Analiz I

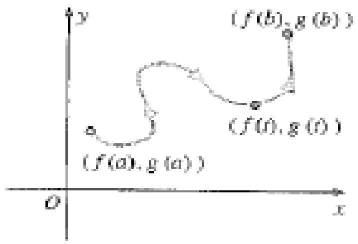
DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Parametrik Gösterimler



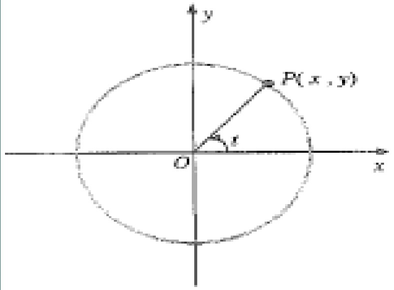
xoy– düzleminde hareket eden bir parçacığı gözönüne alalım. Bu parçacığın çizmiş olduğu eğrinin (yörüngenin) denklemini x ve y cinsinden ifade etmek çok defa mümkün olmayabilir. Hareketlinin bulunduğu noktanın koordinatları t zamanının fonksiyonu olacağından, f ve g birer sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$x = f(t)\ , \qquad y = g(t)$$

biçiminde ifade edilebilir. Buna göre, t bir aralığı taramak üzere

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

denklemleri bir eğri tanımlar. Bu denklemlere eğrinin parametrik denklemleri adı verilir. Eğer t nin taradığı aralık $[a,b]$, yani $a \le t \le b$ ise $(f(a), g(a))$ noktasına eğrinin başlangıç noktası, $(f(b),g(b))$ noktasına eğrinin bitim noktası denir. Böylece eğri üzerinde bir yön de tanımlanmış olur.



Birçok uygulamada t zamanı gösterir. Fakat bunun dışında başka şeyler de gösterilebilir. Örneğin bir açının ölçüsünü, bir noktadan uzaklığını da gösterebilir.

Şimdi bazı eğrilerin parametrik denklemlerini elde edelim.

ÖRNEK : Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $x^2 + y^2 = 1$ olan çemberin bir parametrik denklemini yazınız.

Çözüm : $P(x,y)$ noktasını $O(0,0)$ noktasına birleştiren doğru parçasının $0x$– ekseni ile yapmış olduğu açının ölçüsü t olsun. P nin koordinatları

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t$$

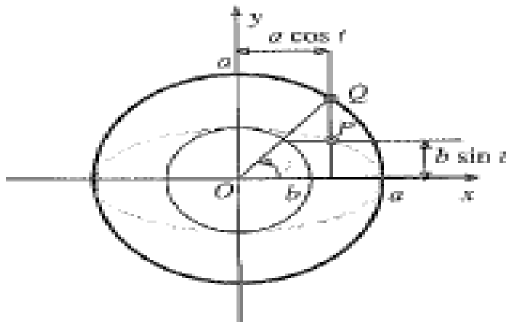
olacaktır.

$P(x,y)$ noktasının çemberi çizmesi için $A(1,0)$ noktasından hareket edip yine aynı noktaya geldiğini düşünelim. Bu durumda t parametresi 0 dan 2π ye kadar değişir. Şu halde çemberin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

olacaktır.

Parametrik Gösterimler



ÖRNEK : Kartezyen koordinat sistemindeki denklemi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olan elipsin bir parametrik gösterimini yazınız.

Çözüm : $O(0,0)$ merkezli ve a yarıçaplı asal çemberi ve b yarıçaplı yedek çemberi çizelim. Elips üzerindeki $P(x,y)$ noktasından $0x-$ eksenine çizilen dikdoğrunun uzantısı asal çemberi Q da kessin. OQ ile $0x-$ ekseninin oluşturduğu açının ölçüsüne t denirse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

olur. P tüm elipsi dolandığında t, 0 dan 2π ye kadar değişir. O halde sözkonusu elipsin parametrik denklemi

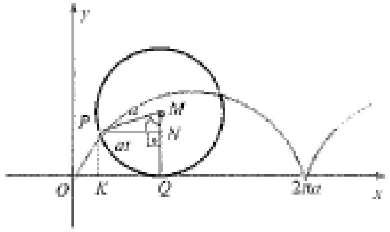
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

olur.

Parametrik Gösterimler

ÖRNEK : Bir yatay doğru üzerinde kaynaksızın yuvarlanan a yarıçaplı bir çember üzerinde alınan bir P noktasının geometrik yerinin (yörüngesinin) denklemini yazınız.

Çözüm : Çemberin yuvarlandığı doğru $0x$– ekseni olsun.



$P(x,y)$ noktasının hareketin başlangıç anında orijinde bulunduğunu kabul edelim. P noktasıyla çemberin M merkezini birleştiren MP doğru parçası ve M noktasını çemberin Q değme noktasına birleştiren MQ doğru parçasının oluşturduğu PMQ açısının ölçüsü t olsun.

