Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Fonksiyonlar
Yardımcı kavramlar

Tanım 2.1.1. x ve y iki nesne olmak üzere $\{\{x\},\{x,y\}\}$ kümesine (x,y) **sıralı ikilisi** veya **çifti** ve x,y' ye sırasıyla **birinci ve ikinci bileşen** denir.

Teorem 2.1.2. (a,b) ve (x,y) iki sıralı çift olsun. Bu taktirde

$$(a,b)=(x,y) \Leftrightarrow a = x \text{ ve } b = y .$$

İspat.

$$(a,b) = (x,y) \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\} \Leftrightarrow \{a\}=\{x\} \text{ ve } \{a,b\}=\{x,y\}$$

veya $\{a\}=\{x,y\}$ ve $\{a,b\}=\{x\} \Leftrightarrow a = x, b = y$.

Tanım 2.1.3. X ve Y kümeleri verilmiş olsun. Bu taktirde

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ile Y' nin **kartezyen çarpımı** denir. Bu kümenin boş olmayan herhangi bir alt kümesine X den Y' ye **ikili bağıntı** ve X den X' e olan ikili bağıntıya da X' de bir **bağıntı** adı verilir.

Fonksiyonlar
Yardımcı kavramlar

Örnek 1. $X=\{1,2,3\}$ ve $Y=\{a,b\}$ olduğuna göre $X\times Y$ ve $X\times X$ kümelerini bulunuz.

Örnek 2. A,B ve C kümeleri için $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 3. $X=\{0,1,2,3\}$ olmak üzere β bağıntısı $\beta=\{(x,y):x<y\}$ ile tanımlanıyor.
β bağıntısını sıralı ikililerin kümesi olarak yazarak dik koordinat sisteminde gösteriniz.

Fonksiyonlar
Fonksiyon Tanımı

Tanım 2.1.4. X ve Y boş olmayan iki küme olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan X'den Y'ye her f bağıntısına X'den Y'ye bir **fonksiyon*** denir:

(i) $\forall x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

(ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$ dir.

X' den Y' ye olan f fonksiyonu $f : X \to Y$ veya $X \xrightarrow{f} Y$ ile gösterilir. Buradaki X ve Y'ye sırasıyla f nin **tanım** ve **değer kümesi** adı verilir.

---

* "Fonksiyon" sözünü ilk defa 1692 yılında Alman Matematikçisi Q.V. Leibnitz (1648-1716) kullanmış ve 1718 yılında öğrencisi I. Bernoulli tanımlamıştır. I. Bernoulli'nin öğrencisi olan L.Euler (1707-1783), 1748 yılında bu kavramı latince kelime olan functio kelimesinin ilk harfini alarak y=f(x) biçiminde göstermiştir.

Bu tanımdaki (i) şartı X tanım kümesindeki her elemanın Y değer kümesinin bir elemanına eşlendiğini ve (ii) şartı ise X kümesindeki herhangi bir elemanın Y' de farklı iki elemana eşlenemeyeceğini ifade etmektedir. Bundan sonra $(x,y) \in f$ yerine $y=f(x)$ yazacağız. Bu durumda f'nin tanımlı olabilmesi için X'in her x elemanını Y'nin bir y elemanına eşleyen kuralın yani $y=f(x)$ eşitliğinin bilinmesi gerekir. Bu halde x elemanına bağımsız değişken ve y elemanına ise bağımlı değişken veya x'in f altındaki görüntüsü denir.

Fonksiyonlar

Örnek 4. $X=\{x,y,z\}$ ve $Y=\{p,q\}$ olsun. X 'den Y 'ye olan aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını inceleyiniz.

a) $f_1=\{(x,p),(x,q),(y,p),(z,q)\}$

b) $f_2=\{(x,p),(y,p),(z,p)\}$

c) $f_3=\{(x,p),(y,p),(z,q)\}$

a) $f_4=\{(x,p),(y,q)\}$

Fonksiyonlar

Tanım 2.1.5. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde

$$G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

kümesine f' nin **grafiği** veya **eğrisi** adı verilir.

Tanım 2.1.6. $f : X \to Y$ ve $g : X \to Y$ iki fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $f(x)=g(x)$, yani bu fonksiyonların eğrileri aynı ise bu taktirde f ile g ye **eşit fonksiyonlar** denir ve **f=g** ile gösterilir.

Örnek 5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 27$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x-3)(x^2+3x+9)$ fonksiyonları eşittir. Çünkü $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ dur.

Örnek 6. $f, g : \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2-3}$ ve $g(x) = \dfrac{3}{x+\sqrt{x^2-3}}$ fonksiyonları eşittir. Çünkü tanım kümesindeki her x elemanı için

$$f(x) = x - \sqrt{x^2-3} = \frac{\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-3}\right)} = \frac{3}{x+\sqrt{x^2-3}} = g(x) \text{ dir.}$$

Fonksiyonlar

Tanım 2.1.7. $f, g : X \to Y$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda her $x \in X$ için

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

şeklinde tanımlanan $f+g$, $f-g$, $f.g : R \to R$ fonksiyonlarına sırasıyla f ile g' nin **toplamı, farkı** ve **çarpımı** denir. Ayrıca $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ biçiminde tanımlı $f/g : X \setminus \{x : g(x) = 0\} \to R$ fonksiyona ise f'nin g'ye bölümü adı verilir. Çarpım fonksiyonu nedeniyle $m \in R$ sabiti için $(m.f)(x) = m.f(x)$ dir,

Örnek 7. $f, g : R \to R$ fonksiyonları $f(x) = x^3 + 2x$ ve $g(x) = x^3$ olduğuna göre

$$f+g : R \to R, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x^3 + 2x$$
$$f-g : R \to R, \ (f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x$$
$$f.g : R \to R, \ (f.g)(x) = f(x).g(x) = x^6 + 2x^4$$
$$f/g : R \quad \{0\} \to R, \ (f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x^3 + 2x)/x^3$$
$$(5.f)(x) = 5.f(x) = 5x^3 + 10x$$

bulunur.

Fonksiyonlar

Tanım 2.1.8. $f : X \to Y$ bir fonksiyon , $A \subset X$ ve $B \subset Y$ olsun.

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\} \text{ ve } f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

kümelerine sırasıyla A'nın f altındaki **görüntüsü** ve B'nin f altındaki **ters görüntüsü** denir.

Örnek 8. $f(x) = x^3$ olmak üzere $f : R \to R$ fonksiyonu verilsin. X={-2,-1,0,1,2} ve Y={0,8,1,27} olduğuna göre f(X)={-8,-1,0,1,8} ve $f^{-1}(Y) = \{0,1,2,3\}$ elde edilir.

Fonksiyonlar
Bazı Önemli Teoremler

Teorem 2.1.9. $f : X \to Y$ ve $E, F \subset Y$ olsun. Bu taktirde

(i) $E \subset F$ ise $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$

(ii) $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$

(iii) $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$

(iv) $f^{-1}(E \backslash F) = f^{-1}(E) \backslash f^{-1}(F)$

(v) $f^{-1}(E^T) = [\, f^{-1}(E)\,]^T$,

(vi) $f^{-1}(\phi) = \phi$,

ve daha genel olarak k=1,2,... için $E_k \subset Y$ olmak üzere

(vii) $f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(E_k)$ ve $f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}(E_k)$

dır.

İSPAT?

Fonksiyonlar
Bazı Önemli Teoremler

Teorem 2.1.10. $f : X \to Y$ ve $A, B \subset X$ olsun. Bu taktirde

(i) $A \neq \phi$ ise $f(A) \neq \phi$

(ii) Her $x \in X$ için $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

(iii) $A \subset B$ ise $f(A) \subset f(B)$, $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

(iv) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

ve daha genel olarak $k=1,2,\ldots$ için $A_k \subset X$ olmak üzere

(v) $f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(A_k)$, $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(A_k)$

dır.

İSPAT?

Fonksiyonlar
Çözümlü Örnekler

Örnek 9. $f(x)=x^2$ olduğuna göre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=?$

Çözüm. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=\dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a}=b+a \quad (b\neq a).$

Örnek 10. $x\in R$ için $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ ise f(0) ve f(a+1)=?

Çözüm. $f(0)=\sqrt{0^2-5.0+4}=\sqrt{4}=2$

$f(a+1)=\sqrt{(a+1)^2-5(a+1)+4}=\sqrt{a^2-3a}$ olur. Fakat köklü ifadenin tanımlı olabilmesi için $a^2-3a\geq 0$ yani $a\leq 0$ veya $a\geq 3$ olmalıdır.

Örnek 11. $f(x)=x^2-2x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}$ olduğuna göre $f(\dfrac{1}{x})=f(x)$ eşitliğini sağlayınız.

Çözüm. Fonksiyonda x yerine 1/x yazılırsa ,

$$f(\frac{1}{x})=\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}-\frac{2}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+x^2-2x=f(x)$$

elde edilir.

Fonksiyonlar Çözümlü Örnekler

Örnek 12. $f(x)=a.x$ $(a \neq 0)$ ve $f(x)=1/x$ fonksiyonları veriliyor. $f(z)=f(x)+f(y)$ eşitliği sağlandığına göre z değerini hesap ediniz.

Çözüm. Önce $f(x)=ax$ olsun. $f(z)=f(x)+f(y) \Leftrightarrow az=ax+ay \Leftrightarrow z=x+y$ bulunur.

$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ ise } f(z)=f(x)+f(y)$$

eşitliğinden

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Rightarrow z=\frac{xy}{x+y} \quad (x \neq -y)$$

dır.

Örnek 13. $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$ ise $f(x)=$?

Çözüm. $z=\frac{1}{x}$ dersek $x=\frac{1}{z}$ olur. Buna göre

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{z}\right)^2}=\frac{1}{z}+\frac{\sqrt{1+z^2}}{|z|}=\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \quad (z>0)$$

dır. z yerine x alınırsa

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$$

elde edilir.

Fonksiyonlar
Çözümlü Örnekler

Örnek 14. $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm. f' nin tanımlı olabilmesi için $2x-1\neq 0$ yani $x\neq\dfrac{1}{2}$ olmalıdır. Şu halde tanım kümesini X ile gösterirsek $X=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ bulunur.

Örnek 15. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm. Her $x\in R$ için $x-|x|\leq 0$ olduğundan fonksiyon hiçbir noktada tanımlı değildir. O halde tanım kümesi ϕ dir.

Örnek 16. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm. Her $a\in R$ için $\sqrt[3]{a}$ ifadesi tanımlı olduğuna göre kökün içini tanımlı yapan noktaların kümesi fonksiyonun tanım kümesini oluşturacaktır. $\sqrt{x}$ in $x\geq 0$ tanımlı ve x=0 , x=1 için kesrin paydasındaki $x^2-\sqrt{x}=0$ olduğundan $x>0$ ve $x\neq 1$ olmalıdır. Dolayısıyla X tanım kümesi $X=(0;\infty)\backslash\{1\}$ elde edilir.

