MTM2532 - Analitik Geometri Gr. 3 (20 Şubat 2025)

1. Vektör cebri ve uygulamaları
2. Üç boyutlu uzayda doğrunun tanımı ve uygulamaları
3. Üç boyutlu uzayda düzlemin tanımı ve uygulamaları
4. Genel uygulama/Koordinat sistemlerinde dönüşümler
5. Koordinat sistemlerinde dönüşümler(*Öteleme*, *Döndürme*)
6. Çember tanımı ve analitik incelenmesi
7. Çember Devam
8. Elips tanımı ve analitik incelenmesi
9. I.Vize (%30)
10. Hiperbol tanımı ve analitik incelenmesi
11. Parabol tanımı ve analitik incelenmesi
12. Ek Uygulamalar / II. Vize (%30) (zorunlu)
13. Genel Konikler; sınıflandırma; öteleme ve dönme ile merkezil forma dönüştürme
14. Genel Konikler Devam
15. Mazeret sınavı ve genel uygulama
16. Final

[Kaynaklar]

[1] Kindle J.H. , Theory and Problems of Plane ve Solid Analytic Geometry (Çeviri: Sezginman İ.)
[2] Green S.L., Advanced Level Pure Mathematics
[3] Ratti J.S., Marcus M., Wesley A., College Algebra and Trigonometry
[4] Hilmi Hacısalihoğlu, Analitik Geometri

[Sınavlar]

Vize I (%30) + Vize II (%30) + Final (%40)

Vektör örnekleri

Örnek1. $\vec{v}(-5,9,1)$ vektörünü $\vec{v_1}(-1,3,4), \vec{v_2}(3,0,1)$ ve $\vec{v_3}(0,1,-2)$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazalım.

$(-5,9,1) = a_1(-1,3,4) + a_2(3,0,1) + a_3(0,1,-2)$

$(-5,9,1) = (-a_1 + 3a_2, 3a_1 + a_3, 4a_1 + a_2 - 2a_3)$

$$-a_1 + 3a_2 = -5 \to a_2 = (a_1 - 5)/3 \to a_2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad 3a_1 + a_3 = 9 \to a_3 = 9 - 3a_1 \to a_3 = 3$$

$$4a_1 + a_2 - 2a_3 = 1 \to 4a_1 + \frac{a_1 - 5}{3} - 18 + 6a_1 = 1 \to \frac{31a_1 - 5}{3} = 19 \to a_1 = 2$$

$\vec{v} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2} + 3\vec{v_3}$

lineer bağımsızlık

$a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3} = \vec{0}$ eşitliği ancak ve ancak a,b,c sayılarının sıfır olması ile sağlanabiliyorsa bu vektörler lineer bağımsızdır.

Örnek 2. $(1,0,-2), (2,-1,2), (4,-3,10)$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?

1.yol

$(1,0,-2) = a(2,-1,2) + b(4,-3,10)$

$2a + 4b = 1$

$-a - 3b = 0 \to b = -1/2, a = 3/2$

$2a + 10b = -2 \to 2*(3/2) + 10*(-1/2) = -2$ Doğru

$(1,0,-2) = \frac{3}{2}(2,-1,2) - \frac{1}{2}(4,-3,10)$ bu üç vektör lineer bağımlıdır.

2.yol

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 1(-10+6) - 0(20-8) + (-2)(-6+4) = 0 \text{ Lineer bağımlı}$$

Örnek 2. $(1,-1,1), (-1,2,1), (-1,2,2)$ vektörleri lineer bağımlı mıdır?

$(1,-1,1) = a(-1,2,1) + b(-1,2,2)$

$-a - b = 1$

$2a + 2b = -1$

$a + 2b = 1$

Bu denklem sisteminin çözümü yoktur. Yani üç vektörden herhangi birisi diğer ikisinin lineer kombinasyonu biçiminde yazılamaz. Bu durumda bu üç vektör lineer bağımsızdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1*(4-2) - (-1)(-2+1) + 1(-2+2) = 1 \neq 0 \text{ Lineer bağımsız}$$

Üç boyutlu vektör uzayında baz vektörleri $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\overrightarrow{E_1}=\vec{i}(1,0,0)$

$\overrightarrow{E_2}=\vec{j}(0,1,0)$

$\overrightarrow{E_3}=\vec{k}(0,0,1)$

$\vec{i}\bullet\vec{i}=1,\vec{i}\bullet\vec{j}=0,\vec{i}\bullet\vec{k}=0,$

$\vec{j}\bullet\vec{i}=0,\vec{j}\bullet\vec{j}=1,\vec{j}\bullet\vec{k}=0,$

$k\bullet\vec{i}=0,\vec{k}\bullet\vec{j}=0,\vec{k}\bullet\vec{k}=1,$

$\vec{i}\times\vec{i}=0,\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\vec{j}\times\vec{j}=0,\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\vec{k}\times\vec{k}=0$