$|\widehat{PQ}| = at$, $|OQ| = |PQ| = at$ olduğundan

$$x = |OK| = |OQ| - |KQ| = |OQ| - |PN| = at - a\sin t$$
$$= a(t - \sin t)$$

bulunur. Benzer şekilde

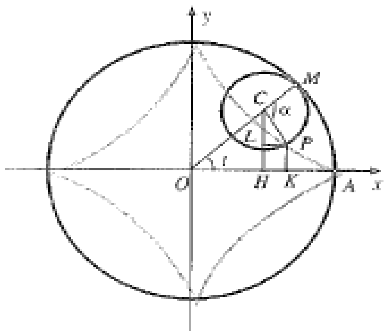
$$y = |PK| = |NQ| = |MQ| - |MN| = a - a\cos t$$
$$= a(1 - \cos t)$$

olur. Buna göre sikloid denilen bu eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

olur.

Parametrik Gösterimler



ÖRNEK : r yarıçaplı C merkezli bir çember $O(0,0)$ merkezli, $a = 4r$ yarıçaplı bir çember içinde kaymaksızın yuvarlanmaktadır. Yuvarlanan bu çember üzerinde işaretlenen bir $P(x,y)$ noktasının çizmiş olduğu eğrinin denklemini yazınız.

Çözüm : P noktasının başlangıç anında A noktasında bulunduğunu kabul edelim. İki çemberin merkezlerini birleştiren doğrunun $0x$– ekseniyle oluşturduğu açının ölçüsü t, $\widehat{MCP}$ açısının ölçüsü α olsun.

$$|\widehat{MP}| = |\widehat{MA}|$$

olacağından

$$4rt = \alpha r \Rightarrow \alpha = 4t$$

bulunur. Diğer taraftan

$$m(\widehat{LCP}) + \alpha = \frac{\pi}{2} + t$$

olacağından

$$m(\widehat{LCP}) = \frac{\pi}{2} + t - \alpha = \frac{\pi}{2} + t - 4t = \frac{\pi}{2} - 3t$$

dir.

$P(x,y)$ noktasının x ve y koordinatlarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} x &= |OK| = |OH| + |HK| = |OH| + |LP| \\ &= 3r\cos t + r\sin(\widehat{LCP}) \\ &= 3r\cos t + r\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) \\ &= 3r\cos t + r\cos 3t \\ &= r\,(3\cos t + 4\cos^3 t - 3\cos t) \\ &= 4r\cos^3 t = a\cos^3 t \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} y &= |PK| = |LH| = |CH| - |CL| \\ &= 3r\sin t - r\cos(\widehat{LCP}) \\ &= 3r\sin t - r\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) = 3r\sin t - r\sin 3t \\ &= r\,(3\sin t - 3\sin t + 4\sin^3 t) = 4r\sin^3 t = a\sin^3 t \end{aligned}$$

olur. Şu halde Astroid (yıldız eğrisi) denilen bu eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

olacaktır. Bu denklemlerden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t\,,$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin t \Rightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin t$$

yazılabileceğinden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{a}\right)^{3/2} = 1$$

olur. Şu halde Astroidin kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

olacaktır.

Parametrik Gösterimler

Parametrik denklemi

$$x = \sin t$$

$$y = 1 - \cos 2t$$

olan eğrinin kartezyen denklemini yazınız.

Kartezyen denklemi

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

olan çemberin bir parametrik denklemini yazınız.

$$x = 3\cos t - 4\sin t$$

$$y = 4\cos t + 3\sin t$$

parametrik denklemi ile verilen eğrinin kartezyen denklemini bulunuz. Eğrinin grafiğini çiziniz.

Parametrik Gösterimler

80. Parametrik denklemleri ile verilen aşağıdaki eğrilerin asimptotlarını bulunuz.

a-) $\begin{cases} x = te^{t} \\ y = te^{-t} \end{cases}$

b-) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^2} \end{cases}$

c-) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 2t}{t-1} \\ y = \dfrac{\sqrt{t^4+1}}{t} \end{cases}$

55. Parametrik denklemi $x = t^2,\ y = t^3,\ 1 \le t \le 3$ olan eğriyi göz önüne alalım. $A(1,1)$ ve $B(9,27)$ olmak üzere AB eğrisi üzerinde öyle bir M noktası bulunuz ki bu noktadan geçen teğet AB kirişine paralel olsun.

Türev
Limitte Belirsizlikler

Fonksiyonların limitleri hesap edilirken belirsiz şekiller denilen

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0.\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

ifadeleri ile karşı karşıya gelinir. Bu belirsizlik durumları önce $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ biçimine dönüştürülür sonra aşağıda ifade edilen L'Hospital Kuralı uygulanarak, limit kolayca hesap edilir.

Türev
Limitte Belirsizlikler – L'Hospital

a-) $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ **Belirsizlik Durumları**

Bu durumda aşağıdaki teorem uygulanabilir.

Teorem 6.21.1 (L'Hospital Kuralı). Kabul edelim ki f ve g bir a noktasının komşuluğunda (a'da tanımlı olmak zorunda değil) tanımlanmış türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Ayrıca bu komşuluktaki her x için $g'(x) \neq 0$ bulunsun.

a-) Eğer $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ve $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti mevcut ise bu taktirde

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

b-) Eğer $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ve $L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti mevcut ise bu taktirde

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

dır.

İspat Kendileri de birer limit olan $f'(a)$ ve $g'(a)$'dan geriye doğru gidersek,

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

buluruz.

