Yıldız Teknik Üniversitesi
Kimya-Metalurji Fakültesi
Matematik Mühendisliği

MTM2521 Nümerik Analiz 1 Gr.1

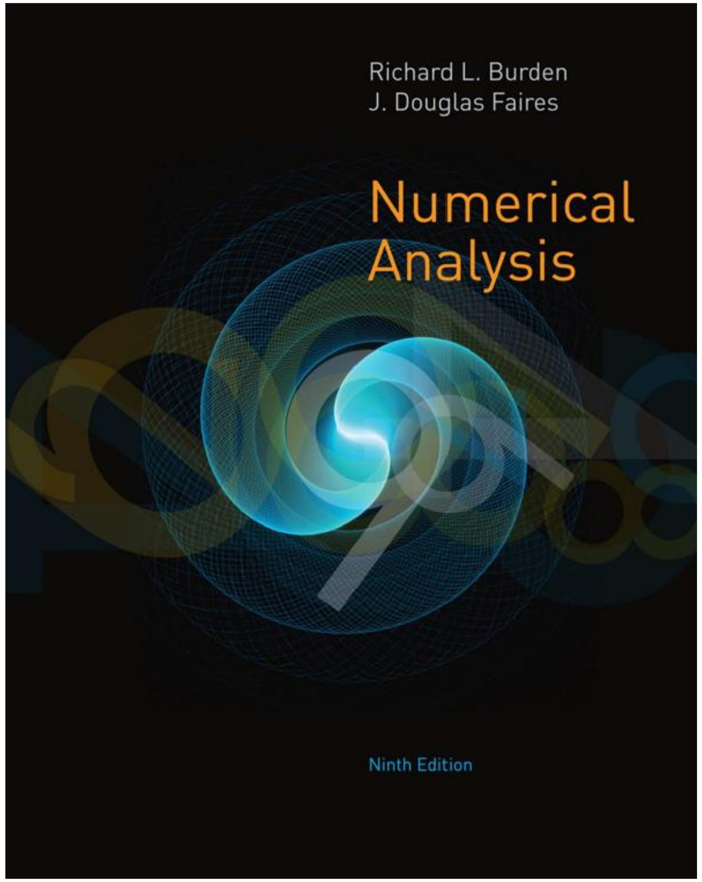
Dr. Öğr. Üyesi Dr. Fatih Aylıkcı

İletişim Bilgileri

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkcı
Yıldız Teknik Üniversitesi. Kimya-Metalurji Fakültesi. Matematik Mühendisliği Bölümü A237 DAVUTPAŞA

Tel: 02123834616 E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr
Web: https://avesis.yildiz.edu.tr/faylikci

Kaynak Kitaplar



Numerical Analysis,
Richard L. Burden, J. Douglas Faires

Haftalık Konular

Hafta	Konular	Ön Hazırlık
1	Matematiksel Önbilgiler	Kaynaklardaki ilgili bölüm
2	Lineer olmayan denklemlerin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
3	Lineer olmayan denklemlerin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
4	İnterpolasyon ve polinom yaklaşımı	Kaynaklardaki ilgili bölüm
5	İnterpolasyon ve polinom yaklaşımı	Kaynaklardaki ilgili bölüm
6	Ters interpolasyon ve Eğri uydurma	Kaynaklardaki ilgili bölüm
7	Eğri uydurma	Kaynaklardaki ilgili bölüm
8	Ara Sınav 1	
9	Lineer denklemler sistemlerinin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
10	Lineer denklemler sistemlerinin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
11	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
12	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
13	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
14	Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Sayısal çözümleri	Kaynaklardaki ilgili bölüm
15	Final	

http://bologna.yildiz.edu.tr/index.php?r=course/view&id=1503&aid=24

Ders Öğrenim Çıktıları

Ders Öğrenim Çıktıları

1. Öğrenciler nümerik çözüm yapma becerisi kazanırlar.
2. Matematik bilgilerini kullanma, matematiksel model kurma ve çözme becerisi kazanırlar.
3. Karmaşık veya Analitik olarak çözümü zor veya mümkün olmayan problemleri basit aritmetik işlemler kullanarak çözüm üretme becerisi kazanırlar.
4. Metodların doğruluğu ve kararlılığını analiz etme yeteneği edinirler.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

3. Sabit Nokta İterasyonu (Fixed Point Iteration)

Tanım:

$p = g(p)$ eşitliğini sağlayan p reel sayısına $g(x)$ fonksiyonunun bir sabit noktası adı verilir.

Tanım:

$p_{n+1} = g(p_n),\ n = 0,1,2,...$ formülüne ise sabit nokta iterasyonu formülü adı verilir.

$f(x) = 0 \quad f(p) = 0,\ p$ kök, $p_i \to p, i = 0,1,2,...$

p_0; başlangıç değeri

$p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1),..., p_{n+1} = g(p_n),...$

$f(x) = 0 \Rightarrow f(x) + x = x \Rightarrow x = x - f(x) = g(x)$

$g(p) = p - f(p) = p \Rightarrow f(p) = 0$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek: $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$x = \sqrt[3]{10 - 4x^2} = g_1(x),\ x = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3} = g_2(x),\ x = \sqrt{\frac{10}{4+x}} = g_3(x)$$

$$x_{i+1} = \sqrt[3]{10 - 4x_i^{\,2}}, i = 0,1,2,\ldots$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_i^{\,3}}, i = 0,1,2,\ldots$$

$$x_{i+1} = \sqrt{\frac{10}{4+x}}, i = 0,1,2,\ldots$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

$x_0 = 1.5$ alalım.

x_i	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
x_1	1	1.2870	1.3484
x_2	1.8171	1.4025	1.3674
x_3	−1.4748	1.3495	1.3650
x_4	1.0914	1.3752	1.3653
x_5	1.7364	1.3601	1.3652
x_6	−1.2728	1.3678	1.3652

$$g(x) = x$$
$$g(1.3652) = 1.3652$$
$$f(1.3652) \approx 0$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Teorem: g sürekli bir fonksiyon ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi sabit nokta iterasyonu ile elde edilmiş olsun.