Fonksiyonlar
Çözümlü Örnekler

√ **Örnek 17.** $f(x)=(3x)!$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm. $(3x)!$ ifadesinin tanımlı olması için $(3x)$ negatif olmayan bir tamsayı olmalıdır. Yani $3x = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ denklemini sağlayan x noktalarının kümesi tanım kümesini meydana getirir. Şu halde

$$X=\{ x=n/3 : n=0,1,2,\ldots \} = \{ 0, 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, \ldots \}$$

dır.

Örnek 18. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ fonksiyonunun değer kümesini bulunuz.

Çözüm. $f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$ şeklinde yazalım. $\forall x \in R$ için $(x-3)^2 \geq 0$ olduğundan $f(x) \geq -4$ elde edilir. Şu halde Y değer kümesi $Y = [-4, +\infty)$ olur.

Örnek 19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ fonksiyonunun değer kümesini bulunuz.

Çözüm. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = y$ diyelim. Bu eşitlikten x' i çekersek $x = \pm\sqrt{\dfrac{4y-1}{y-1}}$ bulunur. Bu durumda $x \in R$ olması için $\dfrac{4y-1}{y-1} \geq 0$ olmalıdır. Bu eşitsizlik $y \leq \dfrac{1}{4}$ veya $y > 1$ için sağlandığına göre $Y = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right] \cup (1, +\infty)$ bulunur.

Fonksiyonlar
Reel Değerli Fonksiyonlar

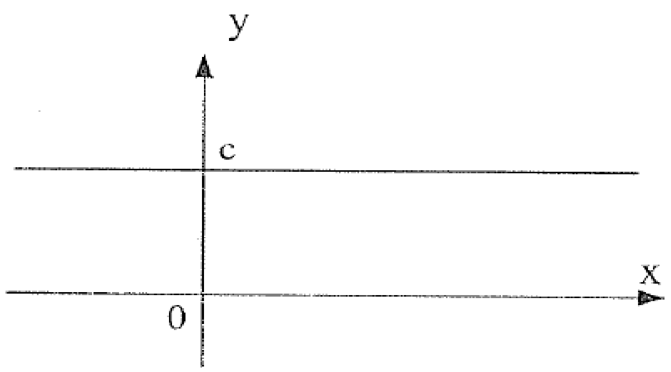
Tanım 2.3.1. $f : X \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $X \subset R$ ise f'ye **reel değişkenli** ve $Y \subset R$ ise **reel değerli fonksiyon** adı verilir.

Örnek 20. $X \subset R$ ve $f : X \to R$ verilmiş olsun. $c \in R$ olmak üzere , eğer her $x \in R$ için $f(x)=c$ ise f reel degişkenli ve reel değerli bir fonksiyon olur. Bu fonksiyona sabit fonksiyon denir. Özel olarak $f(x)=0$'e sıfır fonksiyonu adı verilir.

Fonksiyonun grafiği

$$G(f)= \{ (x, f(x)) : x\in R \} = \{ (x,c) : x \in R \}$$

olduğuna göre



dır, yani y-eksenini (0,c) noktasında kesen ve x-eksenine paralel olan doğrudur.

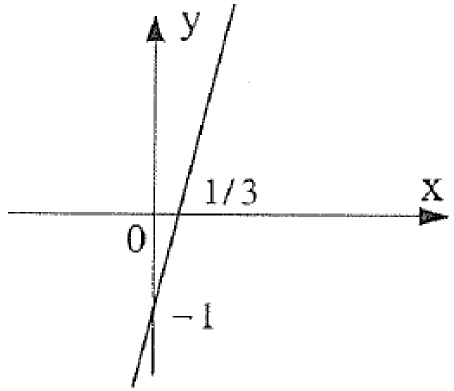
Fonksiyonlar
Örten fonksiyon

Tanım 2.3.2. $f : X \to Y$ fonksiyonu için $f(X)=Y$, yani $\forall y \in Y$ için $f(x)=y$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, f' ye **örten** ve aksi halde **içine** fonksiyon adı verilir.

Örnek 21. $f(x) = 3x - 1$ ile tanımlı $f : R \to R$ fonksiyonu örtendir. Çünkü

$$f(R) = \{ f(x) : x \in R \} = \{ 3x - 1 : x \in R \} = R$$

dir. Bu fonksiyonun grafiği ise



olur.

Fonksiyonlar
Örten fonksiyon

Örnek 22. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun örten olmayıp içine fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Fonksiyonlar
Bire-bir fonksiyon

Tanım 2.3.3. $f: X \to Y$ ve $x_1, x_2 \in X$ olsun. Eğer $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (veya buna denk olarak $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$) ise bu taktirde f' ye **bire-bir fonksiyon** denir.

Örnek 23. f(x)=2x+1 ile tanımlı $f: R \to R$ fonksiyonu bire-birdir. Zira, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

Örnek 24. $f(x) = x^2 - 4x + 8$ ile tanımlı $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu örten değildir. Çünkü,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 - 4x + 8 = y^2 - 4y + 8 \Rightarrow (x-2)^2 + 4 = (y-2)^2 + 4$$

$$\Rightarrow x - 2 = y - 2 \text{ veya } x - 2 = -(y-2) \Rightarrow x = y \text{ veya } x = 4 - y$$

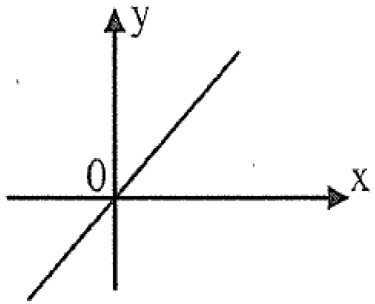
Yani $f(x) = f(y)$ iken $x = y$ olmak zorunda değildir.

Bire-bir ve örten fonksiyona birebir örten fonksiyon adı verilir.

Fonksiyonlar
Birim Fonksiyon

Örnek 25. f(x)=4x+13 ile tanımlı $f : R \rightarrow R$ fonksiyonu bire bir ve örtendir. Çünkü, $\forall y \in R$ için y=4x+13 ise $x = \dfrac{y-13}{4} \in R$ ve $f(x) = f\left(\dfrac{y-13}{4}\right) = y$ bulunur ki, bu f' nin örten olması demektir. Bire bir olduğu ise örnek 23' deki gibi gösterilir.

Örnek 26. $A \subset R$ olmak üzere $I_A(x) = x$ biçiminde tanımlı $I_A : A \rightarrow A$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Bu fonksiyona **birim** veya **özdeşlik fonksiyonu** adı verilir. Grafiği ise aşağıdaki gibidir.



I_R 'nin grafiği

Fonksiyonlar
Kısıtlama

Tanım 2.3.4. $A \subset C$ olmak üzere $f : A \to B$ ve $g : C \to D$ fonksiyonları verilmiş olsun . Eğer $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ eşitliği sağlanıyorsa, f'ye g'nin A ya **kısıtlaması** denir ve $f = g|_A$ ile ifade edilir ve g'ye ise f'nin C ye genişlemesi adı verilir.

Örnek 27.

$$g(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0 \\ 2x - 1, & 0 < x \le 3 \\ 7, & 3 < x \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $g : R \to R$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $A = (0,3]$ olmak üzere $f : A \to R$, $f(x) = 2x-1$ fonksiyonu g'nin A ya kısıtlamasıdır.

Fonksiyonlar
Mutlak Değer Fonksiyonu

Örnek 28. $X \subset R$ ve $f : X \to R$ olsun. Bu durumda

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f nin **mutlak değer fonksiyonu** adı verilir.

Örnek 29. $f : R \to R, f(x) = 2x - 1$ olduğuna göre, $|f|$ fonksiyonunu bulunuz ve sonra f ile $|f|$ nin grafiğini çiziniz.

Örnek 30. $f : R \to R, f(x) = |1 - |x||$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Örnek 31. $y = f(x) = \sqrt{|x|}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Fonksiyonlar
Tam Kısım fonksiyonu - (Taban fonk.)

Tanım 2.4.1. $X \subset R$ olmak üzere $f(x) = \|x\|$ biçiminde tanımlanan $f : X \to R$ fonksiyonuna **tam kısım fonksiyonu** adı verilir. Burada $\|x\|$, x sayısından büyük olmayan en büyük tamsayıdır. Aynı zamanda $\|x\| \leq x < \|x\| + 1$ dır.

Örnek 32. $f : [-2,2] \to R, f(x) = \dfrac{1}{\|x\| + 3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Tam Kısım fonksiyonu, taban fonksiyonu olarak da isimlendirilir.

Sembolü $\|\;\|$ veya $\lfloor\;\rfloor$ olarak gösterilir.

Yani, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

Fonksiyonlar
Tam Kısım fonksiyonu (Tavan fonk.)

Tavan fonksiyonunun sembolü $\lceil \ \rceil$ olarak gösterilir.

Yani, $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$

Bir önceki slayttaki soruyu tavan fonksiyonu ile değiştirip çözelim..

Fonksiyonlar
İşaret fonksiyonu

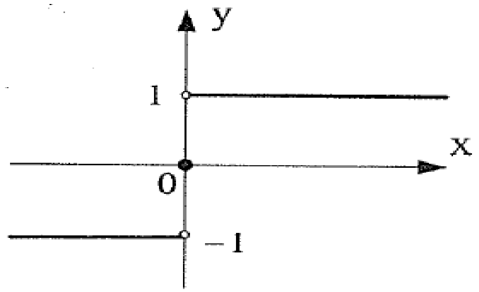
Tanım 2.4.2 $X \subset R$ olmak üzere $f : X \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \text{ ise} \\ 0 \quad , & f(x) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı g fonksiyonuna f nin **işaret fonksiyonu** denir ve **sgnf** yazılır. Bu tanımdaki mutlak değer kavramı dikkate alınırsa

$$\operatorname{sgnf}(x) = \begin{cases} -1, & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ 1, & f(x) > 0 \end{cases}$$

olur. Bunun grafiği ise



dır.

Örnek 33. $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $f : [-6.+6] \to R$ olduğuna göre, sgnf fonksiyonu bulup grafiğini çiziniz.

Fonksiyonlar
Heaviside adım fonksiyonu

Heaviside adım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Heaviside fonksiyonun $x = 0$ 'daki değeri uygulamaya göre seçilebilir.

Örneğin sinyal işleme için genellikle 1/2 seçilir.

Kullanım: Sistemlerin açılıp kapanması, sinyalin başlama anı, diferansiyel denklem çözümlerinde ani değişimleri modellemek.

