(1)

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR:

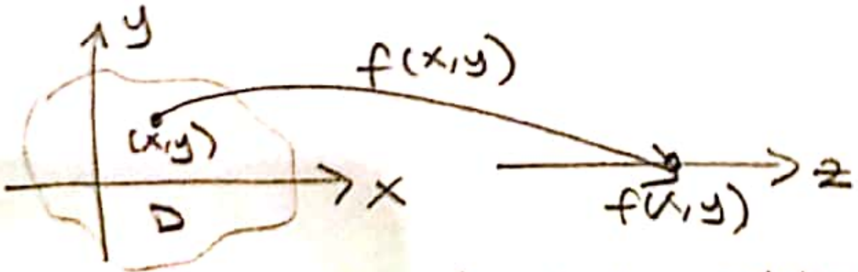
Çoğu problem tek değişkenli değişkenlerle ifade edilemez. Örneğin bir iktisat probleminde bir malın maliyetini fonksiyon olarak yazmak istediğimizde zaman, personel giderleri, enerji giderleri, hammadde giderlerini vs değişken olarak almak gerekir.

Tanım: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

D deki her bir $(x_1, x_2, \dots x_n)$'e tek bir $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ reel sayısı karşılık getiren f kuralına n değişkenli fonksiyon adı verilir.

$D(f) \to$ fonksiyonun tanım kümesi (Domain)

$f(x_1, x_2, \dots x_n)$ değerlerinin oluşturduğu kümeye
↓
Değer kümesi (Range)



$z = f(x,y)$ iki değişkenli fonksiyondur. Burada x, y bağımsız değişken (Tanım kümesi düzlemde) z bağımlı değişkendir.

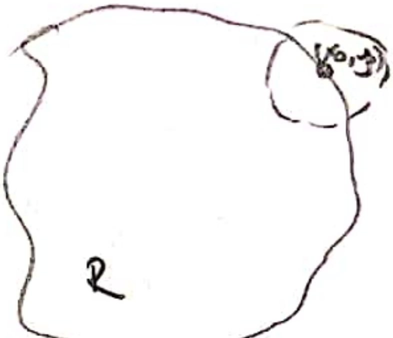
Benzer şekilde $w = f(x,y,z)$ üç değişkenli bir fonksiyon olup, x, y, z bağımsız değişkenler (Tanım kümesi uzayda) w bağımlı değişkendir.

1

Düzlem bölgeler için iç ve sınır noktaları:

xy düzleminde bir R bölgesinde herhangi bir (x_0, y_0) noktası için, R'nin içinde bulunan pozitif yarıçaplı diskin merkezi diyebiliyorsak (x_0, y_0) noktası "iç noktadır" denir.

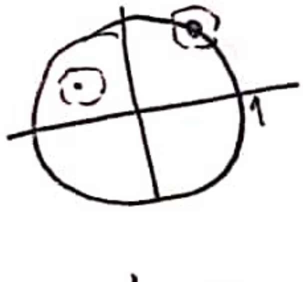
(x_0, y_0) iç nokta



(x_0, y_0) sınır nok.

Merkezi (x_0, y_0)'da bulunan her disk R'nin içindeki noktaların yanı sıra R'nin dışındanda noktalarda içeriyorsa (x_0, y_0) "sınır noktasıdır".

→ Bir R bölgesi bütün sınır noktalarını içeriyorsa kapalıdır.



$R: \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$
Bütün sınır noktalarını içeriyor
Bölge kapalıdır.

$R: \{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$
Bütün sınır noktalarını içermiyor.
Ama bütün iç noktaları içeriyor
Bölge açıktır.

CamScanner ile tarandı

(1)

Örn

Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulun

a)

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer kümesi
$z=\sqrt{y-x^2}$	$y \geq x^2$	$[0,\infty)$
$z=\frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty,0) \cup (0,\infty)$
$z=\sin xy$	Tüm düzlem	$[-1,1]$

b)

Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer kümesi
$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Tüm uzay	$[0,\infty)$
$w=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$	$(x,y,z) \neq (0,0,0)$	$(0,\infty)$
$w=xy \ln z$	$z>0$	$(-\infty,\infty)$

Örn

a) $f(x,y)=x^2+xy^3$

$f(-1,1)=?$

$f(-1,1)=(-1)^2+(-1)\cdot 1$
$=1-1=0$

b) $f(x,y,z)=\frac{x-y}{y^2+z^2}$

$f(2,2,100)=?$

$f(2,2,100)$
$=\frac{2-2}{2^2+100^2}=0$

)

