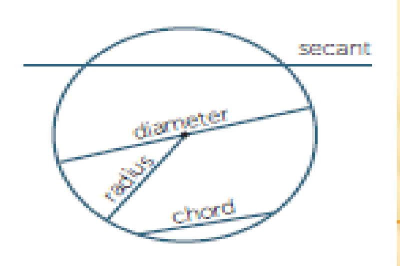
ÇEMBER

- Gears and records along with CD's are ideal examples of circles in real life. They are, and were in their time, essential to every day life.
- Bangles and Rings are examples of circle
- Circles are used in real life situation as wheels on cars bikes and other forms of transportation. The shape of a circle helps create a smooth movement for a car or a bike to move from place to place.

- Doughnut is a perfect example of a circle. The shape is prime factorization of the delicacy. It allows a baker to induce a heat distribution to create an evenly backed delicious doughnut.



*Bir **ÇEMBER** düzlemde sabit bir noktaya **(MERKEZ)** sabit bir uzaklıkta **(YARIÇAP)** olan noktalar kümesidir.*
*Çember üzerindeki bir noktanın merkeze olan uzaklığı **YARIÇAP** olarak adlandırılır. Çemberin tanımından herhangi iki yarıçap aynı uzunluğa sahiptir. Yarıçap sözcüğünün bu aralıklar için ve bu aralıkların ortak ortak uzunluğu için kullanıldığına dikkat edelim.*
*Bir çember üzerindeki iki noktayı birleştiren bir aralık **KİRİŞ** olarak adlandırılır.*
*Merkezden geçen bir kiriş **ÇAP** olarak adlandırılır. Çap bitiş noktalarında birleşen iki yarıçapı içerdiğinden dolayı her çap yarıçapın iki katına eşit uzunluktadır. Çap sözcüğü hem bu aralıkları hem de bu aralıkların ortak uzunluklarını belirtmek için kullanılır.*
*Çemberi iki belirli noktada kesen bir doğru **SEKANT (KESEN)** olarak adlandırılır. Bundan dolayı bir kiriş çemberi kesen bir sekantın uzunluğu ve bir çap çemberin merkezinden geçen sekantın uzunluğudur.*

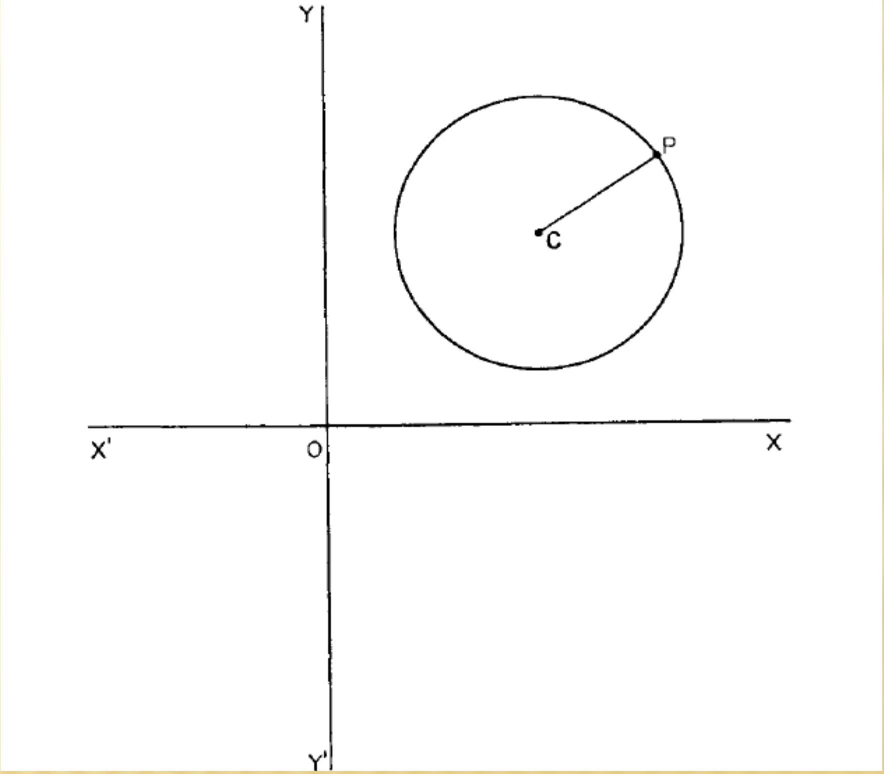
ÇEMBERİN DENKLEMİ

$P(x, y)$, $C(\alpha,\beta)$ merkezli r yarıçaplı bir çember üzerinde bir nokta ise

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

dir.

Diğer taraftan bu denklem P(x,y) noktasının sabit bir $C(\alpha,\beta)$ noktasına uzaklığının sabit r uzaklığı olduğunu söyler.
Yani, bu denklem, r yarıçaplı (α,β) merkezli bir çemberin çevresi üzerindeki tüm noktaları gösterir.



- İkinci dereceden

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$$

genel denklemi, eğer $a = b \neq 0$ ve $h = 0$ ise bir çemberi gösterir.

- Bir P noktasının geometrik yeri eğer herhangi iki A ve B noktasına uzaklıkları eşit değilse bir çemberi gösterir.

Yani, $PA = kPB$ eğer $k \neq 1$ ise bir çemberi gösterir.

- Eğer $g^2 + f^2 - c > 0$ ise, çemberin yarıçapı reel olacaktır. Buradan, bir düzlem üzerinde çember çizmek mümkündür.

Eğer $g^2 + f^2 - c = 0$ ise, çemberin yarıçapı sıfır olacaktır. Böyle bir çember nokta çember olarak bilinir.

Eğer $g^2 + f^2 - c < 0$ ise, çemberin yarıçapı $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ bir sanal sayı olacaktır. Buradan, çemberi çizmek mümkün değildir.

Çemberin $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ genel denkleminin özellikleri:

Bu denklem aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$*x$ ve y ye göre karesel bir denklemdir.

$*x^2$ nin katsayısı y^2 nin katsayısına eşittir.

*xy içeren hiçbir terim yoktur, yani xy nin katsayısı sıfırdır.

*Bu denklem üç keyfi sabite sahiptir. Eğer ne merkezi ne de yarıçapı bilinen bir çemberin denklemini bulmak istersek denklemi yukarıdaki formda alıp soruda çember için verilen geometrik koşullara göre g, f, c sabitleri bulunur.

Bir önceki slayttaki özellikleri düşünerek

$$ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

denkleminin bir çemberi gösterdiğini söyleyebiliriz.

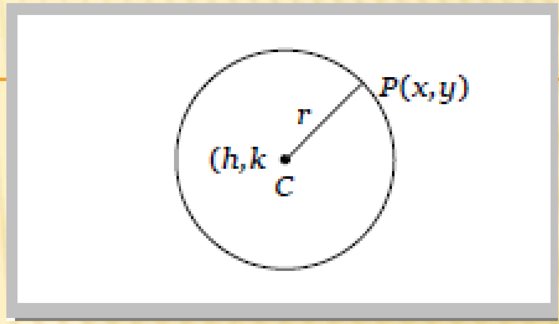
Bu denklem $a \neq 0$ olmak üzere

$$x^2 + y^2 + 2\frac{g}{a}x + 2\frac{f}{a}y + \frac{c}{a} = 0$$

olarak da yazılabilir.

Buradan,

$$\text{MERKEZ} = \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \text{ YARIÇAP} = \sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{f^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$$



Bir çember denkleminin merkezi formu:

(h,k) merkezli r yarıçaplı bir çemberin denklemi

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Not: Eğer merkez orijin ise çemberin denklemi:

$$x^2+y^2=r^2$$

Eğer $r=0$ ise çember nokta çember olarak isimlendirilir ve

denklemi: $(x-h)^2+(y-k)^2=0$

Eşmerkezli çember:

Aynı $C(h,k)$ merkezli fakat farklı r_1 ve r_2 yarıçaplı iki çember eşmerkezli çemberler olarak isimlendirilir. Bundan dolayı $(x-h)^2+(y-k)^2=r_1{}^2$ ve $(x-h)^2+(y-k)^2=r_2{}^2,\ r_1 \neq r_2$ çemberleri eşmerkezlidir. Bu sebeple, eşmerkezli çemberlerin denklemleri sadece sabit terimlerde farklılaşır.

Parametrik koordinatlar:

i) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ çemberi üzerindeki herhangi bir noktanın

parametrik koordinatları

$(h+r\cos\theta, k+r\sin\theta), \quad 0\leq\theta<2\pi$

şeklinde verilir.

