Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Toplam sembolü

Toplam Sembolü:

$f(k)=a_k$ olsun. $r,n \in Z$ ve $r \leq n$ olmak üzere $a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_n$ toplamını kısaca, $\sum_{k=r}^{n} a_k$ şeklinde gösteririz. Burada r alt sınır, n üst sınır ve k da değişkendir($r \leq k \leq n$, $k \in Z$).

$$\boxed{\sum_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_n}$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\sum_{k=1}^{24} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{24} - \sqrt{23}) + (\sqrt{25} - \sqrt{24}) = \sqrt{25} - \sqrt{1} = 5 - 1 = 4$$

Toplam sembolü

Örnek: $\sum_{k=1}^{17} \ln\left(1+\frac{2}{2k-1}\right)=?$

çözüm: $\sum_{k=1}^{17} \ln\left(1+\frac{2}{2k-1}\right)=\ln\frac{3}{1}+\ln\frac{5}{3}+\ln\frac{7}{5}+\ldots+\ln\frac{35}{33}$

$$=\ln\left(\frac{3}{1}.\frac{5}{3}.\frac{7}{5}\ldots\frac{35}{33}\right)$$

$$=\ln 35$$

Toplam sembolü Özellikler

1) $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{n tane}} = n.c$

$$\sum_{k=0}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{(n+1) tane}} = (n+1).c$$

2) $\sum_{k=r}^{n} c.a_k = c.\sum_{k=r}^{n} a_k\,,\quad c \in R$

3) $\sum_{k=r}^{n} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=r}^{n} a_k \mp \sum_{k=r}^{n} b_k$

4) $r<m<n$ olmak üzere, $\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ ’ dır.

5) $\sum_{k=r}^{n} \sum_{i=t}^{m} a_{ki} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=r}^{n} a_{ki}$ 6) $\sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{k=r+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=r-p}^{n-p} a_{k+p}$

Toplam sembolü Özellikler

Örnekler:

$$\sum_{k=1}^{19} 7 = \underbrace{7+7+7+\ldots+7}_{19\text{ tane}} = 19.7 = 133$$

$$\sum_{k=0}^{10} 5 = \underbrace{5+5+\ldots+5}_{11\text{ tane}} = 5.11 = 55$$

$$\sum_{k=-2}^{17} 2k^2 = 2.\sum_{k=-2}^{17} k^2$$

$$\sum_{k=2}^{15} (k^2+k-4) = \sum_{k=2}^{15} k^2 + \sum_{k=2}^{15} k - \sum_{k=2}^{15} 4$$

$$\sum_{k=-2}^{16} k^3 = \sum_{k=-2}^{10} k^3 + \sum_{k=11}^{16} k^3$$

$$\sum_{k=1}^{7}\sum_{m=2}^{10}(2k+km+1) = \sum_{m=2}^{10}\sum_{k=1}^{7}(2k+km+1)$$

$$\sum_{k=7}^{19}(k^2+k+1) = \sum_{k=7-6}^{19-6}\left[(k+6)^2+(k+6)+1\right] = \sum_{k=1}^{13}\left(k^2+13k+43\right)$$

$$\sum_{n=-3}^{17}(n+4).(m+3) = \sum_{n=-3+4}^{17+4}(n-4+4).(m+3) = \sum_{n=1}^{21} n(m+3)$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=1}^{n} 2k=2+4+6+...+2n=n.(n+1)$

3) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)=1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

4) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

5) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$

6) $r \neq 1$ ve her $n \in N$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=1+r+r^2+...+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{r^n-1}{r-1}$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $\sum_{k=1}^{99} k = 1+2+3+\ldots+99 = \frac{99.(99+1)}{2} = 4950$

Örnek: A=19+20+21+...+100 toplamının değeri kaçtır?