İşaret fonksiyonu (signum) mutlak değer fonksiyonu ile ilişkilidir: $|x| = x \operatorname{sgn} x$

Heaviside adım fonksiyonu ile işaret fonksiyonu arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$\operatorname{sgn} x = 2H(x) - 1 \quad (x \neq 0)$

Fonksiyonlar
Sınırlı ve Sınırsız fonksiyonlar

Tanım 2.5.1. $A \subset R$ ve $f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun.

(a) Eğer $\forall x \in A$ için $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa f'ye A kümesinde **üstten sınırlı**,

(b) Eğer $\forall\ x \in A$ için $f(x) \geq m$ olacak şekilde bir m sayısı varsa f'ye A kümesinde **alttan sınırlıdır** denir.

(c) Tanım kümesinde alttan ve üstten sınırlı olan fonksiyona kısaca **sınırlı fonksiyon** ve sınırlı olmayan fonksiyona da **sınırsız fonksiyon** denir. Buna göre, f fonksiyonunun sınırlı olması, $\forall x \in A$ için $|f(x)| \leq C$ olacak şekilde bir C sayısının mevcut olması anlamına gelir. Bu durumda

$$\sup_A \{f(x)\} = \sup\{f(x) : x \in A\} \text{ ve } \inf_A \{f(x)\} = \inf\{f(x) : x \in A\}$$

sayılarına sırasıyla **f' nin supremumu** ve **infimumu** adı verilir.

Fonksiyonlar
Sınırlı ve Sınırsız fonksiyonlar

Örnek 34. $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$

şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon R üzerinde sınırlıdır, çünkü $\forall x \in R$ için

$$0 \leq \frac{2x^2}{1+x^2} \leq 2$$

dir. Ayrıca $\inf_R \{f(x)\} = 0$ ve $\sup_R \{f(x)\} = 2$ dir.

Örnek 35. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonunun $A = [0, \infty)$ kümesinde sınırlı olduğunu gösterip infimumunu ve supremumunu bulunuz.

Fonksiyonlar
Sınırlı ve Sınırsız fonksiyonlar

Örnek 36. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun $A=(0,1)$ aralığında sınırsız olduğunu gösteriniz.

Örnek 37. $A\subset R$ ve $f: A\to R$ olsun. Eğer f üstten sınırlı ise bu taktirde

$$\inf_A\{-f(x)\}=-\sup_A\{f(x)\}$$

olduğunu gösteriniz.

Fonksiyonlar
Monoton fonksiyonlar

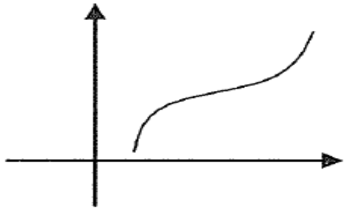
Tanım 2.6.1. $X \subset R$ ve $f : X \to R$ verilsin. $A \subset X$ alalım. Eğer $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in A$ için

$$f(x_1) < f(x_2),\ f(x_1) \le f(x_2),\ f(x_1) > f(x_2) \text{ ve } f(x_1) \ge f(x_2)$$

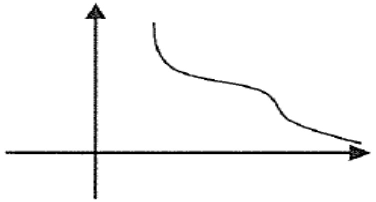
eşitsizlikleri sağlanıyorsa f' ye A kümesi üzerinde sırasıyla **artan, azalmayan, azalan** ve **artmayan fonksiyon** adı verilir.

Eğer fonksiyon tanım kümesinin tamamı üzerinde artan veya azalan ise bu fonksiyona **kesin monotondur**, artmayan veya azalmayan ise **monotondur** denir. Bununla birlikte tanım kümesi, fonksiyonun monoton olduğu sonlu çoklukta alt aralıklara ayrılabiliyorsa böyle fonksiyonlara **parçalı monotondur** denir.

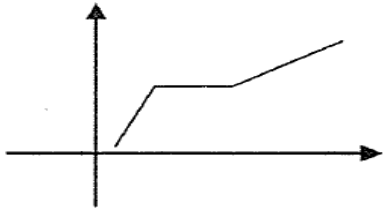
Bu fonksiyonlara ilişkin grafikler aşağıda gösterilmiştir.



Artan Fonksiyon



Azalan Fonksiyon



Azalmayan Fonksiyon

Fonksiyonlar
Monoton fonksiyonlar

Örnek 38. $f: R \to R, f(x) = x^3$ fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz.

Örnek 39. $f: R \to R, f(x) = x^2$ fonksiyonunun parçalı monoton olduğunu gösteriniz.

Monoton olmayan fonksiyonların bulunabileceği gibi parçalı monoton olmayan fonksiyonlar da vardır. Buna aşağıdaki Dirichlet fonksiyonunu örnek gösterebiliriz.

Örnek 40.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f: R \to R$ fonksiyonu monoton olmadığı gibi parçalı monoton da değildir.

Dirichlet Fonksiyonu

Fonksiyonlar
Bileşke Fonksiyon

Tanım 2.7.1. $f : X \to Y$ ve $\varphi : Y \to T$ fonksiyonları verilsin. Bu durumda φ fonksiyonu $f(X)$ görüntü kümesindeki her bir $f(x)$ elemanını T kümesinin bir $u = \varphi(f(x))$ elemanına eşler. Böylece X'in her bir x elemanı T' nin bir u elemanına eşleyen bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona f ile φ' nin **bileşkesi** denir ve $\boldsymbol{\varphi o f}$ ile gösterilir.

Örnek 41. $f(x) = x + 2$, $f : R \to R$ ile $\varphi(x) = x^2$, $\varphi : R \to R$ fonksiyonları veriliyor.

a) $fo\varphi$ fonksiyonunu ve $(fo\varphi)(R)$ kümesini bulunuz.

b) $(fo\varphi)([0,3])$ kümesini bulunuz.

Örnek 42. $f(x)=3x+4$ ve $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonlarının tanım kümelerini dikkate alarak, fog ve gof fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

Örnek 43. $g(x)=3x^2+6$ ve $(fog)(x) = 6x^2 - 3$ olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.

Fonksiyonlar
Ters fonksiyon

Tanım 2.8.1. $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer $gof = I_X$ ve $fog = I_Y$ ise bu taktirde f ve g fonksiyonlarına **birbirinin tersi** denir ve f'nin tersi $\mathbf{f^{-1}}$ ile gösterilir.

Bu durumda $f^{-1} = g$ ve $g^{-1} = f$ yani $f^{-1}of = I_X$ ve $fof^{-1} = I_Y$ olur. Ayrıca, f' nin tersi tektir. Çünkü, f_1 ve f_2 gibi iki farklı ters fonksiyonu mevcut olsaydı, $fof_1 = I_Y$ ve $fof_2 = I_Y$ eşitlikleri nedeniyle $fof_1 = fof_2$ bulunurdu. Buradan da,

$$f_1o(fof_1) = f_1o(fof_2) \Rightarrow (f_1of)of_1 = (f_1of)of_2$$
$$\Rightarrow I_Xof_1 = I_Xof_2 \Rightarrow f_1 = f_2$$

elde edilirdi ki, bu da f_1 ve f_2'nin farklı oluşu ile çelişirdi.

f ve g fonksiyonları birbirinin tersi olduğunda bunların grafikleri y= x doğrusuna göre simetriktir. Çünkü, (x,y), f' nin grafiği üzerinde ise y=f(x) olacağından g(y)=x elde edilir, yani (y,x)=(y,g(y)) noktası g' nin grafiği üzerindedir ve böylece (x,y) ile (y,x) noktaları y=x doğrusuna göre simetrik noktalardır.

Fonksiyonlar
Ters fonksiyon

Teorem 2.8.2. f : X → Y fonksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, f'nin tersinin mevcut olması için gerek ve yeter şart f' nin bire-bir ve örten olmasıdır.

İSPAT?

Fonksiyonlar
Ters fonksiyon

Örnek 44. $f(x)=5x+2, f:R\to R$ fonksiyonunun f^{-1} tersini bulunuz ve f ile f^{-1}' nin grafiklerini çiziniz.

Örnek 45. $f(x)=1$, $g(x)=\|x\|$ olmak üzere $f,g:R\to R$ fonksiyonlarının tersi yoktur. Zira ne bire-bir ne de örtendir.

Ayrıca R üzerinde tanımlanan Dirichlet fonksiyonu bire-bir ve örten olmadığından tersi yoktur.

Örnek 46. $f(x)=x^2-4x+2$,$f:R\to R$ fonksiyonunun tersinin mevcut olmadığını fakat f' nin tanım ve değer kümelerinin sırasıyla $(-\infty,2]$ ve $[-2,+\infty)$ aralıklarına kısıtlanması durumunda f^{-1} in mevcut olduğunu gösterip grafiklerini çiziniz.

Fonksiyonlar
Tek ve Çift fonksiyon

Tanım 2.9.1. $X \subset R$ kümesi verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $-x \in X$ ise X kümesine orijin noktasına göre **simetriktir** denir.

Örneğin, bütün reel sayılar kümesi, $[-2,2]$ aralığı ve $X = [-3,-2] \cup [2,3]$ kümesi O orijin noktasına göre simetriktir.

Tanım 2.9.2. X simetrik bir küme ve $f : X \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$f(x) = f(-x) \text{ ve } f(-x) = -f(x)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, f'ye X kümesi üzerinde sırasıyla **çift** ve **tek fonksiyon** adı verilir.

M(x,f(x)) noktası f' nin grafiği üzerinde olması durumunda M*(-x, f(-x)) noktası da grafik üzerinde olur. f çift fonksiyon ise M*(-x,f(-x))=M*(-x,f(x)) ve bu durumda, M ile M* noktalarının y-eksenine göre simetrik olduğu düşünülürse çift fonksiyonun grafiğinin de y-eksenine göre simetrik olduğu görülür. Benzer olarak, f' nin tek fonksiyon olması durumunda M*(-x,f(-x))=M*(-x,-f(x)) ve M ile M*' ın O(0,0) noktasına göre simetrik olması nedeniyle f'nin grafiği de orijin noktasına göre simetrik olur.

Fonksiyonlar
Tek ve Çift fonksiyon

Örnek 47. $f(x)=\sqrt{|x|}$, $g(x)=x^4+1$, $h(x)=x^3$ olmak üzere $f,g,h:R\to R$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. $\forall x\in R$

$$f(-x)=(\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x),$$

$$g(-x)=(-x)^4+1=x^4+1=g(x),$$

$$h(-x)=(-x)^3=-x^3=-h(x)$$

olduğundan, f ile g çift ve h tek fonksiyondur.