Özel olarak, $x^2+y^2=r^2$ çemberi üzerindeki herhangi bir noktanın

koordinatları

$(r\cos\theta, r\sin\theta), \quad 0\leq\theta<2\pi$

biçimindedir.

ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ çemberi üzerindeki herhangi bir

noktanın parametrik koordinatları

$x=-g+\sqrt{g^2+f^2-c}\cos\theta$ ve $y=-f+\sqrt{g^2+f^2-c}\sin\theta, 0\leq\theta<2\pi$

biçimindedir.

Eğer sistem ortogonal değilse çemberin denklemi:

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

biçiminde verilir.

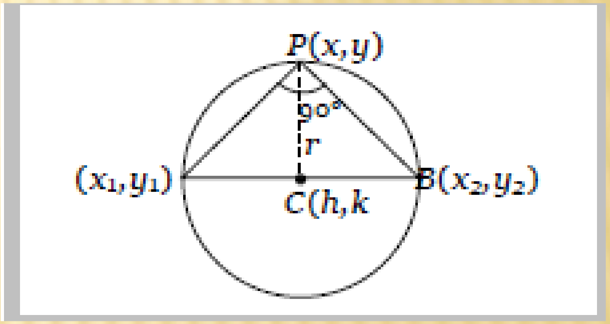
ÖRNEK 1

Verilen bir çap üzerindeki çember:

Verilmiş (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarını çap olarak birleştiren bir doğru üzerinden çizilen çemberin denklemi

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

olarak verilir.



Not: Bir çemberin bir çapının bitiş noktalarının koordinatları verilmişse çemberin denklemini merkezin koordinatlarını ve yarıçapını hesaplayarak bulabiliriz. Merkez çapın orta noktası, yarıçap ise çapın uzunluğunun yarısıdır.

ÖRNEKLER 2-7,9,10

Verilen koşullar altında bir çemberin denklemi:

Bir çemberin genel denklemi, yani

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

üç adet bağımsız g, f, c sabitlerini içerir. Buradan çember denkleminin bulunmasında üç koşul gereklidir:

i) Doğrudaş olmayan üç $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ noktadan geçen çemberin denklemi:

Çemberin denklemi $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ olsun.

Eğer $(x_1, y_1), (x_2, y_2)(x_3, y_3)$ noktaları bu çemberin üzerinde ise koordinatları bu denklemi sağlar. Buradan,

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + 2gx_3 + 2fy_3 + c = 0$$

denklemlerinin çözümünden g, f, c elde edilir.

Çember denklemi bulunmuş olur.

Alternatif metod:

Doğrudaş olmayan üç $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$

noktalarından geçen çemberin denklemi

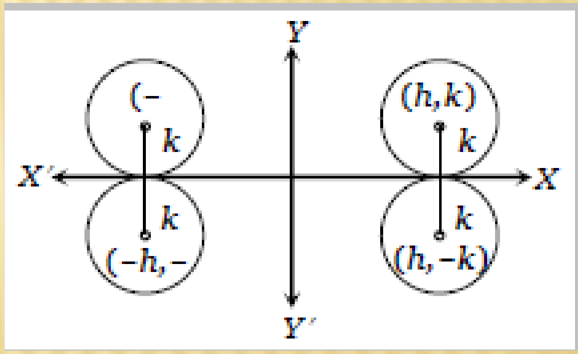
$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 + y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

BAZI ÖZEL DURUMLARDA ÇEMBER DENKLEMİ

1)Eğer çemberin merkezi (h,k) ise ve orijinden geçiyorsa çemberin denklemi:

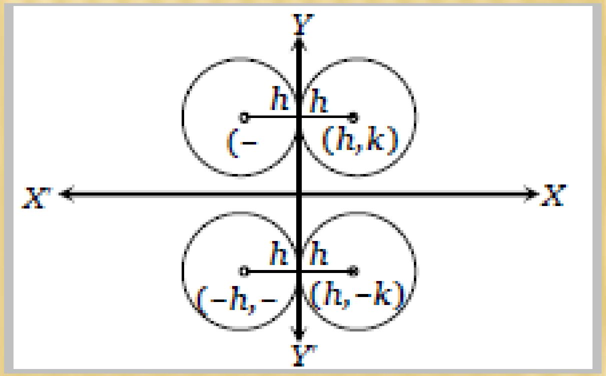
$$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2+k^2 \Rightarrow x^2+y^2-2hx-2ky=0$$

2)Eğer çember x eksenine teğet geçiyorsa denklemin dört durumu vardır:



$$(x \pm h)^2+(\mathrm{y} \pm k)^2=k^2$$

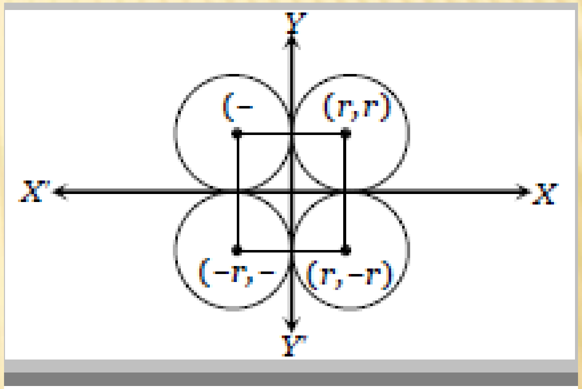
3)Eğer çember y eksenine teğet geçiyorsa denklemin dört durumu vardır:



$$(x \pm h)^2+(\mathrm{y} \pm k)^2=h^2$$

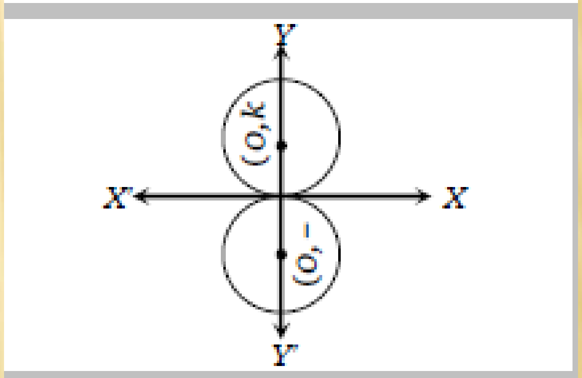
4)Eğer çember iki eksene de teğet geçiyorsa denklemin dört durumu vardır:

$$(x \pm r)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$$



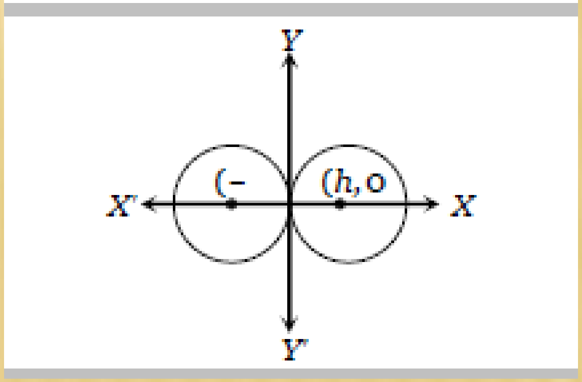
5)Eğer çember x-eksenine orijinde teğetse denklemin iki durumu vardır:

$$x^2 + (y \pm k)^2 = k^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \pm 2ky = 0$$



6)Eğer çember y-eksenine orijinde teğetse denklemin iki durumu vardır:

$$(x \pm h)^2 + y^2 = h^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \pm 2xh = 0$$

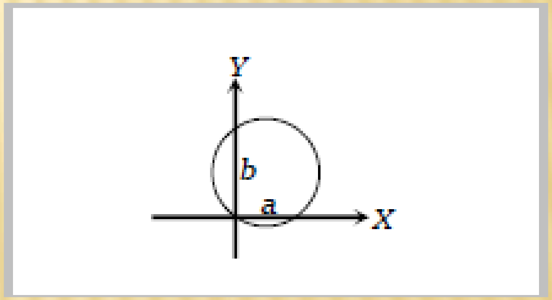


7)Eğer çember orijinden geçiyor ve eksenleri

a ve b uzunluğunda kesiyorsa denklemin

dört durumu vardır.

