Örnek:

$\vec{v}$ =(-5,9,1) vektörünü, $\vec{v}_1$=(-1,3,4), $\vec{v}_2$=(3,0,1) ve $\vec{v}_3$=(0,1,-2) vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak yazalım.

Çözüm:

$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3=\vec{v}$ olacak biçimde $k_1,k_2,k_3 \in R$ sayılarını bulmalıyız.

$k_1(-1,3,4)+ k_2(3,0,1)+ k_3(0,1,-2)= (-5,9,1)$

$\Rightarrow(-k_1+3k_2, 3k_1+k_3,4 k_1+k_2-2k_3)= (-5,9,1)\Rightarrow$

$-k_1+3k=-5$

$3k_1+k_3=9$

$4 k_1+k_2-2k_3=1$ denklem sistemi çözülürse; $k_1=2$,

$k_2= -1$, $k_3=3$ bulunur.O halde aranan lineer bileşim;

$\vec{v} =2\vec{v}_1-\vec{v}_2+3\vec{v}_3$ tür.

Örnek:

a) {(1,-2,-3), (-3,6,9)}
b) {(1,3,-2),(2,6,2)}
c) {(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)}

d) {(1,2,-5),(0,0,0),(7,1,-3)}
e) {(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)}
f) {(1,1,1),(-1,2,0),(2,2,3),(1,1,2)}kümelerinin lineer bağımlı olup lmadıklarını araştıralım.
g) Yukarıdaki kümelerden hangileri üç boyutlu vektör uzayının (R^3ün) bir tabanıdır.

Çözüm:

a) $k_1(1,-2,-3)+ k_2(-3,6,9)=(0,0,0)$

$\Rightarrow k_1-3k_2=0$

$-2k_1+6k_2=0$

$-3k_1+9k_2=0$ denklem sistemielde edilir.
Halbuki bu denklemlerin üçü de birbirine denktir.

Aslında burada tek denklem vardır yani; $k_1-3k_2=0$

$\Rightarrow k_1=3k_2$ Buna göre k_1, k_2 nin 3 katı olmak üzere sıfırdan farklı sonsuz çözüm bulabiliriz.O halde {(1,-2,-3), (-3,6,9)} kümesi lineer bağımlıdır.

Not: Vektörlerin bileşenlerine dikkatlice bakarsakorantılı olduğunu görürüz.
Yani iki vektörün lineer bağımlı olması, biri diğerinin bir katı olması, birbirine paralel olması aynı anlama gelir.

b) $\{(1,3,-2),(2,6,2)\}$
$1/2=3/6\neq-2/2$
Bu iki vektörün bileşenleri orantılı olmadığından lineer bağımsızdır.

c) $\{(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)\}$
1. Yol:

$k_1(1,1,0)+k_2(-2,3,5)+k_3(0,5,5)\}=(0,0,0)$

$\Rightarrow k_1-2k_2=0$

$k_1+3k_2+5k_3=0$

$5k_2+5k_3=0$

1. denklemden $k_1=2k_2$

3. denklemden $k_3=-k_2$ değerleri 2. denklemde yerine

konursa; $5k_2+5k_3=0$ elde edilir.Bu ise 3. denklemdir.
O halde gerçekte farklı olarak iki denklem

vardır.Burada bilinmeyenlerden birine örneğin $k_3=t$

diyelim.Böylece $k_2= -t$ ve $k_1=-2t$ olmak üzere

$(k_1,k_2,k_3)=(-2t, -t, t)$, $t\in R$ olmak üzere sıfır çözümden

farklı sonsuz tane (k_1,k_2,k_3) üçlüsü bulunur.
O halde $\{(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

2. Yol:

$k_1(1,1,0)+k_2(-2,3,5)+k_3(0,5,5)\}=(0,0,0)\Rightarrow$

$k_1-2k_2=0$

$k_1+3k_2+5k_3=0$

$5k_2+5k_3=0$ Denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümlerinin olması denklem sisteminin katsayılarından oluşan determinantın değerinin (veya vektörleri alt alta yazarak oluşturulan determinantın) sıfır olması gerekir.Gerçekten;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}=0$ olduğu görülür.yani bu vektörler lineer bağımlıdır.

d) {(1,2,-5),(0,0,0),(7,1,-3)}
1. Yol: Vektörleri sırasıyla hepsi birden sıfır olmayan (örneğin, 0, 2007 ve 0) sayılarıyla çarpıp toplayalım; 0.(1,2,-5)+2007.(0,0,0)+0.(7,1,-3)=(0,0,0) olduğundan bu küme (genel olarak içinde $\vec{0}$ vektörü bulunan her küme)
lineer bağımlıdır.
2. Yol: Her bir vektörü bir satıra yazarak oluşturulan determinantın değeri sıfır olacağından bu küme lineer bağımlıdır.

e) {(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)}
Her bir vektörü bir satıra yazarak oluşturulan determinantın değeri
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $=-1\neq 0$ olduğundan bu üç vektör lineer bağımsızdır.
f) {(1,1,1),(-1,2,0),(2,2,3),(1,1,2)}
$k_1(1,1,1)+k_2(-1,2,0)+k_3(2,2,3)+k_4(1,1,2)=(0,0,0)$
eşitliği bizi 4 bilinmeyenli 3 denklemden oluşan bir denklem sistemine götürür.Böyle bir denklemin her zaman sıfır çözümlerinden başka (sonsuz tane) çözümü vardır.Örneğin $k_4=t$ diyerek diğer bilinmeyenleri t parametresine göre çözümlerini bulabiliriz.O halde 4 (veya daha fazla) vektörden oluşan her küme lineer bağımlıdır.

g) Vektörlerden oluşan bir kümenin taban olabilmesi için **lineer bağımsız** ve ilgili vektör uzayını **germesi** **(**yani $\forall \vec{x} \in R^3$ vektörü bu vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılabilmesi) gerekir.

