Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228
E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Lineerizasyon

Uygulamalı matematikteki birçok problemi tam olarak çözmeye kalktığımızda çeşitli zorluklarla karşılaşmaktayız. Böylesi durumlarda bir problemi tam olarak çözmesek de yaklaşık çözümler bulma yolunu tercih etmekteyiz. Yaklaşımda meydana gelen hata, çoğunlukla ihmal edilebilecek kadar küçük olmaktadır.

Lineer Yaklaşımlar

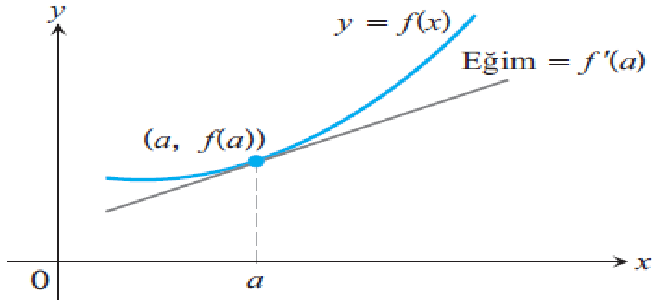
Yandaki şekilde, bir f fonksiyonunun grafiğine $(a, f(a))$ noktasında bir teğet çizilmiştir. Bu teğetin denkleminin

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

olduğunu biliyoruz. Burada $f(a)$ ve $f'(a)$ birer sabittir ve dolayısıyla $f(a)+f'(a)(x-a)$ ifadesi x değişkenine göre birinci dereceden bir polinomdur. Bunu $L(x)$ ile gösterelim:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Teğet doğru ile $f(x)$, benzer özellikler taşımaktadır. Mesela $L(a) = f(a)$ ve $L'(a) = f'(a)$ dır. Öyleyse teğet doğrunun, a civarındaki x değerleri için $y = f(x)$ eğrisine benzeyeceği düşünülebilir. Bu nedenle, a ya yakın x ler için L nin f ye iyi bir yaklaşım olması beklenir.



ŞEKİL 3.47 $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ daki teğet doğrusunun denklemi $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$'dır.

Lineer Yaklaşımlar

TANIM:

Eğer f, $x=a$ da türevlenebilir ise,

$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$

yaklaşım fonksiyonuna f nin $x=a$ daki lineerizasyonu denir.

Bu durumda $x=a$ civarında f nin değerleri için lineer yaklaşım $f(x)\approx L(x)$ ile

$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$

dır. Bu yaklaşım formülü $\Delta x = x-a$ artımı cinsinden

$f(a+\Delta x)\approx f(a)+f'(a)\Delta x$

şeklinde de yazılabilir.

Lineer Yaklaşımlar

Örnek:

$f(x)=\sqrt{1+x}$ in $x=0$ civarındaki lineerizasyonunu bulunuz.

Örnek:

$f(x)=\sqrt{(1+x)^3}$ fonksiyonunun $x=0$ civarındaki lineerizasyonunu bulunuz.

Lineer yaklaşımlar ve diferansiyel Uygulama

UYARI:

Δy artımı ile dy diferansiyeli aynı değildir, fakat $\Delta y - dy$ farkı oldukça küçüktür ve limit durumunda Δx sıfıra yaklaştığında $\Delta y - dy$ de sıfıra yaklaşır:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y - dy) = 0$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^2 - 1$ olmak üzere $x = 2$ ve $\Delta x = 1$ olsun. Δy ve dy yi hesaplayınız.

ÖRNEK:

$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ olmak üzere $x = 1$ ve $\Delta x = 0.1$ için $\Delta y - dy$ yi hesaplayınız.

Lineer yaklaşımlar ve diferansiyel Uygulama

UYARI:

$L(x), \Delta x$ çok küçük olduğunda $f(a+\Delta x)$ için iyi bir yaklaşımdır. Aşağıdaki iki örnek yaklaşık hesapta diferansiyelin nasıl kullanılacağını göstermektedir.

ÖRNEK:

$25^{1/3}$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÖRNEK:

$(1001)^5 - 3.(1001)^{3/2} + 2$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Lineer yaklaşımlar ve diferansiyel Uygulama

► Aşağıdaki verilerle f nin $x = a$ daki $L(x)$ lineerizasyonunu bulunuz.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}; \quad a = 1$

2. $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}; \quad a = 1$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 + x^3}}; \quad a = -2$

4. $f(x) = \sin x; \quad a = \pi$

► Aşağıda verilenlerle. Δy ve dy yi hesaplayınız.