$x^2 + y^2 - ax - by = 0$ ve merkez $(a/2, b/2)$



ÖRNEKLER 8,18,32,33

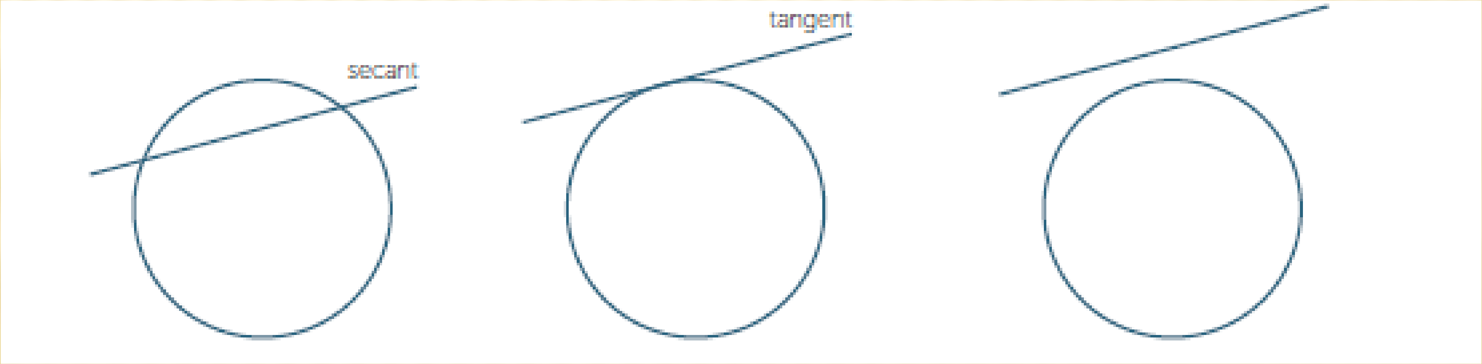
BİR DOĞRU VE BİR ÇEMBERİN KESİŞİMİ

Çemberlerin Teğetleri

*Bir çemberin **TEĞETİ** çember ile tek bir noktada kesişen bir doğrudur. Aşağıdaki şekiller bir doğru ve bir çemberin mümkün olan üç durumunu göstermektedir.*

- *Doğru sekant olabilir, çemberi iki noktada keser.*
- *Doğru teğet olabilir, çemberle tek bir noktada kesişir.*
- *Doğru çemberi kesmez.*

Secant ve tangent (kiriş ve teğet) kelimeleri latincedir. Secant 'kesme', tangent 'dokunma' anlamındadır.



Teğetin çember ile buluştuğu nokta ***TEMAS NOKTASI*** *olarak adlandırılır. Bir çember üzerinde özel bir noktadan bir teğetin nasıl çizileceği ya da bu noktadan birden fazla teğet geçip geçmediği tam olarak açık değildir.*
Az sonra verilecek teorem bu durumu açıklar ve ispatında Pisagor teoremini kullanır.

TEOREM:

T, O merkezli bir çember üzerindeki bir nokta olsun.

a) *T den geçen doğru OT yarıçapına diktir ve çembere teğettir.*
b) *Bu doğru çemberin T den geçen tek teğetidir.*
c) *Teğet üstünde T dışındaki her nokta çemberin dışındadır.*

Çemberin denklemi $x^2 + y^2 = a^2$ olsun. (i)

Doğrunun denklemi $y = mx + c$ olsun. (ii)

(i) ve (ii) den

$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$ ya da $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$ (iii)

Durum 1.

Kesişim noktaları reel ve belirli ise (iii)'ten iki belirli kök elde edilir.

$$B^2 - 4AC > 0 \rightarrow 4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) > 0 \rightarrow a^2 > \frac{c^2}{1+m^2}$$

$\rightarrow a > \dfrac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = (0,0)$ dan $y = mx + c$ doğrusuna çizilen dikmenin uzunluğu

$\rightarrow a >(0,0)$ dan $y = mx + c$ doğrusuna çizilen dikmenin uzunluğu

Bundan dolayı, bir doğru bir çember ile eğer çemberin yarıçapı doğruya merkezden çekilen dikmenin uzunluğundan büyükse iki belirli noktada kesişir.

ÖRNEK 12

Durum 2.

Kesişim noktaları çakışık ise (iii)'ten birbirine eşit iki belirli kök elde edilir.

$$B^2 - 4AC = 0 \rightarrow 4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) = 0 \rightarrow a^2 = \frac{c^2}{1+m^2}$$

$$\rightarrow a = \frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = (0,0) \text{ dan } y = mx + c \text{ doğrusuna çizilen dikmenin}$$

uzunluğu

$\rightarrow a = (0,0)$ dan $y = mx + c$ doğrusuna çizilen dikmenin uzunluğu

Bundan dolayı, bir doğru bir çembere, eğer çemberin yarıçapı doğruya merkezden çekilen dikmenin uzunluğuna eşitse, teğettir.

ÖRNEK 11

Durum 3.

Kesişim noktaları sanal ise (iii)'ten sanal kökler elde edilir.

$$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow 4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) < 0 \rightarrow a^2 < \frac{c^2}{1+m^2}$$

$\rightarrow a < \dfrac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = (0,0)$ dan $y = mx + c$ doğrusuna çizilen dikmenin uzunluğu

$\rightarrow a < (0,0)$ dan $y = mx + c$ doğrusuna çizilen dikmenin uzunluğu

Bundan dolayı, bir doğru bir çember ile, eğer çemberin yarıçapı doğruya merkezden çekilen dikmenin uzunluğundan küçükse, kesişmez.

Bir çember ile kesilen doğruda kesişim noktaları arasındaki uzaklık:

Çember $\rightarrow x^2 + y^2 = a^2$

Doğru $\rightarrow y = mx + c$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}$$

Teğetlik şartı:

L doğrusu S çemberine, eğer çemberin merkezinden doğruya çekilen dikmenin uzunluğu çemberin yarıçapına eşitse yani $p = r$ ise, teğettir. Bu L doğrusu için teğetlik şartıdır.

$x^2 + y^2 = a^2$ çemberi $y = mx + c$ doğrusuna, eğer $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$ ise, teğettir.

Tekrar,

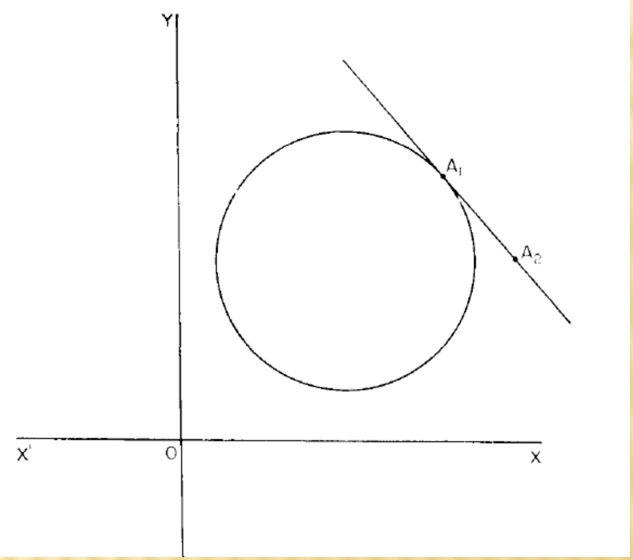
i) $a\sqrt{1+m^2} - c^2 > 0$ ise doğru çember ile reel farklı noktalarda kesişir.

ii) $c^2 = a\sqrt{1+m^2}$ ise doğru çember ile teğettir.

iii) $a\sqrt{1+m^2} - c^2 < 0$ ise doğru çember ile iki sanal noktada kesişir.

ÖRNEKLER 5d, 6d,7d kaldık

ÇEMBERİN TEĞETİ



A_1 çember üzerinde olsun.

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

A_2 şekildeki konumda olsun ve A_1A_2 çembere teğet olsun.

Bir önceki bölümdeki P_1 ve P_2 noktaları A_1 ile çakışır.

Yani λ_2/λ_1 için Joachimsthal kuadratik denklemi sıfıra eşit olan çakışık λ_2/λ_1 köklerine sahiptir. Bu, $S_1 = 0$ ve $T_{12} = 0$ olmasını gerektirir. İlk denklem sağlanır, çünkü A_1 çember üzerindedir. Bundan dolayı A_1A_2 nin çembere teğet olması için gerek ve yeter koşul

$T_{12} = x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0.$

Bundan dolayı A_1 deki teğet üzerindeki tüm noktaların (x, y) koordinatları

$T_1 = x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

denklemini sağlar.