L'Hôpital Kuralının Daha Kuvvetli Şeklinin İspatı Önce limit denklemini $x \to a^+$ durumu için gerçekleriz. Bu yöntemi $x \to a^-$'ye uygulamak için neredeyse hiç değişikliğe gerek yoktur ve bu iki durumun birleştirilmesi sonucu verir.

x'in a'nın sağında bulunduğunu varsayın. Bu durumda $g'(x) \neq 0$ olur ve a'dan x'e kadar olan kapalı aralıkta Cauchy Ortalama Değer Teoremini uygulayabiliriz. Bu adım, a ile x arasında

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

olacak şekilde bir c sayısı sağlar. Ama $f(a) = g(a) = 0$'dır, dolayısıyla

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

olur. x a'ya yaklaşırken, c de a'ya yaklaşır çünkü x ile a arasındadır. Böylece

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. Bu l'Hôpital kuralını x'in a'ya üstten yaklaştığı durum için doğrular. x'in a'ya alttan yaklaştığı durum ise Cauchy Ortalama Değer Teoremini $[x, a]$, $x < a$, kapalı aralığına uygulanarak ispatlanır. ■

Türev
Limitte Belirsizlikler

Uyarı. L'Hospital Kuralı limite ulaşılıncaya kadar birden fazla uygulanabilir. Örneğin $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti hesap edildiğinde $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği elde ediliyorsa bir kez daha uygulanabilir ve bu belirsizlik durumlarından kurtuluncaya kadar devam edilebilir.

Uyarı. L'Hospital Kuralı sadece $x \to a$ için değil aynı zamanda $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ olduğunda da geçerlidir. Örnek olarak $x \to \infty$ için ispat edelim. $x = 1/t$ dönüşümü yapılırsa $x \to \infty$ için $t \to 0^+$ olacağından

$$f(x) = f(1/t) \to 0, \quad g(x) = g(1/t) \to 0$$

bulunur. Bu durumda $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıktığından L'Hospital Kuralı nedeniyle

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{(-1/t^2).f'(1/t)}{(-1/t^2).g'(1/t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

elde edilir.

Türev
Limitte Belirsizlikler

Örnek 46. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$ limitini hesap ediniz.

Örnek 47. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\ln x-1}{e^x-e}$ limitini hesap ediniz.

Örnek 48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ limitini hesap ediniz.

Örnek 49. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}$ limitini hesap ediniz.

ÖRNEK 1 L'Hôpital Kuralını Kullanmak

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\sin x}{x} = \dfrac{3-\cos x}{1}\Big|_{x=0} = 2$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\Bigg|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$

ÖRNEK 2 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklini Uygulamak

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x}$ $\qquad$ Hala $\dfrac{0}{0}$; tekrar türev alın.

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\dfrac{1}{8}$ $\qquad$ $\dfrac{0}{0}$ değil; limit bulundu.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2}$ $\qquad$ Hala $\dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x}$ $\qquad$ Hala $\dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6}$ $\qquad$ $\dfrac{0}{0}$ değil; limit bulundu. ■

Türev
Limitte Belirsizlikler

Örnek 50. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ $(n \in N)$ limitini hesap ediniz.

Örnek 51. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ limitini hesap ediniz.

ÖRNEK 5 ∞/∞ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

(a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x}$

limitlerini bulun.

Çözüm

(a) Pay ve payda $x = \pi/2$'de süreksizdir, bu yüzden burada tek taraflı limitleri inceleriz. L'Hôpital Kuralını uygulamak için, bir uç noktası $x = \pi/2$ olan herhangi bir I açık aralığı seçebiliriz.

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1 + \tan x} \qquad \text{soldan } \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \sin x = 1$$

Bir belirsiz şekil olarak $(-\infty)/(-\infty)$ ile sağdan türevde 1 dir. Bu nedenle, iki taraflı limit 1'e eşittir.

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 2x^2}{3x^2 + 5x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - 4x}{6x + 5} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$ ■

ÖRNEK 3 L'Hôpital Kuralının Kuvvetli Şeklinin Yanlış Uygulanması

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \frac{0}{0} \text{ değil; limit bulundu}$$

Buraya kadar hesaplama doğrudur, fakat l'Hôpital kuralını bir kere daha uygulamak için türev almaya devam edersek,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

buluruz, ki bu da yanlıştır. L'Hôpital Kuralı sadece belirsiz şekiller veren limitlere uygulanabilir ve $0/1$ bir belirsiz şekil değildir. ■

ÖRNEK 4 L'Hôpital Kuralının Tek-Taraflı Limitlerle Kullanmak

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad x > 0 \text{ için pozitif}$$

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x^2}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty \qquad x < 0 \text{ için negatif}$$

Türev
Limitte Belirsizlikler

b-) $\infty - \infty$ Belirsizlik Durumu

Bu belirsizlik durumu

$$f - g = \left[\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right] : \frac{1}{f\,g} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f\,g}} \quad \text{ve} \quad f - g = \frac{f\,g}{\left[\frac{1}{g} - \frac{1}{f}\right]^{-1}}$$

eşitlikleri yardımıyla sırasıyla $0/0$ ve ∞/∞ belirsizliklerine dönüştürülür.