$$A=19+20+21+\ldots+100=(1+2+3+\ldots+100)-(1+2+3+\ldots+18)$$

$$=\sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{18} k$$

$$=\frac{100.(100+1)}{2} - \frac{18.(18+1)}{2}$$

$$=4879$$

Örnek: $A=2+4+6+\ldots+100$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2k=2+4+6+\ldots+2n=n.(n+1)}$$

$$A=2+4+6+\ldots+100=\sum_{k=1}^{50} 2k = 50.(50+1)=2550$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: A=1+3+5+...+99 toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2}$$

$$A=1+3+5+\ldots+99=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)=50^2=2500$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{90}(2k+3)=2.\sum_{k=1}^{90}k+\sum_{k=1}^{90}3$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n=\frac{n.(n+1)}{2}}$$

$$=2.\frac{90.91}{2}+90.3$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{n tane}}=n.c}$$

$$=8460$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $\sum_{k=1}^{11} k^2 = \frac{11.(11+1).(2.11+1)}{6} = 506$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

Örnek: $\sum_{k=3}^{20} k^3 = ?$

çözüm:

1.yol:

$$\sum_{k=3}^{20} k^3 = (1^3+2^3+...20^3)-(1^3+2^3)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2}$$

$$=\left(\frac{20.21}{2}\right)^2-(1^3+2^3)$$

$$=210^2-9$$

$$=44091$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

2.yol:

$$\sum_{k=3}^{20} k^3 = \sum_{k=1}^{20} k^3 - \sum_{k=1}^{2} k^3$$

$$= \left(\frac{20.21}{2}\right)^2 - \left(\frac{2.3}{2}\right)^2$$

$$= 210^2 - 9$$

$$=44091$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $A=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{17}$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$r=2,\ n-1=17 \Longrightarrow n=18$

$$A=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{17}$$

$$=\sum_{k=1}^{18} 2^{k-1}$$

$$=\frac{2^{18}-1}{2-1}$$

$$=2^{18}-1$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} r^{k-1}=1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}}$$

Örnek: $\sum_{k=8}^{10}\left(k^2+k\right)=\sum_{k=8}^{10} k(k+1)$

$$=8.9+9.10+10.11$$

$$=272$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\ldots+n=\frac{n.(n+1)}{2}}$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $A = \sum_{k=-7}^{12}(2k+3)$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm:

$$A = \sum_{k=-7+8}^{12+8}\left[2(k-8)+3\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{20}(2k-13)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2}}$$

$$= 2.\frac{20.21}{2} - 20.13$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{\text{n tane}} = n.c}$$

$=160$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $f(x)=2x^2-50$ olduğuna göre, $\sum_{m=-4}^{5} f(m)$ toplamının değeri kaçtır?

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2}}$$

çözüm: $\sum_{m=-4}^{5} f(m) = \sum_{m=-4}^{5} (2m^2-50)$

$$=\sum_{m=-4+5}^{5+5}\left[2(m-5)^2-50\right]$$

$$=\sum_{m=1}^{10}(2m^2-20m)$$

$$=2.\ \frac{10.11.21}{6}-20.\frac{10.11}{2}$$

$$=770-1100$$

$$=-330$$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $A=\sum_{k=1}^{7}\sum_{m=0}^{6}(m-k+1)$ toplamının değeri kaçtır?

çözüm: $\sum_{m=0}^{6}(m-k+1)=\frac{6.7}{2}-7k+7.1$

$\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}}$

=28-7k (k sabit)

$\boxed{\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+...+c}_{\text{n tane}}=n.c}$

$A=\sum_{k=1}^{7}(28-7k)$

$=7.28-7.\frac{7.8}{2}$

$=0$

Toplam sembolü
Sık kullanılan toplam formülleri

Örnek: $A=\sum_{n=3}^{11}\left[(n-2)(n-3)+1\right]=?$

çözüm:

$$A=\sum_{n=3-2}^{11-2}\left[(n+2-2).(n+2-3)+1\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{9}\left[n(n-1)+1\right]=\sum_{n=1}^{9}\left(n^2-n+1\right)$$

$$=\frac{9.10.19}{6}-\frac{9.10}{2}+9.1$$

$$=285-45+9$$

$$=249$$

Riemann integrali
Aralıkların parçalanmaları

Tanım 8.1.1. Sonlu $[a,b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eşitsizliğini sağlayan $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n$ noktaları yardımıyla n alt aralığa bölelim. Bu durumda

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

kümesine $[a,b]$ aralığının bir **parçalanması** veya **bölüntüsü**, $i = 1,2,\cdots,n$ için $[x_{i-1}, x_i]$ ve (x_{i-1}, x_i) aralıklarına ise sırasıyla **kapalı ve açık** alt aralıkları denir. Bu alt aralıkların **uzunlukları** veya **ölçüsü**

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

dır. Bu durumda P parçalanması ile oluşturulan

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

alt aralıklarının uzunlukları $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n$ olur. Bu uzunluklarının maksimumuna P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Buna göre

$$\|P\| = \text{maks}\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$$

olur. Eğer $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \cdots = \Delta x_n = (b-a)/n$ ise P'ye **düzgün parçalanma** adı verilir.

