Yıldız Teknik Üniversitesi
Kimya-Metalurji Fakültesi
Matematik Mühendisliği

MTM2521 Nümerik Analiz 1 Gr.1

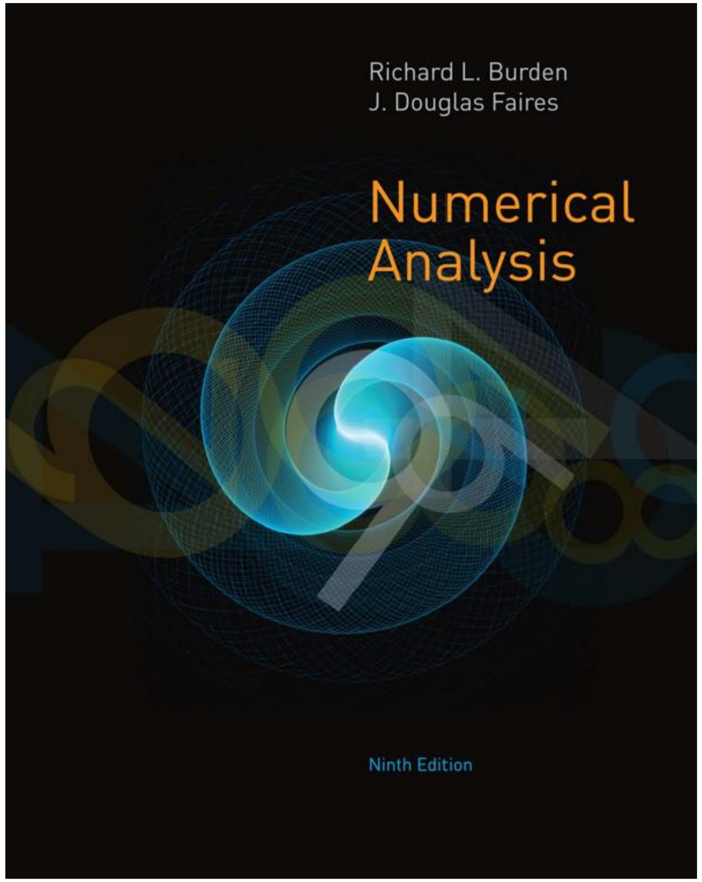
Dr. Öğr. Üyesi Dr. Fatih Aylıkcı

İletişim Bilgileri

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkcı
Yıldız Teknik Üniversitesi. Kimya-Metalurji Fakültesi. Matematik Mühendisliği Bölümü A237 DAVUTPAŞA

Tel: 02123834616 E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr
Web: https://avesis.yildiz.edu.tr/faylikci

Kaynak Kitaplar



Numerical Analysis, Richard L. Burden, J. Douglas Faires

Haftalık Konular

Hafta	Konular	Ön Hazırlık
1	Matematiksel Önbilgiler	Kaynaklardaki ilgili bölüm
2	Lineer olmayan denklemlerin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
3	Lineer olmayan denklemlerin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
4	İnterpolasyon ve polinom yaklaşımı	Kaynaklardaki ilgili bölüm
5	İnterpolasyon ve polinom yaklaşımı	Kaynaklardaki ilgili bölüm
6	Ters interpolasyon ve Eğri uydurma	Kaynaklardaki ilgili bölüm
7	Eğri uydurma	Kaynaklardaki ilgili bölüm
8	Ara Sınav 1	
9	Lineer denklemler sistemlerinin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
10	Lineer denklemler sistemlerinin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
11	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
12	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
13	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
14	Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Sayısal çözümleri	Kaynaklardaki ilgili bölüm
15	Final	

http://bologna.yildiz.edu.tr/index.php?r=course/view&id=1503&aid=24

Ders Öğrenim Çıktıları

Ders Öğrenim Çıktıları

1. Öğrenciler nümerik çözüm yapma becerisi kazanırlar.
2. Matematik bilgilerini kullanma, matematiksel model kurma ve çözme becerisi kazanırlar.
3. Karmaşık veya Analitik olarak çözümü zor veya mümkün olmayan problemleri basit aritmetik işlemler kullanarak çözüm üretme becerisi kazanırlar.
4. Metodların doğruluğu ve kararlılığını analiz etme yeteneği edinirler.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

İnterpolasyon

Teorem:

f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olsun, bu takdirde $|f(x)-f(p)|<\varepsilon, \forall x\in[a,b]$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığında tanımlı bir p polinomu mevcuttur.

