Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Grafik Çizimleri

y=f(x) şeklinde verilen bir fonksiyonunun grafiğini çizebilmek için aşağıdaki yolları izlemek oldukça kullanışlıdır.

I. Fonksiyonun tanım kümesi belirlenir.

II. Eğer varsa asimptotlar bulunur.

III. Eğrinin eksenleri kestiği noktalar bulunur.

IV. Türevin kökleri ve işaretleri incelenir.

V. Gerekirse ikinci türev yardımıyla fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıklar belirtilir.

VI. Yukarıda elde edilen sonuçlar değişim tablosunda değerlendirilerek bu tabloya göre çizim yapılır.

Grafik Çizimleri

Örnek 64. $y = \frac{1}{5}\left(4x^3 - x^4\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

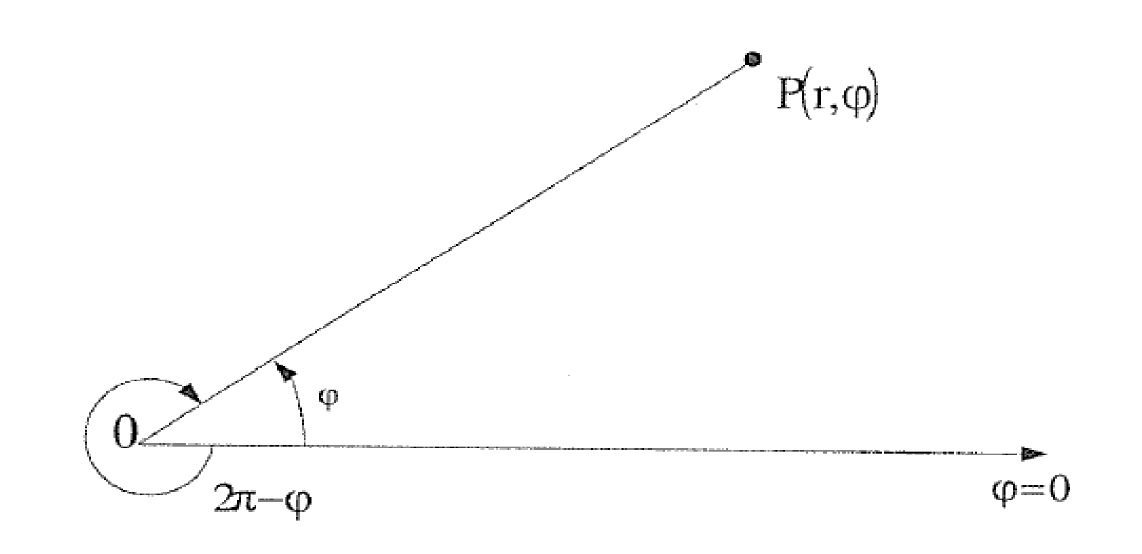
Örnek 65. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 66. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 67. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

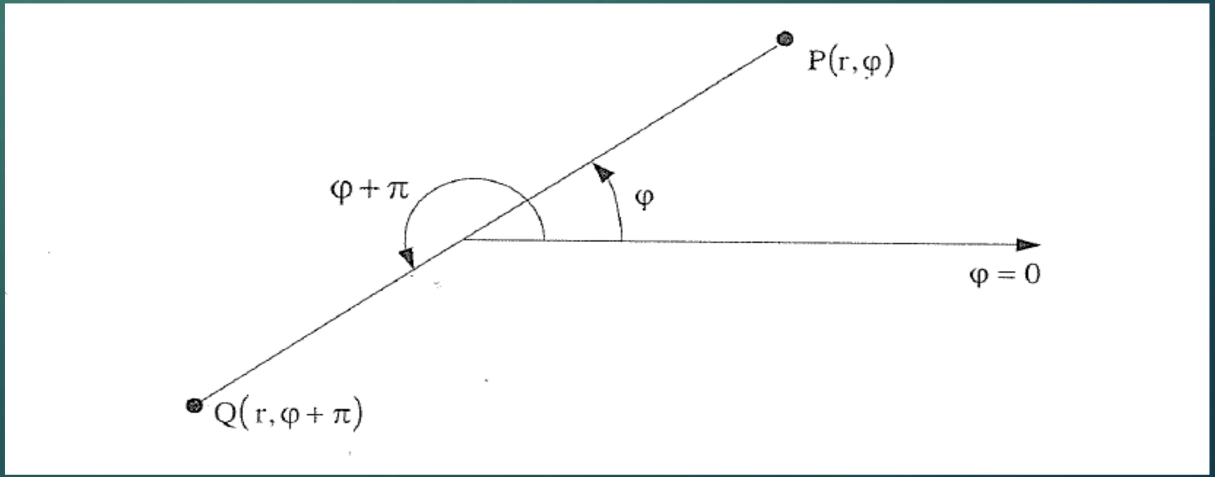
Kutupsal koordinatlar

Dik koordinatlar sisteminde bir noktanın nasıl belirlendiğini biliyoruz. Bu noktaları tanımlamanın diğer bir yolu kutupsal koordinatlar adı verilen koordinat sistemini kullanmaktır. Şimdi bu sistemi tanıyalım. Düzlem üzerinde sabit bir O başlangıç noktası ve bu noktadan geçen başlangıç ışınını (kutup eksenini) alalım.