Riemann integrali
Aralıkların parçalanmaları

Tanım 8.1.2. P_1 ve P_2, $[a,b]$ aralığının herhangi iki parçalanması olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise bu taktirde P_2 parçalanması P_1 parçalanmasından daha **incedir** veya **sıktır** denir.

Riemann integrali
Aralıkların parçalanmaları

Örnek 1. $[0,2]$ $[0,1]$ aralığının bazı parçalanmalarını bulup sıklık durumları ile normlarını inceleyiniz.

Çözüm.

$$P_1=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\},\quad P_2=\left\{0,\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{6}{8},\frac{7}{8},1\right\},\quad P_3=\left\{0,\frac{1}{4},1\right\}$$

parçalanmalarını göz önüne alalım. $P_3\subset P_1\subset P_2$ olduğu açıktır. Şu halde P_1, P_3'den ve P_2, P_1'den daha incedir. Ayrıca $\|P_1\|=1/4$, $\|P_2\|=\cancel{1/4}$ $1/8$ ve $\|P_3\|=3/4$ olup $\|P_1\|=\|P_2\|<\|P_3\|$ dır.

Görüldüğü üzere genel olarak herhangi bir $[a,b]$ aralığının parçalanmaları inceldikçe normları küçülür. Yani $P_1\subset P_2\subset\cdots\subset P_m$ olduğunda $\|P_1\|\geq\|P_2\|\geq\cdots\geq\|P_m\|$ olur. Öte yandan $\|P\|\to 0$ ise normun tanımından parçalanmanın her bir alt aralığın uzunluğu 0'a gider. Bu da n alt aralıkların sayısı olmak üzere $n\to\infty$ olması demektir. Fakat bunun tersi doğru değildir yani $n\to\infty$ ise $\|P\|\to 0$ olmak zorunda değildir. Örneğin, $[0,1]$ aralığının

$$P=\left\{0,\frac{1}{2},1-\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ldots,1-\left(\frac{1}{2}\right)^m,\ldots,1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},1\right\}$$

parçalanması göz önüne alınırsa bu durumda $n\geq 2$ için $\|P\|=1/2$ olur. Yani $n\to\infty$ için $\|P\|$ normu 0'a gitmez. Fakat P parçalanması düzgün ise bu taktirde $\|P\|\to 0\Leftrightarrow n\to\infty$ önermesi doğrudur.

Riemann integrali
Aralıkların parçalanmaları

Örnek 2. $[0,1]$ aralığını 3^n eşit parçaya bölen düzgün P parçalanmasını ve normunu bulunuz.

Çözüm. Alt aralıkların uzunlukları $1/3^n$ olmalıdır. Buna göre

$$P=\left\{\frac{i}{3^n} : i=0,1,\cdots,3^n\right\}=\left\{0,\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n},\cdots,\frac{3^n-1}{3^n},1\right\} \text{ ve } \|P\|=\frac{1}{3^n}$$

dır. Aynı zamanda $\|P\|=1/3^n \to 0 \Leftrightarrow n\to\infty$ dır.

Riemann integrali
Alt ve Üst Toplam (Darboux)

Tanım 8.2.1. $f:[a,b]\to R$ sınırlı bir fonksiyon ve $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması olsun. $i=1,2,\cdots,n$ için

$$m_i(f)=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\} \text{ ve } M_i(f)=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

olmak üzere

$$\ddot{U}_f(P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i \quad \text{ve} \quad A_f(P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i$$

toplamlarına sırasıyla f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Üst Darboux Toplamı** ve **Alt Darboux Toplamı** denir

Riemann integrali
Alt ve Üst Toplam (Darboux)