{(1,-2,-3), (-3,6,9)}, {(1,1,0),(-2,3,5),(0,5,5)}, {(1,2,-5),(0,0,0),(7,1,-3)}, {(1,1,1),(-1,2,0),(2,2,3),(1,1,2)} kümeleri lineer bağımlı olduklarından taban olamaz.

{(1,3,-2),(2,6,2)} kümesi lineer bağımsızdır.

Acaba bu küme R^3 ü gerer mi?Bakalım:

$\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$ olsun.

$(x_1,x_2,x_3) = k_1(1,3,-2) + k_2(2,6,2)$

$\Rightarrow k_1+2k_2 = x_1$

$3k_1+6k_2 = x_2$

$-2k_1+2k_2 = x_3$

Denklem sisteminde ilk iki denklemden bulunan k_1,k_2 değerleri her zaman üçüncü denklemi sağlamayacağından bu iki vektör R^3 ü germez.O halde bu küme bir taban olamaz.

{(1,1,0),(2,1,1),(0,1,1)} kümesi lineer bağımsızdır.

Acaba bu küme R^3 ü gerer mi?Bakalım:

$\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$ olsun.

$(x_1,x_2,x_3) = k_1(1,1,0) + k_2(2,1,1) + k_3(0,1,1)$

$k_1+2k_2 = x_1$

$k_1+k_2+k_3 = x_2$

$k_2+k_3 = x_3$

Üç bilinmiyenli bu denklemin çözümü vardır ve tektir. O halde bu küme R^3 ü gerer. Buna göre bu küme R^3 ün bir tabanıdır.

Not:

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi lieer bağımsız üç vektör R^3 ün bir tabanıdır.

Örnek:

A(1, -2, 4) noktasından geçen ve $\vec{u}$ =(2, 0, -5) vektörüne paralel olan doğrunun;

a) Vektörel denklemini, b) Parametrik denklemini

c) Kartezyen denklemini bulalım.

d) d doğrusu üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki koordinatları toplamı 2013 olsun.

Çözüm:

a) $P \in d$,P(x,y,z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$ =k$\vec{u}$ $\Rightarrow$(x-1, y+2, z-4) =k(2, 0, -5)

b) x=2k+1, y=-2, z=4-5k

c) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-4}{-5}$ =k

veya $\frac{x-1}{2} = \frac{z-4}{-5}$ =k, y = -2

d) x+y+z=2013 $\Rightarrow$2k+1-2+4-5k=2013 $\Rightarrow$ 3k= -2010

$\Rightarrow$ k= -670 $\Rightarrow$ x=-1339, y= -2, z= 3354

O halde aranan nokta K ise K(-1339, -2, 3354) bulunur.

Örnek:

A(1, 1, -2) , B(3,-4, 11) noktalarından geçen doğrunun kartezyen denklemini bulalım.

Çözüm:

Doğrunun doğrultu vektörü olarak $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alınabilir.

Buna göre doğruyu ister A dan geçen ve doğrultu vektörü $\overrightarrow{AB}$ olan veya B den geçen ve doğrultu vektörü $\overrightarrow{AB}$ olan doğru olarak düşünebiliriz.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ =(2, -5, 13)

Örneğin d doğrusunu, A dan geçen ve doğrultu vektörü $\overrightarrow{AB}$ olan doğru olarak düşünelim; buna göre doğrunun kartezyen denklemi;

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{13}$ = k olur.

Örnek:

P(-1, 2, 0) noktasının $\frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{3} = z+1$ doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm :

1. Yol: Doğru üzerinde rastgele iki nokta alalım. Birisi apsisi 2 olan nokta A olsun: A(2, 1, -1) bulunur.

Diğeri de apsisi 0 olan nokta B olsun: B(0, 4, -2) dir.

$\overrightarrow{AP}=(-3, 1, 1)$, $\overrightarrow{AB}=(-2, 3, -1)$

$h=|\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AP}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{6+3-1}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} \Rightarrow h=|\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha = \sqrt{11}.\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$\Rightarrow h=\frac{3.\sqrt{5}}{7}$ birim bulunur.

2. Yol: A(2, 1, -1), doğrultu vektörü $\vec{u}=(2, -3, 1)$ dir.
$\overrightarrow{AP}=(-3, 1, 1)$ dir.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP}.\vec{u}}{|\overrightarrow{AP}|.|\vec{u}|} = \frac{-6-3+1}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{-8}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}}$$

$h=|\overrightarrow{AP}|.\sin\alpha \Rightarrow h=\sqrt{11}.\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} = \frac{3.\sqrt{5}}{7}$ birim bulunur.

3. Yol: $h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$ olduğundan önce $\overrightarrow{AP} \times \vec{u}$ yu hesaplayalım;

$$\overrightarrow{AP}x\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$$

$\Rightarrow h = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{14}} = \frac{3.\sqrt{5}}{7}$ birim bulunur.