ÖRNEKLER 13-17

Bir çemberin (x_1, y_1) deki teğetinin denklemi için,

$$x^2 \to xx_1, \quad y^2 \to yy_1, \quad x \to \frac{x+x_1}{2}, \quad y \to \frac{y+y_1}{2}, \quad xy \to \frac{xy_1 + x_1 y}{2}$$

yazılır ve sabit aynı kalır.

Bu metod, (x_1, y_1) deki teğetin ikinci dereceden herhangi bir koniği sağlar, yani

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ın (x_1, y_1) deki teğetinin denklemi

$$axx_1 + h(xy_1 + x_1 y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

dır.

Eğim formu:

$y = mx + c$ doğrusu $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin teğeti olsun.

Çemberin merkezi $(0,0)$ dan doğruya çekilen dikmenin uzunluğu

çemberin yarıçapıdır.

$$\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = a \Rightarrow c = \pm a\sqrt{1+m^2}$$

c nin bu değeri $y = mx + c$ de yerine yazılırsa

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$$

bulunur. Aranan teğetlerin denklemidir.

Temas noktası:

Eğer çember $x^2 + y^2 = a^2$ ise ve teğet denklemi $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ olsun.

$x^2 + y^2 = a^2$ ve $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ nin eşzamanlı çözümü ile

$x = \pm \dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}}$ ve $y = \mp \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}$

bulunur. Bundan dolayı temas noktasının koordinatları

$$\left(\pm \frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, y = \mp \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

olur.

Alternatif metod:

Temas noktası (x_1, y_1) ve $x^2 + y^2 = a^2$ nin (x_1, y_1) deki teğeti

$xx_1 + yy_1 = a^2$ olsun.

$xx_1 + yy_1 = a^2$ ve $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ birbirine denk olduğundan

$$\frac{x_1}{m} = \frac{y_1}{-1} = \frac{a^2}{\pm a\sqrt{1+m^2}}$$

$$\rightarrow x_1 = \pm\frac{am}{\sqrt{1+m^2}} \text{ ve } y_1 = \mp\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$$

Bundan dolayı, temas noktasının koordinatları $\left(\pm\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \mp\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

NOT:

*Eğer $y = mx + c$ doğrusu $x^2 + y^2 = r^2$ çemberine teğet ise temas noktası

$\left(-\dfrac{mr^2}{c}, \dfrac{r^2}{c}\right)$ ile verilir.

*Eğer $ax + by + c = 0$ doğrusu $x^2 + y^2 = r^2$ çemberine teğet ise temas noktası

$\left(-\dfrac{ar^2}{c}, -\dfrac{br^2}{c}\right)$ ile verilir.

ÖRNEKLER 21,22,23

TEĞETİN UZUNLUĞU

Herhangi bir $P(x_1, y_1)$ noktasından bir çembere iki teğet çizilebilir.

P nin çemberin dışında, üzerinde veya içersinde oluşuna göre reel,

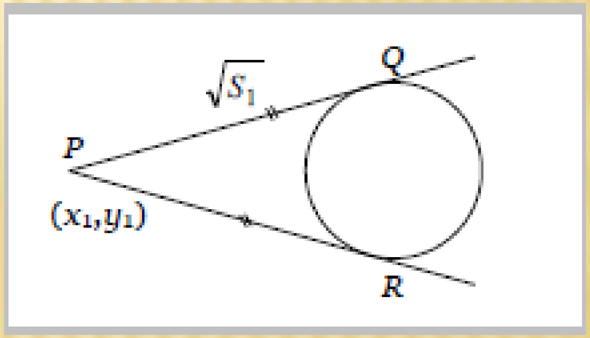
çakışık veya sanal olabilir.

PQ ve PR $P(x_1, y_1)$ den $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ çemberine çizilen iki teğet olsun.

$PQ = PR$ P noktasından çizilen teğetin uzunluğudur ve

$PQ = PR = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} = \sqrt{S_1}$

olarak verilir.

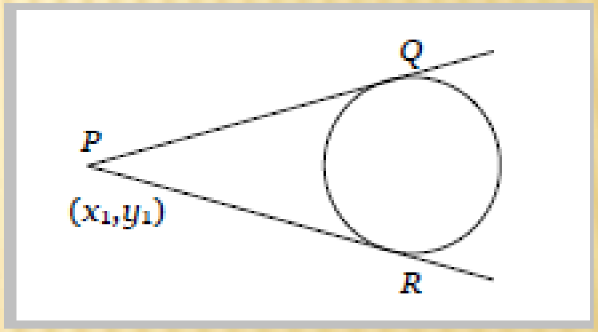


ÖRNEK 31

TEĞET ÇİFTİ

Bir $P(x_1, y_1)$ noktasından $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ çemberine PQ ve PR teğetleri çizilebilir. Bu teğetlerin denklemleri $SS_1 = T^2$ dir.

$S = 0$ olduğunda çemberin denklemi elde edilir, $T = 0$ olduğunda (x_1, y_1) den çekilen teğet elde edilir, ve S_1, S de x yerine x_1, y yerine y_1 yazılarak elde edilir.



ÖRNEKLER 19,20

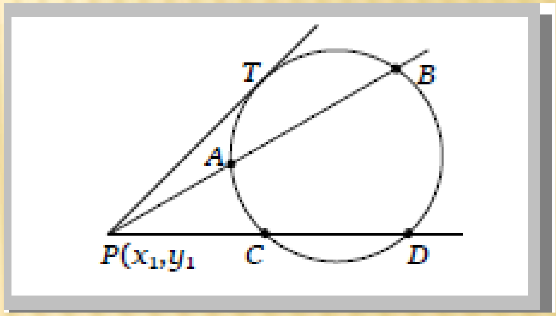
BİR NOKTANIN BİR ÇEMBERE GÖRE KUVVETİ

$P(x_1, y_1)$ çember dışında bir nokta ve PAB ve PCD iki kiriş olsun.

$P(x_1, y_1)$ in $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ a göre kuvveti $PA.PB$ ye eşittir.

$PA.PB = PC.CD = (PT)^2 = S_1 = (\sqrt{S_1})^2$

$PA.PB = (\sqrt{S_1})^2 =$ teğet uzunluğunun karesi



Eğer P dışarıda, içeride veya çember üzerinde ise

$PA.PB$ sırasıyla pozitif, negatif veya sıfır olur.

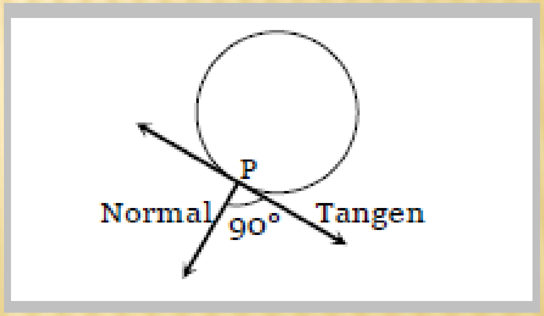
ÇEMBERİN BİR NOKTADAKİ NORMALİ

Bir çemberin herhangi bir noktadaki normali, o noktadan geçen teğete diktir ve her zaman çemberin merkezinden geçer.

Normal denklemi:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ çemberinin herhangi (x_1, y_1) noktasındaki normalinin denklemi

$y - y_1 = \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)$ veya $\dfrac{x - x_1}{x_1 + g} = \dfrac{y - y_1}{y_1 + f}$ dir.



*$x^2+y^2=a^2$ çemberinin herhangi bir (x_1, y_1) noktasındaki normalinin denklemi

$xy_1 - x_1y = 0$ ya da $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1}$ dir.

*$x^2+y^2=a^2$ çemberinin herhangi bir normalinin denklemi m normalin eğimi olmak üzere $y = mx$ dir.

*$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ çemberinin herhangi bir normalinin denklemi m eğim olmak üzere $y+f=m(x+g)$ dir.

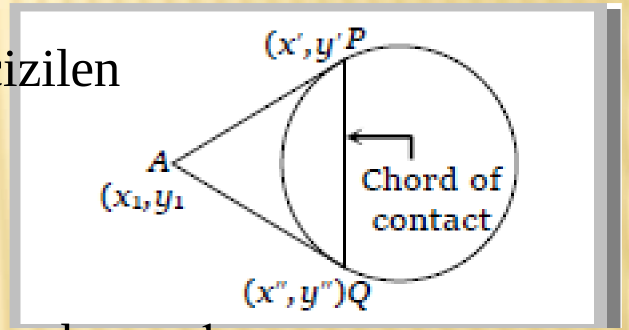
*Eğer $y=mx+c$ doğrusu r yarıçaplı (a,b) merkezli bir çemberin normali ise $b=ma+c$ dir.