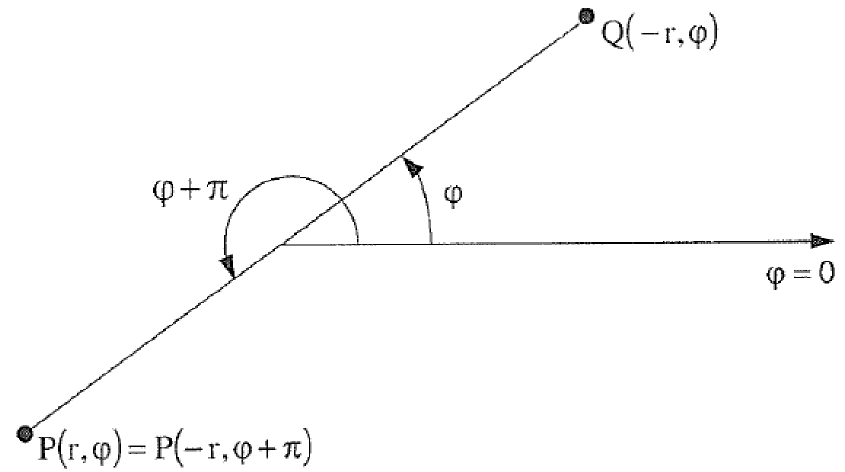
Kutupsal koordinatlar

Düzlemde herhangi bir P noktasını seçelim. $[0P]$ doğru parçasının uzunluğunu r ve başlangıç ışını ile doğru parçası arasındaki yönlü açıyı φ ile gösterelim. Bu durumda P noktasının yeri r ve φ cinsinden belirlenmiş olur. r ve φ değerlerine P noktasının **kutupsal koordinatları** denir ve bu nokta (r,φ) veya $P(r,\varphi)$ ile ifade edilir. Aynı zamanda O 'ya **kutup noktası** ve φ açısına da P noktasının **kutup açısı** adı verilir. φ açısı saatin ters yönünde ölçülürse pozitif ve saat yönünde ölçülürse negatif alınır. Ayrıca r sayısı pozitif veya negatif olabilir. r sayısının pozitif olmasıyla ilgili P ve Q noktaları Şekil ‘ de belirtilmiştir.



Kutupsal koordinatlar

Eğer r sayısı negatif ise Şekil 12'de olduğu gibi $P(r,\varphi)$ noktası φ açılı ışının ters yönündeki $\varphi+\pi$ açılı ışının üzerinde olan ve kutup noktasından $|r|$ birim uzaklıkta bulunan noktayı gösterecektir, yani $P(r,\varphi)=P(-r,\varphi+\pi)$ olacaktır.



Eğer r=0 ise her φ için $(0,\varphi)$ noktası kutup noktasını gösterecektir.

Herhangi bir P noktasının kutupsal koordinatları tek değildir, yani bir noktanın sonsuz çoklukta kutupsal koordinatları vardır. Örneğin, (r,φ), P noktasının koordinatları ise bu durumda m bir tamsayı olmak üzere $(r,\varphi+2m\pi)$ koordinatları da P noktasının koordinatlarıdır. Çünkü 2π'nin tam katlarıyla farklı olan açılar arasında geometrik olarak fark yoktur.

Kutupsal koordinatlar

Örnek 68. m tam sayı olmak üzere

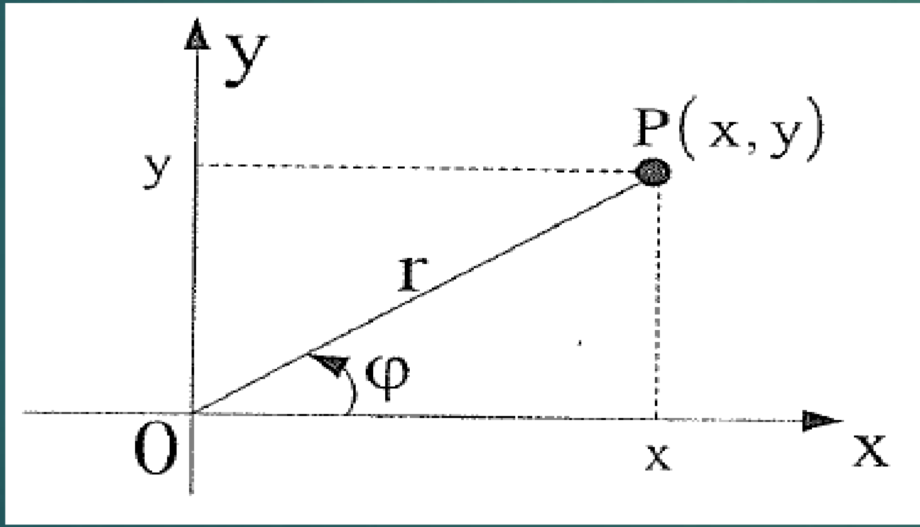
$$P_1(3,\pi/4),\ \ P_2(-3,\pi/4),\ \ P_3(3,-\pi/4),\ \ P_4(-3,-\pi/4),$$