Örnek:
A(-2, 3, 7) , B(2, -1, 0) ve C(1, 0, -3) noktalarından geçen düzlem denklemini bulalım.

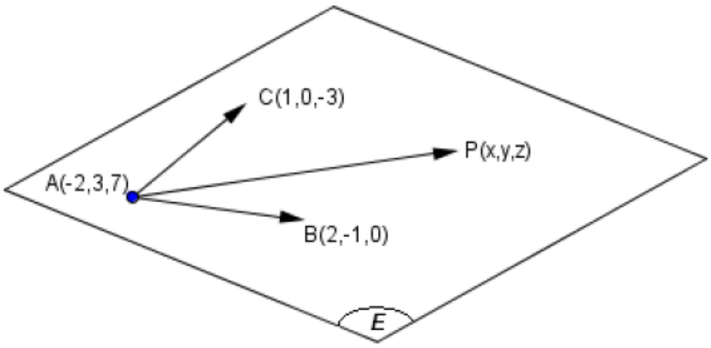
Çözüm:

1. Yol: Düzlem denklemi x+ay+bz+c=0 olsun. Düzlem bu üç noktadan geçtiği için; her noktanın koordinatları denklemi sağlamalıdır:

-2+3a+7b+c=0
2-a+c=0
1-3b+c=0

Denklem çözülürse a=1, b=0, c=-1 bulunur.
O halde aranan düzlem denklemi x+y-1=0 olarak elde edilir.

2. Yol:



Şekilde
$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen deteminant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-7 \\ 4 & -4 & -7 \\ 3 & -3 & -10 \end{vmatrix} = 19(x+2)+19(y-3)=0$$

$\Rightarrow$ x+y-1=0 bulunur.

Örnek:

Birbirine paralel; d_1: $-x=y+1=\frac{z-2}{3}$ ve

d_2:3-3x=3y-9=z doğruları veriliyor.

a) Bu iki doğrunun belirttiği düzlemi bulalım.

b) Bulunan düzlemin koordinat eksenlerini kestiği noktalar A, B, C ise A(ABC) alanını bulalım.

Çözüm:

1. Yol: Doğrulardan birisinde rastgele iki nokta (örneğin d_1 üzerinde) A ve B noktaları, diğeri üzerinde de C noktası alalım.

d_1 doğru denkleminde;

x=0 için A(0, -1, 2)
z=8 için için B(-2, 1, 8)

d_2 doğru denkleminde;

x=0 için C(0, 4, 3) olur.

Bu durumda paralel doğruların belirttiği düzlemi bulmak, A, B, C noktalarından geçen düzlem denklemini bulmak demektir.

Bir önceki problemde yaptığımız işlemleri yapabiliriz. Düzlemin herhangi bir noktası P(x, y, z) olsun.

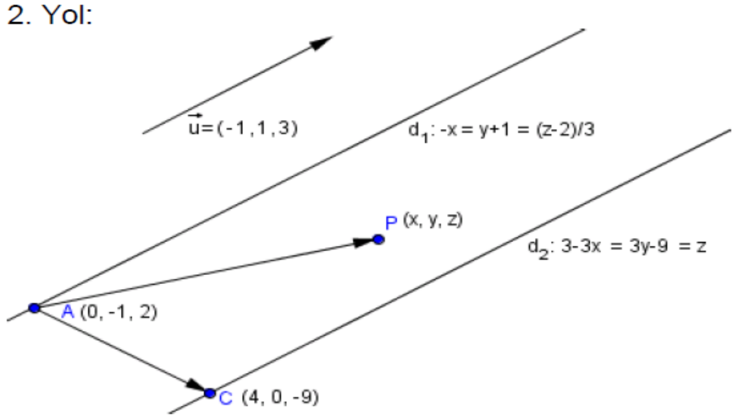
$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -28x-(-2)(y+1)-10(z-2)=0$$

$\Rightarrow$ 14x-y+5z-11=0 bulunur.

2. Yol:



d_1 üzerinde A(0, -1, 2) ve d_2 üzerinde C(4, 0, -9) noktalarını alalım.

Düzlemin herhangi bir noktası P(x, y, z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$ ve $\vec{u}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -11 \end{vmatrix} = -14x-(-1)(y+1)-5(z-2)=0$$

$\Rightarrow$ 14x-y+5z-11=0 bulunur.

b) Düzlemin x eksenini kestiği A noktasını bulmak için y=z=0 koyalım A(11/14,0,0)

Düzlemin y eksenini kestiği B noktasını bulmak için x=z=0 koyalım B(0,-11,0)

Düzlemin z eksenini kestiği C noktasını bulmak için x=y=0 koyalım C(0,0,11/5)

$\overrightarrow{AB}$ =(-11/14, -11, 0)

$\overrightarrow{AC}$ =(-11/14, 0, 11/5)

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ =

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\frac{11}{14} & -11 & 0 \\ -\frac{11}{14} & 0 & \frac{11}{5} \end{vmatrix} = (-\frac{11}{14})(-\frac{11}{14.5}) \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 14 & 0 \\ 5 & 0 & -14 \end{vmatrix} = \frac{11^2}{14^2.5}(-14^2\vec{e}_1 + 14\vec{e}_2 - 5.14\vec{e}_3)$$

$$A(ABC) = \left| \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{2} \right| = \frac{121.\sqrt{322}}{140} \text{ birim kare}$$

bulunur.