Teorem 8.2.2. $f:[a,b]\to R$ sınırlı bir fonksiyon, P_1 ve P_2, $[a,b]$ aralığının herhangi iki parçalanması olsun. Bu taktirde

a-) Eğer P_2, P_1'den daha ince ise

$$A_f(P_1)\le A_f(P_2) \quad \text{ve} \quad Ü_f(P_1)\ge Ü_f(P_2)$$

b-) Eğer P_1 ve P_2 herhangi iki parçalanma ise

$$A_f(P_1)\le Ü_f(P_2)$$

c-) $I_* = \sup\{A_f(P):\ P\in P_a^b\}$, $I^* = \inf\{Ü_f(P):\ P\in P_a^b\}$

olmak üzere

$$I_* \text{ ve } I^* \text{ mevcuttur ve } I_*\le I^* \text{ dır.}$$

Burada P_a^b, $[a,b]$ aralığının bütün parçalanmalarının kümesidir.

Riemann integrali
Alt ve Üst Toplam (Darboux)

İspat. a-) $P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $[a,b]$'nin herhangi bir parçalanması yani

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

olsun. P_1'in bölüntü noktalarına yeni bir x'_{i-1} noktasını ilave edelim. Bu durumda

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{i-1} < x'_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eşitsizliğini sağlayan

$$P_2 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x'_{i-1}, x_i, \cdots, x_n\}$$

parçalanmasını elde ederiz. $P_1 \subset P_2$ olduğu açıktır. Eğer

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad M_i(f) = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$$m'_i(f) = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x'_{i-1}\}, \quad M'_i(f) = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x'_{i-1}\}$$

$$m''_i(f) = \inf\{f(x) : x'_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad M''_i(f) = \sup\{f(x) : x'_{i-1} \le x \le x_i\}$$

denirse

$$m_i(f) \le m'_i(f), \quad m_i(f) \le m''_i(f), \quad M_i(f) \ge M'_i(f) \text{ ve } M_i(f) \ge M''_i(f)$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} A_f(P_2) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(f)\Delta x_i + m'_k(x'_{k-1} - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x'_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \\ &\ge \sum_{i=1}^{k-1} m_i(f)\Delta x_i + m_k(x'_k - x_{k-1}) + m_k(x_k - x'_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = A_f(P_1) \end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$Ü_f(P_2) \le Ü_f(P_1)$$

elde edilir.

Riemann integrali
Alt ve Üst Toplam (Darboux)

Şimdi kabul edelim ki P parçalanmasının P_1'den q tane fazla noktası bulunsun. Bu noktaları $x'_1, x'_2, \cdots, x'_q$ ile gösterelim. Bu taktirde $[a,b]$ aralığının

$$P_2 = P_1 \cup \{x'_1\}, \quad P_3 = P_2 \cup \{x'_2\}, \ \cdots \ , P_{q+1} = P_q \cup \{x'_q\}$$

parçalanmaları için

$$P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots \subset P_{q+1} = P$$

olur. Böylece yukarıdaki ispat nedeniyle

$$A_f(P_1) \leq A_f(P_2) \leq A_f(P_3) \leq \cdots \leq A_f(P) \Rightarrow A_f(P_1) \leq A_f(P)$$

ve

$$\ddot{U}_f(P_1) \geq \ddot{U}_f(P_2) \geq \ddot{U}_f(P_3) \geq \cdots \geq \ddot{U}_f(P) \Rightarrow \ddot{U}_f(P_1) \geq \ddot{U}_f(P)$$

elde edilir.

b-) $[a,b]$ aralığının $P = P_1 \cup P_2$ parçalanmasını göz önüne alalım. Bu durumda $P_1 \subset P$ ve $P_2 \subset P$ olduğuna göre teoremin a-) şıkkı nedeniyle

$$A_f(P_1) \leq A_f(P) \leq \ddot{U}_f(P) \leq \ddot{U}_f(P_2)$$

bulunur.