örn

Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümesini bulunuz

a) $f(x,y)=\ln(4-x^2-4y^2)$

b) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$

c) $f(x,y)=\log(x.y)$

d) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

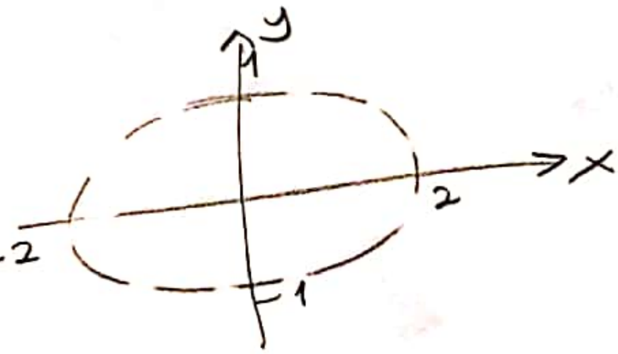
e) $f(x,y)=\arcsin\frac{y-1}{x}$

a) $4-x^2-4y^2>0$

$-x^2-4y^2>-4$

$x^2+4y^2<4$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}<1$ (elips d. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$)



b) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$

$4x^2-y^2>0$ olmalı !

$4x^2>y^2$

$y^2<4x^2$

$|y|<2|x|$

$-2|x|<y<2|x|$

$\rightarrow y<2|x|$

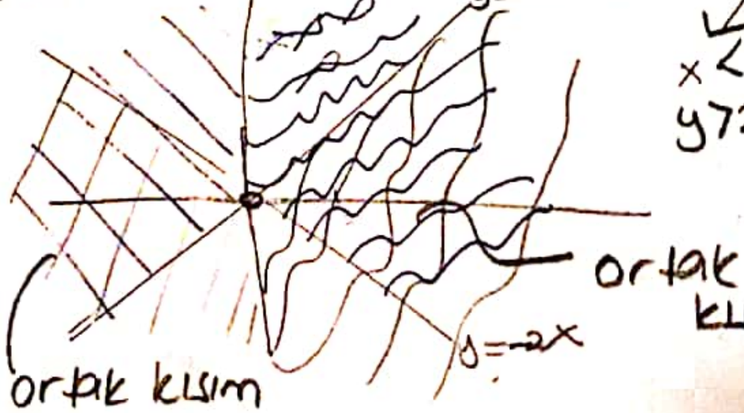
$x<0$, $y<-2x$

$x>0$, $y<2x$

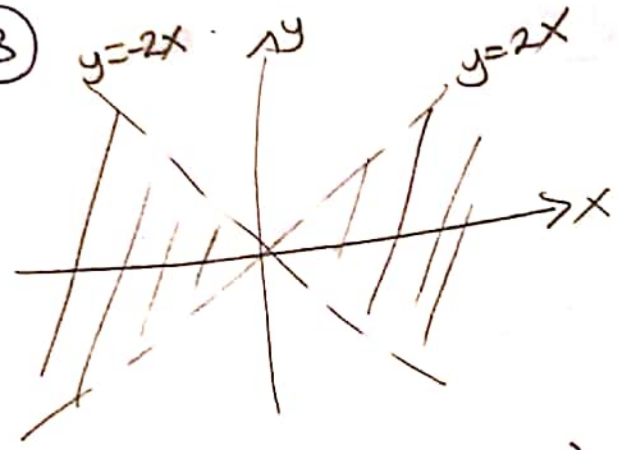
$\rightarrow -|2x|<y$

$x<0$, $y>2x$

$x>0$, $y>-2x$



(3)