Örnek:

d_1: $\frac{x-1}{2}$ = y+1= 3-z ve

d_2: $\frac{x-1}{3}$ = y+1= z-3 doğruları veriliyor.

Bu doğruların bir noktada kesiştiğini ispatlayarak doğruların belirttiği düzlemi bulalım.

Çözüm:

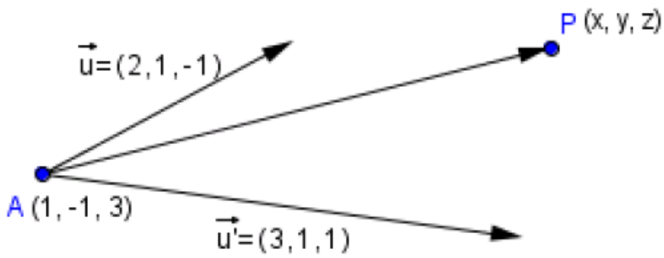
İki denklemi ortak çözelim:

$\frac{x-1}{2}$ = y+1= 3-z = k $\Rightarrow$ x=2k+1, y=k-1, z=3-k

Bu değerleri diğer denklemde yerine koyalım;

$\frac{2k}{3}$ = k = -k bu üçlü orantıyı sadece k=0 sağlar.

İlk denklemde yerine konursa kesişim noktası A ise; A(1, -1, 3) olur.Doğrulardan her birinden birer tane nokta bulalım;



Düzleme ait bir nokta P(x,y,z) olsun. Şekilden de görüldüğü gibi; $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ ve $\vec{u'}$ vektörleri lineer bağımlıdır .

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1)-5(y+1)-(z-3)=0$$

$\Rightarrow$ Aranan düzlem denklemi; 2x-5y-z-4=0 dır.

Örnek:
A(1, -3, a+2) noktasının 2x –2y + z = 15 düzlemine 7 birim uzaklıkta olabilmesi için a kaç olmalıdır?

Çözüm:

$$u = \frac{|2 + 6 + a+2 - 15|}{\sqrt{4+4+1}} = 7 \Rightarrow |a-5| = 21 \Rightarrow a = 26$$

veya a = -16 bulunur.

Örnek:
2x-y+3z=6 ile 3y-6x-9z=a+1 düzlemleri arasındaki uzaklık $\frac{5}{\sqrt{14}}$ birim ise a kaçtır?

Çözüm:
İkinci denklemi –3 e bölelm:
2x-y+3z+a+1=0 olur.

$$\frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{|a+1-(-6)|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{|a+7|}{\sqrt{14}} \Rightarrow a= -2 \text{ veya } a= -12$$

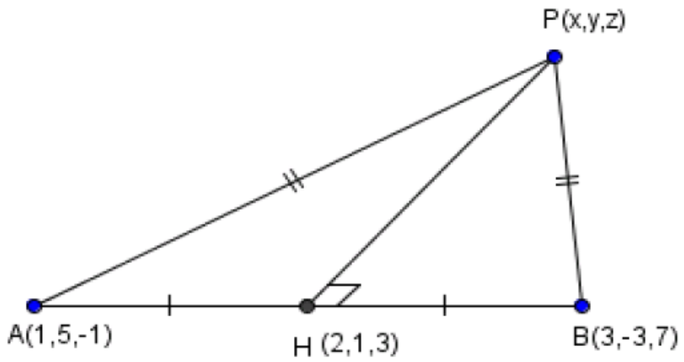
bulunur.

Örnek:
a) Uzayda A(1,5,-1) , B(3,-3,7) noktalarına eşit uzaklıkta kaç tane nokta bulunur.Bu noktaların geometrik yeri nedir?

b) Uzayda A(1,5,-1) , B(3,-3,7), C(0,1, -1) noktalarına eşit uzaklıkta kaç tane nokta bulunur.Bu noktaların geometrik yeri nedir?

c) Uzayda A(1,5,-1) , B(3,-3,7), C(0,1, -1), D(1,0,-1) noktalarına eşit uzaklıkta kaç tane nokta bulunur.Bu noktaların geometrik yeri nedir?

Örnek:
a)



1. Yol:
$|PA|=|PB| \Rightarrow$
$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2+(z-7)^2}$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y-5)^2+(z+1)^2 = (x-3)^2+(y+3)^2+(z-7)^2$
$\Rightarrow$ x-4y+4z-10 = 0 bulunur.

2. Yol:
[AB] nın ortası H(2, 1, 3) tür.

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{HP} \Rightarrow \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{HP} = 0$
$\Rightarrow$ (2,-8,8).(x-2,y-1,z-3)=0 $\Rightarrow$ 2x-4-8y+8+8z-24=0
$\Rightarrow$ x-4y+4z-10 = 0 bulunur.

O halde bu iki noktaya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri bir düzlemdir. ([AB]nın orta dikme düzlemidir; yani aranan şarta uygun sonsuz çoklukta nokta bulunur.

b) A ve B ye eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeri [AB] nın orta dikme düzlemi; x-4y+4z-10 = 0 dir.

Benzer şekilde [AC] nin orta dikme düzlemini de bulalım:

Düzleme ait bir nokta P(x,y,z) olsun.
[AC] nın ortası K(1/2, 3, -1) ise; $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{KP} \Rightarrow$
$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{KP} = 0 \Rightarrow$ 2x+8y-13=0 bulunur.

Aranan geometrik yer bu iki düzlemin arakesit doğrusudur.

Doğru denklemini bulmak için ortak çözüm yapalım.

