklık Aralığı}} \quad -8 < x < 12 \end{cases}$

Çözüm-2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n} \to a_n$$

Eğer seri yakınsak ise

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{(x-2)^n} \right| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-2}{10} \right| < 1$$

$$= \frac{|x-2|}{10} < 1$$

$$= |x-2| < 10$$

$$-10 < x-2 < 10$$

$$-10+2 < x < 10+2$$

$$\underbrace{-8 < x < 12}_{\text{Yakınsaklık aralığı}}$$

$$R = \frac{12-(-8)}{2} = 10 \to \text{Yak. yarıçapı}$$

Buroda yine $\underbrace{\text{uç noktalar}}_{x=-8;\ x=12}$ için inceleme yapılır.

⋮

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$; Yak. aralığı ve yarıçapını bulunuz.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ için $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $\begin{cases} \rho \in [0,1) \Rightarrow \text{Yak.} \\ \rho \in (1,\infty) \Rightarrow \text{Irak.} \\ \rho = 1 \Rightarrow ? \end{cases}$

$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ için YAK.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n} \right| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| < 1$$

$$= |x-1| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right| < 1$$

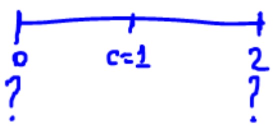
$$|x-1| \cdot \left| \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} \right| < 1$$

$$|x-1| < 1$$

$$-1 < x-1 < 1$$

$0 < x < 2 \rightarrow$ Yak. aralığı

$R = \frac{2-0}{2} = 1 \leftarrow$ Yak. Yarıçapı



Uç Noktalar için:

$x=0$ ise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow \text{Alterne seri}$$

$$\begin{cases} \bullet\ a_n \cdot a_{n+1} < 0 \\ \bullet\ |a_{n+1}| \leq |a_n| \\ \bullet\ \lim_{n\to\infty} (a_n) = 0 \end{cases}$$

Bu koşullar sağlanır ise Alterne seri YAK.

Verilen seri. Alterne seri testine göre YAKINSAKTIR.

$x=2$ için:

$$\sum \frac{(2-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1^n}{\sqrt{n}}$$

olarak seri "p-testine göre $p=\frac{1}{2}<1$" olup IRAKSAK.

Dolayısıyla

$$\begin{cases} \cancel{0 \leq}\ x < 2 \ ; \text{Yak. Aralığı} \\ [0,2) \\ R = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = ? \quad \left[\frac{0}{0}\right]^{B}$$ Limitini seri çözümü ile bulunuz.

$\sin x$ 'in Maclaurin serisi yazılırsa:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$\sqrt[3]{1.20}$ değerini ikinci derece seri açılımı ile bulunuz.

2. derece Taylor serisi (polinomu) ile

$y = f(x)$

$$f(x) = \sum a_n (x-c)^n = \underbrace{f(c)}_{?} + \underbrace{\frac{f'(c)}{1!}}_{?}(x-c) + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}}_{?}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

$f(x) = \sqrt[3]{x}\ ;\ c = 1$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^{-2/3} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$

$f''(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-5/3}\ ;\ f''(1) = -\frac{2}{9}$

$$f(1.20) = \sqrt[3]{1.20} \cong f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(\overset{1.20}{x}-1) + \frac{f''(1)}{2!}(\overset{1.20}{x}-1)^2$$

$$\cong 1 + \frac{1}{3}\cdot(1.20-1) + \left(-\frac{2}{9}\right)\frac{1}{2!}\cdot(1.20-1)^2$$

$$\cong 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{2}{18}(0.2)^2$$

$$\cong 1 + \frac{0{,}2}{3} - \frac{1}{9}(0{,}2)^2$$

$$\cong 1{,}064$$

TAYLOR ve MACLAURIN SERİLERİNİN UYGULAMALARI

FONKSİYONLARIN YAKLAŞIK DEĞERİNİ BULMA:
Önceki bölümlerde karmaşık fonksiyonlar için Taylor ve Maclaurin Polinomlarının (Taylor ve Maclaurin Serilerinin kısmi toplamlarının) nasıl polinom yaklaşımı olarak alınabileceğini incelemiştik. Bu bağlamda fonksiyonların yaklaşık değerlerinin hesaplanabilmesi için Taylor Formülündeki Lagrange Kalanı için Maclaurin serisinden kaç terim alınması gerektiğini de belirlemek mümkün olmuştu.
Aşağıda yapacağımız uygulamalarda yapılan hata sınırlamasının bu tür yaklaşımlar için alterne seri ile nasıl ilişkili olduğu incelenecektir. Bu bağlamda serinin genel terimi için daha önce alterne seri testinde belirttiğimiz;

- Serinin ardışık iki teriminin ters işaretli olması
- Azalan olması
- Limitinin sıfıra yakınsamasi

hususlarının hatırlanmasında fayda vardır.