$\vec{i}$

$\rightarrow$ saat yönü pozitif, tersi negatif

$\vec{k}$ $\vec{j}$

●Vektörel çarpım işleminin komütatif olmaması

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$

$\vec{b}\times\vec{a}=(b_2a_3-b_3a_2)\vec{i}+(b_3a_1-b_1a_3)\vec{j}+(b_1a_2-b_2a_1)\vec{k}$

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

●Vektörel çarpım : $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

•İki vektör paralelse $(\vec{u},\vec{v})$ $\vec{u}\times\vec{v}=0$ $\quad(|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=0)$

$\theta=0$(paralel, yön aynı)

$\theta=180^o$ (paralel, yön zıt)

İki vektör paralelse $\vec{u}=k\vec{v}.$

Vektörler sınav sorusu

XOZ düzlemine paralel olan ve $|\vec{u}|=5$ sağlayan ve $\vec{v}=4\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ vektörüne dik olan $\vec{u}$ vektörünü bulunuz.

XOZ düzlemine paralel ise $\vec{u}=u_1\vec{i}+0\vec{j}+u_3\vec{k}$

•$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_3^2}=5\rightarrow u_1^2+u_3^2=25$

•$\vec{u}\bullet\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\rightarrow$ diklik şartı: $\vec{u}\bullet\vec{v}=0\rightarrow 4u_1+3u_3=0\rightarrow u_3=-4u_1/3$

$\Rightarrow u_1^2+\frac{16}{9}u_1^2=25\rightarrow u_1^2=9\rightarrow u_1=3,u_3=-4;u_1=-3,u_3=4$

$\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{k}$ veya $\vec{u}=-3\vec{i}+4\vec{k}$

Üç boyutlu uzayda Doğrular

(1) Doğru üzerindeki bir nokta ve Doğrunun yön (doğrultman) vektörü

Doğru üzerindeki bir nokta : $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Doğrultman vektörü (directrice): $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$d : (M_0, \vec{v})$ doğrusu

$M(x, y, z)$ noktası doğru üzerinde bir başka nokta

*$\overrightarrow{M_0M}$ ile $\vec{v}$ vektörü doğrudaştır, yani birbirine PARALELDİR.

$\rightarrow \overrightarrow{M_0M} \times \vec{v} = 0 \rightarrow \overrightarrow{M_0M} = k\vec{v}$

$\rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ka, kb, kc)$

$\rightarrow$ üç boyutlu uzayda bir doğrunun parametrik denklemleri

$x = x_0 + ka$

$y = y_0 + kb$

$z = z_0 + kc$

$\rightarrow$ üç boyutlu uzayda bir doğrunun kartezyen denklemleri

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Üç boyutlu uzayda Doğrular

(2) Doğru üzerindeki iki belirli nokta

Doğru üzerindeki noktalar: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$d : (M_1, M_2)$

Doğru üzerinde bir başka nokta $M(x, y, z)$

$\rightarrow$ Doğrunun doğrultmanı $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektörü ve doğru üzerindeki nokta M_1

$\rightarrow \overrightarrow{M_1M}$ ile $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektörü birbirine paraleldir.

$\rightarrow \overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \rightarrow \overrightarrow{M_1M} = k\overrightarrow{M_1M_2}$

$\rightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (k(x_2 - x_1), k(y_2 - y_1), k(z_2 - z_1))$

$\rightarrow$ üç boyutlu uzayda Doğrunun parametrik denklemleri

$x = x_1 + k(x_2 - x_1)$

$y = y_1 + k(y_2 - y_1)$

$z = z_1 + k(z_2 - z_1)$

$\rightarrow$ üç boyutlu uzayda Doğrunun kartezyen denklemleri

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Örnek: $A(2,3,4)$ ve $B(-1,2,5)$ noktalarından geçen doğru denklemini bulunuz.

diyebiliriz ki

$\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{1}\rightarrow$ doğru üzerindeki nokta: (2,3,5)

doğrultman vektörü: $(-3,-1,1)$

**Parametrik*

$x=2-3k$

$y=3-k$

$z=5+k$

Örnek:

$d: x-1=\frac{y+1}{a}=\frac{z+1}{3}$

$k: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{b}$

doğruları veriliyor.

a) d//k ise a ve b kaçtır?

d'nin doğrultmanı (1,a,3)

k'nin doğrultmanı (2,3,b)

$\frac{1}{2}=\frac{a}{3}=\frac{3}{b}\rightarrow a=3/2, b=6$

b) d $\perp$ k ise a+b=?

$1*2+a*3+3*b=0\rightarrow a+b=-2/3$

Örnek:

$\frac{x+2}{2}=-3y=\frac{z-1}{m}$ ve $\frac{x+1}{5}=\frac{1-y}{2}=2z$ doğruları m'nin hangi değeri için kesişir. Kesişim noktasını bulunuz.

$x=-2+2k \quad x=-1+5s$

$y=-k/3 \quad y=1-2s$

$z=1+km \quad z=s/2$

$$\rightarrow \begin{array}{c} -2+2k=-1+5s \\ -k/3=1-2s \\ 1+km=s/2 \end{array}$$

Devamı sizde..