2/ x-4y+4z-10 = 0
2x+8y-13=0

2x-8y+8z-20 = 0
2x+8y-13=0

x = 33/4 – 2z, y = -7/16 –z/2

O halde aranan doğru denklemi;

$$\frac{x - 33/4}{-2} = \frac{y + 7/16}{-1/2} = z \text{ dir.}$$

c) [CD] nın orta dikme düzlemi ile yukarıda bulduğumuz doğrunun (veya üç orta dikme düzlemlerinin) kesişim noktası aranan tek noktadır.

Düzleme ait bir nokta P(x,y,z) olsun.
[CD] nın ortası L(1/2, 1/2, -1) dir.
$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{LP} \Rightarrow \overrightarrow{CD} . \overrightarrow{LP} = 0 \Rightarrow$ x-y=0 bulunur.

Bulduğumuz düzlem denklemlerini alt alta yazalım.

x-4y+4z-10 = 0
2x+8y-13=0
x-y=0

Denklem sistemi çözülürse aranan tek noktanın koordinatları (noktaya M diyelim);

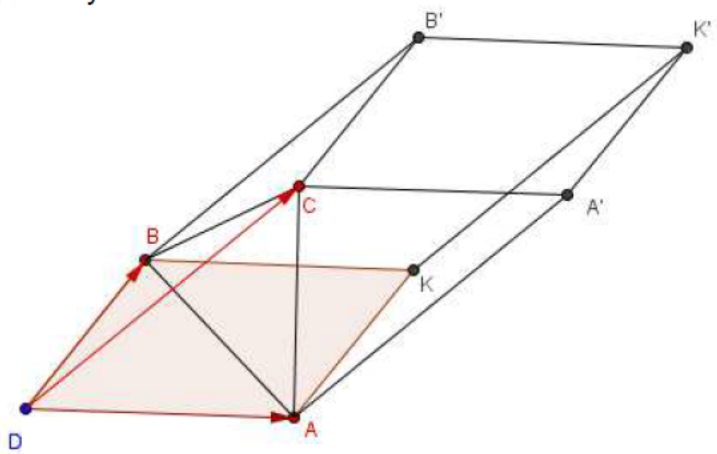
M(13/10, 13/10, 139/40) olarak bulunur.

Örnek:
Uzayda A(1,0,1), B(-1,2,0), C(2,1,1) ve D(0,0,7) noktaları veriliyor.

a) ABCD dörtyüzlüsünün (uzay dörtgeninin veya piramidinin) hacmini,

b) D noktasının (ABC) düzlemine olan uzaklığını (piramidin ABC tabanına ait yüksekliğini) bulalım.

Çözüm:
a) Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi ABCD dörtyüzlüsünün (ABD) tabanı, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ vektörleri üzerine kurulu paralelyüzün tabanının yarısıdır. Ayrıca paralelyüzün yüksekliği ile ABCD uzay dörtgeninin (ABD tabanına ait) yüksekliği aynıdır. Buna göre ABCD uzay dörtgeninin hacmi paralelyüzün hacminin 1/6 sıdır.



$$H(ABCD) = \frac{|[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}]|}{6}$$

$$= \frac{1}{6} . \left| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} . |-25| = \frac{25}{6} \text{ birim küp}$$

bulunur.

b)

1. Yol: (ABC) düzleminin denklemini bulalım;

A(1,0,1), B(-1,2,0), C(2,1,1) ve düzleme ait değişken bir nokta P(x,y,z) olsun.

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri lineer bağımlıdır (veya vektörlerin üzerine kurulu paralelyüzün hacmi 0 dır).

Bu da bizi vektörlerin bileşenlerini alt alta yazarak elde edilen determinant değerinin 0 olması gerektiği sonucuna götürür.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{x-y-4z+3=0}$$

Şimdi de D(0,0,7) noktasının düzleme olan uzaklığını hesaplayalım:

$$u = \frac{|0-0-28+3|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{25}{\sqrt{18}} \text{ birim bulunur.}$$

2.Yol:

$$A(ABC) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{|(1,-1,-4)|}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}$$

$$H(ABCD) = \frac{A(ABC).u}{3} \text{ olduğundan;}$$

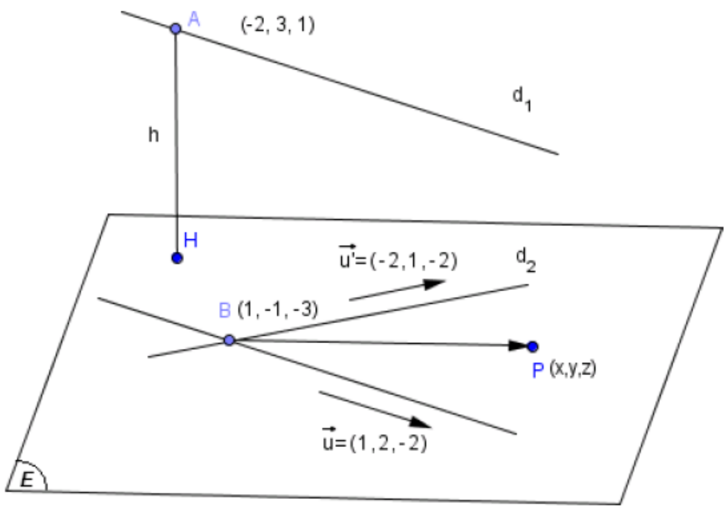
$$\frac{25}{6} = \frac{\frac{\sqrt{18}}{2} . u}{3} \Rightarrow u = \frac{25}{\sqrt{18}} \text{ birim bulunur.}$$

Örnek:

d_1: $x+2 = \frac{y-3}{2} = \frac{1-z}{2}$ ve d_2: $\frac{1-x}{2} = y+1 = \frac{-3-z}{2}$ aykırı doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulalım.