$$P_5(3,\pi/4+2m\pi),\ \ Q_1(2,\pi/4)\ \text{ve}\ \ Q_2(-2,\pi/4)$$

noktalarını kutusal koordinat sisteminde işaretleyiniz.

Kutupsal koordinatlar

Dik koordinatlar ile kutupsal koordinatlar arasında yakın bir ilişki vardır, yani dik koordinatlardan kutupsal koordinatlara veya kutupsal koordinatlardan dik koordinatlara geçilebilir. Bunun için kutupsal koordinat sistemini dik koordinat sistemi üzerine o şekilde yerleştirelim ki kutup noktası ile orijin ve kutup ekseni ile pozitif x-ekseni çakışsın.



Kutupsal koordinatlar

Bu durumda herhangi bir P noktasının (r,φ) kutupsal koordinatları ile (x,y) dik koordinatları arasındaki bağıntı

$$x = r\cos\varphi \quad \text{ve} \quad x = r\sin\varphi$$

eşitlikleri verilir.

(i) eğer r=0 ise $x=0.\cos\varphi$ ve $y = 0\sin\varphi = 0$ olduğundan $(0,\varphi) = (0,0)$,

(ii) eğer $r > 0$ ise $\cos\varphi = x/r$ ve $\sin\varphi = y/r$ yani $x = r\cos\varphi$ ve $y = r\sin\varphi$,

(iii) eğer $r < 0$ ise $-r > 0$ dır. Fakat $(r,\varphi) = (-r,\varphi+\pi)$ olduğuna göre

$$x = -r\cos(\varphi+\pi) = r\cos\varphi \quad \text{ve} \quad y = -r\sin(\varphi+\pi) = r\sin\varphi$$

elde edilir. Ayrıca (15) bağıntısı göz önüne alınarak

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ve} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

yazılabilir. Ancak bu eşitlikler uygulanırken tanjantı pozitif olan açıların birinci ve üçüncü bölgede, negatif olan açıların ise ikinci ve dördüncü bölgede olduklarına dikkat edilmelidir.

Kutupsal koordinatlar

Örnek 69. Dik koordinatları $P\left(-2,2\sqrt{3}\right)$ olan noktanın bütün kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Örnek 70. Kutupsal koordinatları $P\left(2,-\pi/6\right)$ olan noktasının dik koordinatlarını bulunuz.

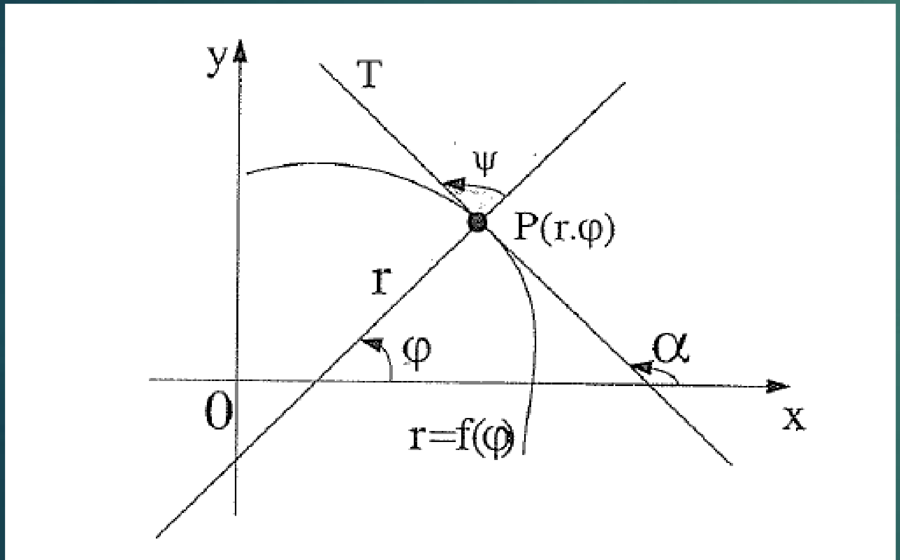
Örnek 71. Dik koordinat sisteminde denklemi $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$ $(a \neq 0)$ lemniskat eğrisinin kutupsal koordinat sistemindeki denklemini yazınız.