Örnek 48. y=f(x) , $f:R\to R$ olmak üzere , $g,h:R\to R$ fonksiyonları

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ ve } h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

eşitlikleri ile tanımlanıyor. Bu taktirde g' nin çift ve h' nın tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Fonksiyonlar
Tek ve Çift fonksiyon - özellikler

$$X \subset R \text{ ve } f, g : X \to R$$

verilmiş olsun. Bu taktirde

i) Eğer f ve g çift (tek) fonksiyon ise f+g çift (tek) fonksiyondur.

ii) Eğer f ve g çift veya tek fonksiyon ise f.g çift fonksiyondur, f tek ve g çift fonksiyon ise f.g tek fonksiyondur.

iii) Eğer f ve g tek fonksiyon ise fog tek fonksiyondur.

iv) Eğer f çift ve g tek fonksiyon ise fog çift , g çift fonksiyon ise fog çift fonksiyondur.

Tek ve çift fonksiyonların tanım kümelerinin mutlaka simetrik olması gerekir. Aksi halde bu fonksiyonlardan söz etmek yanlış olur. Örneğin, $f(x) = x^2$, $f : [0, \infty) \to R$ 'nun çift fonksiyon olması söz konusu değildir. Tanım kümesinin simetrik olması tek veya çift fonksiyonlar için gerek şarttır, fakat yeter şart değildir. Örneğin, f(x)=3x+1, $f : R \to R$ fonksiyonu ne çifttir ne de tektir.

Fonksiyonlar
Tek ve Çift fonksiyon - özellikler

Teorem 2.9.3. Simetrik küme üzerinde tanımlı her f fonksiyonu tek ve çift fonksiyonların toplamı olarak tek türlü yazılabilir.

İSPAT?

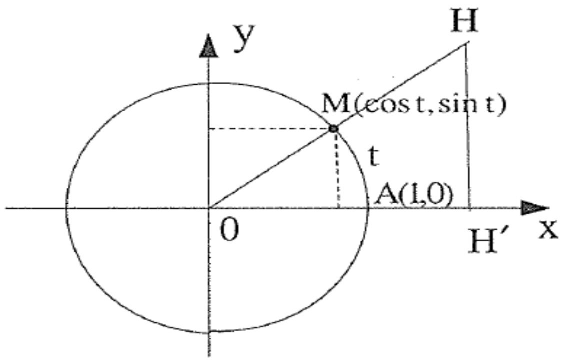
Fonksiyonlar
Trigonometrik fonksiyonlar - Radyan

Tanım 2.10.1. Birim çemberde verilen bir açıya karşılık gelen yayın uzunluğuna bu açının **radyan** ölçüsü denir. Buna göre, $360^{o} = 2\pi$ radyan olacağından

$$1 \text{ radyan} = \frac{360 \text{ derece}}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \text{ derece}$$

bulunur.

Şimdi merkezi O(0,0) olan aşağıdaki birim çemberi çizelim.



Çember üzerinde A noktasından başlayarak $|t|$ birim ilerleyelim. Bu ilerleme $t > 0$ olması durumunda saat yönünün tersi ve $t < 0$ olması durumunda ise saat yönünde olsun. Bu taktirde çember üzerinde elde edilen M noktasının **apsisi cost** ve **ordinatı sint** ile tanımlanır. Benzer üçgenlerin özelliklerinden dolayı herhangi bir dik üçgende

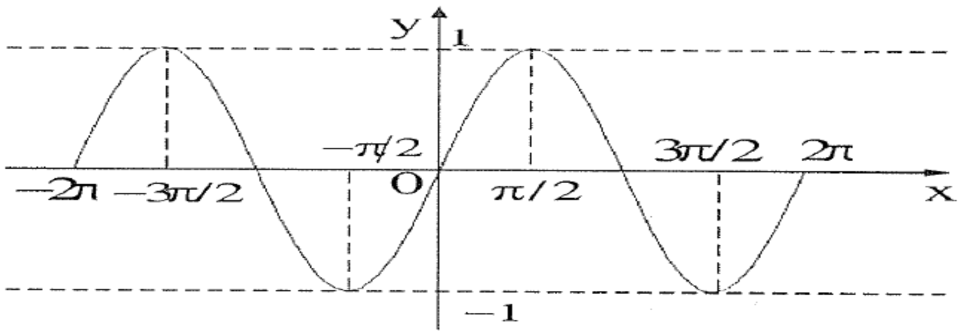
$$\cos t = \frac{|OH'|}{|OH|} \text{ ve } \sin t = \frac{|HH'|}{|OH|}$$

yazılabilir.

Bu fonksiyonlar reel değişkenlerin bir fonksiyonu olarak göz önüne alındığında değişkenlerin radyan ölçü birimi olarak alınması kısalık açısından daha uygun olur.

Fonksiyonlar
Trigonometrik fonksiyonlar - Sinus

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanım kümeleri $(-\infty,\infty)$ aralığı fakat değer kümeleri ise birim çember nedeniyle $[-1,1]$ aralığıdır. Bununla birlikte sinüs fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in Z)$ aralıklarında -1 den $+1$'e artar fakat $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k \in Z)$ aralıklarında ise $+1$ den -1'e azalır. Bu fonksiyonun grafiği



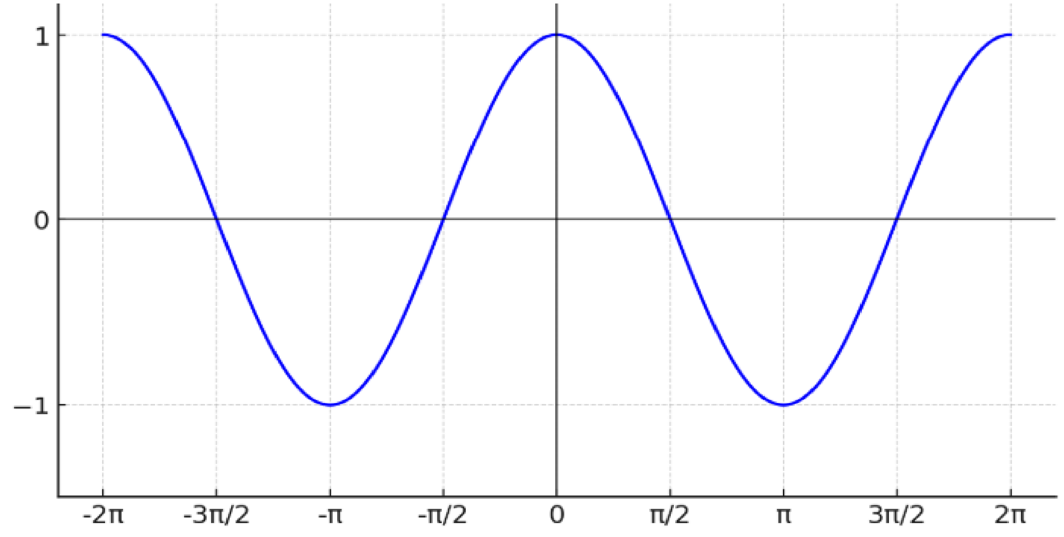
y=sinx'in grafiği

olur. Grafikten de görüldüğü üzere sinüs fonksiyonu O orijin noktasına göre simetriktir ve dolayısıyla tek fonksiyondur. Ayrıca birim çemberden kolayca görüldüğü gibi

$$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$$

Fonksiyonlar
Trigonometrik fonksiyonlar - Cosinus

dır. Şu halde kosinüs fonksiyonu $[2k\pi,(2k+1)\pi]\,(k\in Z)$ aralıklarında 1'den –1'e kadar azalır ve $[(2k-1)\pi,2k\pi]\,(k\in Z)$ aralıklarında ise –1'den 1'e kadar artar. Ayrıca, y=f(x)=cosx' in grafiğini çizmek için y=sinx' in grafiğini x-ekseni boyunca $\pi/2$ kadar sola kaydırmak yeterlidir. Buna göre y= cosx'in grafiği



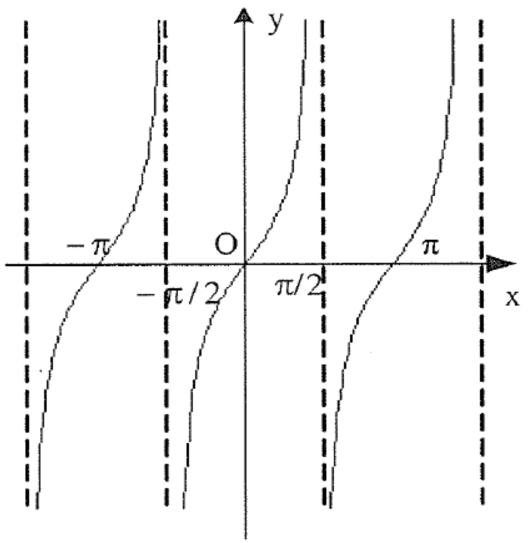
olur. Grafik y-eksenine göre simetriktir ve dolayısıyla y=cosx çift fonksiyondur.

Fonksiyonlar
Trigonometrik fonksiyonlar - Tanjant

Tanjant fonksiyonu

$$\tan : R \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in Z \right\} \longrightarrow R, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ile tanımlanır. Bu fonksiyon, sinx ve cosx fonksiyonlarının sırasıyla tek ve çift olması nedeniyle tek fonksiyondur. Grafiği ise x eksenini $x = k\pi\ (k \in Z)$ keser ve $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $-\infty$ dan $+\infty$' a artar. Bu fonksiyonun grafiği



y=tanx'in grafiği

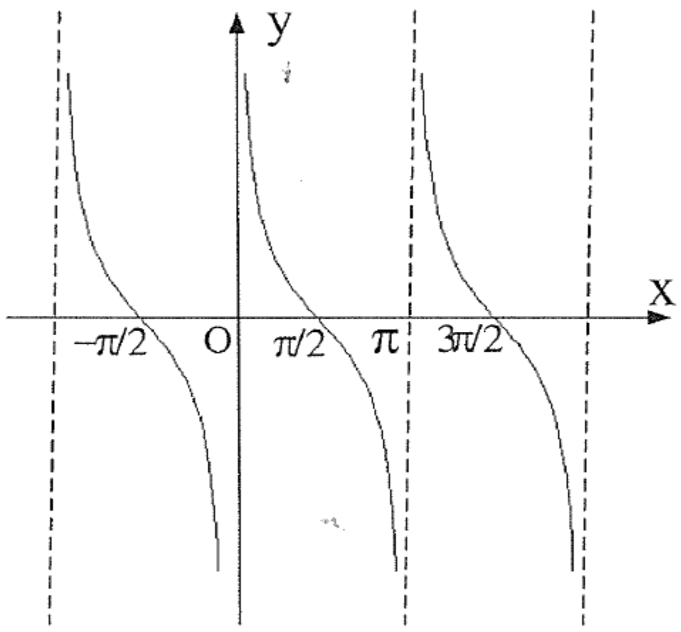
olur.