Çözüm:

d_2 nin üzerindeki herhangi bir B(1, -1, -3) noktasından d_1 doğrusuna çizilen paralel doğru ile d_2 nin oluşturduğu düzlem (E) olsun. d_1 doğrusu (E) düzlemine paraleldir. Dolayısıyla d_1 üzerindeki herhangi bir A noktasının düzleme olan $h = |AH|$ uzaklığı, aykırı doğrular arasındaki uzaklıktır.



A(-2, 3, 1) alalım. Önce (E) düzleminin denklemini bulalım.

Düzlemde herhangi bir nokta P(x,y,z) olmak üzere; $\overrightarrow{BP}$ =(x-1, y+1,z+3) ile $\vec{u}$ =(1, 2, -2) ve $\overrightarrow{u'}$ =(-2,1,-2) vektörleri lineer bağımlıdır.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+6y+5z+23=0$$

A(-2,3,1) noktasının bu düzleme olan uzaklığı aranan h uzaklığıdır.

$$h = \frac{|\ a_1.a + a_2.b + a_3.c + d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|4+18+5+23|}{\sqrt{4+36+25}}$$

$= \dfrac{50}{\sqrt{65}}$ birim bulunur.

Örnek:
(E): x + 2y + z = 0
(F): 2x + y - 2z = 1
(G): x - y + 2z = 1

a) Düzlemlerinin –varsa- kesişim kümesini bulalım.

b) (F) ile (G) düzlemlerinin birbirlerine göre durumunu inceleyerek kesişim kümesini bulalım.

Çözüm:
Sırasıyla (E) , (F) ve (G) düzlemlerinin normal vektörlerine $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ diyelim.

$\overrightarrow{n_1}$ =(1, 2, 1), $\overrightarrow{n_2}$ =(2,1,-2), $\overrightarrow{n_3}$ =(1,-1,2)

a) Bu üç vektörden herhangi ikisi paralel olmadığından, düzlemlerden herhangi ikisi paralel ya da çakışık olamaz.Bu durumda üç düzlem K gibi tek bir noktada kesişir. K yı bulmak için denklem sistemini çözmemiz gerekir.

(E): x + 2y + z = 0
(F): 2x + y - 2z = 1
(G): x - y + 2z = 1

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{3},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{5},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0$$

K($\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, 0) bulunur.

b)
(F): 2x + y - 2z = 1
(G): x - y + 2z = 1

Üç bilinmeyenli iki denklemi çözmek için, bilinmeyenlerden biri cinsinden (örneğin z cinsinden) bulalım, z li terimleri sağ tarafa atalım.

2x + y = 2z+1
x - y = 1- 2z

3x=2 $\Rightarrow$ x = 2/3, y =2z – 1/3

Buradan;

$$\frac{x - 2/3}{0} = \frac{y + 1/3}{2} = z$$ bulunur.

Bu da A(2/3, -1/3, 0) noktasından geçen ve doğrultu vektörü $\vec{u}$ =(0, 2, 1) olan doğruyu belirtir.

01. A(2,3,4) ve B(-1,2,5) noktalarından geçen doğru denklemini bulunuz.

02.
d: $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{a} = \frac{z+1}{3}$ ile
k: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{b}$ doğruları veriliyor.
a) d//k ise a ve b kaçtır?
b) d⊥k ise a+b kaçtır?

03.
d: $x-1 = \frac{y+1}{a} = \frac{1-z}{2}$ ile
k: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = -z-1$ doğruları arasındaki açının cosinüsü kaçtır?

04.
d: $x+1 = \frac{y-2}{m} = \frac{z-3}{2}$ ile
k: $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{-z-2}{3}$ doğruları arasındaki açı 120° ise m kaçtır?

05. A(3,2,1) noktasının
$\frac{x+3}{2} = 1-y = \frac{-z-2}{2}$ doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?

06. $x-3 = \frac{y+1}{0} = -z$ doğrusu ile
($x=2+\lambda$, $y=4\lambda-3$, $z=1$) doğrusu arasındaki açı kaç derecedir?

07.
$\frac{x-1}{4} = -y-2 = \frac{z}{2}$ doğrusu ile 3x-2y-z+5=0 düzleminin varsa kesişim noktasını bulunuz.

08. 2x-5y+z+2=0 ve 3x+2y-4z=1 düzlemlerinin arakesit doğrusunu bulunuz.

09.
d: $-x-2 = \frac{y-1}{m+1} = \frac{z}{2}$ doğrusu
(E): x+2y-z+4=0 düzlemine
a) Paralel olması için m kaç olmalıdır?
b) Dik olması için m kaç olmalıdır?

10.
d: $\frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{3} = z+2$ doğrusu ile
(E): 4x+y+2z+3=0 düzlemi arasındaki açının kosinüsü kaçtır?

11. 2x+y-7z+11=0 ve 5x-2y+5z=12 düzlemlerinin arasındaki açılardan dar olanın ölçüsü kaç derecedir?
12. A(3, -1,m+1) noktasının 4x-y+8z=2 düzlemine olan uzaklığı 3 birim ise m kaçtır?