TEĞETLERİN TEMAS KİRİŞİ

Temas kirişi:

Bir koniğe dışarıdaki bir noktadan çizilen iki teğetin temas noktalarını birleştiren kiriş teğetlerin temas kirişi olarak adlandırılır.

Temas kirişinin denklemi:



$x^2 + y^2 = a^2$ çemberine herhangi bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetlerin temas kirişinin denklemi

$xx_1 + yy_1 = a^2$ dir.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ çemberine herhangi bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetlerin temas kirişinin denklemi

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ dır.

Temas kirişinin denklemi ile teğet denkleminin, eğer (x_1, y_1) noktası çember üzerinde ise çakıştığı açıktır.

Temas kirişinin uzunluğu $2\sqrt{r^2 - p^2}$ dir.

p : merkezden kirişe çekilen dikmenin uzunluğudur.

Bir noktada ikiye bölünen bir kirişin denklemi:

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ çemberinin (x_1, y_1) noktasında ikiye bölünen kirişinin denklemi

$T = S'$ olarak verilir, yani

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + 2f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ dir.

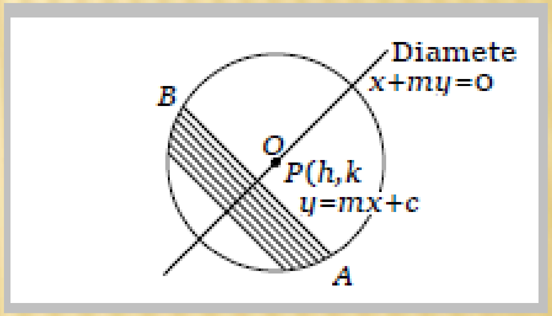
ÖRNEKLER 24,10d

BİR ÇEMBERİN ÇAPI

Bir çemberin paralel kirişler sisteminin orta noktasının geometrik yeri **çemberin çapıdır.**

$x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin c bir parametre olmak üzere **y=mx+c paralel kirişlerini ikiye bölen çapın denklemi: x+my=0 dır.**

NOT: Bir çemberin paralel kiriş sistemine ait çap her zaman çemberin merkezinden geçer ve bu paralel kirişlere diktir.



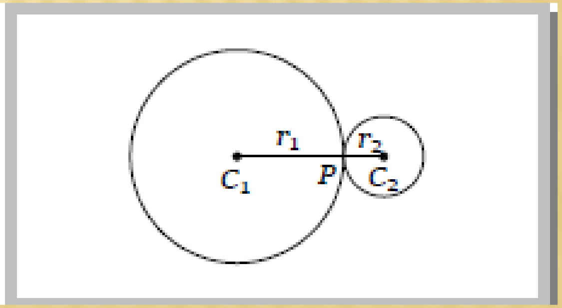
BİRBİRİNE TEĞET OLAN ÇEMBERLERİN DURUMLARI

1) İki çember dışarıdan birbirine teğet ise:
   Merkezleri arasındaki uzaklık yarıçaplarının toplamıdır.
   $|C_1C_2| = r_1 + r_2$
   Böyle durumlarda P temas noktası C_1 ile C_2 yi birleştiren doğruyu içerinden

$$r_1 : r_2 \Rightarrow \frac{C_1P}{C_2P} = \frac{r_1}{r_2}$$

   oranında böler.
   Eğer $C_1 = (x_1, y_1)$ ve $C_2 = (x_2, y_2)$ ise P nin koordinatları

$$\left(\frac{r_1x_2 + r_2x_1}{r_1 + r_2}, \frac{r_1y_2 + r_2y_1}{r_1 + r_2} \right) \text{ dir.}$$



2) İki çember içeriden birbirine teğet ise:

Merkezleri arasındaki uzaklık yarıçaplarının farkıdır.

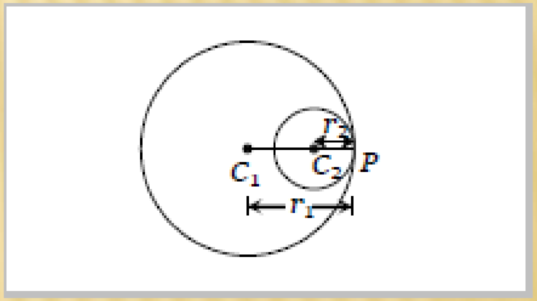
$|C_1 C_2| = r_1 - r_2$

Böyle durumlarda P temas noktası C_1 ile C_2 yi birleştiren doğruyu dışarıdan

$$r_1 : r_2 \Rightarrow \frac{C_1 P}{C_2 P} = \frac{r_1}{r_2}$$

oranında böler.

Eğer $C_1 = (x_1, y_1)$ ve $C_2 = (x_2, y_2)$ ise P nin koordinatları



İKİ ÇEMBERİN ORTAK KİRİŞİ

Tanım: Verilen iki çemberin kesişim noktalarını birleştiren kiriş, ortak kiriştir.

Ortak kirişin denklemi:

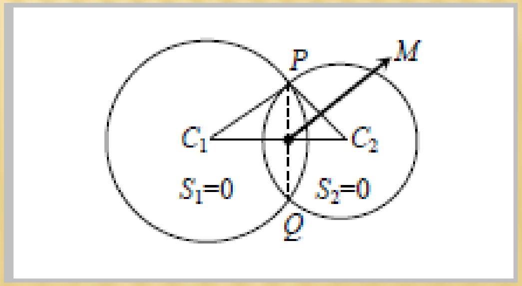
$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \text{(i)}$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \text{(ii)}$$

çemberlerinin ortak kirişlerinin denklemi

$$2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + c_1 - c_2 = 0$$

yani, $S_1 - S_2 = 0$ dır.



Ortak kirişin uzunluğu:

$$PQ = 2(PM) = 2\sqrt{C_1P^2 - C_1M^2}$$

$C_1P : S = 0$ çemberinin yarıçapı

$C_1M : PQ$ ortak kirişine C_1 merkezinden çekilen dikmenin uzunluğu

NOT: Ortak kirişin uzunluğu

*$2\sqrt{r_1^2 - p_1^2} = 2\sqrt{r_2^2 - p_2^2}$ dir.

p_1 ve p_2 merkezden kirişe çekilen dikmelerin uzunluğudur.

*Ortak kirişin denklemini kullanırken x^2 ve y^2 nin katsayıları her iki denklemde de eşit olmalıdır.

*İki çember, eğer ortak kirişlerinin uzunluğu sıfır ise teğet geçer.

*Ortak kirişin maksimum uzunluğu daha küçük çemberin yarıçapıdır.

ÖRNEKLER 25,13d

İKİ ÇEMBERİN KESİŞİM AÇISI

$S=0$ ve $S'=0$ çemberlerinin kesişim açısı kesişim noktasından geçen teğetlerinin arasındaki açıdır.

Eğer

$$S = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$S' = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

r_1, r_2 yarıçaplı iki çember ise ve d merkezleri arasındaki uzaklık ise aralarındaki kesişim açısı θ

$$\cos\theta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} \quad \text{ya da} \quad \cos\theta = \frac{2(g_1g_2 + f_1f_2) - (c_1 + c_2)}{2\sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}\sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}}$$

şeklinde verilir.

1)Diklik şartı:

İki çemberin kesişim açısı $\theta = 90^o$ ise bu çemberler ortogonal çemberler olarak adlandırılır ve diklik şartı

$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$ ile verilir.

NOT:

*İki çember ortogonal kesişirlerse bir çember üzerindeki teğetin diğer çemberin merkezine uzaklığı diğer çemberin yarıçapına eşittir.