Riemann integrali
Alt ve Üst Toplam (Darboux)

c-) $m \le f(x) \le M$ olsun. Bu taktirde $[a,b]$'nin her P parçalanması için

$$m(b-a) \le A_f(P) \le \ddot{U}_f(P) \le M(b-a)$$

olur. Çünkü, $i = 1,2,\cdots,n$ için $m \le m_i(f) \le M_i(f) \le M$ ve $\Delta x_i > 0$ olduğuna göre

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = A_f(P)$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i = \ddot{U}_f(P) \le \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a)$$

Riemann integrali

Tanım 8.3.1. $a < b$ olmak üzere $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu sınırlı olsun. Bu taktirde

a-) I_* ve I^* sayılarına sırasıyla f'nin $[a,b]$ aralığı üzerinden **alt Darboux integrali, üst Darboux integrali** denir ve

$$I_* = \underline{\int_a^b} f(x)dx \quad \text{ve} \quad I^* = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

ile gösterilir.

b-) Eğer $I_* = I^*$ ise f'ye $[a,b]$ aralığında **Riemann integrallenebilirdir** (ya da kısaca **integrallenebilirdir**) denir ve ortak değer için

$$\int_a^b f(x)dx$$

yazılır. Bu durumda **f fonksiyonuna integrant** ve a ile b sayılarına ise integralin **alt** ve **üst sınırları** adı verilir.

Riemann integrali

Teorem 8.3.2 (İntegrallenebilme için Riemann Şartı). $f:[a,b]\rightarrow R$ fonksiyonunu sınırlı alalım. Bu taktirde f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon>0$ için

$$\ddot{U}_f(P_\varepsilon)-A_f(P_\varepsilon)<\varepsilon$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P_ε parçalanmasının mevcut olmasıdır.

Riemann integrali

İspat. Kabul edelim ki, f fonksiyonu Riemann integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$I_* = \underline{\int_a^b} f(x)dx = I^* = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

olur. Supremum ve infimum özelliklerinden $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\int_a^b f(x)dx - A_f(P'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad Ü_f(P''_\varepsilon) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $[a,b]$'nin P'_ε ve P''_ε parçalanmaları vardır. Eğer $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$ denirse P_ε, P'_ε ve P''_ε parçalanmalarından daha ince olacağından Teorem 8.2.2'den

$$Ü_f(P_\varepsilon) - A_f(P_\varepsilon) \le Ü(P''_\varepsilon) - A_f(P'_\varepsilon) < \varepsilon$$

elde edilir.

Tersine olarak $\forall\varepsilon > 0$ için $Ü_f(P_\varepsilon) - A_f(P_\varepsilon) < \varepsilon$ olacak şekilde $[a,b]$'nın bir P_ε parçalanması mevcut bulunsun. Bu durumda Teorem 8.2.2 nedeniyle her P parçalanması için

$$A_f(P) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le Ü(P_\varepsilon)$$

olur. Şu halde

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le Ü_f(P_\varepsilon) - A_f(P_\varepsilon) < \varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğuna göre

$$I_* = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I^*$$

elde edilir ki, bu da f'nin integrallenebilir olması demektir.

Riemann integrali

Örnek 3. $f:[0,1]\to R$ fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in Q \\ -1, & x\notin Q \end{cases}$ olduğuna göre f'nin Riemann integrallenebilir olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm. $[0,1]$ aralığının herhangi bir $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ parçalanmasını göz önüne alalım. Bu durumda her $[x_{i-1},x_i]$ alt aralığında hem rasyonel hem de irrasyonel sayılar bulunacağından $i=1,2,\cdots,n$ için

$$m_i(f)=-1,\quad M_i(f)=1$$

ve dolayısıyla

$$Ü_f(P)-A_f(P)=\sum_{i=1}^{n}[\ M_i(f)-m_i(f)\ ]\Delta x_i=2$$

elde edilir. Eğer ε sayısı $\varepsilon<2$ alınırsa $Ü_f(P)-A_f(P)<\varepsilon$ olacak şekilde bir P parçalanması bulunamaz. O halde f fonksiyonu integrallenebilir değildir.

Riemann integrali

Tanım 8.3.3. $a < b$ olmak üzere a, b iki reel sayı, $f : [a,b] \to R$ sınırlı fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması olsun.

a-) $i = 1,2,\cdots,n$ için $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere

$$R_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i$$

sayısına f'nin P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann toplamı** denir.

b-) $I \in R$ alalım. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer $\|P\| < \delta$ şartını sağlayan $[a,b]$ aralığının her P parçalanması ve her $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ noktaları için

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu taktirde I sayısına f'nin $[a,b]$ aralığındaki **Riemann integrali** denir ve

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

ile gösterilir.