Örnek 72. $2x^2+2y^2-4x+y=0$ çemberini kutupsal koordinatlar cinsinden yazınız.

Örnek 73. Kutupsal koordinat sisteminde denklemi $r=4\cos\varphi$ olan eğrinin dik koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

Kutupsal koordinatlar

Şimdi f sürekli türevlere sahip olmak üzere kutupsal koordinatlarda denklemi $r = f(\varphi)$ olan eğriyi göz önüne alalım. Bu eğri üzerinde $P(r,\varphi)$ noktasını seçelim. Amacımız P noktasından çizilen T teğeti ile kutup ışını arasındaki ψ açısını hesaplamaktır.



Kutupsal koordinatlar

T teğetinin kutup ekseni ile yaptığı açı α ve P noktasının dik koordinatları (x,y) ile ifade edilirse bu durumda $\tan\alpha = dy/dx$ olur. Öte yandan

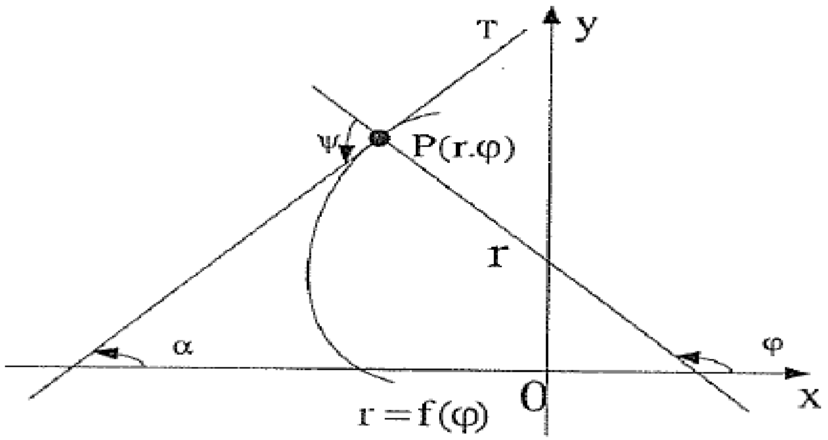
$$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$$

olduğuna göre parametrik fonksiyonların türevinden

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\varphi}{dx/d\varphi} = \frac{f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi}{f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi}$$

bulunur. Dikkat edilmelidir ki dik koordinatlarda y=f(x) eğrisinin herhangi bir (x,y) noktasındaki teğetin eğiminin dy/dx olmasına rağmen kutupsal koordinatlarda $r = f(\varphi)$ eğrisinin (r,φ) noktasındaki teğetin eğimi $dr/d\varphi$ değildir.



Kutupsal koordinatlar

$$\psi = \alpha - \varphi \quad \text{veya} \quad \psi = \alpha - \varphi + \pi$$

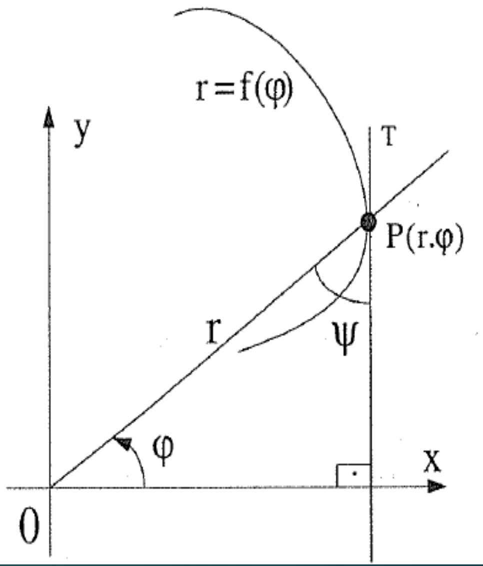
$$\tan\psi = \tan(\alpha - \varphi) = \frac{\tan\alpha - \tan\varphi}{1 + \tan\alpha . \tan\varphi}$$

olur.

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi}{f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi} - \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \dfrac{f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi}{f'(\varphi)\cos\varphi - f(\phi)\sin\varphi} . \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}} = \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)} = \frac{r}{r'}$$

elde edilir.

Bu sonuca göre $r = f(\varphi)$ eğrisine çizilen teğetin kutup eksenine dik ve paralel olduğu noktaları bulmak için $\tan\psi = r/r'$ eşitliğinde sırasıyla $\psi = k\pi + \pi/2 - \varphi$ ve $\psi = k\pi - \varphi$ $(k \in Z)$ koymak yeterlidir.