$y=f(x)$ fonksiyonunun $(n+1)$ tane noktada $(x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)$ değerleri biliniyor olsun, burada $a\le x_0<x_1<...<x_n\le b, y_k=f(x_k), k=0,1,2,...$

Eğer (x_k,y_k) noktaları yüksek derecede doğrulukta biliniyorsa bu takdirde bu noktalardan geçen ve derecesi en fazla n olan p_n polinomu oluşturulabilir ve bu polinom $[a,b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım yapmak için kullanılabilir. $x_0<x<x_n$ ise $p(x)$ değeri interpolasyon değeri, $x<x_0$ ve $x>x_n$ ise $p(x)$ değeri extrapolasyon değeri olarak adlandırılır.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

1. Lagrange Polinomu

(x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen 1. dereceden polinomu belirleyelim.

$$y = y_0 + m(x - x_0), y = p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$p_1(x_0) = y_0, p_1(x_1) = y_1$$

$$\Rightarrow y = p_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ şeklinde gösterilsin, burada L_0 ve L_1 derecesi en fazla 1 olan bir polinomdur.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

$$L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0$$

$$L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1$$

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{1} y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Şimdi $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ noktalarından geçen ve derecesi en fazla n olan $p_n(x)$ polinomunu oluşturalım.

Yani, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + ... + y_k L_k(x)$

Her bir $L_0, L_1, ..., L_n$ derecesi en fazla n olan polinomlardır.

$x = x_0 \Rightarrow p_n(x_0) = y_0$ ve $L_0(x_0) = 1, L_k(x_0) = 0, k = 1, 2, ..., n$

$x_1, x_2, ..., x_n$ noktalarında ise $L_0(x_i) = 0$. Yani $x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları L_0 polinomunun kökleridir.

$L_0(x) = c_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), L_0(x_0) = 1$ ise

$$1 = c_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n) \Rightarrow c_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)}$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} \Rightarrow L_0(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{x_0-x_i}$$

$$L_1, L_2, ..., L_n$$

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)} \Rightarrow L_k(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	-1	1	2
y	-2	0	3

dataları için Lagrange interpolasyon polinomu oluşturunuz. $f(0.5)$ değerini hesaplayınız.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	-1	0	2	3
y	-1	1	5	19

noktalarını interpole eden Lagrange polinomunu bulunuz.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

2. Newton Polinomları

Lagrange interpolasyonunda her bir polinom ayrı ayrı oluşturulmalıdır. Yani $P_{n-1}(x)$ ve $P_n(x)$ polinomları arasında hiçbir ilişki yoktur. Ayrıca yüksek dereceden polinomları hesaplamak için birçok işlem yapmak gerekir.

Newton polinomları reküratif olarak elde edilir.

$$P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

M

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

3. Bölünmüş Fark İnterpolasyonu

Lagrange polinomu sayısal türev ve sayısal integral metotlarının elde edilmesinde önemlidir. Fakat polinom değerlerinin hesaplanması için ideal değildir.

Şimdi interpolasyon polinomunun oluşturulması ve hesaplanmasını daha etkili şekilde yapalım.

Tablo değerlerini kullanarak interpolasyon polinomunun belirlenmesi bölünmüş fark interpolasyonu olarak adlandırılır.

P_n, derecesi en fazla n olan ve f fonksiyonunu birbirinden farklı $x_0, x_1, ..., x_n$ noktalarında interpole eden Lagrange polinomu olsun.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Uygun $a_0, a_1, ..., a_n$ sabitleri için

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

polinomunun belirtilen şekilde bir temsile sahip olduğunu göstererek f fonksiyonunun $x_0, x_1, ..., x_n$ noktalarına göre bölünmüş farkları elde edilebilir.

$$P_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$$

$$P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$P_n(x_2) = f(x_2) \Rightarrow a_2 = \left[\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right]\frac{1}{x_2 - x_1}$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Hesaplamalarda uygunluk olması için

$$a_2 = \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] \frac{1}{x_2 - x_0}$$

şeklinde yazılır.

Katsayıları daha basit bir şekilde yazmak için bölünmüş fark gösterimini kullanalım.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

f fonksiyonunun x_i noktasına göre 0. bölünmüş farkını $f[x_i]$ ile gösterelim. Bu ise $f[x_i] = f(x_i)$

f fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktasına göre 1. bölünmüş farkı $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

şeklinde tanımlanır.

f fonksiyonunun x_i, x_{i+1}, x_{i+2} noktalarına göre 2. bölünmüş farkı

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

f fonksiyonunun x_i, $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}$ noktalarına göre k. bölünmüş farkı

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

şeklinde yazılır.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Bölünmüş farkları kullanarak $a_0, a_1, ..., a_n$ katsayılarını yeniden yazalım.