Riemann integrali

Uyarı : Bu limitin fonksiyonun limitinden farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Burada her bir $\delta > 0$ için $[a,b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ şartını sağlayan sonsuz çoklukta parçalanması vardır. Üstelik böyle parçalanmaların her biri için $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$'nin seçimine bağlı olarak da sonsuz çoklukta Riemann toplamı elde edilir.

Riemann integrali

Örnek 4. Aşağıdaki limiti $[3,8]$ aralığında Riemann integrali biçiminde ifade ediniz.

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(5w_i^3 + \sqrt{w_i} - 4\sin w_i\right) \Delta x_i$$

Çözüm. $I = \int_3^8 \left(5x^3 + \sqrt{x} - 4\sin x\right) dx$.

Riemann integrali

Örnek 5. $a \leq c \leq b$ olmak üzere $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu

$$f_c(x) = \begin{cases} M, & x = c \\ 0, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlandığına göre f_c 'nin integralini hesaplayınız.

Çözüm. $[a,b]$'nin herhangi bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ olsun. Bu durumda P'nin $x_{m-1} < c \leq x_m$ olacak şekilde bir $(x_{m-1}, x_m]$ alt aralığı vardır. Buna göre

$$\left| R_{f_c}(P) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i \right| = \left| f_c(w_m)\Delta x_m \right| + \left| f_c(w_{m+1})\Delta x_{m+1} \right|$$

$$\leq |M|\left(|\Delta x_m| + |\Delta x_{m+1}|\right) \leq 2|M|\,\|P\|$$

olur. Şu halde $\|P\| \to 0$ için limite geçilirse $R_{f_c}(P) \to 0 = \int_a^b f_c(x)dx$ elde edilir.

Riemann integrali

Teorem 8.3.4. $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sınırlı verilsin. Bu taktirde aşağıdaki önermeler denktir.

(i) $I=\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)dx$ mevcuttur.

(ii) $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\left(\ddot{U}_f(P)-A_f(P)\right)=0$

(iii) $\forall\varepsilon>0$ için $\ddot{U}_f(P_\varepsilon)-A_f(P_\varepsilon)<\varepsilon$ olacak şekilde $[a,b]$'nin bir P_ε parçalanması vardır.

Riemann integrali

Teorem 8.3.5. f ve g fonksiyonları $[a,b]$' de integrallenebiir olsun.

i-) Eğer $\alpha,\beta \in R$ ise $\alpha f + \beta f$ fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx .$$

ii-) Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dır.

iii-) f^2 fonksiyonu integrallenebilirdir.

iv-) Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ fonksiyonu integrallenebilirdir.

v-) $|f|$ fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

dir. Fakat $|f|$'nin integrallenebilirliği f'nin integrallenebilirliğini gerektirmez.

vi-) f.g integrallenebilirdir.

Riemann integrali

Teorem 8.3.6. $a < c < b$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,c]$ ve $[c;b]$ aralıklarında integrallenebilir ise bu taktirde $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dir.

İntegral hesabın temel teoremi

Teorem 8.5.1. $f:[a,b]\to R$ integrallenebilir olmak üzere, $F:[a,b]\to R$ fonksiyonu

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

eşitliği ile tanımlanmış olsun. Bu taktirde

a-) F, $[a,b]$ aralığında süreklidir.

b-) Eğer f sürekli ise F fonksiyonu her $x\in(a,b)$ için türevlenebilirdir ve

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

dir.

İntegral hesabın temel teoremi

İspat. a-) Her x için f(x)=0 ise F(x)=0 olacağından ispat açıktır. Aksi durumu inceleyelim. $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_0 \in [a,b]$ keyfi alalım. Bu durumda her x için

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \leq M|x - x_0|$$

olur. Şu halde $|x - x_0| < \delta = \varepsilon / M$ eşitsizliğini sağlayan her x için

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu F'nin x_0'da sürekli ve bu noktanın da keyfi olması nedeniyle sürekli olması demektir.

İntegral hesabın temel teoremi

b-) f , x_0 noktasında sürekli olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $0 < |x - x_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in [a,b]$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kalır. Böylece $0 < |x - x_0| < \delta$ için

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] - f(x_0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}[f(t) - f(x_0)]dt\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\int_{x_0}^{x}|f(t) - f(x_0)|dt < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

demektir.