Örnek 52. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ limitini hesaplayınız.

Örnek 53. $\lim\limits_{x \to \pi/2}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Türev
Limitte Belirsizlikler

c-) 0.∞ Belirsizlik Durumu

Bu belirsizlik $f.g = \dfrac{f}{1/g}$ veya $f.g = \dfrac{g}{1/f}$ eşiklikleri yardımıyla sırasıyla $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizlik biçimine dönüştürülüp L'Hospital kuralı uygulanır.

Örnek 54. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$ limitini hesaplayınız.

Örnek 55. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x . \ln x$ limitini hesaplayınız.

ÖRNEK 6 $\infty \cdot 0$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x\to\infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$$

limitini bulun.

Çözüm

$$\lim_{x\to\infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right) \qquad \infty\cdot 0$$
$$= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\sin h\right) \qquad h = 1/x.$$
$$= 1$$

■

ÖRNEK 7 $\infty - \infty$ Belirsiz Şekli ile Çalışmak

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

limitini bulun.

Çözüm $x \to 0^+$ ise $\sin x \to 0^+$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to \infty - \infty$$

olur. Benzer şekilde $x \to 0^-$ ise $\sin x \to 0^-$ dir ve

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \to -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty$$

olur. İki şekilde limitte ne olduğunu göstermez. Limiti bulmak için, önce kesirleri birleştiririz:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \qquad \text{ortak payda } x \sin x \text{ dir.}$$

Sonra, sonuca l'Hôpital Kuralını uygularız:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x \sin x} \qquad \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} \qquad \text{Hala } \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

■

bulunur.

Türev
Limitte Belirsizlikler

d-) 1^{∞}, ∞^{0} ve 0^{0} Belirsizlik Durumları

Bu belirsizlik durumları $0.\infty$ biçimine getirilebilir. Örneğin, $x \to a$ için $f(x) \to 1$ ve $g(x) \to \infty$ ise bu taktirde $y = (f(x))^{g(x)}$ fonksiyonunda 1^{∞} belirsizlik durumu ortaya çıkar. Bu eşitliğin her iki tarafının logaritması alınırsa

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

bulunur. Bu durumda $g(x)\ln f(x)$ ifadesindeki belirsizlik $\infty.0$ belirsizliği olur. Dolayısıyla c-) de olduğu gibi $\lim_{x \to a} \ln y$ limiti hesap edilir ve sonra

$$\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \to a} \ln y}$$

eşitliğinden istenen limit elde edilir.

Türev
Limitte Belirsizlikler

Örnek 56. $\lim_{x \to \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$ limitin hesaplayınız.

Örnek 57. $\lim_{x \to 0} (\sin x)^{x}$ limitini hesaplayınız.

Örnek 58. $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{1/x}$ limitini hesaplayınız.

Türev
Diferansiyel

Kabul edelim ki y=f(x) ile tanımlı f fonksiyonu X kümesinde türevlenebilir olsun. x'e Δx artması verildiğinde f'nin aldığı artma miktarını Δy ile gösterelim. Bu durumda

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

olur. f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğundan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

olmak üzere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x) \text{ veya } \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x).\Delta x$$

eşitliği yazılabilir. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

Türev
Diferansiyel - Tanım

Tanım 6.17.1. (5) ifadesindeki $f'(x)\Delta x$ terimine f fonksiyonun sabit x noktasına ve değişken Δx artmasına göre **diferansiyeli denir** ve

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{veya} \quad df(x) = f'(x)\Delta x$$

ile ifade edilir.