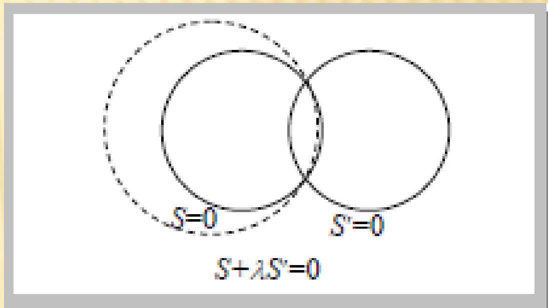
*$x^2 + y^2 + 2g_ix + 2f_iy + c_i = 0, (i = 1,2,3)$ üç çemberin dik olarak kesiştiği bir çemberin denklemi

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ -c_1 & g_1 & f_1 & -1 \\ -c_2 & g_2 & f_2 & -1 \\ -c_3 & g_3 & f_3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ÇEMBER AİLESİ

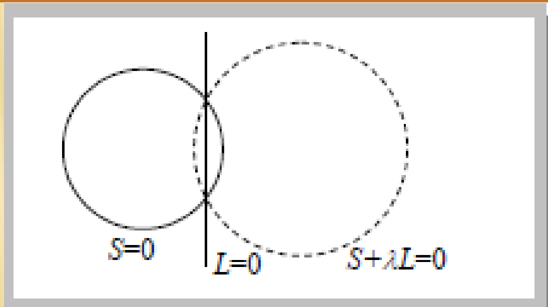
1)$S = 0$ ve $S' = 0$ verilen iki çemberin kesişim noktasından geçen çember ailesinin denklemi

$S + \lambda S' = 0 \quad (\lambda \neq -1)$



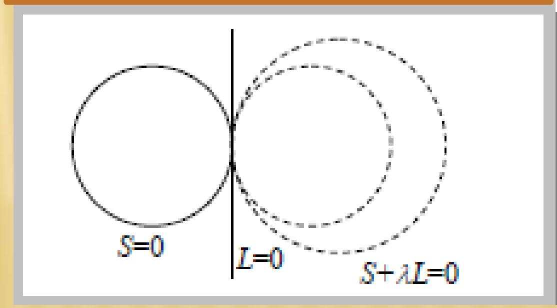
2)$S = 0$ çemberi ve $L = 0$ doğrusunun kesişim noktasından geçen çember ailesinin denklemi

$S + \lambda L = 0$



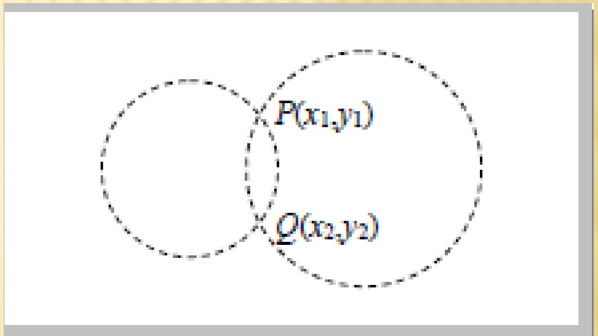
3)$S = 0$ çemberi ve $L = 0$ teğet doğrusunun (kontakt noktası P) belirttiği çember ailesinin denklemi

$S + \lambda L = 0$



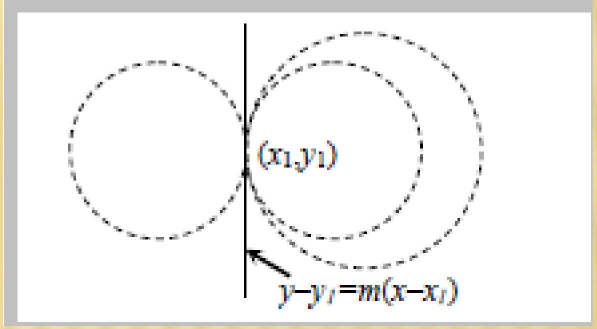
4) $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ noktalarından geçen çember ailesinin denklemi

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$



5) $y-y_1=m(x-x_1)$ e (x_1, y_1) de teğet olan çember ailesinin denklemi (m sonlu ise)

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda((y-y_1)-m(x-x_1))=0$$



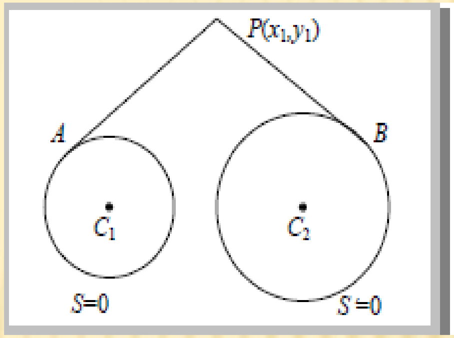
(m sonsuz ise)

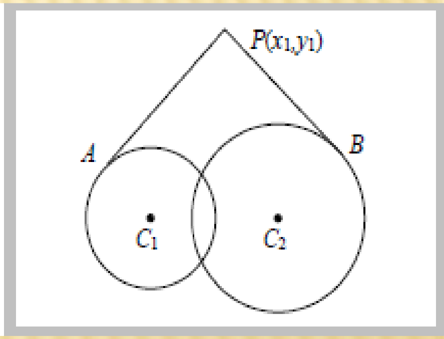
$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda(x-x_1)=0$$

ÖRNEKLER 26,27,30

RADİKAL EKSEN

İki çemberin radikal ekseni iki çembere eşit uzaklıkta olacak şekilde teğetlerin çizildiği bir noktanın geometrik yeridir.





$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (i)$

$S' = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad (ii)$

olsun.

$P(x_1, y_1), |PA| = |PB|$ olacak şekilde bir nokta olsun:

$\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1}$

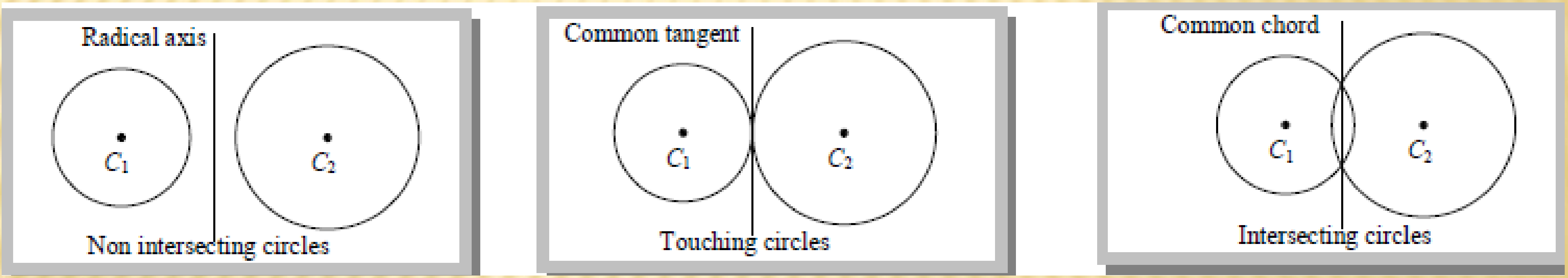
$\rightarrow x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1$

$\rightarrow 2(g_1 - g_2)x_1 + 2(f - f_1)y_1 + c - c_1 = 0$

$P(x_1, y_1)$ in geometrik yeri $2(g_1 - g_2)x + 2(f - f_1)y + c - c_1 = 0$

Radikal eksenin özellikleri

Radikal eksen ve ortak kiriş birbirine denktir: Çünkü S=0 ve S’=0 çemberlerinin radikal ekseni ve ortak kirişi aynı S-S’=0 doğrusudur.
Tek fark, ortak kiriş çemberler iki reel noktada kesişiyorsa vardır.
Radikal eksen ise pozisyonlarına bakılmaksızın tüm çember çiftleri için Vardır.



Radikal eksen çemberin merkezlerini birleştiren doğruya diktir.

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (i)$

$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad (ii)$

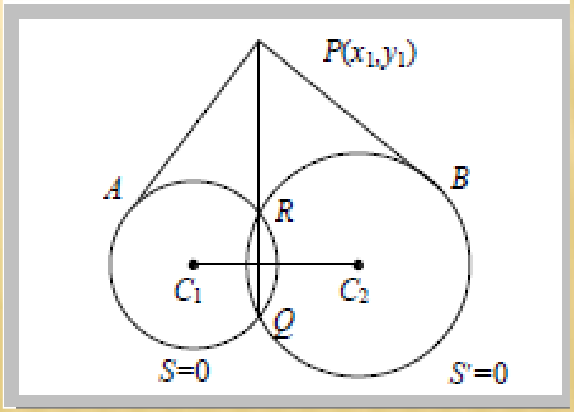
olsun. $C_1 = (-g, -f)$ ve $C_2 = (-g_1, -f_1)$ i ve ii çemberlerinin merkezleri