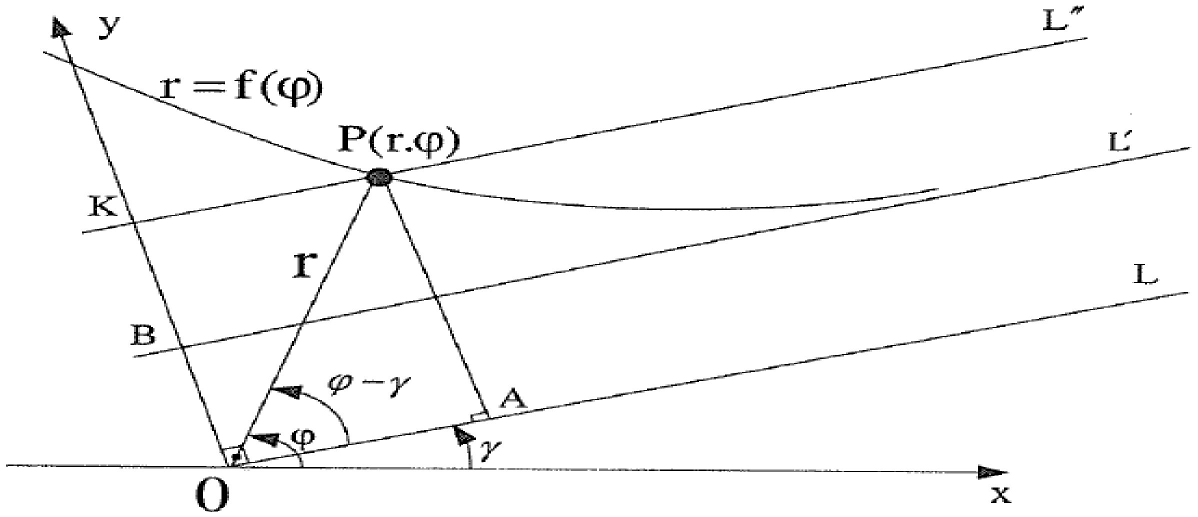
Kutupsal koordinatlar

Örnek 74 $r = f(\varphi) = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ eğrisinin $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasından çizilen teğetinin kutup ekseni ile yaptığı açıyı hesap ederek denklemini yazınız.

Kutupsal koordinatlarda Asimptotlar

Kutupsal koordinat sisteminde denklemi $r = f(\varphi)$ olan eğriyi göz önüne alalım. Kabul edelim ki bu eğrinin sonsuza uzanan bir kolu bulunsun. Eğri üzerinde hareket eden bir $P(r,\varphi)$ noktası alalım ve bu noktayı kutup noktası ile birleştirelim.

Eğer P noktası sonsuza ıraksadığında $[0P]$ doğru parçası L limit konumunu alıyorsa bu durumda L doğrusu verilen eğri için bir asimptotik doğrultu oluşturur. Dolayısıyla L ve $[0P]$'nin kutup ekseni ile yaptığı açılar sırasıyla γ ve φ ile gösterilirse bu taktirde $r \to \infty$ için $\varphi \to \gamma$ olur. Aynı zamanda $\varphi \to \gamma$ için $r \to \infty$ olduğu da açıktır. Bu demektir ki $\varphi \to \gamma$ için $r \to \infty$ oluyorsa $\varphi = \gamma$ asimptotik doğrultuyu oluşturur.



Kutupsal koordinatlarda Asimptotlar

Şimdi eğrinin asimptodunu belirtelim. P noktasından geçen ve L asimptotik doğrultuya paralel olan L″ doğrusunu çizelim. P noktası sonsuza ıraksadığında L″ 'nün L′ gibi bir limiti varsa bu eğri kolunun asimptodu olur. 0 noktasından L doğrusuna oy- dikini çizelim ve bu eksenin L″ ile kesişim noktasını K ile gösterelim. Eğer $|0K|$ 'nın limiti olan $|0B|$ biliniyorsa L′ doğrusunun denklemi yazılabilir. $|0B|$ uzunluğuna asimptot altı denir. AOP dik üçgeni nedeniyle

$$|0K| = |AP| = r\sin(\varphi - \gamma)$$

olacağına göre

$$d = |0B| = \lim_{\varphi \to \gamma} |0K| = \lim_{\varphi \to \gamma} r\sin(\varphi - \gamma)$$

bulunur. Böylece eğrinin asimptodunun kutupsal koordinatlardaki denklemi

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \gamma)}$$

olur, zira $\varphi \to \gamma$ için $r \to \pm\infty$ dır.

Şu halde eğrinin asimptodunu çizebilmek için

a-) Asimptotik doğrultu bulunup çizilir,

b-) Kutuptan asimptotik doğrultuya dik çıkılır,

c-) Bu dik üzerinde $|0B| = d$ eşitliğini sağlayan B noktası belirlenir ve bu noktadan asimptotik doğrultuya paralel çizmek yeterlidir.

Kutupsal koordinatlarda Asimptotlar

Örnek 75. $r = \dfrac{2\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$ eğrisinin asimptodunu bulunuz.