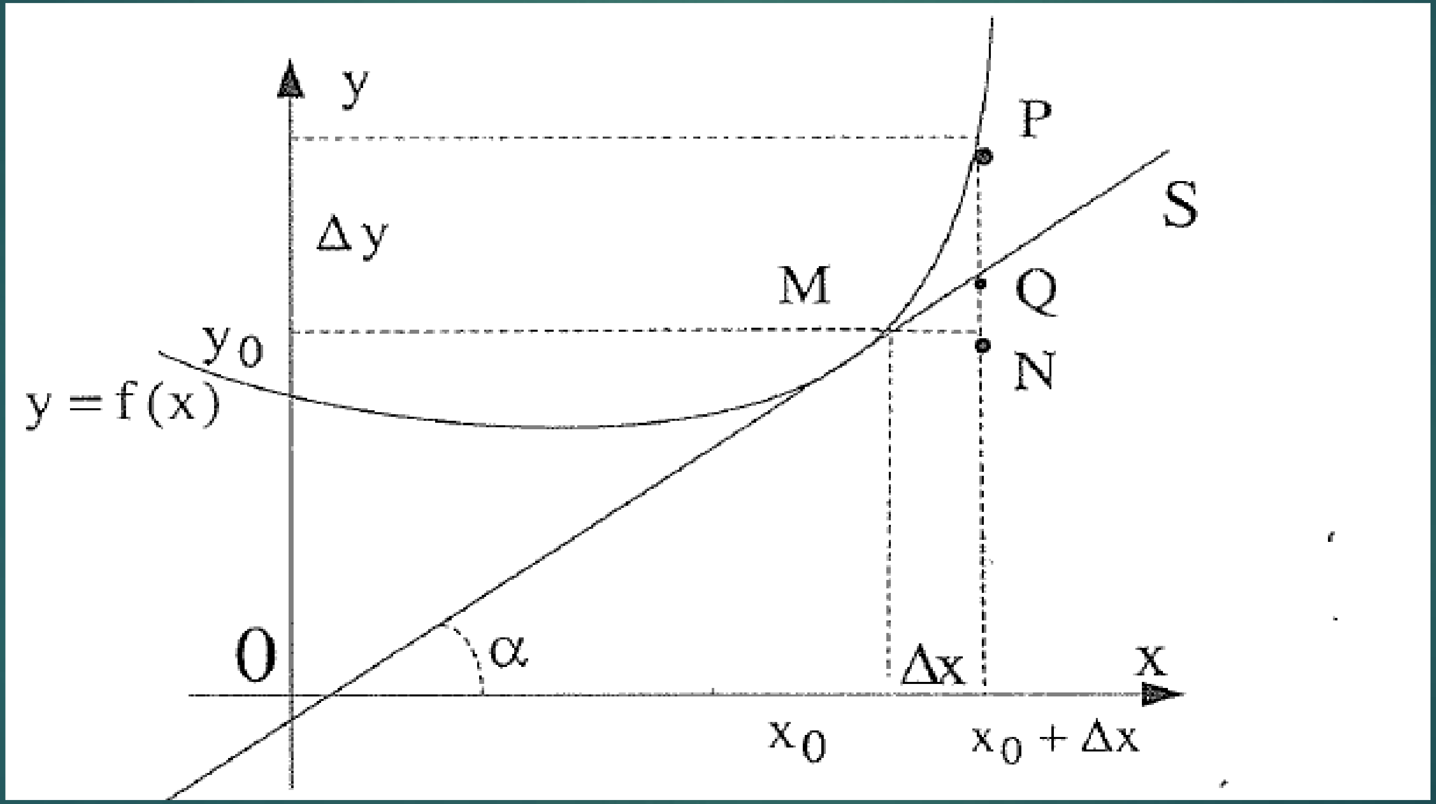
Bu tanıma göre $y=f(x)=x$ fonksiyonun diferansiyeli hesap edilirse $f'(x)=1$ olduğundan $dy = df(x) = dx = 1.\Delta x = \Delta x$ yani $dx = \Delta x$ bulunur. Şu halde

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

olur. Görüldüğü üzere $f'(x)$ türevi sadece x'e bağlı olmasına rağmen $df(x) = f'(x)dx$ diferansiyeli x ve dx'e bağlıdır.

f fonksiyonunun diferansiyelini geometrik olarak aşağıdaki gibi açıklayabiliriz. Bunun için grafik üzerinde $M(x_0, y_0)$ noktasını alalım.

Türev
Diferansiyel - Tanım



Türev
Diferansiyel - Tanım

Eğri üzerinde absisi $x_0 + \Delta x$ olan noktayı P , eğriye M noktasından çizilen teğeti S ve S teğeti ile 0x ekseni arasındaki açıyı ise α ile gösterelim. S teğeti ile PN doğrusunun kesişim noktasını Q ile ifade edelim. Bu durumda $\overset{\Delta}{MNQ}$ dik üçgen olduğundan

$$|NQ| = (\tan\alpha)\Delta x = f'(x)\Delta x = dy$$

olur. Böylece şekilden görüldüğü üzere $|NQ| = |NP| - |PQ| = \Delta y - |PQ|$ olduğuna göre

$$dy = \Delta y - |PQ|$$

elde edilir. Yani $dy \cong \Delta y$ dır.

Türev kurallarından dolayı toplam, fark, çarpım ve bölümün diferansiyeli için aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğu kolayca gösterilebilir : u=u(x) ve v=v(x) türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$d(u \pm v) = (u \pm v)' dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$$

$$d(u.v) = (u.v)' dx = (u'v + uv')dx = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

dir.

Türev
Diferansiyel - Tanım

Şimdi diferansiyel yardımıyla fonksiyonun yaklaşık değerinin nasıl hesaplanacağını görelim. Biliyoruz ki f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğunda $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$ olmak üzere

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

yazılabilir. Bu durumda Δx çok küçük alınırsa

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x).\Delta x \Rightarrow f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).\Delta x$$

olur. Şu halde x_0 noktasının yeterince küçük komşuluğundaki her x icin

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

dır.

Türev
Diferansiyel - Uygulama

Örnek 26. Sin 46^{o}'nın yaklaşık değerini bulunuz.

ÖRNEK 6 Diferansiyellerle Tahmin Etme

Bir çemberin yarıçapı r, $a = 10$ m'den 10.1 m'ye artıyor (Şekil 3.52). Çemberin alanı A'daki artışı tahmin etmek için dA'yı kullanın. Genişletilmiş çemberin alanını tahmin edin ve bunu gerçek alanla karşılaştırın.

