1

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLAR:

→ $f(t)=2+3t$, $f(t)=at^2+bt+c$ gibi fonksiyonlar reel sayıları reel sayılara atayan fonksiyonlardır. Böyle fonksiyonlara "reel değerli yada skaler fonksiyon" denir.

→ $\vec{f}(t)=\vec{r_0}+t\vec{d}$, $\vec{f}(t)=t^2\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}$ gibi fonksiyonlar reel sayıları vektöre dönüştüren fonksiyonlardır. Böyle fonksiyonlara "vektör değerli yada vektör fonksiyonlar" denir.

→ $\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}$

f_1, f_2, f_3 skaler fonksiyonları aracılığıyla $\vec{f}(t)$ vektör fonk. oluşur.

f_1, f_2, f_3, $\vec{f}$ in bileşenleridir.

→ $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ifade bir parçacığın "konum vektörünü" ifade eder.

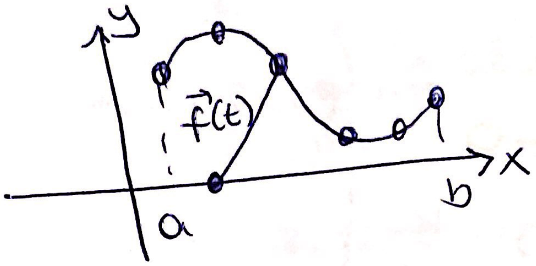
② Örn

[a,b] aralığında

$f_1(t)=t,\ f_2(t)=f(t),\ f_3(t)=0$ ise

vektör fonk:

$\vec{f}(t)=t\vec{i}+f(t)\vec{j}$ ile gösterilir

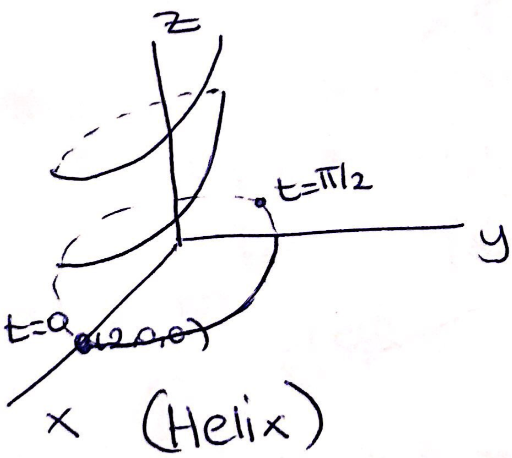


Örn

$\vec{f}(t)=2\cos t\,\vec{i}+2\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ $\quad t\geq 0$

$f_1(t)=x=2\cos t$
$f_2(t)=y=2\sin t$ $\Big\} \ x^2+y^2=4$
$f_3(t)=z=t$ dir

$t=0 \Rightarrow \vec{f}(0)=(2,0,0)$
$t=\pi/2 \Rightarrow \vec{f}(\pi/2)=(0,2,\frac{\pi}{2})$
$t=\pi \Rightarrow \vec{f}(\pi)=(-2,0,\pi)$
$\vdots$



(Helix)

(3) VEKTÖR DEĞERLİ FONK'LARIN LİMİTİ

$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ D bölgesinde tanımlı bir vektör olsun

$\rightarrow \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ ise $\lim_{t \to t_0} \|\vec{f}(t)\| = \|\vec{L}\|$ dir

$\rightarrow \lim_{t \to t_0} \|\vec{f}(t) - \vec{L}\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L}$ dir

LİMİT KURALLARI

$\vec{f}$ ve $\vec{g}$ vektör fonksiyonu ve U reel değerli bir fonksiyon olsun ve
$t \to t_0$, $\vec{g}(t) \to \vec{M}$, $\vec{f}(t) \to \vec{L}$, $U(t) \to A$

olsun. O zaman

(1) $\vec{f}(t) + \vec{g}(t) \to L + M$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $\alpha\vec{f}(t) + \beta\vec{g}(t) \to \alpha\vec{L} + \beta\vec{M}$

(3) $U\vec{f}(t) \to A.\vec{L}$

(4) $\vec{f}(t).\vec{g}(t) \Rightarrow \vec{L}.\vec{M}$ ($\times \to$ vektörel çarpım)

(5) $\vec{f}(t) \times \vec{g}(t) \to \vec{L} \times \vec{M}$

TANIM: $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ ise
ve $\vec{L} = L_1\vec{i} + L_2\vec{j} + L_3\vec{k}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t \to t_0} f_1(t) = L_1 \\ \lim_{t \to t_0} f_2(t) = L_2 \\ \lim_{t \to t_0} f_3(t) = L_3 \end{array}\right\} \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{L} \text{ dir}$$

4.