olduğundan C_1C_2 doğrusunun eğimi $m_1 = \dfrac{f - f_1}{g - g_1}$

Radikal eksenin denklemi $2(g - g_1)x + 2(f - f_1)y + c - c_1 = 0$

Radikal eksenin eğimi $m_2 = -\dfrac{g - g_1}{f - f_1}$

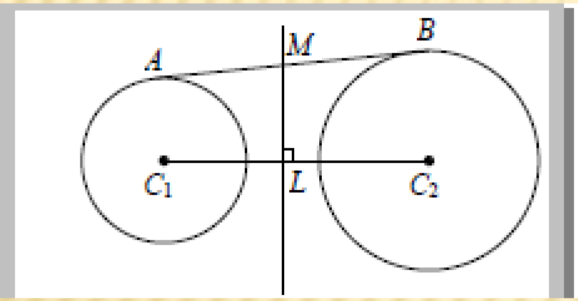
$\Rightarrow m_1m_2 = -1$

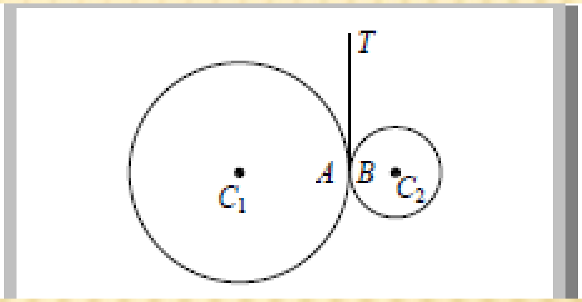


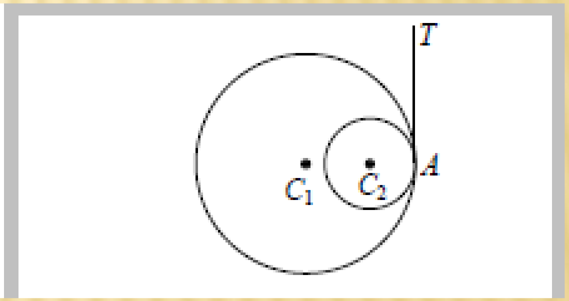
Radikal eksen iki çemberin ortak teğetlerini ikiye böler.

AB ortak teğet olsun. Eğer radikal eksen ile M'de LM ile kesişiyorsa MA ve MB çemberlerin teğetleridir.

$MA = MB$ olur, çünkü radikal eksen üzerindeki herhangi bir noktadan teğetlerin uzunluğu eşittir. Buradan radikal eksen ortak AB teğetini ikiye böler.







Eğer iki çember dıştan veya içten teğetse A ve B çakışır. Bu durumda ortak teğetin kendisi radikal eksen olur.

Üç çemberin radikal ekseni ikişerli kesişirler.

$$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad (i)$$

$$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad (ii)$$

$$S_3 = x^2 + y^2 + 2g_3x + 2f_3y + c_3 = 0 \quad (iii)$$

İkişerli radikal eksenler

$$S_1 - S_2 = 2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + c_1 - c_2 = 0$$

$$S_2 - S_3 = 2x(g_2 - g_3) + 2y(f_2 - f_3) + c_2 - c_3 = 0$$

$$S_3 - S_1 = 2x(g_3 - g_1) + 2y(f_3 - f_1) + c_3 - c_1 = 0$$

Üç doğru kesişir.

(v) If two circles cut a third circle orthogonally, the radical axis of the two circles will pass through the centre of the third circle or

The locus of the centre of a circle cutting two given circles orthogonally is the radical axis of the two circles.

Let $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ .....(i)

$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ .....(ii)

$S_3 \equiv x^2 + y^2 + 2g_3x + 2f_3y + c_3 = 0$ .....(iii)

Since (i) and (ii) both cut (iii) orthogonally, $\therefore\ 2g_1g_3 + 2f_1f_3 = c_1 + c_3$ and $2g_2g_3 + 2f_2f_3 = c_2 + c_3$

Subtracting, we get $2g_3(g_1 - g_2) + 2f_3(f_1 - f_2) = c_1 - c_2$ .....(iv)

Now radical axis of (i) and (ii) is $S_1 - S_2 = 0$ or $2x(g_1 - g_2) + 2y(f_1 - f_2) + c_1 - c_2 = 0$

Since it will pass through the centre of circle (iii)

$\therefore\ -2g_3(g_1 - g_2) - 2f_3(f_1 - f_2) + c_1 - c_2 = 0$ or $2g_3(g_1 - g_2) + 2f_3(f_1 - f_2) = c_1 - c_2$ .....(v)

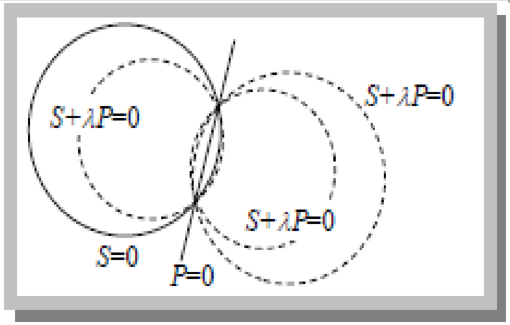
which is true by (iv).

Note : ❑ Radical axis need not always pass through the mid point of the line joining the centres of the two circles.

ÖRNEKLER 28,29,12d

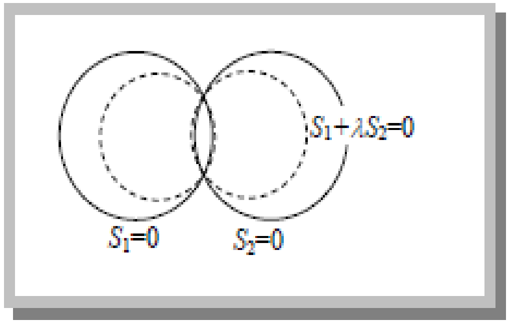
4.23 Co-Axial System of Circles

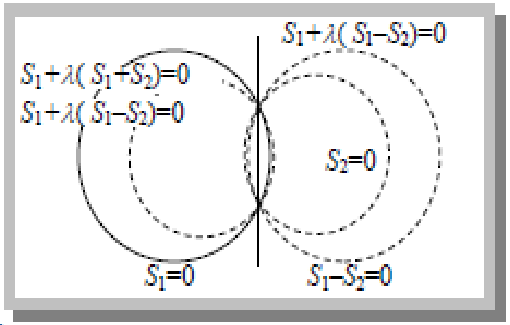
A system (or a family) of circles, every pair of which have the same radical axis, are called co-axial circles.



(1) The equation of a system of co-axial circles, when the equation of the radical axis and of one circle of the system are $P \equiv lx + my + n = 0$ and $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ respectively, is $S + \lambda P = 0$ (λ is an arbitrary constant).

(2) The equation of a co-axial system of circles, where the equation of any two circles of the system are





$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ and $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

Respectively, is $S_1 + \lambda(S_1 - S_2) = 0$, $(\lambda \neq -1)$ or $S_2 + \lambda_1(S_1 - S_2) = 0$, $(\lambda_1 \neq -1)$

Other form $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $(\lambda \neq -1)$

(3) The equation of a system of co-axial circles in the simplest form is $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$, where g is variable and c is a constant.

19. Obtain the points of intersection of the straight line $3x-y+5=0$ and the circle $x^2+y^2-25=0$.

20. Obtain the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=10$ which are parallel to the line $y-3x=7$.

21. Obtain the equations of the tangents through $(1, 3)$ to the circle $x^2+y^2=5$.

22. Calculate the length of the chord $y=x+2$ of the circle $x^2+y^2=9$.

23. If $y-mx=5$ is a tangent to the circle $x^2+y^2=5$, obtain the values of m.

24. Show that $ax+by+c=0$ is a tangent to the circle $x^2+y^2=r^2$ if $r^2(a^2+b^2)=c^2$.

25. Find the condition that $y=mx+c$ intersects the circle $x^2+y^2=r^2$ in two distinct real points.

28. Obtain the equation of the tangents at the points $(-3, -2)$ and $(-2, 5)$ on the circle $x^2+y^2+12x-4y+15=0$.

29. Find the equation of the circle which passes through the point $(1, -1)$ and which touches the line $6x+y-4=0$ at $(3, 0)$.

30. Show that the line $2x+y=1$ is a tangent to the circle $x^2+y^2+6x-4y+8=0$.

31. If $4y-3x=k$ is a tangent to the circle $x^2+y^2+10x-6y+9=0$, find the value of k and the coordinates of the point of contact.