Fonksiyonlar
Trigonometrik fonksiyonlar - Cotanjant

Kotanjant fonksiyonu

$$\mathrm{Cot} : R \backslash \{k\pi : k \in Z\} \rightarrow R, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

biçiminde tanımlanır. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tek ve çift fonksiyon olması nedeniyle kotanjant fonksiyonu tek fonksiyondur. Ayrıca $x = (k + 1/2)\pi$ $(k \in Z)$ için cotx=0 ve $(0, \pi)$ aralığında $+\infty$ dan $-\infty$'a azalır. Bu fonksiyonun grafiği



Fonksiyonlar
Trigonometrik bağıntılar

Trigonometrik Bağıntılar

(i) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

(ii) $\sin(t \pm z) = \sin t \cos z \pm \cos t \sin z$

(iii) $\cos(t \pm z) = \cos t \cos z \mp \sin t \sin z$

(iv) $\tan(t \pm z) = \dfrac{\tan t \pm \tan z}{1 \mp \tan t \tan z}$

(v) $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

(vi) $\tan 2t = \dfrac{2\tan t}{1 - \tan^2 t}$

(vii) $\tan\dfrac{t}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \dfrac{\sin t}{1+\cos t} = \dfrac{1-\cos t}{\sin t}$

(viii) $\sin t \pm \sin z = 2\sin\dfrac{t \pm z}{2}\cos\dfrac{t \mp z}{2}$

(ix) $\cos t + \cos z = 2\cos\dfrac{t+z}{2}\cos\dfrac{t-z}{2}$, $\cos t - \cos z = -2\sin\dfrac{t+z}{2}\sin\dfrac{t-z}{2}$

(x) $\tan t \pm \tan z = \dfrac{\sin(t \pm z)}{\cos t \cos z}$

(xi) $\sin t.\sin z = \dfrac{1}{2}[\cos(t-z) - \cos(t+z)]$

(xii) $\cos t.\cos z = \dfrac{1}{2}[\cos(t-z) + \cos(t+z)]$

(xiii) $\sin t.\cos z = \dfrac{1}{2}[\sin(t+z) + \sin(t-z)]$

(xiv) $\sin(t + 2k\pi) = \sin t, \cos(t + 2k\pi) = \cos t,$
$\tan(t + \pi k) = \tan t, \cot(t + \pi k) = \cot t (k \in Z)$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
Tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	_	0	_	0
Cot	_	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	_	0	_

Fonksiyonlar
Trigonometrik fonksiyonlar

Örnek 49. $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ ve $g(x)=\dfrac{4\cos x}{1-\sin x}$ fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

Örnek 50. $f(x)=2+3\sin x$ ve $g(x)=\sqrt{|\cos x|-1}$ fonksiyonlarının tanım ve değer kümelerini bulunuz.

Fonksiyonlar
Ters Trigonometrik fonksiyonlar - arcsinus

Tanım 2.11.1. f(x)=sinx fonksiyonunun $f:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ kısıtlamasına **Sinüs** fonksiyonu denir. Bu durumda

$$\mathrm{Sin}:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1\,],\quad \mathrm{Sin}x=\sin x$$

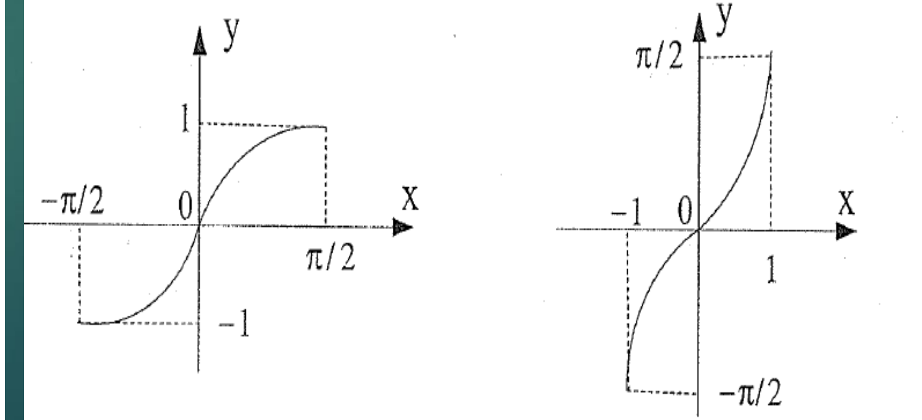
olur. Sinüs artık bire-bir ve örten olduğundan tersi vardır. Bu ters fonksiyona **Arksinüs** fonksiyonu denir ve Arcsin ile ifade edilir. Buna göre Arcsin, $[-1,1]$ aralığından $[-\pi/2,\pi/2]$ aralığına tanımlı bir fonksiyondur ve $\forall x\in[-1,1]$ için Sin(Arcsinx)=x dır. Ayrıca sinüs fonksiyonunun tek fonksiyon olması nedeniyle Arcsin fonksiyonu da tek fonksiyondur. Çünkü,

$$f(x)=\mathrm{Arc}\sin x\Rightarrow x=\sin f(x)\ \text{ve}\ f(-x)=\mathrm{Arc}\sin(-x)\Rightarrow -x=\sin f(-x)$$

olduğuna göre

$$\sin(-f(x))==-\sin f(x)=\sin f(-x)\Rightarrow -f(x)=f(-x)$$

dır. Aynı zamanda Arcsin fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında artandır. y=Sinx ile y=Arcsinx' nin grafikleri y=x doğrusuna göre simetrik olacağından bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibi olacaktır:



y=Sinx'in grafiği

y=Arcsinx'in grafiği

Fonksiyonlar
Ters Trigonometrik fonksiyonlar - arccosinus

Benzer olarak, $f(x)=\cos x$, $f:R\to[-1,1]$ fonksiyonu örten fakat bire-bir değildir. f'nin $[0,\pi]$ aralığına kısıtlamasını göz önüne alalım. Bu taktirde

$$\mathrm{Cos}:[0,\pi]\to[-1,1],\quad \mathrm{Cos}x=\cos x$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon bire-bir ve örten olduğundan tersi vardır. Bu ters fonksiyona **Arkkosinüs** fonksiyonu adı verilir ve **Arccos** ile gösterilir. Dolayısıyla Arccos, $[-1,1]$'den $[0,\pi]$ aralığına tanımlı bir fonksiyondur ve bunun sonucu olarak da $\forall x\in[-1,1]$ için

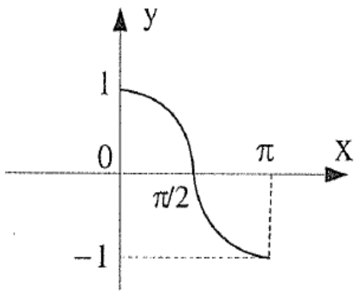
$$y=\mathrm{Arc}\cos x \Leftrightarrow x=\cos y=\cos(\mathrm{Arc}\cos x)$$

dır. Buna göre Arccosx terimi Kosinüsü x olan açıyı ifade etmektedir. Örneğin, $x=0 \Rightarrow y=\mathrm{Arc}\cos 0=\pi/2$, $x=-1 \Rightarrow y=\mathrm{Arc}\cos(-1)=\pi$ ve $x=1\Rightarrow y=\mathrm{Arc}\cos 1=0$ vb
Ayrıca Arccos fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında π' den 0'a kadar azalır ve

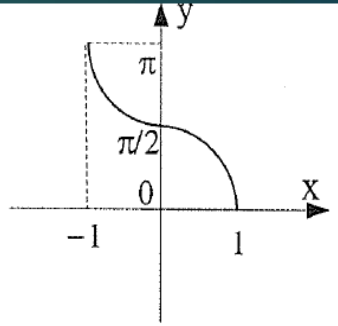
$$y=\mathrm{Arc}\cos(-x)\Rightarrow -x=\cos y\Rightarrow x=-\cos y=\cos(\pi-y)\Rightarrow \pi-y=\mathrm{Arc}\cos x$$

$$\Rightarrow y=\pi-\mathrm{Arc}\cos x$$

olduğundan Arccos(-x) = $\pi-$Arccosx eşitliği doğrudur.



y=Cosx'in grafiği



y=Arccosx'in grafiği

Fonksiyonlar
Ters Trigonometrik fonksiyonlar - arctanjant

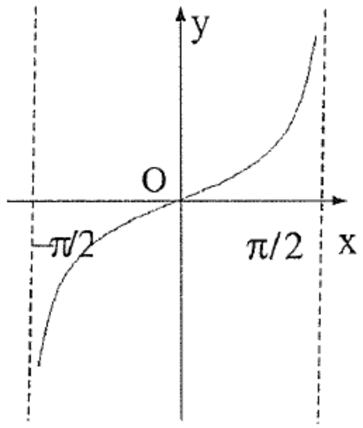
Şimdi $f(x) = \tan x,\ f : R \to R$ fonksiyonunun $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığına olan kısıtlamasını yani

$$\text{Tan} : (-\pi/2, \pi/2) \to R,\ \text{Tan}x = \tan x$$

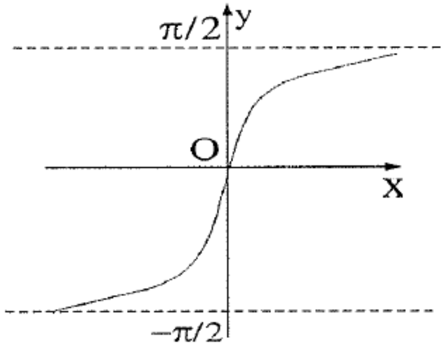
fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla tersi mevcuttur. Bu ters fonksiyona **Arktanjant** fonksiyonu adı verilir ve **Arctan** ile gösterilir. Bu durumda Arctanx terimi tanjantı x olan yayın uzunluğunu ifade eder ve bu fonksiyon $(-\infty, \infty)$ aralığında $-\pi/2$'den $\pi/2$'ye artar,fakat $\pm\pi/2$ değerlerini almaz. Ayrıca

$$y = \text{Arc}\tan x \Leftrightarrow x = \tan y = \tan(\text{Arc}\tan x), \quad y \in (-\pi/2, \pi/2)$$

dır. Buna göre Tan ve Arctan fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi olur:



y=Tanx'in grafiği



y=Arctanx'in grafiği

Fonksiyonlar
Ters Trigonometrik fonksiyonlar - arccotanjant

Kotanjant fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığına olan kısıtlaması yani