İspat

$$\lim_{t\to t_0} \|\vec{f}(t)-\vec{L}\| = 0 \Longrightarrow \lim_{t\to t_0} \vec{f}(t)=\vec{L}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to t_0} \sqrt{(f_1(t)-L_1)^2+(f_2(t)-L_2)^2+(f_3(t)-L_3)^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to t_0} f_1(t)=L_1 \\ &\lim_{t\to t_0} f_2(t)=L_2 \\ &\lim_{t\to t_0} f_3(t)=L_3 \end{aligned}\right\} \text{ O zaman } \lim_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{L} \text{ dir.}$$

Örn

$$\vec{f}(t)=\cos(t+\pi)\vec{i}+\sin(t+\pi)\vec{j}+e^{-t^2}\vec{k}$$

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=?$$

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t)=\lim_{t\to 0}\left(\cos(t+\pi)\vec{i}+\sin(t+\pi)\vec{j}+e^{-t^2}\vec{k}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\cos(t+\pi)\vec{i}+\lim_{t\to 0}\sin(t+\pi)\vec{j}+\lim_{t\to 0}e^{-t^2}\vec{k}$$

$$=-\vec{i}+\vec{k}$$

(5)

SÜREKLİLİK

Limitte olduğu gibi $\vec{f}$ in her bileşeni $t \to t_0$ iken sürekli ise "$\vec{f}$ süreklidir" denir.

ve

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0) \quad \text{dır.}$$

TÜREV ve DİFERANSİYELLENME

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \quad \text{limiti mevcutsa}$$

$\vec{f}$ vektör fonk "diferansiyellenebilir" denir

ve $\vec{f}$ in t deki türevi $\vec{f}'(t)$ ile gösterilir.

(1) $\rightarrow$ $\vec{f}(t) = u(t)\vec{c} \Rightarrow f'(t) = u'(t)\vec{c}$

c sbt vektör, $u(t)$ diferansiyellenebilir.

(2) $\rightarrow$ $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$

diferansiyellenebilir $\Rightarrow$ $f'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)k$

(1)
$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h)c - u(t)c}{h}$$

$$= c \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

$$= c \cdot u'(t)$$

Örn
$$\vec{f}(t) = t^2 \vec{a} \Rightarrow f'(t) = 2t\vec{a}$$

(2) $$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h} \vec{i} + \lim_{h \to 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h} \vec{j}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{f_3(t+h) - f_3(t)}{h} \vec{k}$$

$$= f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k}$$

(3) sabit vektörün türevi $\vec{0}$ dır.

Çünkü $\lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \vec{0} = \vec{0}$ dır.

Örn

$f(t) = \sin \pi t . (\vec{i} - \vec{j}) \Rightarrow f'(t) = \pi \cos \pi t . (\vec{i} - \vec{j})$

Uyarı: Reel değerli fonksiyonlarda olduğu gibi $\vec{f}$, t de diferansiyellenebilir ise $\vec{f}$, t de süreklidir.

Örn

$\vec{f}(t) = t\vec{i} + \sqrt{t}\vec{j} - e^t\vec{k}$

a) $\vec{f}$ in tanım kümesini b) $\vec{f}(0)$ c) $\vec{f}'(t)$

d) $\vec{f}'(0)$ e) $\|\vec{f}(t)\|$ f) $\vec{f}(t) . \vec{f}'(t)$ i hesaplayın.

a) $\vec{f}$ in her bileşeni $[0, \infty)$ da tanımlı olduğundan

$\vec{f}$ $[0, \infty)$ da tanımlıdır.

7) b) $\vec{f}(0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} - e^{0}\vec{k} = -\vec{k}$

c) $\vec{f}'(t) = \vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{j} - e^{t}\vec{k} \quad (t>0)$

d) $\vec{f}'(0)$ yoktur.

e) $\|\vec{f}(t)\| = \sqrt{t^2 + t + e^{2t}} \quad t \geq 0$

f) $\vec{f}(t) \cdot f'(t) = (t, \sqrt{t}, -e^{t})\left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}, -e^{t}\right)$

$= t + \frac{1}{2} + e^{2t} \quad (t>0)$

Örn

$\vec{f}(t) = t\sin t\,\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + t\vec{k}$

ise $\vec{f}''(t) = ?$

$f'(t) = (\sin t + t\cos t)\vec{i} + (-e^{-t})\vec{j} + \vec{k}$

$f''(t) = (2\cos t - t\sin t)\vec{i} + e^{-t}\vec{j}$

İNTEGRASYON

(Terim terim türev alabildiğimiz gibi
" " integrasyon alabiliriz) yani

$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, $[a,b]$

de sürekli bir vektör fonk olsun.

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t)\,dt\right)\vec{k}$$

Örn $f(t) = t\vec{i} + \sqrt{t+1}\,\vec{j} - e^{t}\vec{k}$

$\int_0^1 f(t)\,dt = ?$

$$\int_0^1 t\,dt\,\vec{i} + \left(\int_0^1 \sqrt{t+1}\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_0^1 -e^{t}\right)\vec{k}$$

$$\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \vec{i} + \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\Big|_0^1 \vec{j} - e^{t}\Big|_0^1 \vec{k}$$

8

$= \frac{\vec{i}}{2} + \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\vec{j} + (1-e)\vec{k}$

Örn

$\vec{f}'(t) = 2\cos t\,\vec{i} - t\sin t^2\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}$

ve

$\vec{f}(0) = \vec{i} + 3\vec{k}$ ise

$\vec{f}(t) = ?$

integrasyon ile

$\vec{f}(t) = (2\sin t + c_1)\vec{i} + \left(\frac{\cos t^2}{2} + c_2\right)\vec{j} + (t^2 + c_3)\vec{k}$