5. $y = x^3; \quad x = 2. \quad dx = 0.1$

6. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x}}; \quad x = 8. \quad dx = 0.61$

► Aşağıda verilen sayıları. diferansiyel yaklaşım ile hesaplayınız.

7. $\sqrt[3]{12}$ **8.** $\sqrt[4]{17}$ **9.** $\sqrt{6,35}$ [$6.35 = 6.25 + 0.10$ yazın] **10.** $(26)^{2/3}$

► Aşağıda istenilenleri. diferansiyel yaklaşımı kullanarak bulunuz.

11. Kenarları 3 ve 3.92 olan bir dik üçgenin hipotenüsü nedir?

12. Tabanı 3 cm ve hipotenüsü 5 cm olan bir dik üçgende. hipotenüs 0.2 cm kadar bir değişime uğradığında. yükseklikte ne kadar bir değişim olur?

13. Bir dairenin yarıçapı 3 m den 3.02 m ye çıkarılırsa alanda ne kadarlık değişim olur?

14. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$ ise. $f(3.2) = ?$

15. $f(2) = 1$ ve $f'(x) = (5x^2 + 7)^{1/3}$ ise. $f(1.4) = ?$

16. $f(3) = 0.2$ ve $f'(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x}$ ise. $f(3.6) = ?$

► Aşağıda verilmiş olan yaklaşık ifadeleri elde etmek için diferansiyel yaklaşımı kullanın.

17. $(1 + x)^{-1} \approx 1 - x$

18. $(1 + x)^5 \approx 1 + 5x$

► Aşağıdaki verilerle dy diferansiyelini bulunuz.

19. $xy^2 - x^2y = x + y$

20. $x \sin y + y \sin x = 1$

Maksimum-Minimum Problemleri

Yaşadığımız evren, son derece karmaşık problemler ile doludur. Her gün, ortaya çıkan durumlara göre, nasıl maksimum sonuçları elde edeceğimizi veya mevcut bir durum karşısında, en verimli sonucu almak için nasıl bir yol izlememiz gerektiğini araştırıp dururuz.

Teorik olarak ilginç, pratik olarak oldukça önemli olan birçok problemi çözerken, maksimum ve/veya minimum noktaları bulmak için türevin özelliklerini kullanabiliriz. Anahtar cümle

« maksimize veya minimize edilecek bir niceliği, bazı değişkenlerin bir fonksiyonu olarak yazmak »

olabilir.

Maksimum-Minimum Problemleri

Aşağıdaki adımlar izlenebilir:

1. Problemde tam olarak ne istendiğini anlamak gereklidir.

2. Problemde verilenler mümkünse bir şekil çizilerek yerleştirilebilir.

3. Maksimize veya minimize edilecek fonksiyon, değişkenler cinsinden ifade edilir.

4. Fonksiyon mümkünse tek değişkenli hale getirilir.

5. Fonksiyonun bu değişkene göre türevi alınır ve maksimum ve minimum noktaları tespit edilir.

Maksimum-Minimum Problemleri Uygulama

ÖRNEK:

9 sayısını öyle iki kısma ayırınız ki parçalardan biri ile diğerinin karesinin çarpımı maksimum olsun.

ÖRNEK:

İki sayının toplamı 11 dir. Sayılardan birinin iki katı ile diğerinin karesinin toplamının minimum olması isteniyor. Bu sayıları bulunuz.

ÖRNEK:

Bir dikdörtgenin üç kenarının toplamı 40 cm ise, alanı en çok kaç cm^2 olur?

ÖRNEK:

Bir ABC üçgeninin yükseklik uzunluğu $3-x$ ve taban uzunluğu $5+x$ dir.Üçgenin alanının maksimum değerini bulunuz.

Maksimum-Minimum Problemleri Uygulama

ÖRNEK:

Taban uzunluğu 8 birim ve yüksekliği 16 birim olan bir ikizkenar üçgen içine, bir kenarı üçgenin tabanında bulunan bir dikdörtgen yerleştiriliyor. Dikdörtgenin alanının en büyük olması için boyutları ne olmalıdır?

ÖRNEK:

Çapı $2\sqrt{3}$ cm olan bir küre içine yerleştirilebilen maksimum hacimli dik silindirin yüksekliğini bulunuz.

ÖRNEK:

$y > 0$ olmak üzere $y = 3 - x^2$ parabolü içine yerleştirilebilen maksimum alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulunuz.

ÖRNEK:

Kalem üreten bir firma, $2x + 2500$ TL ye mal ettiği x sayıda kalemi, günlük $7 - x/1000$ TL ye satıyor. Firmanın, maksimum kar elde etmek için günlük kaç kalem üretmesi gerekir?