$a_0 = f[x_0]$

$a_1 = f[x_0, x_1]$

$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

M

$a_k = f[x_0, x_1, ..., x_k], \quad k = 0, 1, ..., n$

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

veya (Newton bölünmüş fark interpolasyon formülü)

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Bölünmüş farklar tablo yardımıyla kolayca elde edilebilir.

x	$f(x)$	$1.BF$	$2.BF$	$3.BF$
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	-3	0	15	48	105	192

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Eşit Uzaklıklı İnterpolasyon

$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları eşit uzaklıkta olarak verilmiş olsun. $x_{i+1} - x_i = h, i = 0,1,...,n-1$

Fark Operatörleri

İleri Fark Operatörü (Δ)

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

M

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1}(\Delta f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x)$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
x_0	f_0			
x_1	f_1	Δf_0		
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$	
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Fark Operatörleri

Geri Fark Operatörü (∇)

$$\nabla^0 f(x) = f(x)$$

$$\nabla^1 f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$\nabla^2 f(x) = \nabla f(x+h) - \nabla f(x) = f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)$$

M

$$\nabla^k f(x) = \nabla(\nabla^{k-1} f(x)) = \nabla^{k-1}(\Delta f(x)) = \nabla^{k-1} f(x) - \nabla^{k-1} f(x-h)$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

x	$f(x)$	$\nabla f(x)$	$\nabla^2 f(x)$	$\nabla^3 f(x)$
x_0	f_0			
x_1	f_1	∇f_1		
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$	
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Yer Değiştirme Operatörü (E)

$$E^0 f(x) = f(x)$$

$$E^1 f(x) = f(x+h)$$

$$E^{-1} f(x) = f(x-h)$$

$$E^k f(x) = f(x+kh)$$

$$\Delta f(x) = Ef(x) - f(x) = (E-1) f(x) \Rightarrow E = 1+\Delta$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = (1-E^{-1}) f(x) \Rightarrow E = (1-\nabla)^{-1}$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Newton İleri Fark Formülü

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

$$x = x_0 + sh, 0 \le s \le n, s \text{ reel sayı}$$

$$x - x_i = (s - i)h$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ \dots + s(s-1)\dots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} s(s-1)\dots(s-k+1)h^n f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

$$f[x_0,x_1,x_2]=\left[\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right]\frac{1}{x_2-x_0}$$

$$=\left[\frac{\Delta f(x_1)}{h}-\frac{\Delta f(x_0)}{h}\right]\frac{1}{2h}=\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)\Rightarrow \text{Newton İleri Fark Formülü}$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	$f(x)$
0.5	1
0.6	2
0.7	5

$f(0.63) = ?$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	$f(x)$
1	-3
2	0
3	15
4	48
5	105
6	192

$f(2.1)$ değerini Newton ileri fark formülüyle bulunuz.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Newton Geri Fark Formülü

Eğer x değeri tablodaki son değerlere yakınsa daha çok data noktasını kullanmak için geri fark formülü kullanılır.

İnterpolasyon noktaları $x_n, x_{n-1}, ..., x_0$ şeklinde yeniden sıralanmış olsun.

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) + ...$$

$$... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1)$$

$$x = x_n + sh,\ x_0 = x_n + nh,\ x_i = x_n - (n - i)h$$

$$P_n(x) = f[x_n + sh] = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n]sh + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]s(s+1)h^2 + ...$$

$$... + f[x_0, x_1, ..., x_n]s(s+1)...(s+n-1)h^n$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

$$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}=\frac{1}{2}\frac{\nabla f(x_n)-\nabla f(x_{n-1})}{h}$$

$$=\frac{\nabla(f(x_n)-f(x_{n-1}))}{2h^2}=\frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

$$f[x_{n-k},\ldots,x_{n-1},x_n]=\frac{1}{k!h^k}\nabla^k f(x_n)$$

$$P_n(x)=f[x_n+sh]=f[x_n]+s\nabla f(x_n)+\frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n)$$

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1)...(-s-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{s(s+1)...(s+k-1)}{k!}$$

$$P_n(x) = f[x_n + sh] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \Rightarrow \text{Newton Geri Fark Formülü}$$

Newton İleri ve Geri Fark Formülleri x cinsinden ifade edilirse birbirlerinin aynısı olduğu görülür.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	$f(x)$
0	0.55
0.2	0.82
0.4	1.15
0.6	1.54
0.8	1.99
1	2.5

dataları için Newton ileri ve geri fark formüllerini oluşturunuz.
Ayrıca bu iki polinomun özdeş olduğunu gösteriniz.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Ters İnterpolasyon

Verilen y değeri için x değerini bulma ters interpolasyon olarak adlandırılır. Ters interpolasyon, fonksiyon verilen aralıkta tek değerli ise uygulanır. Ayrıca, $f(x)=0$ denklemlerinin kökünün bulunmasında da kullanılır.

Her formül kullanılır.

Newton bölünmüş fark formülünü kullanmak işe yarar.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	0	1.5	2	4
$f(x)$	1	1.5811	1.7320	2.2360

datalarını kullanarak $y = 3$ değerine karşılık gelen x değerini bölünmüş fark tablosunu kullanarak ters interpolasyon ile bulunuz.

İnterpolasyon ve Polinom Yaklaşımı

Örnek:

x	10	20	0	30	40	50
$f(x)$	0.1736	0.3420	0	0.5	0.6428	0.7680

$$f(x) = 0.2 \Rightarrow x = ?$$