İntegral hesabın temel teoremi

Teorem 8.5.2 (İntegral Hesabın Temel Teoremi). $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. Eğer her $x\in(a,b)$ için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F:[a,b]\to R$ fonksiyonu varsa, bu taktirde

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

dır.

İntegral hesabın temel teoremi

İspat. $[a,b]$'nin keyfi bir $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ parçalanmasını seçelim. F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve iç kısmında türevlenebilirdir olduğundan Ortalama Değer Teoremi nedeniyle $i = 1,2,\cdots,n$ için

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F'(w_i) = f(w_i)\Delta x_i$$

olacak şekilde $w_i \in (x_{i-1}, x_i)$ vardır. Fakat

$$m_i(f)\Delta x_i \leq f(w_i)\Delta x_i \leq M_i(f)\Delta x_i$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$A_f(P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a) \leq Ü_f(P)$$

bulunur. Böylece f'nin integrallenebilirliğinden istenen eşitlik elde edilir.

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

Teorem 8.5.3 (İntegraller İçin 1. Ortalama Değer Teoremi) . $f, g : [a,b] \to R$ fonksiyonları integrallenebilir olsun. Eğer her $x \in [a,b]$ için $g(x) \geq 0$ (veya $g(x) \leq 0$) ve f sınırlı ise bu taktirde

a-) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx \tag{12}$$

olacak şekilde $\mu \in [\inf f, \sup f]$ vardır.

b-) Eğer f, $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx \tag{13}$$

olacak şekilde $c \in [a,b]$ vardır.

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

İspat a-) $m = \inf f = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ ve $M = \sup f = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ alalım. Her $x \in [a,b]$ için $g(x) \geq 0$ olduğundan

$$m g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x) \Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \qquad \textbf{(14)}$$

yazılabilir. Eğer $\int_a^b g(x)dx = 0$ ise (14) nedeniyle $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ olur. Dolayısıyla (12) eşitliği herhangi bir $\mu \in [m,M]$ için sağlanır. Nihayet $\int_a^b g(x)dx > 0$ ise (14) eşitsizliği

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq M$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece

$$\mu = \frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

denirse $\mu \in [a,b]$ ve μ'nün bu değeri için (12) elde edilir.

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

b-) f fonksiyonu $[a,b]$'de sürekli olduğundan $[m,M]$ 'deki her değeri alır. Bu demektir ki $f(c)=\mu$ olacak şekilde $c\in[a,b]$ vardır. Bu değer (12)'de yerine yazılırsa (13) elde edilir.

Eğer (12)'de özel olarak $\forall x\in[a,b]$ için $g(x)=1$ alınırsa

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

bulunur. Buna f'nin $[a,b]$ aralığındaki **ortalama değeri veya varyansı** denir.

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

Teorem 8.5.4 (İntegraller İçin 2. Ortalama Değer Teoremi). $f,\varphi:[a,b]\to R$ integrallenebilir olsun. Eğer $\forall x \in [a,b]$ için $\varphi(x)\geq 0$, f sınırlı ve $m \leq \inf f \leq \sup f \leq M$ ise bu taktirde

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = m\int_a^c \varphi(x)\,dx + M\int_c^b \varphi(x)\,dx \qquad \textbf{(15)}$$

olacak biçimde bir $c \in [a,b]$ vardır.

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

İspat. $\phi:[a,b]\to R,\quad \phi(x)=m\int_a^x \varphi(t)\,dt+M\int_x^b \varphi(t)\,dt$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\min\phi\le\phi(b)=m\int_a^b\varphi(t)\,dt\le\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt\le M\int_a^b\varphi(t)\,dt=\phi(a)\le \text{maks}\phi$$

olduğu açıktır. Öte yandan ϕ, Teorem 8.5.2 nedeniyle süreklidir ve dolayısıyla $\min\phi$ ile $\text{maks}\phi$ arasındaki her değeri alır. Şu halde bir $c\in[a,b]$ için

$$\phi(c)=\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

bulunur. Bu da (15) eşitliğini verir.