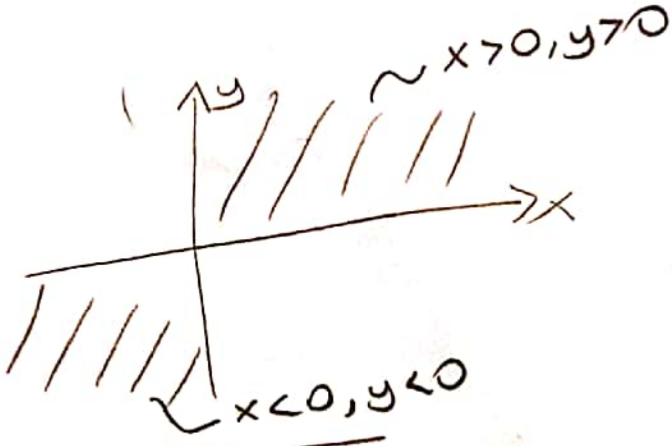


c) $f(x,y) = \log(x \cdot y)$

$xy > 0$

$x > 0 \quad y > 0$

$x < 0 \quad y < 0$



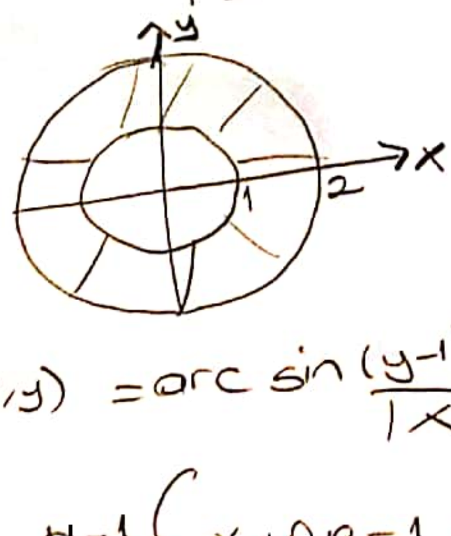
d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{4-x^2-y^2}$

$x^2+y^2-1 \geq 0$ | $4-x^2-y^2 \geq 0$

$x^2+y^2 \geq 1$ | $4 \geq x^2+y^2$

$x^2+y^2 \leq 4$

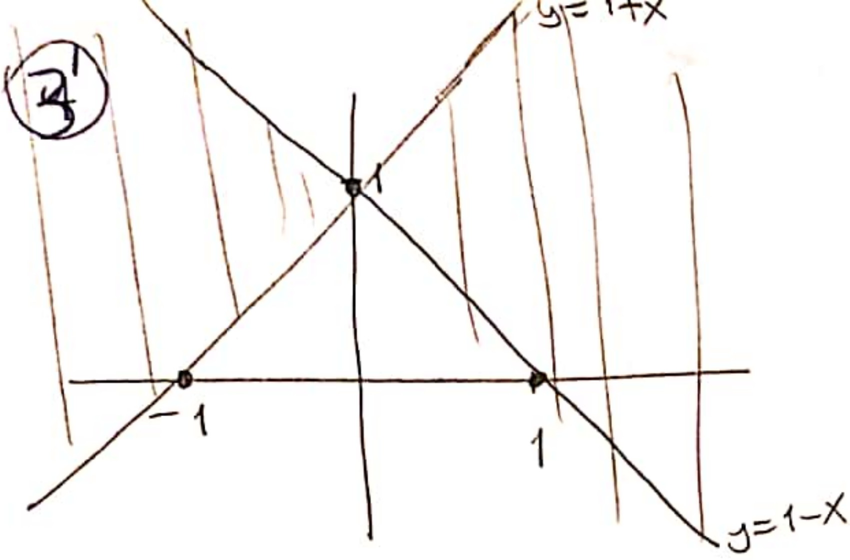
$$1 \leq x^2+y^2 \leq 4$$



e) $f(x,y) = \arcsin\dfrac{(y-1)}{|x|} = z$

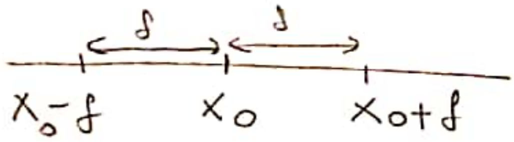
$\sin z = \dfrac{y-1}{x}$ $\left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \text{ ve } -1 \leq \sin z \leq 1 \\ -1 \leq \dfrac{y-1}{|x|} \leq 1 \Rightarrow -|x| \leq y-1 \leq |x \\ x > 0 \quad -x \leq y-1 \leq x \qquad x < 0 \\ \qquad 1-x \leq y \leq 1+x \qquad x \leq y-1 \leq - \\ \qquad\qquad 1+x \leq y \leq 1 \end{array} \right.$

3'



Bir Noktanın komsuluğu

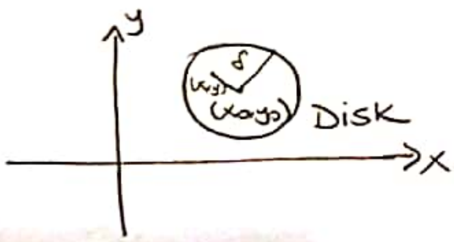
1)



x_0 in δ komsuluğu

$x_0-\delta < x < x_0+\delta$

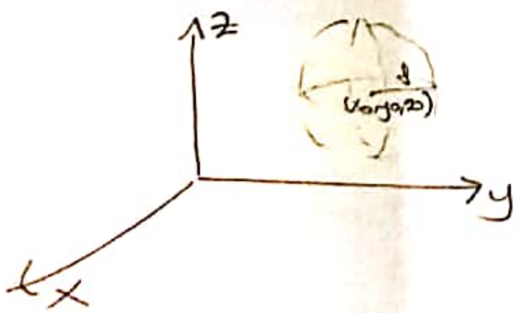
2)



(x_0,y_0) in δ komsuluğu

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$

3)



(x_0,y_0,z_0) in δ komsuluğu

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} < \delta$

(21)

Örn

Aşağıdaki fonksiyonların tanım bölgesini bulun.