Çözüm $A = \pi r^2$ olduğu için, tahmin edilen artış

$$dA = A'(a)\,dr = 2\pi a\,dr = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi \text{ m}^2.$$

bulunur. Böylece,

$$A(10 + 0.1) \approx A(10) + 2\pi$$
$$= \pi(10)^2 + 2\pi = 102\pi.$$

dir. Yarıçapı 10.1 m olan çemberin alanı yaklaşık olarak 102π m^2 dir.

Gerçek alan

$$A(10.1) = \pi(10.1)^2$$
$$= 102.01\pi \text{ m}^2$$

dir. Tahminimizdeki hata $\Delta A - dA$ farkı olan 0.01π m^2 dir. ■

ÖRNEK 4 dy Diferansiyelini Bulmak

(a) $y = x^5 + 37x$ ise dy'yi bulun.
(b) $x = 1$ ve $dx = 0.2$ ise, dy'nin değerini bulun.

Çözüm

(a) $dy = (5x^4 + 37)\,dx$
(b) dy'nin ifadesinde $x = 1$ ve $dx = 0.2$ yazarsak;

$$dy = (5 \cdot 1^4 + 37)0.2 = 8.4.$$ ■

ÖRNEK 5 Fonksiyonların Diferansiyellerini Bulmak

(a) $d(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2 2x\,dx$

(b) $d\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{(x+1)\,dx - x\,d(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x\,dx + dx - x\,dx}{(x+1)^2} = \dfrac{dx}{(x+1)^2}$

Türev
Diferansiyel - Uygulama

Diferansiyel Yaklaşımdaki Hata

$f(x)$ fonksiyonu $x = a$ da türevlenebilir olsun ve x'teki bir artma $dx = \Delta x$ olsun. x a'dan $a + \Delta x$'e değişirken f'deki değişimi tanımlamanın iki yolu vardır:

Gerçek değişim: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$

Diferansiyel tahmin: $df = f'(a)\,\Delta x$

df'nin Δf'e yaklaşımı ne kadar iyidir?

Yaklaşımdaki hatayı Δf'ten df'i çıkararak buluruz:

$$\begin{aligned}
\text{Yaklaşım hatası} &= \Delta f - df \\
&= \Delta f - f'(a)\Delta x \\
&= \underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x \\
&= \underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{buna } \epsilon \text{ deyin}} \cdot \Delta x \\
&= \epsilon \cdot \Delta x.
\end{aligned}$$

$\Delta x \to 0$ iken

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

fark oranı $f'(a)$'ya yaklaşır ($f'(a)$'nın tanımını hatırlayın), dolayısıyla parantez içindeki değer çok küçük bir sayı haline gelir (bu yüzden ona ϵ dedik). Aslında, $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon \to 0$'dır. Δx küçük ise $\epsilon\,\Delta x$ yaklaşım hatası daha küçüktür.

$$\underbrace{\Delta f}_{\substack{\text{gerçek}\\ \text{değişim}}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\substack{\text{tahmini}\\ \text{değişim}}} + \underbrace{\epsilon\,\Delta x}_{\text{hata}}$$

Hatanın tam olarak ne kadar küçük olduğunu bilmememize ve Bölüm 11'den önce bunun üzerine fazla ilerleme yapmayacak olmamıza rağmen, burada bahsedilmeye değer bir şey vardır, yani denklemin aldığı *form*.

$x = a$ yakınında $y = f(x)$'teki değişim

$y = f(x)$ $x = a$'da türevlenebiliyor ve x a'dan $a + \Delta x$'e değişiyorsa, f'deki Δy değişimi

$$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \epsilon\,\Delta x \qquad (1)$$

formunda bir denklemle verilir. Burada $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon \to 0$ olur.

Örnek 6'da

$$\Delta A = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = (\underbrace{2\pi}_{dA} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{hata}})\ \text{m}^2$$

bulduk, dolayısıyla yaklaşım hatası $\Delta A - dA = \epsilon\,\Delta r = 0.01\pi$ ve $\epsilon = 0.01\pi/\Delta r = 0.01\pi/0.1 = 0.1\pi$ m'dir.

(1) denklemi Zincir Kuralının ispatını başarılı bir şekilde sonlandırmamızı sağlar.

Zincir Kuralının İspatı

Amacımız $f(u)$ u'nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve $u = g(x)$ de x'in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, $y = f(g(x))$ bileşkesi x'in türevlenebilir bir fonksiyonudur.

Daha açık olarak, g x_0'da türevlenebiliyorsa ve f de $g(x_0)$'da türevlenebiliyorsa, bileşke x_0'da türevlenebilir:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Δx x'in bir artımı ve Δu ve Δy de u ve y'de buna karşılık gelen artımlar olsun. Denklem (1) i uygulamakla

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\,\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

elde ederiz. Burada $\Delta x \to 0$ iken $\epsilon_1 \to 0$ olur. Aynı şekilde,

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\,\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

olur ve yine $\Delta u \to 0$ iken $\epsilon_2 \to 0$'dır. Ayrıca $\Delta x \to 0$ iken $\Delta u \to 0$ olduğuna dikkat edin. Δu ve Δy denklemlerini birleştirmek

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

verir, dolayısıyla

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2\,g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

olur. Δx sıfıra giderken ϵ_1 ve ϵ_2 de sıfıra gittiği için, denklemin sağ tarafındaki dört terimin üçü limitte sıfır olur ve

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

kalır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Türev
Diferansiyel - Uygulama

Değişime Karşı Duyarlılık

$df = f'(x)\,dx$ denklemi f'nin çıktısının farklı x değerleri için girdilerdeki değişikliklere ne kadar duyarlı olduğunu göstermektedir. f''nün x'teki değeri ne kadar büyükse, dx'e verilen bir değişikliğin etkisi de o kadar büyüktür. Bir a noktasından yakınındaki bir $a + dx$ noktasına giderken f'deki değişimi üç şekilde tanımlayabiliriz.