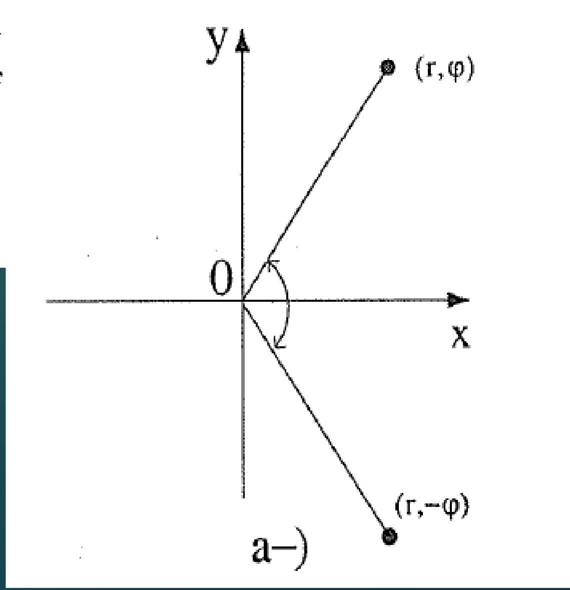
Örnek 76. $r = 2\tan\dfrac{2\varphi}{3}$ eğrisinin asimptodunu bulunuz.

Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

$r = f(\varphi)$ eşitliği ile tanımlı fonksiyonların grafiklerinin çizilmesinde simetrik özelliklerinin bilinmesi önemli bir yer tutar. Bu nedenle önce simetri kavramına değinelim.

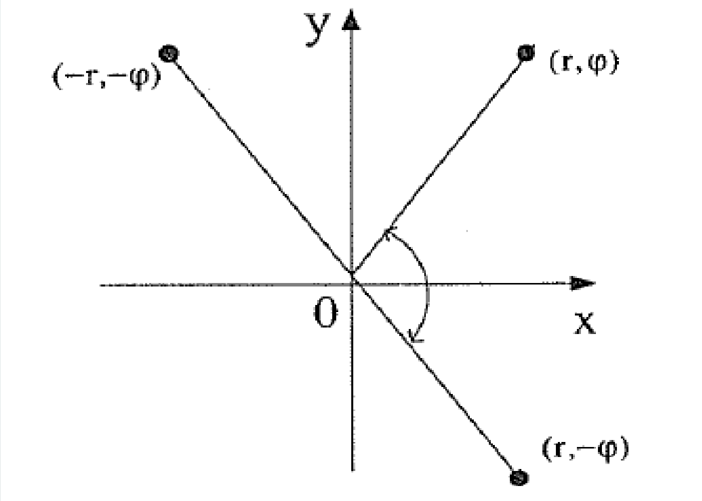
6.26.1. Eğrinin Simetrik Özellikleri

a-) Eğer $f(-\varphi) = f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa, yani f çift fonksiyon ise bu durumda (r,φ) ve $(r,-\varphi)$ noktaları elde edilir. Bu noktalar kutup eksenine simetrik noktalar olduğuna göre simetri ekseni kutup eksenidir. Şekil -a. Bu durumda $f(\varphi)$ 'yi φ 'nin sadece pozitif değerleri için incelemek yeterlidir. Çünkü eğri φ 'nin pozitif değerleri için çizilir ve sonra bunun kutup eksenine göre simetriği alınarak eğrinin tamamı elde edilir.



Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

b-) Eğer $f(-\varphi) = -f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa yani f tek fonksiyon ise bu durumda (r,φ) ve $(-r,-\varphi)$ noktaları elde edilir. Bu noktalar $\varphi = \pi/2$ doğrusuna göre simetrik noktalar olduğuna göre simetri ekseni $\varphi = \pi/2$ doğrusudur. Bu durumda $f(\varphi)$'yi φ'nin sadece pozitif değerleri için incelemek yeterlidir. Çünkü φ'nin pozitif değerleri için çizilen eğrinin $\varphi = \pi/2$ doğrusuna göre simetriği alınarak eğrinin tamamı elde edilir. Şekil -b.

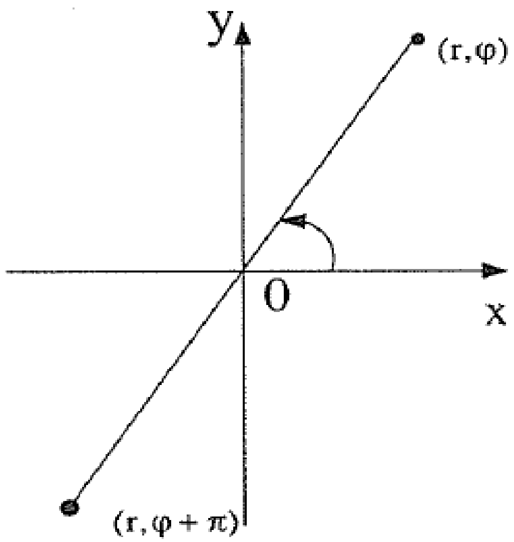


b–)

Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

c-) Eğer $f(\varphi+\pi)=f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa, (r,φ) ve $(r,\varphi+\pi)$ noktaları elde edilir. Bu noktalar kutup noktasına göre simetrik noktalar olduğuna göre eğri kutup noktasına göre simetriktir. Şekil -c. Bu durumda başlangıç noktası keyfi olmak üzere π uzunluğundaki bir aralıkta inceleme yapmak yeterlidir. Ayrıca eğrinin tamamını elde etmek için bu aralıkta çizilen eğrinin kutup noktasına göre simetriğini almak gerekir.

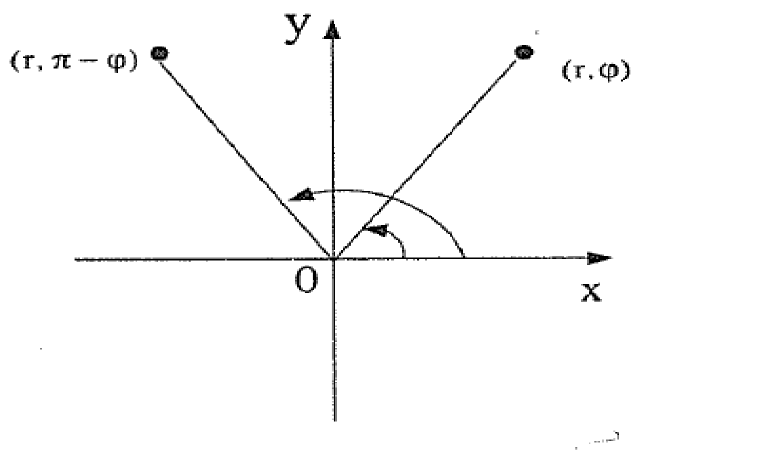
d-) Eğer $f(\varphi+\pi)=-f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda elde edilen (r,φ) ve $(-r,\varphi+\pi)$ noktaları üst üste çakışırlar. Dolayısıyla başlangıç noktası keyfi olan π uzunluğundaki bir aralıkta inceleme yapmak yeterlidir. Bu aralığa karşılık gelen eğri, eğrinin tamamını oluşturur.



c−)

Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

e-) Eğer $f(\pi-\varphi)=f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa, (r,φ) ve $(r,\pi-\varphi)$ noktaları elde edilir. Bu noktalar $\varphi=\pi/2$ doğrusuna göre simetrik olduğuna göre eğri bu doğruya göre simetriktir. Şekil -d. Bu durumda eğrinin $(-\pi/2,\pi/2)$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir ve $\varphi=\pi/2$ doğrusuna göre simetriği alınarak eğrinin tamamı elde edilir.



d–)

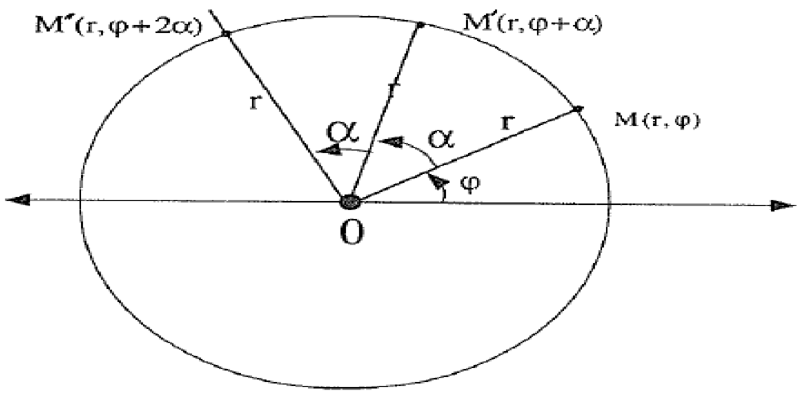
Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

f-) Eğer $f(\pi-\varphi)=-f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa, (r,φ) ve $(-r,\pi-\varphi)$ noktaları elde edilir. Bu noktalar kutup eksenine göre simetrik olduğuna göre eğri bu eksene göre simetriktir. Bu durumda eğrinin $(-\pi/2,\pi/2)$ aralığına karşılık gelen kısmı çizilir ve kutup eksenine göre simetriği alınarak eğrinin tamamı elde edilir.

g-) Eğer herhangi bir α reel sayısı için $f(\varphi+\alpha)=f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda eğri üzerinde $M(r,\varphi)$ ve $M'(r,\varphi+\alpha)$ noktaları elde edilir. Dikkat edilirse M' noktası M noktasının kutup noktası etrafında α kadar döndürülmesiyle bulunur. Eğer M' noktası α açısı kadar döndürülecek olursa eğri üzerinde M'' noktası elde edilir. Bu noktanın kutupsal açısı $\varphi+2\alpha$ ve kutup ışını ise

$$f(\varphi+2\alpha)=f(\varphi+\alpha+\alpha)=f(\varphi+\alpha)=r$$

olur.