(1) $f(x,y) = \sqrt{y-x-2}$

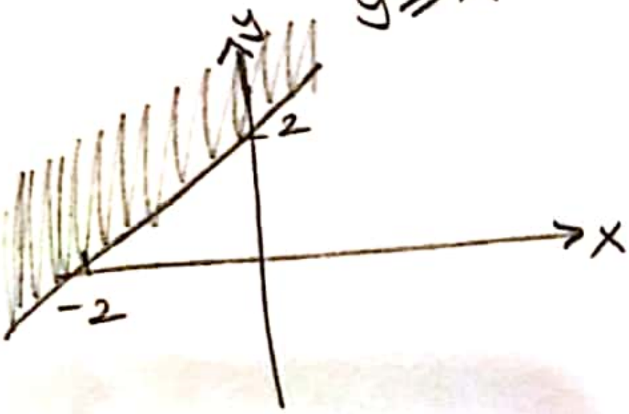
(2) $f(x,y) = \dfrac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$

(3) $f(x,y) = \arccos(y-x^2)$

(4) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-4)(y^2-9)}$

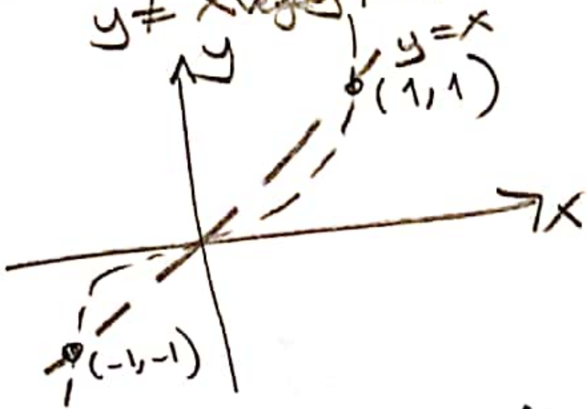
(1) $y-x-2 \geq 0$

$y \geq x+2$



(2) $(y-x)(y-x^3) \neq 0$

$y \neq x$ veya $y \neq x^3$

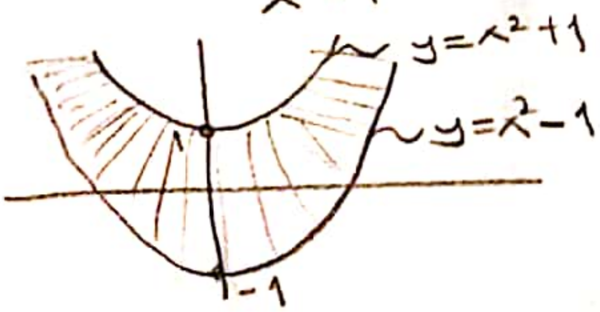


(3) $z = \arccos(y-x^2)$

$\cos z = y-x^2$

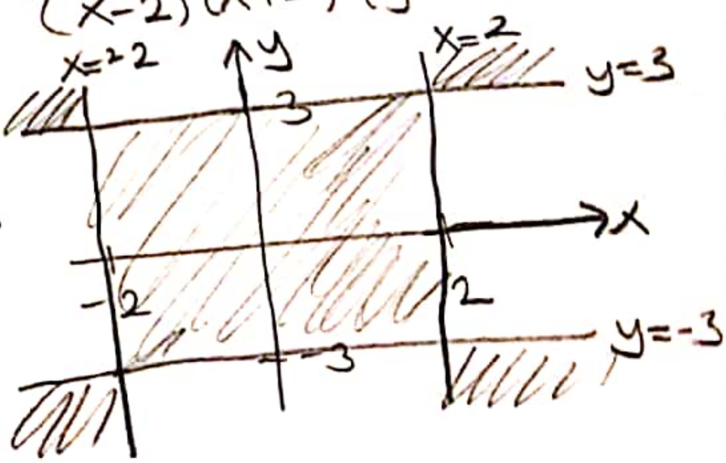
$-1 \leq y-x^2 \leq 1$

$x^2-1 \leq y \leq x^2+1$



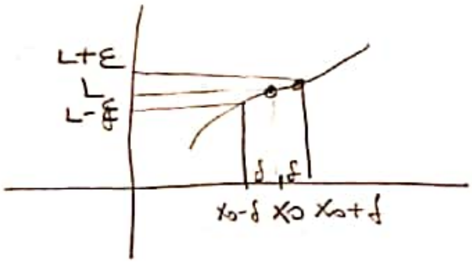
(4) $(x^2-4)(y^2-9) \geq 0$

$(x-2)(x+2)(y-3)(y+3) \geq 0$



Limitin Tanımı:

Tek değişkenli fonksiyonda



$|x-x_0|<\delta$ iken

$|f(x)-L|<\varepsilon$ olacak şekilde

$\delta=\delta(\varepsilon)$ varsa

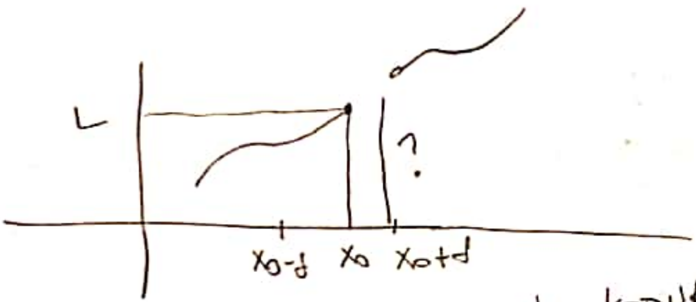
$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ dir denir.

(x0 civarında bir boşluk yok)

$\Downarrow$

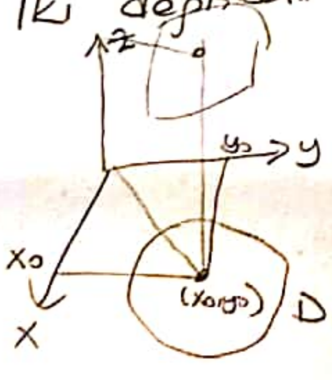
ε ile δ arasında ilişki.

$\lim_{x\to 1} f(x)=2$



(x0 civarında boşluk var. limit yok)

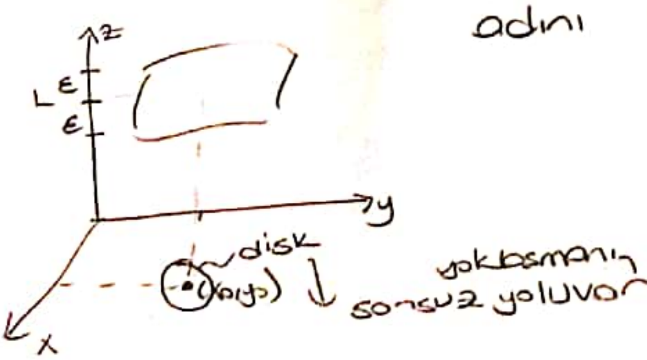
İki değişkenli fonksiyonda:

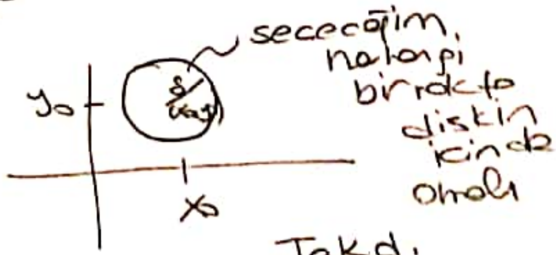


(x_0,y_0) a karşılık gelen $f(x_0,y_0)$'ı düzlemde gösteremiyoruz

bunun için 3. koordinata ihtiyacım var

Yani 2 değişkenli fonksiyonların grafiklerini 3 boyutlu uzayda çizebiliyoruz. Bu grafiğe de yüzey adını veriyoruz.





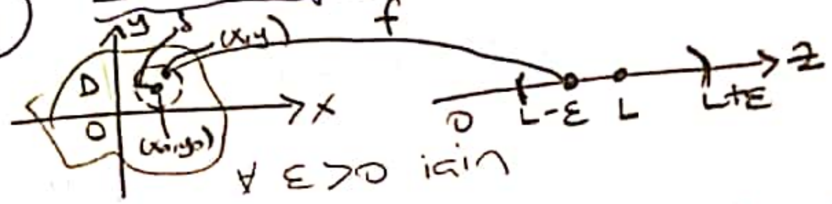
Tek d.