Eğer bu teoremin şartları altında f azalan ise $M=f(a)$, $m=f(b)$ olacağından (15)'den

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(b)\int_a^c\varphi(x)\,dx+f(a)\int_c^b\varphi(x)\,dx$$

ve artan ise m=f(a) ve M=f(b) olacağından

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(a)\int_a^c\varphi(x)\,dx+f(b)\int_c^b\varphi(x)\,dx$$

eşitliği elde edilir.

İntegraller için Ortalama Değer Teoremi

Örnek 7. Birinci ortalama değer teoremini uygulayarak

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} x^2 \, dx \leq \frac{e}{3}$$

eşitsizliğini gösteriniz.

Çözüm.

$$\int_0^1 e^{x^2} x^2 dx = e^{c^2} \int_0^1 x^2 \, dx = e^{c^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{e^{c^2}}{3}$$

olacak şekilde $c \in [0,1]$ vardır. Böylece $\frac{1}{3} \leq \frac{e^{c^2}}{3} \leq \frac{e}{3}$ eşitsizliğinden istenen elde edilir.

Örnek 8. Eğer $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in [a,b]$ için $\int_a^x f(t)dt = 0$ ise $f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Keyfi bir $x_0 \in [a,b]$ seçelim ve $x_0 \leq x$ alalım. Bu durumda Teorem 8.5.3'den

$$(x - x_0) f(c) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\, dt = 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

olacak biçimde $x_0 < c < x$ vardır. $x \to x_0^+$ için limite geçilirse $c \to x_0^+$ olduğu göz önüne alınarak $f(c) \to 0 = f(x_0)$ bulunur, zira f süreklidir.

Uygulama

1. $[a,b]$ aralığı 2^n parçaya bölündüğüne göre bu aralığın düzgün parçalanmasını bulunuz.

2. $[-1,4]$ aralığı n eşit parçaya bölünmüş olsun. w_i $(i=1,2,\cdots,n)$ alt aralıkların orta noktası olduğuna göre $f(x)=x+1$ fonksiyonunun bu parçalanmaya karşılık gelen Riemann toplamını bulunuz.

3. $[0,1]$ aralığı n eşit parçaya bölündüğüne göre $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun bu parçalanmaya karşılık gelen Alt ve Üst Darboux toplamlarını bulunuz.

4. $[1,2]$ aralığı uzunlukları geometrik dizi teşkil edecek şekilde n parçaya bölünmüş olsun. $f(x)=x^4$ fonksiyonunun bu parçalanmaya karşılık Alt ve Üst Darboux toplamlarını bulunuz.

5. Riemann toplamının limitini kullanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a-) $\int_0^1 x^2 dx$

b-) $\int_a^b x^2 dx \ (0<a<b)$

c-) $\int_1^{10} (x+1)dx$

ç-) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$

d-) $\int_0^1 a^x dx \ (a>0)$

e-) $\int_4^8 \frac{dx}{x^2}$

Uygulama

6. $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $[0,3]$ aralığının bir parçalanması ve $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,\cdots,n)$ keyfi bir nokta olsun. Hangi $\delta > 0$ sayısı için $\|P\| < \delta$ eşitsizliğinden

$$\left| \int_0^3 \sin 50x\, dx - \sum_{k=0}^{n-1} \sin 50\xi_k \Delta x_k \right| < 0{,}001$$

eşitsizliği elde edilir. Gösteriniz.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$ limitini hesaplayınız.

11. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a-) $e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1$

b-) $\pi/4 \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx \le \pi\sqrt{6}/8$

c-) $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} \le \int_0^1 \dfrac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}} \le \dfrac{1}{10}$

ç-) $\left| \int_{12}^{18} \dfrac{\cos^2 x}{1 + x^8} dx \right| < \dfrac{1}{10^7}$

d-) $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} < \int_0^1 \dfrac{x^n dx}{\sqrt{1+x}} < \dfrac{1}{n+1}$

e-) $\dfrac{20\sqrt{2}}{21} \le \int_0^2 \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \le \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

f-) $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x \quad (x \ge 0)$

Uygulama

13. Aşağıdaki fonksiyonların gösterilen aralıklarda ortalama değerini bulunuz.

a-) $f(x) = x^2, \quad [0,1]$

b-) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x, \quad [0,2\pi]$