	Gerçek	Tahmin edilen
Mutlak değişim	$\Delta f = f(a + dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Bağıl değişim	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Yüzde değişim	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

ÖRNEK 7 Bir Kuyunun Derinliğini Hesaplamak

$s = 16t^2$ denkleminden, attığınız ağır bir taşın suya ne kadar zamanda düştüğünü ölçerek bir kuyunun derinliğini hesaplamak istiyorsunuz. Hesabınız zamanı ölçerken yapacağınız 0.1 sn'lik bir hataya ne kadar duyarlıdır?

Çözüm

$$ds = 32t\,dt$$

denkleminde ds'nin boyutu t'nin ne kadar büyük olduğuna bağlıdır.

Eğer $t = 2$ sn ise, $dt = 0.1$'in yol açacağı hata sadece

$$ds = 32(2)(0.1) = 6.4 \text{ ft}.$$

olacaktır. Üç saniye sonra, $t = 5$ sn iken, aynı dt'nin yol açtığı hata

$$ds = 32(5)(0.1) = 16 \text{ ft}.$$

olacaktır. Kuyunun tahmin edilen derinliğinin gerçek derinliğinden farkı, zaman ölçümündeki verilen bir hata için, atılan taşın aşağıdaki suya çarpmasına kadar geçen süre arttıkça büyür. ■

ÖRNEK 8 Tıkanmış Damarları Açmak

1830'ların sonunda, Fransız fizyolog Jean Poiseuille ("puasoy") günümüzde normal akışına geri dönebilmesi için kısmen tıkalı bir atardamarın yarıçapının ne kadar genişletilmesi gerektiğini tahmin etmek için kullandığımız formülü keşfetmiştir. Formülü,

$$V = kr^4$$

sabit basınçta birim zamanda küçük bir boru veya tüpten akan akışkanın hacmi V'nin, bir sabit kere tübün yarıçapı r'nin dördüncü kuvveti olduğunu söyler. r'deki %10'luk bir artış V'yi nasıl etkileyecekir?

Çözüm r ve V'nin diferansiyelleri arasındaki ilişki şu formülle verilir:

$$dV = \frac{dV}{dr}dr = 4kr^3\,dr.$$

Dolayısıyla, V'deki bağıl değişim

$$\frac{dV}{V} = \frac{4kr^3\,dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}$$

bulunur. V'deki bağıl değişim r'deki bağıl değişimin 4 katıdır, dolayısıyla r'deki %10'luk bir artış, akışta %40'lık bir artış yaratacaktır. ■

Türev
Diferansiyel - Uygulama

ÖRNEK 9 Kütlenin Enerjiye Dönüşümü

Newton'un ikinci yasası,

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma$$

kütlenin sabit olduğu varsayımına dayanarak kurulmuştur, ancak bunun tamamen doğru olmadığını biliyoruz, çünkü bir cismin kütlesi hızla birlikte artar. Einstein'ın düzeltilmiş formülünde, kütlenin değeri

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

olarak verilir. Burada "durgun kütle" m_0 hareket etmeyen bir cismin kütlesini temsil eder ve c 300.000 km/sn civarında olan ışık hızıdır. Eklenen v hızından kaynaklanan, kütledeki Δm artışını tahmin etmek için

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 \qquad (2)$$

yaklaşımını kullanın.

Çözüm v, c ile karşılaştırıldığında çok küçükse, c, v^2/c^2 sıfıra yakın olur ve

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad x = \frac{v}{c} \text{ ile Denklem (2)}$$

yaklaşımını kullanmak güvenlidir. Buradan,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

veya

$$m \approx m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

(3) denklemi kütlede, eklenen v hızından kaynaklanan artışı ifade eder.

Enerji Yorumu

Newton fiziğinde $(1/2)m_0v^2$ cismin kinetik enerjisidir (KE), ve (3) denklemini

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

şeklinde yeniden yazarsak,

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{KE})$$

veya

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{KE})$$

olduğunu görürüz. Başka bir deyişle, 0 hızından v hızına giderken kinetik enerjideki değişim Δ(KE) yaklaşık olarak $(\Delta m)c^2$'ye eşittir, kütledeki değişim kere ışık hızının karesi. $c \approx 3 \times 10^8$ m/sn'yi kullanarak, kütledeki küçük bir değişikliğin enerjide büyük bir değişiklik yarattığını görürüz. ■

Türev
Diferansiyel - Uygulama

Diferansiyel Formda Türevler

19–30 alıştırmalarında, dy'yi bulun.