→ δ bir aralık iken

→ δ şimdi diskin yarıçapı

CamScanner ile tarandı

6 Limitin formal tanımı:



$\forall \varepsilon > 0$ için

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ veya $|x-x_0| < \delta$, $|y-y_0| < \delta$

iken $|f(x,y)-L| < \varepsilon$ olacak şekilde

$\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa limit vardır.

$(0 \leq \delta \leq 1)$

ve $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ şeklinde gösterilir.

Örn

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3xy = 6$ olduğunu göst.

$\varepsilon > 0$ için $\delta(\varepsilon) > 0$ için

$|x-1| < \delta$ $|y-2| < \delta$ iken

$|3xy-6| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ arıyoruz.

$3(x-1)(y-2)$'i düşünelim.

$3(x-1)(y-2) = 3xy - 3y - 6x + 6$

$3xy - 6x - 3y + 6$

$3(x-1)(y-2) + 6x + 3y - 12$

$\Downarrow$

$6(x-1) + \cancel{6} + 3(y-2) + \cancel{6} - \cancel{12}$

$|3(x-1)(y-2) + 6(x-1) + 3(y-2)|$

$< 3|x-1||y-2| + 6|x-1| + 3|y-2|$

$< 3\delta^2 + 6\delta + 3\delta < 12\delta = \varepsilon$

$(0 < \delta \leq 1 \quad \delta^2 < \delta)$ $\qquad \delta = \dfrac{\varepsilon}{12}$

Yani $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3xy = 6$ dr. $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{12}\right\}$

7 **Örn**

$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+2y=5$ old. isp.

$\varepsilon>0$ için $\delta=\delta(\varepsilon)$ vardır ki

$0\leq|x-1|<\delta$, $0<|y-2|<\delta$ olacak şekilde $|x^2+2y-5|<\varepsilon$ dr.

$|x^2+2y-5| = |(x-1)^2+2(y-2)+2x-2|$

$= |(x-1)^2+2(y-2)+2(x-1)|$

$< \underbrace{|x-1|^2}_{\delta^2} + 2|y-2| + 2|x-1|$

$< \delta^2 + 2\delta + 2\delta < 5\delta = \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ $\qquad \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$

olduğundan limit doğrudur.

Örn

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2}=0$ old. göst.

1. yol

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ iken $(\varepsilon>0)$

$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ o.ş $\delta=\delta(\varepsilon)$ arıyoruz.

$y^2\leq x^2+y^2$ olduğu için

$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ iken $\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$

$\delta=\frac{\varepsilon}{4}$

$\delta=\min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$

Limit doğrudur.

8

2. yol

$$\left|\frac{4xy^2}{x^2+y^2}-0\right| \le 4|x|$$

$$-4|x| \le \frac{4xy^2}{x^2+y^2} \le 4|x|$$

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} -4x = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4x}_{\text{sand. teoriminden.}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

Örn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{2+\cos x} = 0 \text{ old. göst.}$$

$\forall\, \varepsilon>0$ için $\begin{matrix} |x-0|<\delta \\ |y-0|<\delta \end{matrix}$ iken $\left|\frac{x+y}{2+\cos x}-0\right|<\varepsilon$

olacak şekilde $\delta=\delta(\varepsilon)$ arıyoruz.

$$\left|\frac{x+y}{2+\cos x}\right| \le |x+y| \le |x|+|y| < 2\delta = \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$2-1 \le 2+\cos x \le 2+1$$
$$1 \le 2+\cos x \le 3$$

[redacted]

(9)

Ödev

① $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2x^2+2y^2}=0$ $\quad \left|\dfrac{xy^2}{2(x^2+y^2)}\right| \le \dfrac{|xy^2|}{|y^2|} \to 0$

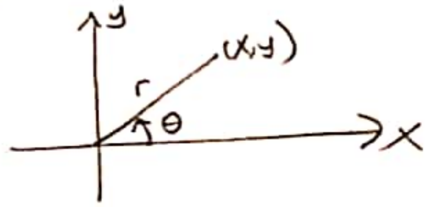
② $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$ $\quad |x|<\delta \quad |y|<\delta$

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-0\right| \le \frac{|x^3|}{x^2+y^2}+\frac{|y^3|}{x^2+y^2}$$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2\cos y}{2x^2+y^2}$ limit yok.

$$= \frac{x^2|x|}{x^2+y^2}+\frac{y^2|y|}{x^2+y^2} \le |x|+|y| < 2\delta=\varepsilon$$

Not 1: Kutupsal koordinatlar kullanılarak da limit tanımı uygulanabilir. Yani



$x \ge 0 \quad \theta\in(0,2\pi)$

$(x,y)\to(r,\theta)$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=r\cos\theta$ $\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$

$y=r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(r,\theta) = L$$

eşitliğinin tanımlanabilmesi için $0<|r|<\delta$ iken $|f(r,\theta)-L|<\varepsilon$ o.ş. bir $\delta=\delta(\varepsilon)$ var olmalıdır.