$$\mathrm{Cot}:(0,\pi)\to R,\ \mathrm{Cot}x=\cot x$$

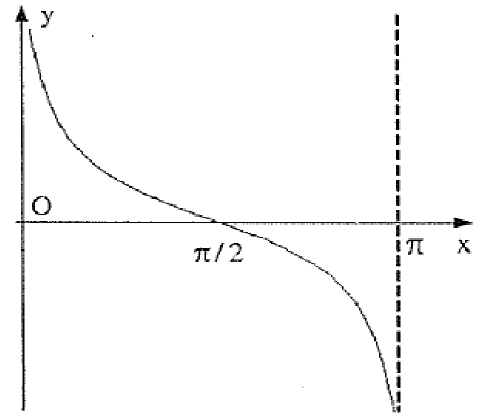
fonksiyonu göz önüne alınırsa, bu fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla tersi mevcuttur .Bu ters fonksiyona **Arkkotanjant** fonksiyonu adı verilir ve **Arccot** ile gösterilir. Arccot fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı olup ne tektir ne de çifttir. Ayrıca tanım aralığında π' den 0' a azalır ve

$$y=\mathrm{Arc}\cot x \Leftrightarrow x=\cot y=\cot(\mathrm{Arc}\cot x)$$

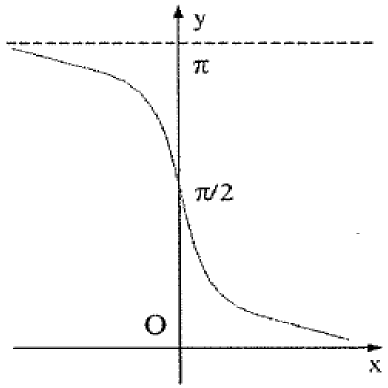
$$\cot(\pi-\mathrm{Arc}\cot x)=-x$$

$$\mathrm{Arc}\cot(-x)=\pi-\mathrm{Arc}\cot x$$

dır. Grafikleri ise aşağıda belirtilmiştir.



y=Cotx'in grafiği



y=Arccotx'in grafiği

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar

Tanım 2.12.1. $A \subset R$ olmak üzere, $f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $x \in A$ için

$$x + T \in A,\ x - T \in A \text{ ve } f(x+T) = f(x)$$

olacak şekilde bir $T \neq 0$ sayısı varsa, f'ye **periyodik fonksiyon** ve T sayısına da **bir periyot** adı verilir. Varsa pozitif periyotların en küçüğüne fonksiyonun **esas (asli) periyodu** denir. Eğer T sayısı f nin periyodu ise bu taktirde -T de f nin periyodu olur. Zira, $\forall x \in A$ için $x - T \in A$ olduğundan f(x)=f[(x-T)+T]=f(x-T)) dır. Öte yandan $x + 2T, x + 3T, \cdots, x + nT \in A$ ve $x - 2T, x - 3T, \cdots, x - nT \in A$ olduğuna göre,

$$f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=f(x+3T)=...=f(x+nT)$$

$$f(x)=f(x-T)=f(x-2T)= f(x-3T) =...=f(x-nT)$$

olur. Dolayısıyla -nT ve nT de periyottur.

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar – özellikler I

Periyodik fonksiyonlar ile ilgili şu özellikler kolayca elde edilebilir:

(i) Eğer f'nin periyodu T ise bu taktirde, y=f(ax+b), $(a \neq 0)$ eşitliği ile verilen fonksiyonunun periyodu $T_1 = T/a$ olur. Çünkü, her x için $f[a(x+T_1)+b] = f[ax + aT_1 + b] = f[(ax+b)+T] = f(ax+b)$ dır.

(ii) Her x ve $T \neq 0$ sayısı için $f(x+T).f(x) = 1$ eşitliği sağlanıyorsa, f'nin periyodu 2T olur.

(iii) Eğer g periyodik bir fonksiyon ise fog fonksiyonu periyodiktir ve fog kesin monoton ise g ve fog fonksiyonları periyodik olup periyotları aynıdır.

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar

Örnek 51. $f(x) = c$, $f : R \to R$ sabit fonksiyonu verildiğinde $\forall T \in R$ ve $\forall x \in R$ için

$$f(x+T)=C=f(x)$$

eşitliği sağlandığından f periyodik fonksiyondur ve bütün reel sayılar birer periyottur. Dolayısıyla esas periyodu yoktur.

Örnek 52. $f(x) = 3x + 5$, $f : R \to R$ fonksiyonunun periyodik olup olmadığını inceleyiniz.

Örnek 53.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrsayonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f : R \to R$ fonksiyonunun periyodik olup olmadığını araştırınız.

Örnek 54. $f(x) = \dfrac{x}{a} - \left\|\dfrac{x}{a}\right\|$ $(a > 0)$, $f : R \to R$ fonksiyonunun esas periyodunu bulunuz.

Örnek 55. $f(x) = \cos^2(3x + 5)$ fonksiyonunun periyodunu hesap ediniz.

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar – özellikler II

Periyodik fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü periyodik olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(x) = x - \|x\|$ ve $g(x) = \sin x$ fonksiyonları periyodik olmasına rağmen $h(x)=f(x)+g(x)= x - \|x\| + \sin x$ toplam fonksiyonu periyodik değildir. Gerçekten, kabul edelim ki h periyodik ve T $(T \neq 0)$ de bunun bir periyodu olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ için $h(x+T)=h(x)$, yani $(x + T) - \|x + T\| + \sin(x + T) = x - \|x\| + \sin x$ eşitliği sağlanır. $x=0$ ve $x = -T$ alınırsa, sırasıyla

$$T - \|T\| + \sin T = 0 \quad \text{ve} \quad -(T + \|-T\|) - \sin T = 0 \tag{1}$$

bulunur. Eşitlikler taraf tarafa toplanarak $\|T\| + \|-T\| = 0$ elde edilir. Bu eşitlikten $T=0$ bulunur. Bu da kabulümüz ile çelişir. O halde h fonksiyonu periyodik değildir.

Bu noktada periyodik iki fonksiyonun toplamı, çarpımı ve bölümünün ne zaman periyodik olduğu sorulabilir. Bu soruya cevap vermeden önce bir tanımı ifade edelim:

Tanım 2.12.2. x ve y iki reel sayı olsun. Bu sayıların oranı irrasyonel ise bu sayılara **ortak ölçüsü olmayan sayılar** denir.

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar – özellikler II

Teorem 2.12.3. Kabul edelim ki f ve g tanım kümeleri X olan iki periyodik fonksiyon, f'nin periyodu T_1 ve g' nin periyodu T_2 olsun. Eğer T_1 ve T_2 ortak ölçülü sayılar ve T bunların en küçük ortak katı ise bu taktirde f ve g'nin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü T periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

İSPAT?

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar – özellikler II

Uyarı: Bu teoremde sözü geçen T sayısı toplam, fark, çarpım ve bölüm fonksiyonlarının esas periyodu olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örnekleri incelemek yeterlidir.

Örnek 56. $f(x) = 1 + \sin x$ ve $g(x) = 1 - \sin x$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu taktirde

$$h(x) = f(x) + g(x) = 2\,,\ \psi(x) = f(x).g(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Görüldüğü üzere f ve g fonksiyonlarının asli periyodu 2π olmasına rağmen h'nın asli periyodu yoktur ve ψ nin asli periyodu ise π dir.

Periyodik fonksiyonların esas periyotlarını hesaplamak için belli metotlar vardır. Fonksiyonların karakterlerine bağlı olarak bu metotlar uygulanır.

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar – özellikler II

1. T'ye Göre Denklemi Çözmek

Esas periyodu bulmak için **f(x+T)=f(x)** eşitliğinde f' nin tanım kümesine ait olmak üzere x' e özel değerler verilerek denklem T ye göre çözülür ve bulunan pozitif T değerlerinin en küçüğü seçilir. Örneğin, $f(x)=\cos(3x/2)+\sin(x/2)$ fonksiyonunun esas periyodunu bulalım.

$$\cos\{3(x+T)/2\}+\sin\{(x+T)/2\}=\cos(3x/2)+\sin(x/2)$$

eşitliğinde x=0 alınırsa

$$\cos(3T/2)+\sin(T/2)=1$$

bulunur. Bu denklem çözülür ve en küçük pozitif değer seçilirse $T=12\pi$ elde edilir.

2. Dönüşümler (Çevirmeler) Yapmak

Fonksiyon dönüşümler yapılarak esas periyodu belli olan fonksiyon cinsinden ifade edilir. Örneğin, $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin(4x+\frac{\pi}{2}).$$

Eşitliğin en sağındaki fonksiyonun esas periyodu $T=2\pi/4=\pi/2$ olduğundan f nin de esas periyodu $\pi/2$ olur.

Fonksiyonlar
Periyodik Fonksiyonlar

Örnek 57. Aşağıdaki fonksiyonların periyodik olup olmadıklarını inceleyiniz ve eğer varsa esas periyotlarını bulunuz.

a) $f(x)=A\cos px+B\sin px$

b) $g(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$

c) $h(x)=2\tan\frac{x}{2}-3\tan\frac{x}{3}$.

Örnek 58. $f(x)=\sin x^2,\ f: R\to[-1,+1]$ fonksiyonunun periyodik olmadığını gösteriniz.

Fonksiyonlar
Üstel Fonksiyon

Tanım 2.13.1. $a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan $f : R \to R^{+}$ fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denir. Bu fonksiyonun tanım kümesi $R = (-\infty, \infty)$ ve değer kümesi ise $(0, \infty)$ aralığıdır.