ÖRNEK:
$\text{Cos}43^\circ$ **değerini yapılacak olan hata 1/10.000 (10^{-4}) 'den küçük olacak şekilde seri çözümü ile bulunuz.**

ÇÖZÜM-1.
Cosx fonksiyonu için bulduğumuz Maclaurin Serisini ele alırsak;

$$\text{Cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

x yerine 43° yazarsak;

$$\text{Cos}43^\circ = \frac{\text{Cos}43\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6 + \ldots..$$

olarak elde ederiz.

$$\frac{43\pi}{180} \approx 0.75049... < 1$$

olarak seri seri yukarıda belirttiğimiz şartların (alterne, azalan ve genel teriminin limiti sıfır) üçünü de sağlamaktadır. Eğer serinin n. terimden sonraki terimlerini kesersek bu durumda yapılan hata serinin ilk n terimine kadar (sınırlı sayıda) olan terimlerinden dolayı yapılan hata ile sınırlı olacaktır.

n. teriminden önceki genel terim;

$$\text{Cosx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

İfadesinden yararlanılarak;

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n-2}$$

olarak yapılan hata;

$$|E| \leq \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^{2n} < \frac{1}{(2n)!}$$

Bu durumda yapılan hata 1/10.000 ‘i geçmeyecektir.
Eğer (2n)! > 10.000 ise bu durumda n=4 olacaktır. (8!=40.320)

Dolayısıyla Cosx fonksiyonunun Maclaurin Serisinden eğer 4 terim alınısa bu durumda elde edilecek olan 4 terimli Maclaurin Polinomunun toplamı ile bulunacak değer ile Cosx fonksiyonunun gerçek değeri arasındaki hata 1/10.000’den daha küçük olacaktır.

$$\text{Cos}43^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{43\pi}{180}\right)^6 = 0{,}73135...$$

ÇÖZÜM-2.

43° değeri 45° değerine yakın olduğundan $45^\circ = \pi/4$ olarak Cosx fonksiyonunun $x = \pi/4$ noktasındaki Taylor Serisini yazarsak;

$$\mathrm{Cos}43^\circ = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\right)$$

$$= \mathrm{Cos}\frac{\pi}{4}.\mathrm{Cos}\frac{\pi}{90} + \mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}.\mathrm{Sin}\frac{\pi}{90}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^6 + \dots\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\pi}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^5 - \right)\right]$$

$\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3 < \frac{1}{20.000}$ olduğundan;

Bu durumda yukarıda yazmış olduğumuz seri için birinci kısmın ilk 2, ikinci kısmın ise birinci terimini almamız yeterli olacaktır.
Bu durumda;

$$\mathrm{Cos}43^\circ \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\right) + \left(\frac{\pi}{90}\right)\right] = 0.731358\dots$$

olarak hesaplanmış olur. ($\mathrm{Cos}43^\circ = 0.7313537\dots$)

BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bu başlık altında yapılacak olan incelemeler $\frac{0}{0}$ belirsizliğinin oluştuğu durumlarda belirsizliği gidermek için fonksiyonun Maclaurin Polinomunun yazılarak, bu polinomdan yeteri sayıda terim almak suretiyle belirsizliğin giderilmesine yönelik olacaktır. Bu bağlamda aşağıdaki uygulamaları inceleyelim.

ÖRNEK:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{Sin}x}{x^3}$ **Limitini Seri Çözümü ile bulunuz**.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{Sin}x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \text{Belirsiz}$$

Verilen ifade için Sinx fonksiyonunun Maclaurin Serisi yazılırsa;

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{Sin}x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots..\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)\operatorname{Ln}\left(1+x^3\right)}{\left(1-\operatorname{Cos}3x\right)^2}$$ **Limitini Seri Çözümü ile bulunuz.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-1\right)\operatorname{Ln}\left(1+x^3\right)}{\left(1-\operatorname{Cos}3x\right)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\rightarrow \text{Belirsiz}$$

Belirsizliği gidermek üzere;

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$ serisinde x yerine 2x

$$\operatorname{Ln}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$ serisinde x yerine x^3

$$\operatorname{Cos}x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots..$$ serisinde x yerine 3x

yazılarak seriler düzenlenir ve yukarıdaki ifadede yerlerine yazılırsa;

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\ldots-1\right)\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\ldots\right)}{\left[1-\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^4}{4!}-\ldots\right)\right]^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4+2x^5+\ldots}{\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{3^4}{4!}x^4+\ldots\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+2x+\ldots}{\left(\frac{9}{2}-\frac{3^4}{4!}x^2+\ldots\right)^2}=\frac{2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{8}{81}$$