Örn $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}=0$ old. kutupsal koord. ile gösterin.

$$f(r,\theta)=\frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} \qquad \left|\frac{\cancel{r^3}\cos^3\theta}{\cancel{r^2}}-0\right| = |r\cos^3\theta| \le |r|<\delta$$

$0<|r|<\delta$ iken $\quad \delta=\varepsilon$

İki kat limit: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ için $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)=L_1$ ve $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)=L_2$ olsun.

① $L_1=L_2$ ise fonksiyonun (x_0,y_0) noktasında iki kat limiti vardır (Bunu söylemek $f(x,y)$'nin (x_0,y_0) de limitinin var olduğunu garanti etmez)

② $L_1\neq L_2$ ise f'in (x_0,y_0) da iki kat limiti yoktur. yani LİMİT YOKTUR.

(10)

2. Not
YOL KURALI

Bir f fonksiyonun bir (x_0,y_0) noktasında limitinin olması için, (x_0,y_0) noktasına giden bütün yollar boyunca limit değerinin aynı olması gerekir. Eğer (x_0,y_0) noktasına giden bütün yollar boyunca aynı limit değerine ulaşamıyorsa f in (x_0,y_0) noktasında limiti YOKTUR. Limitin olmadığını göstermek için

→ iki kat limitinin olmadığını göster

→ $y=x$, $y=x^2$ ... yollarından ikisini seç limitin aynı olmadığını göster

→ $y=kx$, $y=kx^2$ ... limitlerinin k ya bağlı olduğunu göster!

Örn

$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y^2}$ fonk nun $(2,1)$ nok. limiti nedir

Verilen nokta fonksiyon için sıkıntılı yaratmadığından direkt koyarak herhangi bir yol aramaya gerek yoktur.

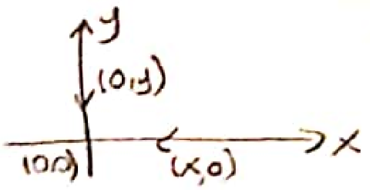
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-y}{x+y^2} = \frac{2-1}{4+1} = \frac{1}{5}$$ bulunur.

Aynı şekilde

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,-1)} \frac{\cos x + e^{y+z}}{\arctan(x+y)+z^2} = \frac{1+1}{\frac{\pi}{4}+1} = \frac{8}{\pi+4}$$

Örn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2}$$ limitinin olmadığını gösterin.



i) x ekseni boyunca $y=0$ olup

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+3y^2}$ $\quad f(x,0)=\dfrac{x\cdot 0}{x^2+0}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2} = 0$$

ii) y ekseni boyunca $x=0$ olup

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y\cdot 0}{y^2+0} = 0$$

olmasına rağmen $y=x$ doğrusu boyunca

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$ limit yok.

(11) Yada aynı soruyu tek adımda

$y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+3y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2+3m^2x^2} = \frac{m}{1+3m^2}$$

limit değeri m'e bağlı olduğundan limit yoktur.

Uyarı: → Rastgele yol seçemem
→ Limit noktasına göre bir (veya daha fazla) yol belirlemeliyim

Örneğin $(x,y)\to(0,1)$ iken $y=x$ seçemem!

Bunun yerine $y=x+1$ seçmeliyim

Örn

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{x}\,y^2}{x+y^3}$, b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y}{(x+y-1)}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2(y-2)}{x^4+(y-2)^2}$ f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,0)} \dfrac{(x-2)yz^2}{(x-2)^4+y^4}$

—o—

a) x ekseni boyunca $y=0$ olup

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{x}\,y^2}{x+y^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot 0}{x+0} = 0$

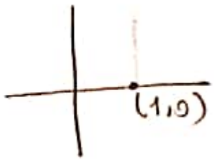
ii) $x=y^3$ eğrisi boyunca

$\lim\limits_{(x,y)} \dfrac{\sqrt[3]{x}\,y^2}{x+y^3} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{y^3}\,y^2}{y^3+y^3} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

limit yok.