Maksimum-Minimum Problemleri Uygulama

ÖRNEK:

Bir çiftçi, bir kenarı ırmak olan boş bir araziden, çevresi 180 m. olan bir tarla çevirmek ve bu tarlanın alanının da en büyük olmasını istemektedir. Tarlanın boyutları ne olmalıdır?

1. Öyle iki reel sayı bulunuz ki aralarındaki fark 20 ve (mümkün olan) çarpımları minimum olsun.
2. Toplamları 1 olan öyle iki pozitif reel sayı bulunuz ki kareleri toplamı minimum olsun.
3. Toplamları 5 ve birinin karesi ile diğerinin küpünün çarpımı maksimum olan iki sayı bulunuz.
4. Bir ABC üçgeninin iki kenarının uzunlukları a ve b ve bu kenarlar arasındaki açı θ ise, üçgenin alanının en büyük olması için θ ne olmalıdır?

Maksimum-Minimum Problemleri Uygulama

5. Çapı 12 birim olan en büyük alana sahip eşkenar üçgenin boyutlarını bulunuz.

6. Bir doğru, her iki koordinat eksenini de kesmekte ve $P(2,3)$ noktasından geçmektedir. Eğer bu durumda meydana gelecek üçgenin alanı minimum olacaksa, bu doğrunun eğimini bulunuz.

7. Elinde 440 m tel olan bir çiftçi, bir kenarı yol olan bir arsadan, mümkün olan en büyük alanlı bir dikdörtgensel tarla çevirmek istiyor. Boyutlar ne olmalıdır?

8. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ fonksiyonu veriliyor. Eğer $f(2/3)$, bir minimum ve $f(-2)$, bir maksimum olacaksa a ve b sayıları ne olmalıdır?

9. $P(2,0)$ noktasından, $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğine, mümkün olan en kısa mesafeyi bulunuz.

10. Koordinat eksenleri ile $P(4,0)$ ve $Q(0,3)$ noktalarından geçen doğrunun oluşturduğu üçgen içine çizilebilecek maksimum alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulun.

11. $x > 0$ olmak üzere $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun grafiğine $P(1,-2)$ noktasında çizilen teğet ve koordinat eksenleri ile oluşmuş üçgenin alanı en az kaç birimdir?

12. $f(x) = 3 - x^2$ fonksiyonunun grafiğinin birinci bölgede kalan kısmındaki hangi noktadan çizilen teğet ve koordinat eksenleri ile oluşmuş üçgenin alanı minimum olur?

13. $P(\frac{x}{2}, x)$ ve $Q(4,3)$ noktaları arasındaki uzaklığın en kısa olması için x ne olmalıdır?

Maksimum-Minimum Problemleri Uygulama

14. x-ekseni üzerinde bir $P(x, 0)$ noktası veriliyor. Eğer P den $(0, 0)$ ve $(2, 3)$ noktalarına olan uzaklıkların kareleri toplamı minimum olacaksa x, ne olmalıdır?

15. Elinizde bulunan 48 m^2 lik bir malzeme ile kare tabanlı bir açık dikdörtgensel kutu yapmak istiyorsunuz. Mümkün olan en büyük hacimli kutunun boyutları ne olmalı?

16. Üç parelel kısımlı bir dikdörtgensel ahır, 500 feetlik bir çit kullanılarak inşa edilecektir. Ahırın toplam alanının maksimum olması için boyutları ne olmalıdır?

17. Koordinat eksenleri ve $y = 8 - x^3$ eğrisi ile sınırlı bölge içine çizilmiş en büyük alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulunuz.

18. Elinde 100 feetlik tel bulunan bir adam, evinin önü hariç bahçesinin diğer üç kenarını çit ile çevirmeyi planlıyor. Adam, bahçe alanının en büyük olması için nasıl bir bahçe şekli seçmelidir?

19. Bir meyve bahçesinde 50 adet armut ağacı ve her bir ağaçta da 800 armut vardır. Bahçeye dikilecek ağaçlardan her biri 10 adet fire vermektedir. Ağaçların toplam çıktısını maksimize etmek için, mevcut bahçeye kaç tane ağaç eklenmelidir?

20. Bir kenarından (düz) bir tren yolu geçen dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın etrafı, çit ile çevrilecektir. İhtiyaca cevap verecek en az çit miktarının, tren yolu hariç, tarlanın boyu eninin 2 katı olduğunda gerçekleşeceğini gösteriniz.

21. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fonksiyonu neden hiç negatif olmaz?