32. Prove that the circles $x^2+y^2=4$ and $x^2+y^2+6x+8y-24=0$ touch and find the equation of their common tangent.

33. Obtain the equations of the circles which touch the x-axis at $(5, 0)$ and make an intercept of 24 on the y-axis.

34. Prove that the line $2x+y=4$ is a tangent to the circle $x^2+y^2+6x-10y+29=0$.

35. Prove that $2x-3y=14$ is a common tangent of the two circles $x^2+y^2-4x-2y-8=0$ and $x^2+y^2-10x-6y+21=0$.

36. Obtain the equations of the four common tangents of the two circles $x^2+y^2+4x+3=0$ and $x^2+y^2+4y+3=0$.

37. Show that $lx+my+n=0$ touches the circle $(x-g)^2+(y-f)^2=r^2$ if $(lg+mf+n)^2=r^2(l^2+m^2)$.

38. Obtain the chord of contact of the tangents to the circle $x^2+y^2=5$ from the point $(-5, -5)$ and hence determine the equations of the tangents.

39. Find the chord of contact of the tangents to the circle $x^2+y^2-4x-6y+3=0$ from the origin and hence prove that the equation of the tangents is $x^2+12xy+6y^2=0$. (Compare Section 25.)

40. If the chord of contact of the pair of tangents from P to the circle $x^2+y^2=a^2$ always touches the circle $x^2+y^2-2ax=0$ show that the locus of P is the curve given by $y^2=a(a-2x)$.

41. Prove that the chord of contact of the tangents to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ from the origin and (g, f) are parallel.

42. Obtain the coordinates of the points of contact of the tangents from $(2, 0)$ to the circle $x^2+y^2-2x+6y+5=0$.

EXAMPLES

43. Show that the pair of tangents from $(-1, 3)$ to the circle $x^2+y^2 = 5$ are mutually perpendicular.

44. Obtain the equation of the pair of tangents which can be drawn from the origin to the circle $x^2+y^2+8x+6y+21 = 0$ and calculate the angle between them.

45. Find the equation of the tangents from $(2, -3)$ to the circle $x^2+y^2+6x-4y+8 = 0$.

46. Prove that the tangents from the origin to the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ are mutually perpendicular if $g^2+f^2 = 2c$.

1. $x^2+y^2+2x-4y-4 = 0$.
2. $(1, -2/3; 4/3$.
3. $5(x^2+y^2)-11x-9y-12 = 0$.
4. $y+2x = 0$.
5. $(1, -6)$.
6. $x^2+y^2 = 130$.
7. $2(x^2+y^2)-41x+7 = 0$.
8. $x^2+y^2-6x+4y = 0$.
10. $(-g/2, -f/2)$; $\frac{1}{2}\sqrt{(g^2+f^2-4c)}$.
11. $x^2+y^2-ax-by = 0$.
12. (iv).
13. 4.
14. 10.
15. $x^2+y^2-x+y-8 = 0$; (i) outside, (ii) inside.
16. $(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2))$; $\frac{1}{2}\sqrt{\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\}}$.
17. $(-1, 3)$ and $(4, 7)$ or $(-1, 7)$ and $(4, 3)$.
19. $(0, 5), (-3, -4)$.
20. $y-3x = \pm 10$.
21. $2x+y-5 = 0$, $x-2y+5 = 0$.
22. $2\sqrt{7}$.
23. ± 2.
25. $r^2(1+m^2) > c^2$.
27. $1/2, 2$; $(-2, 3), (1, -1)$.
28. $3x-4y+1 = 0$, $4x+3y-7 = 0$.
29. $3(x^2+y^2)+6x+4y-8 = 0$.
31. 52; $(-8, 7)$.
33. $x^2+y^2-10x\pm 26y+25 = 0$.
36. $x+1 = 0$, $y+1 = 0$, $x+y+2 \pm\sqrt{2} = 0$.
38. $x-2y-5 = 0$, $2x-y+5 = 0$.
42. $(0, -1)$; $(3, -2)$.
44. $5x^2-24xy+12y^2 = 0$, $\tan^{-1}(8\sqrt{21}/17)$.
45. $2x+y-1 = 0$; $x+2y+4 = 0$.
47. $x^2+y^2 = a^2+b^2$.

1. Calculate the angle of intersection of the two circles $8(x^2+y^2+2x)+3=0$ and $8(x^2+y^2+2y)+3=0$.

2. Prove that the circles $2x^2+2y^2-7x+5=0$ and $x^2+y^2-6x+4y+8=0$ cut orthogonally.

3. A circle passes through the point (a, b) and cuts the circle $x^2+y^2=c^2$ orthogonally. Prove that the locus of the centre is the straight line $2ax+2by=a^2+b^2+c^2$.

4. If $S_1 \equiv (x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-\gamma_1^2=0$ and $S_2 \equiv (x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2-\gamma_2^2=0$ are any two circles, prove that the two circles $\gamma_2 S_1 \pm \gamma_1 S_2=0$ cut orthogonally.

5. Prove that each circle of the system $x^2+y^2+\mu y-c=0$ is orthogonal to each circle of the system $x^2+y^2+\lambda x+c=0$. Hence determine the equations of the circles which are orthogonal to the circle $x^2+y^2+10x+1=0$ and which touch $3x-y-7=0$.

6. Obtain the equation of the radical axis of the two circles $2(x^2+y^2)-5x+7y-1=0$ and $7(x^2+y^2)+x-y=0$

7. Prove that a circle which cuts the circles S_1 and S_2 orthogonally has its centre on the radical axis of S_1 and S_2.

8. Obtain the radical centre of the three circles $x^2+y^2-2x+6y=0$, $x^2+y^2-4x-2y+6=0$ and $x^2+y^2-12x+2y+30=0$.

Further, show that these circles all cut the circle $x^2+y^2-6x+6=0$ orthogonally.

9. Find the equations of the radical axes of the circles $(x-2)^2+(y-3)^2=9$, $(x-3)^2+(y-2)^2=4$, $(x-6)^2+y^2=7$ and prove that they are concurrent.

What is the equation of the circle that is orthogonal to these three circles?

10. Show that the equation $x^2+y^2+2\lambda x+c=0$, where λ can take any value, represents a system of coaxal circles with the y-axis as radical axis.

11. Find the condition that the equations $x^2+y^2+2\lambda x+c=0$ should represent (a) an intersecting coaxal system, (b) a non-intersecting coaxal system, (c) a tangential intersecting coaxal system.

12. Obtain the equation of the circle, which is coaxal with the circles $x^2+y^2+3x-4y+5=0$ and $x^2+y^2-5x+2y-1=0$ and which passes through the point (3, 1). Find also the radical axis of the system.

13. If the circle $x^2+y^2-3x+4y-2=0$ is one of the coaxal system having its radical axis as the line $2x-3y=1$, find the circle of the system that passes through the origin.

14. Obtain the equation of the coaxal system of circles with radical axis $lx+my+n=0$ if one circle of the system is $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

15. If one circle of a coaxal system with radical axis $x+3y-2=0$ is given by $x^2+y^2-2x+6y=0$, write down the equation of the coaxal system and show that the system is a tangential one.

16. Show that the equation $x^2+y^2+2x+6y-19+2\lambda(x+y-3)=0$ represents an intersecting system of coaxal circles. Obtain the equation of the smallest circle of the system.

17. Obtain the limiting points of the coaxal system of circles determined by $9x^2+9y^2+18x+5=0$ and $9x^2+9y^2+18y+5=0$.

18. Show that $x^2+y^2-12x+20+\lambda(x^2+y^2+6x+2)=0$ represents a non-intersecting system of coaxal circles, and find the coordinates of the limiting points.

19. If a coaxal system is intersecting, with distinct points of intersection P and Q, show that the conjugate system is non-intersecting with limiting points at P and Q.

1. $\cos^{-1}(3/5)$.

5. $x^2+y^2-6y-1=0$,
$9x^2+9y^2+26y-9=0$.

6. $37x-51y+7=0$.

8. $(3, 0)$.

9. $2x-2y-5=0, 8x-6y-25=0$,
$3x-2y-10=0$,
$x^2+y^2-10x-5y+31=0$.

11. (a) $c<0$,
(b) $c>0$,
(c) $c=0$.

12. $3x^2+3y^2-11x+3y=0$,
$4x-3y+3=0$.

13. $x^2+y^2-7x+10y=0$.

14. $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$.

15. $x^2+y^2-2x+6y+\lambda(x+3y-2)=0$.

16. $x^2+y^2-5x-y+2=0$.

17. $(-1/3, -2/3), (-2/3, -1/3)$.

18. $(4, 0), (-2, 0)$.

Barry Spain

M.A., M.Sc., Ph.D.

HEAD OF MATHEMATICS DEPARTMENT

SIR JOHN CASS COLLEGE, LONDON