12

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y}{(x+y-1)}$



i) $x=1$ doğrusu boyunca y değişir olup $x=1,\ f(1,y)=\dfrac{y}{1+y-1}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y}{x+y-1} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{y} = 1$

ii) $y=x-1$ doğrusu boyunca

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{y}{x+y-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x+x-1-1} = \dfrac{1}{2} \neq 1$ limit yok.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

i) x ekseni boyunca

$f(x,0) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{2}|x|}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{\sqrt{2}|x|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & x>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & x<0 \end{cases}$

limit yok.

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

i) x ekseni boyunca $y=z=0$

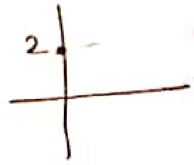
$f(x,0,0) = \dfrac{x.0.0}{x^3+0+0} \Rightarrow \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.0.0}{x^3+0+0} = 0$

ii) $x=y=z$ boyunca

$f(x,x,x) = \dfrac{x^3}{3x^3} \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{3x^3} = \dfrac{1}{3} \neq 0$

(13)



e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2(y-2)}{x^4+(y-2)^2}$

i) $f(x,2) = \dfrac{x^2(2-2)}{x^4+(2-2)} = 0$

$y = x+2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2(y-2)}{x^4+(y-2)^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ (y=x+2) \\ x=y-2}} \dfrac{x^2 . x}{x^4+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$
$= 0$

iii) $y-2 = x^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2(y-2)}{x^4+(y-2)^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{x^2 . x^2}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2}$ limity.

f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

$f(x,0,0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+0}{x^2+0} = 1$

ii) $x=y=z$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{x^2+x^2+x^2} = \dfrac{1}{3}$

$\neq$

g) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,0)} \dfrac{(x-2)\, y z^2}{(x-2)^4+y^4}$

$f(x,0,0) = 0$

i) $x-2 = y = z = t$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^4}{2t^4} = \dfrac{1}{2}$

ii) $y = z = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{0}{(x-2)^4} = 0$

$f(x,0,0) = \dfrac{0}{(x-2)^4}$

(14) Aşağıdaki limitleri hesaplayın.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x}+\sqrt{y} + \lim\limits_{x,y\to(0,0)} 2$

$= 0+2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\cancel{\sqrt{2x-y}-2}}{(\cancel{\sqrt{2x-y}-2})(\sqrt{2x-y}+2)}$

$= \frac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^4-2x^3+x^2+x^2y^2}{(x-1)^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2\cancel{(x^2-2x+1+y^2)}}{\cancel{(x-1)^2+y^2}}$

$= 1$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=t$

$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t}} = 0$

Not

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Sandwich Teoremi:

(x_0,y_0) merkezli bir disk bölgesinde

$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$

$(x,y) \neq (x_0,y_0)$

ve

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = L$

ise

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ dir

(14')

örn

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x} = ?$$

$\to$ $y \geq 0$ olsun $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

$$-y \leq y \cdot \sin\frac{1}{x} \leq y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{1}{x} = 0$$

$\to$ $y \leq 0$ olsun $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

$$-y \geq y \sin\frac{1}{x} \geq y$$

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} -y}_{0} \geq \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x} \geq \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} y}_{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ dır.}$$

15

SÜREKLİLİK:

f fonksiyonunun bir (x_0,y_0) noktasında tanımlı olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \text{ ise}$$

f (x_0,y_0) noktasında süreklidir denir.

Yani süreklilik için

a) $f(x_0,y_0)$ tanımlı

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ var

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Başka bir tanım

$$\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \iff \forall \varepsilon>0 \text{ için } \begin{matrix}|x-x_0|<\delta \\ |y-y_0|<\delta\end{matrix} \text{ iken}$$

$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$ o.ş. $\delta=\delta(\varepsilon)$ bulunur.

Örn

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonk.nun (0,0) nok. sürekli old. göst.

$\forall \varepsilon>0$ için

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ iken $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$ o.ş.

$\delta=\delta(\varepsilon)$ var mı?

$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ $\quad \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2}}\right| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$

CamScanner ile tarandı

(16) **Örn**

$f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^4}$ fonks. $(0,0)$ da süreklimi $f(0,0)=0$ veriliyor

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x.0}{x^2+0} = 0$$

$\neq$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x.mx}{x^2+mx^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+mx^2} = m$$

sürekli d.

Örn

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$(0,0)$ da süreklimi?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t-1}{t} = 0$$

$x^2+y^2=t$

$= 0 = f(x_0,y_0)$

sürekli!!!

Örn

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x-y)}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$(\cancel{\sqrt{x}+\sqrt{y}})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} y(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$= \underline{\underline{0}} = f(0,0)$

sürekli