Üstel fonksiyonlar bir çok problemlerin çözümünde kullanılır. Uygulamalarda en çok kullanılan üstel fonksiyon ise e=2,7182818... tabanına göre yazılanlarıdır, yani $y = f(x) = e^x$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon f(x)=exp(x) biçiminde de ifade edilir. Eğer $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ olduğundan fonksiyonun grafiği y eksenini (0,1) noktasında keser. Ayrıca, fonksiyon $a > 1$ için artar, $0 < a < 1$ için azalır. Gerçekten, $x_2 > x_1$ ise $x_2 - x_1 > 0$ olacağından $a > 1$ iken

$$a^{x_2 - x_1} > 1 \text{ ve } a < 1 \text{ iken } a^{x_2 - x_1} < 1$$

dır. Dolayısıyla

$$f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}\left(a^{x_2 - x_1} - 1\right)$$

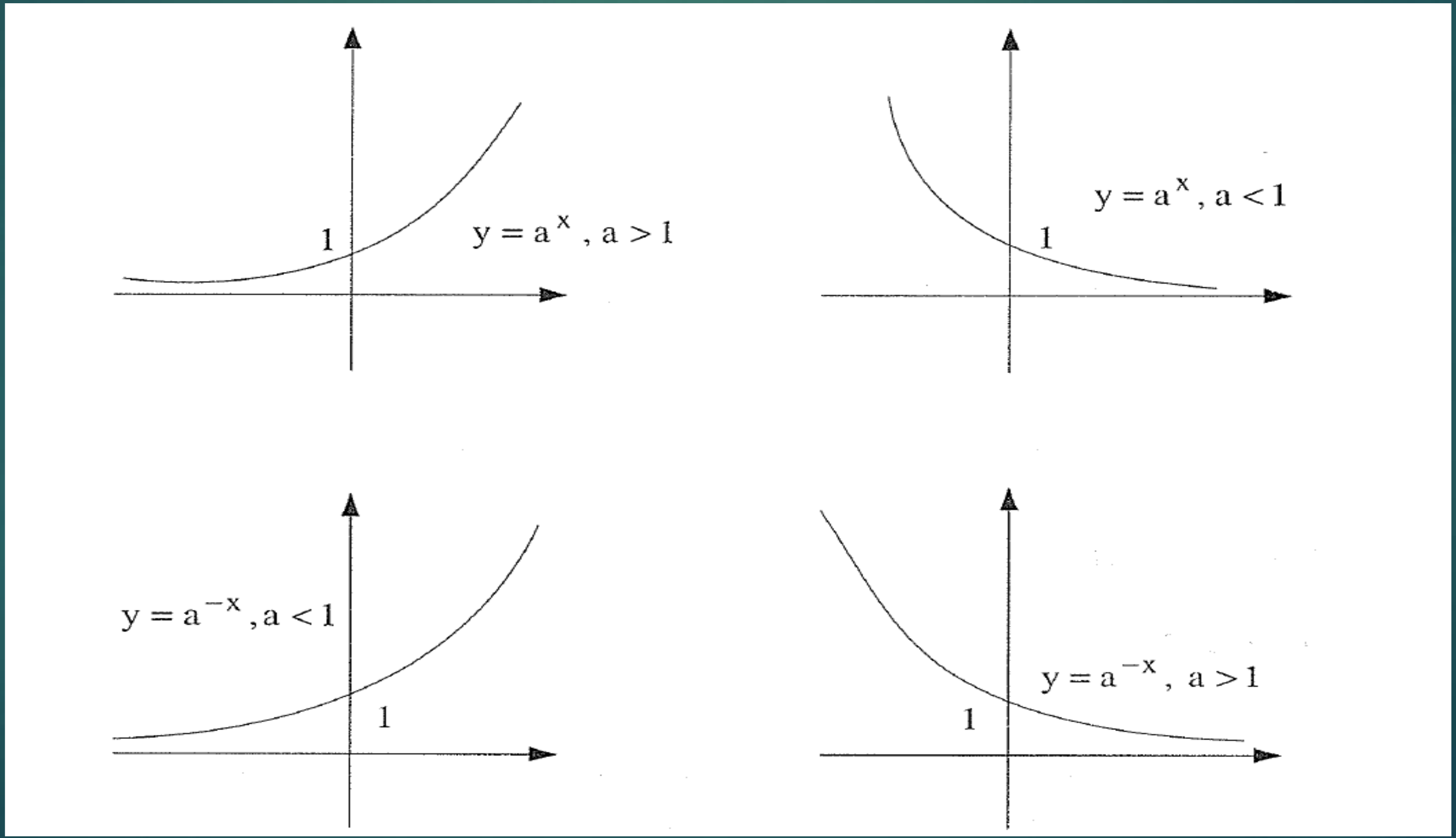
eşitliği nedeniyle

$$a > 1 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$a < 1 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

bulunur. Üstelik $a > 1$ iken $x \to \infty$ ve $x \to -\infty$ için sırasıyla $a^x \to \infty$ ve $a^x \to 0$, $a < 1$ iken $a^x \to 0$ ve $a^x \to \infty$ dır. Bu durumda $y = a^x$ in grafikleri şekil 1'deki gibi olur.

Fonksiyonlar
Üstel Fonksiyon



Fonksiyonlar
Üstel Fonksiyon

Örnek 59. $f(x)=\dfrac{1}{16^{x^2}-2^x}$ ile tanımlı f fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

Örnek 60. $y= f(x) = \dfrac{1}{2^x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Fonksiyonlar
Logaritma Fonksiyonu

Tanım 2.14.1. $a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ ile tanımlı $f : R \to R^+$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan $f^{-1} : R^+ \to R$ ters fonksiyonu mevcuttur. Bu ters fonksiyona **logaritma fonksiyonu** denir ve $f^{-1}(x) = \log_a x$ ile gösterilir (a tabanına göre logaritma x olarak okunur).

Bu tanıma göre $x > 0$ için

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

dır. Eğer $a > 1$ ise

$$\log_a x = \begin{cases} > 0, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ < 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

ve $0 < a < 1$ ise

$$\log_a x = \begin{cases} < 0, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ > 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

olur. Ayrıca $a > 1$ için $-\infty$'dan $+\infty$' a artarken $a < 1$ için $+\infty$'dan $-\infty$'a azalır.

Fonksiyonlar
Logaritma Fonksiyonu – özellikler

Logaritma fonksiyonun şu özelliklere sahip olduğu da kolayca gösterilebilir:

a) $\log_a a = 1$

b) $\log_a 1 = 0$

c) $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$

d) $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

e) $\log_a x^n = n \log_a x$

f) $\log_a x = 1/\log_x a$.

Pratikte en çok e tabanına göre yazılan $\log_e x$ logaritması kullanılır. Bu logaritmaya doğal (tabii) logaritma adı verilir ve lnx ile gösterilir. Ayrıca 10 tabanına göre alınan $\log_{10} x$ logaritmasına bayağı logaritma denir ve logx ile ifade edilir. Bu durumda

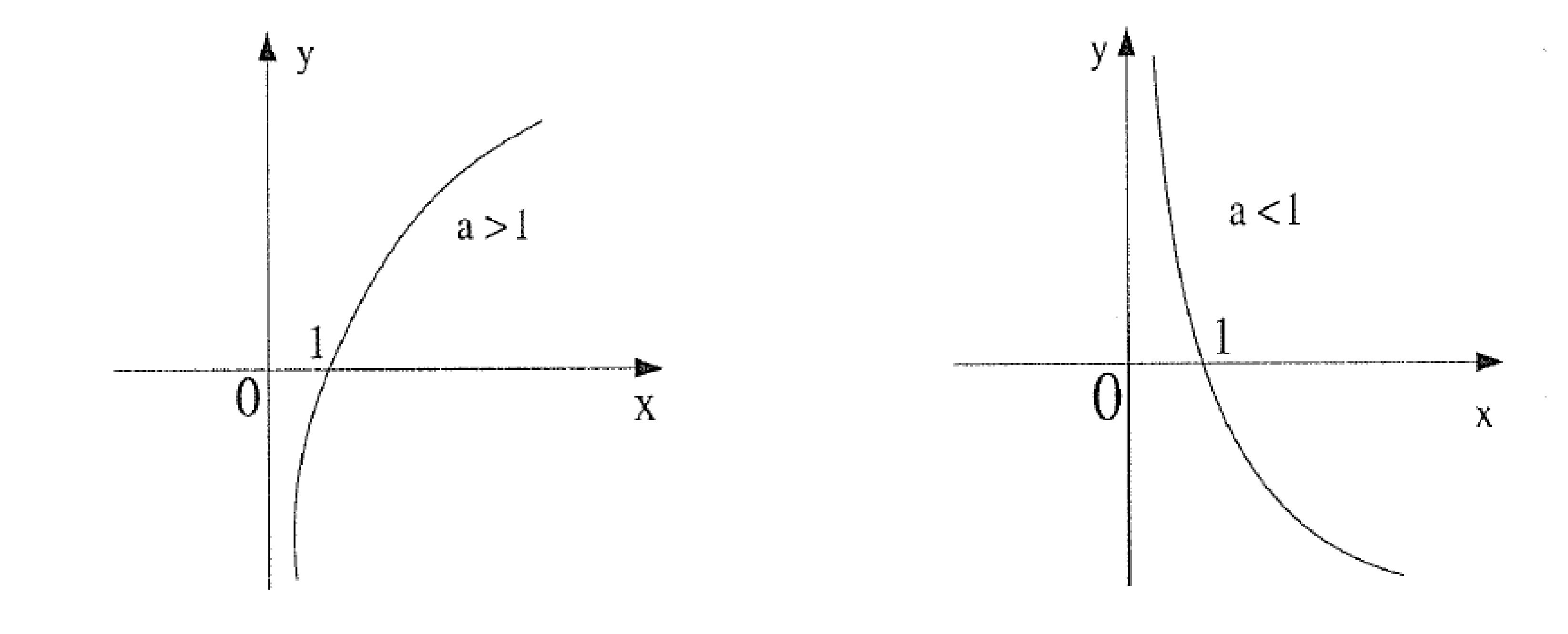
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{ve} \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

olduğuna göre

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

bulunur. Aynı zamanda $\log_a b = \ln b/\ln a$ olacağından $\log_a x = \log_a b . \log_b x$ yazılabilir.

Fonksiyonlar
Logaritma Fonksiyonu – özellikler



Fonksiyonlar
Logaritma Fonksiyonu

Örnek 61. $y = \log_2 \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Örnek 62. $y = \log\left(\sin \dfrac{\pi}{x}\right)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Örnek 63. $y = \log_2 (4 - x^2)$ fonksiyonunun değer kümesini bulunuz.