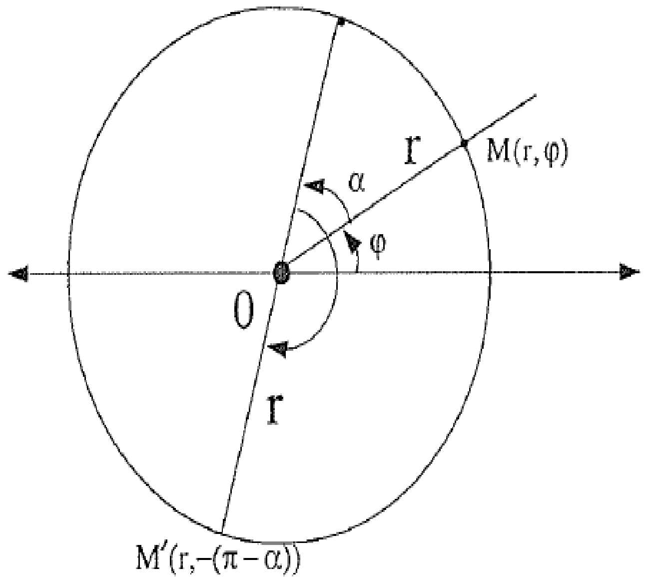


Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

Bu sonuç M'' noktasının α kadar döndürülmesiyle elde edilen nokta için de doğrudur. Dolayısıyla eğri üzerinde birbirinden α kadar farklı kutupsal açılı noktaların r koordinatları yani kutupsal ışınları aynı olur. Böylece bu noktalardan birisi bilinirse diğerleri bu noktanın kutup noktası etrafında α kadarlık döndürmelerle elde edilir.

Bu durumda incelemeyi α uzunluğundaki bir aralıkta yapmak yeterlidir. Söz konusu aralıkta elde edilen eğri parçasının kutup noktası etrafında α açısı kadar döndürmek ve bu döndürmeyi eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar devam ettirmek suretiyle eğrinin tamamı elde edilir.

h-) Eğer herhangi bir α reel sayısı için $f(\varphi+\alpha)=-f(\varphi)$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda eğri üzerinde $M(r,\varphi)$ ve $M'(-r,\varphi+\alpha)$ noktaları elde edilir. Bu noktalar kutup noktasından eşit uzaklıkta bulunan noktalardır. Fakat $(-r,\varphi+\alpha)=(r,\varphi-(\pi-\alpha))$ olduğu bilindiğine göre, M noktası ters yönde $\pi-\alpha$ kadar döndürülürse M'noktası bulunur. Bu durumda incelemeyi α uzunluğundaki aralıkta yapmak yeterlidir. Bu incelemeye ait eğri negatif yönde $\pi-\alpha$ kadar döndürülür ve eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar sürdürülürse eğrinin tamamı elde edilir.



Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

Örnek 77. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin simetrisini inceleyiniz.

a–) $r = \dfrac{2}{1+\sin\varphi}$ b–) $r = 2 - 2\cos\varphi$

c–) $r = 1 + \tan\varphi$ d–) $r = \dfrac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$

Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

Kutupsal koordinatlarda $r = f(\varphi)$ denklemi ile tanımlı fonksiyonun grafiğini sağlıklı çizebilmek için aşağıdaki işlemleri izlemek yararlıdır :

1. Fonksiyonun tanımlı ve sürekli olduğu aralıklar bulunur.

2. Fonksiyonun periyodikliği incelenir. Simetri özelliklerinden yararlanarak inceleme aralığı bulunr. Örneğin periyot T ise birbirinden T kadar farklı olan noktalarda fonksiyon aynı değeri alacağından T uzunluğundaki bir aralıkta inceleme yapmak yeterlidir.

3. Eğer eğrinin asimptotları varsa bulunur .

4. r' türevinin işareti irdelenerek eğrinin kutup noktasına nerede yaklaştığı veya uzaklaştığı belirtilir.

5. İnceleme aralığındaki $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$ v.s. gibi bazı özel noktalarda aldığı değerler bulunur.

6. Elde edilen değerler değişim tablosunda belirtilir.

7. Değişim tablosu ve simetri özellikleri dikkate alınarak çizim yapılır .

Kutupsal koordinatlarda Grafik Çizimi

Örnek 78. $r = 1 - \sin\varphi$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 79. $r = 4\cos 2\varphi$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 80. $a > 0$ olmak üzere $r = \dfrac{a\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 81. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Örnek 82. $r^2 = 4\sin 2\varphi$ Lemniskat eğrisini çiziniz.