19. $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

20. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

21. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

22. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{3(1 + \sqrt{x})}$

23. $2y^{3/2} + xy - x = 0$

24. $xy^2 - 4x^{3/2} - y = 0$

25. $y = \sin(5\sqrt{x})$

26. $y = \cos(x^2)$

27. $y = 4\tan(x^3/3)$

28. $y = \sec(x^2 - 1)$

29. $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

30. $y = 2\cot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Yaklaşım Hatası

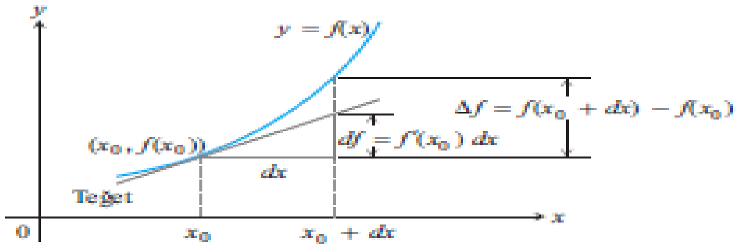
31–36 alıştırmalarında, x x_0'dan $x_0 + dx$'e değişirken her $f(x)$ fonksiyonu değer değiştirir.

a. $\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ değişimini;

b. $df = f'(x_0)\,dx$ tahmininin değerini; ve

c. $|\Delta f - df|$ yaklaştırma atasını

bulun.



31. $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$

32. $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1, \quad dx = 0.1$

33. $f(x) = x^3 - x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$

34. $f(x) = x^4, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0.1$

35. $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.5, \quad dx = 0.1$

36. $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x_0 = 2, \quad dx = 0.1$

Değişimlerin Diferansiyel Tahminleri

37–42 alıştırmalarında, hacim veya yüzey alanında verilen değişimi tahmin eden bir diferansiyel formül yazın.

37. Yarıçap r_0'dan $r_0 + dr$'ye değişirken bir kürenin hacmi $V = (4/3)\pi r^3$'teki değişim.

38. Kenar uzunlukları x_0'dan $x_0 + dx$'e değişirken bir kübün hacmi $V = x^3$'teki değişim.

39. Kenar uzunlukları x_0'dan $x_0 + dx$'e değişirken bir kübün yüzey alanı $S = 6x^2$'deki değişim.

40. Yarıçap r_0'dan $r_0 + dr$'ye değişir ve yükseklik aynı kalırken dik bir koninin yan yüzey alanı $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$'deki değişiklik

41. Yarıçap r_0'dan $r_0 + dr$'ye değişir ve yükseklik aynı kalırken dik bir silindirin hacmi $V = \pi r^2 h$'deki değişiklik.

42. Yükseklik h_0'dan $h_0 + dh$'ye değişir ve yarıçap aynı kalırken dik bir silindirin yan yüzey alanı $S = 2\pi rh$'deki değişiklik.

Türev
Yüksek mertebeden diferansiyeller

$y=f(x)$ fonksiyonu X kümesinde türevlenebilir ve $x \in X$ bağımsız değişken olmak üzere f'nin diferansiyelinin

$$dy = f'(x)dx$$

olduğunu biliyoruz. Bu diferansiyele aynı zamanda **birinci mertebeden diferansiyel** denir. Bu kavrama bakarsak $f'(x)$ türevinin x' e bağımlı ve dx'in ise bağımsız x değişkenin artması olması nedeniyle sabit olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla dy diferansiyeli x'in bir fonksiyonu olacağına göre bunun bir kez daha diferansiyeli alınabilir. Buna **f'nin ikinci mertebeden diferansiyeli** adı verilir ve

$$d^2y = d(dy), \quad d^2f(x) = d(df(x))$$

ile gösterilir. Buna göre

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2 + f'(x).0.dx = f''(x)dx^2$$

olur.

Benzer olarak f'nin n. mertebeden diferansiyeli

$$d^n y = d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Türev
Yüksek mertebeden diferansiyeller

Eğer x bağımsız değişken değil, yani bir t değişkenin fonksiyonu ise bu taktirde dx sabit olmayıp t'nin fonksiyonu olacağından

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x).d(dx) = f''(x).dx^2 + f'(x).d^2x$$

ve 3. mertebeden diferansiyel

$$\begin{aligned} d^3y &= d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x).dx^2 + f'(x).d^2x\right) = d\left(f''(x)dx^2\right) + d\left(f'(x).d^2x\right) \\ &= f'''(x)dx^3 + f''(x).d(dx^2) + f''(x)dx.dx^2 + f'(x).d\left(d^2x\right) \\ &= f'''(x)dx^3 + f''(x)2dx.d^2x + f''(x)dx.d^2x + f'(x)d^3x \\ &= f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dxd^2x + f'(x)d^3x \end{aligned}$$

olur. Benzer olarak daha yüksek mertebeden türevler de hesaplanır.

Türev
Yüksek mertebeden diferansiyeller - uygulama

Örnek 27. $y = \sin x^2$ fonksiyonunun ikinci mertebeden diferansiyelini, a-) x'in bir bağımsız değişkenin fonksiyonu, b-) x'in bağımsız değişken olması durumunda hesap ediniz.