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ ise p, $g(x)$ fonksiyonunun sabit bir noktasıdır.

İspat:

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ olsun. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{n+1} = p$

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(p_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) = g(p)$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Teorem (Sabit noktanın varlığı ve tekliği için yeterli şartlar)

$g \in C[a,b]$ olsun.

i) $\forall x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$ ise g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sabit bir noktaya sahiptir.

$g:[a,b] \rightarrow [a,b]$

ii) $g'(x),(a,b)$'de tanımlı olsun.

$|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in (a,b)$ ise g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tek bir sabit noktaya sahiptir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$$g(x)=\frac{x^2-1}{3},[-1,1]$$

a) Sabit bir noktası olduğunu gösteriniz.

b) Sabit noktasının tek olduğunu gösteriniz ve bu sabit noktayı bulunuz.

a) $g(-1)=0, g(1)=0, g'(x)=\dfrac{2x}{3}=0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow x=-1,0,1$

$\max\{g(-1),g(0),g(1)\}=0, \min\{g(-1),g(0),g(1)\}=-1/3$

$\Rightarrow g:[-1,1]\rightarrow[-1/3,0]\subset[-1,1]$, sabit noktası var.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

b) $|g'(x)| = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq \frac{2}{3} < 1, \forall x \in (-1,1)$ sabit noktası tek

$$P = g(P) \Rightarrow \frac{P^2 - 1}{3} = P \Rightarrow P^2 - 3P - 1 = 0 \Rightarrow P = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} = -0.3027$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$g(x)=\sqrt{2-\sin x}$ fonksiyonunun $[-1,2]$ aralığında

a) Sabit bir noktasının var olduğunu gösteriniz.

b) Sabit noktasının tek olduğunu gösteriniz.

c) Bu sabit noktayı 10^{-3} doğrulukta hesaplayınız.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$f(x) = 0.5x - \ln 2x = 0$ olsun. [0,1] aralığında

a) Sabit noktanın var olduğunu gösteriniz.

b) Sabit noktanın tek olduğunu gösteriniz.

c) Bu sabit noktayı 10^{-4} doğrulukta bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$x^2 - \sin x - 1 = 0$ denkleminin pozitif kökünü sabit nokta iterasyonu ile bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$x^2 - x - e^{-x} = 0$ denkleminin bir kökünü sabit nokta iterasyonu ile 10^{-2} doğrulukta bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$2x - \log x = 7$ denkleminin kökünü sabit nokta iterasyonu ile 3 ondalık hane doğrulukta hesaplayınız.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$\sqrt{3}$ sayısının yaklaşık değerini sabit nokta iterasyonu ile 10^{-4} doğrulukta bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

4. Newton Raphson Metodu

$f \in C^2[a,b]$ olsun. $f'(p_0) \neq 0$ olacak biçimde $p_0 \in [a,b]$ p kökü için bir yaklaşım olsun. Ayrıca $|p_0 - p|$ yeteri kadar küçük olsun.

$$y - f(p_0) = f'(p_0)(x - p_0)$$

$$0 - f(p_0) = f'(p_0)(p_1 - p_0) \Rightarrow p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Benzer şekilde

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} \ldots p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, n = 0,1,2,\ldots$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Alternatif olarak bu metod aşağıdaki biçimde de elde edilebilir.

p_0 noktası civarında birinci dereceden Taylor polinomunu yazalım.

$$f(x) = f(p_0) + f'(p_0)(x - p_0) + \frac{1}{2}(x - p_0)^2 f''(c)$$

$c : x$ ile p_0 arasındaki bir değer

$$f(p_1) = 0 \Rightarrow 0 = f(p_0) + f'(p_0)(p_1 - p_0) + \frac{1}{2}(x - p_0)^2 f''(c)$$

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$3x - \cos x - 1 = 0$ denkleminin kökünü Newton Raphson metoduyla bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$x - 1.2\sin x - 0.5 = 0$ denkleminin kökünü Newton Raphson metoduyla bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$e^{x}-5\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$ denkleminin kökünü x_0=0.5 alarak Newton Raphson metoduyla

10^{-4} doğrulukta bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

5. Secant Metodu

Bu metodda köke en yakın iki tane p_0 ve p_1 başlangıç değeri gereklidir.

p_2 ise bu iki noktadan geçen doğrunun x eksenini kestiği noktadır.

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0} = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} \ldots p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}, k = 1, 2, \ldots$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

veya

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}, k = 0,1,2,...$$

$$f'(p_k) \approx \frac{f(p_k) - f(p_{k-1})}{p_k - p_{k-1}} \Rightarrow p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$\cos x + 2\sin x + x^2 = 0$ denkleminin kökünü $x_0 = 0, x_1 = -0.1$ alarak Secant metoduyla 10^{-3} doğrulukta bulunuz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$e^{x}+2^{-x}+2\cos x-6=0$ denkleminin kökünü Secant metoduyla 10^{-4} doğrulukta bulunuz.