13. $4x-y+8z=2$ düzlemine paralel ve orijinden 4 birim uzaklıkta bulunan düzlem denklem(ler)ini bulunuz.

14. $A(1,-1,2)$ noktasından geçen ve $3x-2y+z=5$ düzlemine dik olan doğru denklemini bulunuz.

15. $A(-1,5,0)$ noktasından geçen ve $(x,y,z)=(1,1,2)+t(-1,3,0)$ doğrusuna dik olan ve $x+y-4z+2=0$ düzlemine paralel olan doğru denklemini bulunuz.

16. $x+y+z+1=0$ ile $2x-y+z=0$ düzlemlerinin arakesitinden ve $A(1,-1,3)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

17. $x=y=z$ ve $x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ doğrularına paralel olan ve $A(-2,3,4)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

18. $x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$ doğrusuna paralel olan olan, $A(-3,1,1)$ ve $B(-1,3,-1)$ noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.

19. a) $A(1,2,3)$, $B(1,-1,2)$, $C(-2,2,1)$ noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.
b) $A(a,b,a)$, $B(0,a,b)$ ve $C(b,0,a)$ noktalarından geçen düzlem denklemini bulunuz.

20. $x=\frac{y}{3}=\frac{z}{3}$ doğrusu ile $\frac{x-1}{a}=1-y=\frac{z-3}{0}$ denklemleriyle verilen doğruların kesişmesi için a kaç olmalıdır?Sonra kesişim noktasını bulunuz.

21. Uzayda $A(2,-1,3)$ ve $B(3,1,-1)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

22.
$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+6}{13}$ ve
$\frac{x-4}{9}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-7}{4}$ doğrularının düzlemsel olduklarını gösterip bu düzlemin denklemini bulunuz.

23.
$\frac{x-3}{4}=\frac{y-a}{-2}=\frac{z}{b}$ doğrusu $A(-2,1,5)$ noktasından geçtiğine göre a ve b kaç olmalıdır?

24.
$\frac{x+m-1}{4}=\frac{y-5}{5}=\frac{2m-z}{2}$ doğrusu Oz eksenini kestiğine göre m reel sayısını ve kesişim noktasını bulunuz.

25. $\frac{x+2}{2}=-3y=\frac{z-1}{m}$ ve $\frac{x+1}{5}=\frac{1-y}{2}=2z$ doğruları m nin hangi değeri için kesişir.Sonra kesişim noktasını bulunuz.

01. A(-5,3,2), B(1,3,5) ve C(-2,-1,a) noktaları verilıyor.
a) [AB] nın D orta noktasının koordinatlarını bulunuz.
b) $|AB| = |AC|$ ise a kaçtır?

02. Bir tabanı ABCD, diğer tabanı A'B'C'D' olan ABCDA'B'C'D' pirizması göz önüne alınıyor.
A(3,1,0), B(3,5,0), C(1,5,0) ve D'(1,1,4) tür.

a) Bu pirizmanın tüm yüzleri paralelkenar (paralelyüz) ise diğer köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

b) Bu pirizma dikdörtgenler pirizması olabilmesi için D köşesinin koordinatlarını bulunuz. Bu durumda cismin hacmini, yüzey alanını ve cisim köşegenini hesaplayınız.

03. Merkezi M(3,3,1) olan ve
a) P(3,-1,5) noktasından geçen;
b) xOy düzlemine teğet olan;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 7$ küresine teğet olan küre denklemini bulunuz.

04. A(-1,8,3) ve B(11,4,-7) noktaları verilyor.[AB] çaplı küre denklemini bulunuz.

05. P(1,1,2) noktasından geçen ve her üç koordinat düzlemlerine teğet olan küre denklemini bulunuz.

06. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + (m+1)z = m$ küresi xOy düzlemine teğetse kürenin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

07. $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+7)^2 = 81$ küresinin P(-2,-1,5) noktasına en kısa ve en uzun uzaklıklarını bulunuz.

08. $\overrightarrow{AB} = (3,-1,4)$ vektörü ile B(1,4,2) noktası verilıyor.A noktasının koordinatlarını ve $\overrightarrow{OA}$ vektörü ve bu vektörün normunu bulunuz.

09. $\vec{a} = (m-1,2,n)$ ve $\vec{b} = (n+4,p,3-m)$ vektörleri verilıyor. $\vec{a} = \vec{b}$ ise $\vec{v} = (m,n,p)$ vektörünün normunu bulunuz.

10. $\vec{a} = (m-3,2,-6)$ ve $\vec{b} = (2,n+5,-3)$ vektörleri paralel ise m ve n kaçtır?

11. A(-1,3,5), B(a,-2,3), C(3,4,-7) ve D(1,2,b) noktaları verilıyor.

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ ise a ve b yi bulunuz.

12. $\vec{a}$ =(3,-1,2) vektörü ile aynı doğrultudaki birim vektörleri bulunuz.

13. (-1,2,-2) vektörünü {(2,1,0),(3,0,1),(0,-2,1)} vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.

14. A(3,2,-1) noktası ile $\overrightarrow{AB}$ =(5,-7,6) vektörü veriliyor.B noktasını bulunuz.

15. A(-1,3,2), B(5,-1,1) noktaları ile $\vec{v}$ =(p-1,3-k,-3) vektörü veriliyor. $\overrightarrow{AB} // \vec{v}$ ise $\vec{v}$ vektörünün uzunluğunu (normunu) bulunuz.