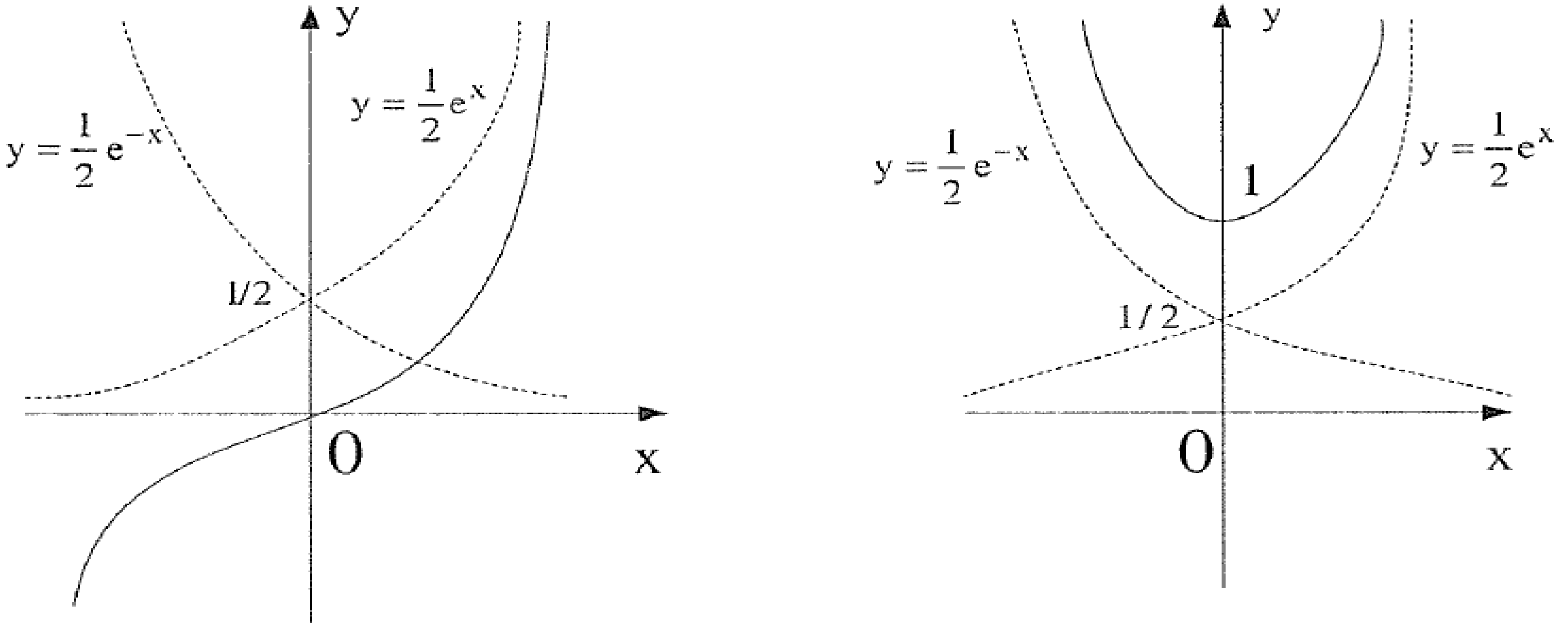
Fonksiyonlar
Hiperbolik fonksiyonlar – shx, cshx

$$\text{shx} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad \text{ve} \quad \text{chx} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

ile tanımlı $sh : R \to R$ ve $ch : R \to [1, \infty)$ fonksiyonlarına sırasıyla **hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs fonksiyonları** adı verilir.

Üstel fonksiyonların özellikleri nedeniyle $x > 0$ için $shx > 0$, $x < 0$ için $shx < 0$ ve $sh0 = 0$. Bu fonksiyon aynı zamanda artan ve tek fonksiyondur. Buna karşılık $\forall x \in R$ için $chx > 0$ ve $ch0 = 1$. Ayrıca chx fonksiyonu çift fonksiyondur ve minimum değerini (0,1) noktasında alır. Şu halde her iki fonksiyonun grafikleri $y = e^{x}$ ve $y = e^{-x}$ fonksiyonlarının grafikleri göz önüne alınarak çizilebilir.

Fonksiyonlar
Hiperbolik fonksiyonlar – shx, chx



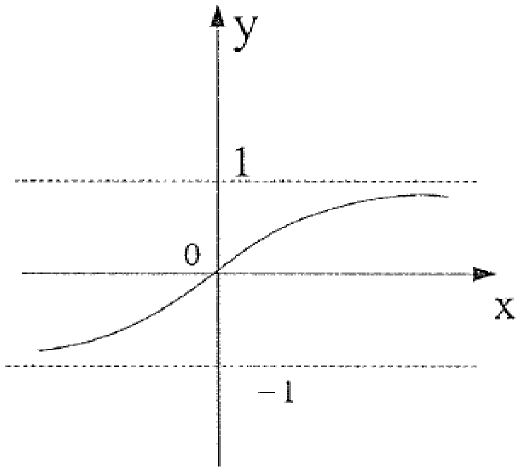
y=shx'in grafiği

y=chx'in grafiği

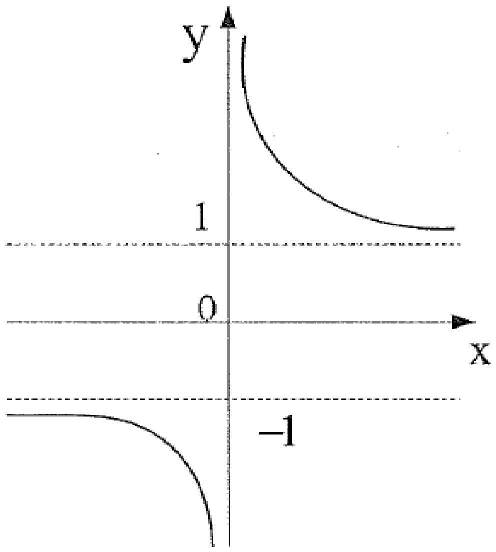
Fonksiyonlar
Hiperbolik fonksiyonlar – thx, cthx

$$\mathrm{thx} = \frac{\mathrm{shx}}{\mathrm{chx}} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \quad \text{ve} \quad \mathrm{cthx} = \frac{\mathrm{chx}}{\mathrm{shx}} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

ile tanımlı $\mathrm{th}: R \to (-1,1)$, $\mathrm{cth}: R \setminus \{0\} \to R \setminus [-1,1]$ fonksiyonlarına sırasıyla hiperbolik tanjant ve hiperbolik kotanjant fonksiyonları adı verilir. Bu fonksiyonların tek fonksiyon ve $\mathrm{th}0 = 0$ olduğu açıktır. Grafikleri ise şekil 5'de belirtildiği gibidir.



y=thx'in grafiği



y=cthx'in grafiği

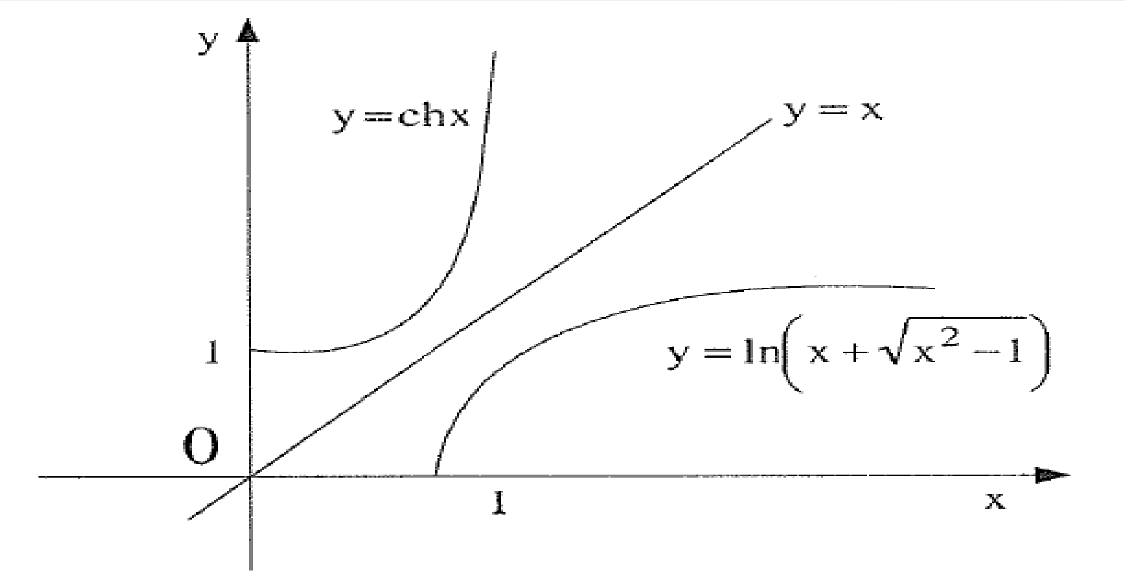
Fonksiyonlar
Hiperbolik fonksiyonlar – özellikler

1. $ch^2x - sh^2x = 1$
2. $sh(x \pm y) = shx.chy \pm chx.shy$
3. $ch(x \pm y) = chx.chy \pm shx.shy$
4. $shx.chy = \frac{1}{2}.[sh(x+y) + sh(x-y)]$
5. $chx.chy = \frac{1}{2}.[ch(x+y) + ch(x-y)]$
6. $shx.shy = \frac{1}{2}.[ch(x+y) - ch(x-y)]$
7. $ch^2x = \dfrac{1}{1-th^2x}, \qquad sh^2x = \dfrac{th^2x}{1-th^2x}$
8. $sh\,2x = 2\,shx.chx$
9. $ch2x = ch^2x + sh^2x = 2sh^2x + 1 = 2ch^2x - 1$
10. $ch3x = 4ch^3x - 3chx$
11. $(chx + shx)^n = chnx + shnx \quad (n \in N)$

İSPAT?

Fonksiyonlar
Hiperbolik fonksiyonlar

Örnek 64. $f(x)=\mathrm{ch}x$, $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$ fonksiyonun tersini bulunuz ve grafiğini çiziniz.



Fonksiyonlar
Fonksiyon Sınıfları

Fonksiyonlar karakterlerine, formlarına aldıkları değerlere göre belli sınıflara ayrılırlar. Önceki kesimlerde ele aldığımız üstel, kuvvet, logaritmik, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonlara **temel elemanter fonksiyonlar** adı verilir. Temel elemanter ve sabit fonksiyonlardan bileşke almakta dahil olmak üzere cebirsel yollarla elde edilen fonksiyonlara ise **elemanter fonksiyon** denir. Elemanter fonksiyonlar da **cebirsel** ve **transendental** fonksiyonlar olmak üzere iki kısma ayrılır. Bu iki kavramdan söz edebilmek için önce aşağıdaki tanımı vermeliyiz.

Fonksiyonlar
Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.16.1. $m \geq 0$ bir tamsayı, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ $(a_m \neq 0)$ sabitleri verilmiş olsun. $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ eşitliği ile tanımlanan $p: R \to R$ fonksiyonuna **tam rasyonel fonksiyon veya m. dereceden polinom** ve $a_0, a_1, \cdots, a_m$ sabitlerine ise **polinomun katsayıları** denir. Polinomlar yardımıyla verilen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} \quad (q(x) \neq 0)$$

fonksiyona rasyonel fonksiyon adı verilir. Örneğin,

$$y = x^3 - 3x^2 + x, \quad y = x + 5, \quad y = \sqrt{7}$$

fonksiyonları birer polinom ve

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad y = \frac{\sqrt{3}x^2 - 1}{x^3 + \pi}, \quad y = \frac{\sqrt{5} - x^3}{x + \sqrt{2}x^3}$$

fonksiyonları ise rasyonel fonksiyonlardır.

Tanım 2.16.2. $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ polinom olmak üzere

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0$$

eşitliğini sağlayan y=f(x) fonksiyonuna **cebirsel fonksiyon** ve cebirsel olmayan fonksiyona da **transendental fonksiyon** adı verilir.

Örneğin,

$$y = x + \sin x, \quad y = x.2^x, \quad y = 3^x + \sin x$$

fonksiyonları transendental fonksiyonlardır.