16 .

a) $\vec{v}$ =(0,-2,5) vektörünü $\vec{a}$ =(1,-1,0), $\vec{b}$ =(2,0,1) ve $\vec{c}$ =(-2,2,2) vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak ifade ediniz.

b) Uzayın herhangi bir $\vec{w}$ =(x,y,z) vektörü a) şıkkında verilen vektörlerin bir lineer bileşimi olarak ifade edilebilir mi?

c) $\vec{v}$ =(0,-2,5) vektörünü $\vec{a}$ =(1,-1,0), $\vec{b}$ =(2,0,1) ve $\vec{c}$ =(0,-2,-1) vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak ifade edilebilir mi?Edilemezse neden?

17. $\vec{u}$ =(x,0,1), $\vec{v}$ =(2,y,3) ve $\vec{w}$ =(2,1,z) vektörleri lineer bağımlı ise x,y,z arasında hangi bağıntı olmalıdır?

18. $\vec{A}$ =(3,-1,4), $\vec{B}$ =(m,2,-1) ve $\vec{C}$ =(2,4,1) vektörleri veriliyor. $\overrightarrow{AB} \perp \vec{C}$ olduğuna göre m kaçtır?

19. A(8,2,0), B(4,6,-7), C(-3,1,2),D(-9,-2,4) noktaları veriliyor.

Buna göre; $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

20. $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ br, $|\vec{b}|=2$ br $m(\vec{a},\vec{b})=30^\circ$ olduğuna göre; $\vec{a}+\vec{b}$ ile $\vec{a}-\vec{b}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

21. Köşe koordinatları A(8,3,-5), B(2,3,-4), C(3,5,2) olan ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu ispatlayınız.

22. A(a,1,-1), B(2a,0,2), C(2a+2,a,1) noktaları veriliyor. $\vec{AB}\perp\vec{BC}$ ise A, B ve C noktalarını bulunuz.

23. $|\vec{a}|=6$ br, $|\vec{b}|=4$ br dir.

a) $\vec{a}+k\vec{b}$ ile $\vec{a}-k\vec{b}$

vektörleri dik ise k kaçtır?

b) $m(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$ ise $\vec{a}+2\vec{b}$ nün uzunluğu kaçtır?

24. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ ise

$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ değerini bulunuz.

25. $|\vec{a}|=4$ br, $\cos(\overline{e_1},\vec{a})=3/4$ ve $m(\overline{e_2},\vec{a})=60^\circ$ ise

$\vec{a}$ nü bulunuz.

26. A(3,-3,5) , B(3, 2,-7) ve C(1,-1,0) noktaları

a) $\vec{AB}$ b) $|\vec{AB}|$ c) $\vec{AB}$ boyunca birim vektörü

d) $\vec{AB}$ nün $\vec{AC}$ üzerindeki dik izdüşüm vektörünü

e) ABC üçgeninin B açısı için sinB değerini

f) ABC üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm:

a) $\vec{AB}=(0,5,-12)$

b) $|\vec{AB}|=\sqrt{0^2+5^2+(-12)^2}=13$ br

c) $\vec{AB}$ boyunca birim vektörü $\vec{e}=(x,y,z)$ olsun.

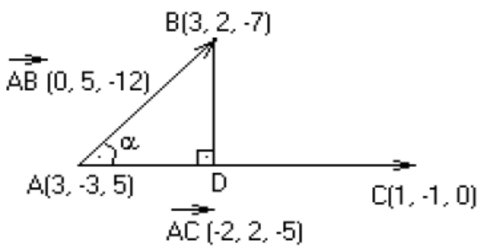
$\vec{AB}\,//\,\vec{e}\Rightarrow \frac{x}{0}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-12}=k$ (katsayıları orantılı olmalı)

$x=0$, $y=5k$, $z=-12k$ ve $|\vec{e}|=1$ olmalıdır.

$\sqrt{0^2+25k^2+144k^2}=1\Rightarrow k=1/13$ dir.

O halde $\vec{e}=(0,\frac{5}{13},-\frac{12}{13})$ bulunur.

d)



$\vec{AB}$ nün $\vec{AC}$ vektörü üzerindeki izdüşüm vektörü $\vec{AD}$ olsun.

$\vec{AC}$ boyunca birim vektör $\vec{e}$ ise

$\vec{AD} = |\vec{AD}|\vec{e}$ olmalıdır.

$$|\vec{AD}| = |\vec{AB}||\cos\alpha| = |\vec{AB}|\left|\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}\right|$$

$|\vec{AD}| = 13.\frac{0+10+60}{13.\sqrt{33}} = \frac{70}{\sqrt{33}}$ O halde;

$\vec{AD} = \frac{70}{\sqrt{33}}\left(\frac{-2}{\sqrt{33}}, \frac{2}{\sqrt{33}}, -\frac{-5}{\sqrt{33}}\right) = \frac{70}{33}(-2, 2, -5)$ bulunur.

f) m(BAC)=a olsun.Buna göre;

$A(ABC) = \frac{|AB||AC|\sin a}{2}$

$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$

$$\cos a = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{70}{13\sqrt{33}}$$

$A(ABC) = \frac{\sqrt{677}}{2}$ br² bulunur.

27. $\vec{p} = (2,1,1)$ ve $\vec{q} = (3,4,-1)$ vektörlerine dik olan birim vektörleri bulunuz.