$\vec{f}(0) = \vec{i} + 3\vec{k} = c_1\vec{i} + \left(\frac{1}{2} + c_2\right)\vec{j} + c_3\vec{k}$

$c_1 = 1 \quad c_2 = -1/2 \quad c_3 = 3$

$\vec{f}(t) = (2\sin t + 1)\vec{i} + \left(\frac{\cos t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{j} + (t^2 + 3)\vec{k}$

integrasyonun özellikleri:

1. $\int_a^b (\vec{f}(t) + \vec{g}(t))\,dt = \int_a^b \vec{f}(t)\,dt + \int_a^b \vec{g}(t)\,dt$

2. $\int_a^b \alpha \vec{f}(t)\,dt = \alpha \int_a^b \vec{f}(t)\,dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

3. $\int_a^b \vec{c}\,\vec{f}(t)\,dt = \vec{c} \int_a^b \vec{f}(t)\,dt$ ($\vec{c}$ sbt vektör)

4. $\left(\left\| \int_a^b \vec{f}(t)\,dt \right\|\right) \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$

9

Örn

$$f(t) = \left(\cos t, e^{-t}, \frac{\sin t}{t}\right)$$

$$\lim_{t \to 0} f(t) = ?$$

$$\lim_{t \to 0} \left(\cos t, e^{-t}, \frac{\sin t}{t}\right) = \left(\lim_{t \to 0} \cos t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t \to 0} e^{-t}\right)\vec{j} + \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Örn: $\vec{r}(t) = \left(t^3, \sin(3t-3)/t-1, e^{2t}\right)$

$$\lim_{t \to 1} \vec{r}(t) = ?$$

$$\lim_{t \to 1} r(t) = \lim_{t \to 1} t^3 \vec{i} + \lim_{t \to 1} \frac{\sin(3t-3)}{t-1}\vec{j} + \lim_{t \to 1} e^{2t}\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \lim_{t \to 1} \frac{3\cos(t-3)}{1}\vec{j} + \left(\lim_{t \to 1} e^{2t}\right)\vec{k}$$

e^2

$$= (1, 3, e^2)$$

10

Örn

$\vec{r}(t) = (\sin t, 6, 4t)$

$\int \vec{r}(t)\,dt = ?$

$= (-\cos t, 6t, 2t^2) + \vec{c}$

$(-\cos t + c_1, 6t + c_2, 2t^2 + c_3)$

$= (-\cos t + c_1)\vec{i} + (6t + c_2)\vec{j} + (2t^2 + c_3)\vec{k}$

$= -\cos t\,\vec{i} + 6t\vec{j} + 2t^2\vec{k} + \underbrace{c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}}_{\vec{c}}$

$= (-\cos t, 6t, 2t^2) + \vec{c}$

(11)

Vektör Alanı:

Daha önce vektör değerli fonksiyonlarda bir reel sayıya karşılık, bir vektör çıktısı alıyorduk. Yani

$$\vec{C}(t) = (x(t))\vec{i} + (y(t))\vec{j}$$

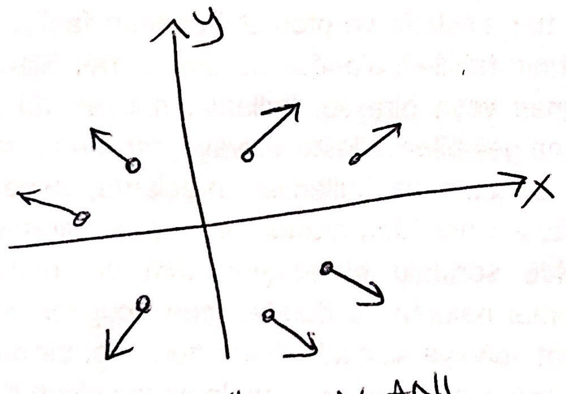
$\vec{C}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ idi

→ Eğer 2 reel sayıya karşılık bir vektör çıktısı oluyorsa, yani

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$$

her (x,y) ikilisine bir vektör karşı geliyorsa bütün bu vektörlerin oluşturduğu alana "vektör alanı" denir.

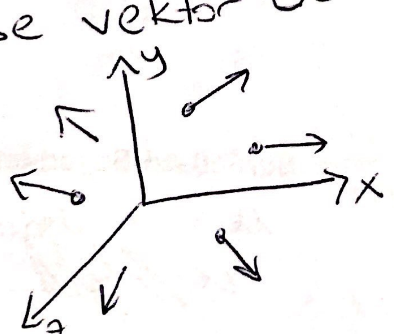


VEKTÖR ALANI

→ Benzer şekilde 3 reel sayıya karşılık bir vektör çıktısı oluyorsa,

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$

ise vektör alanı



dir

(12)

Örn

$\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ vektör alanı?

$\vec{F}(1,1) = \vec{i} + \vec{j}$

$\vec{F}(1,0) = \vec{i}$

$\vec{F}(0,1) = \vec{j}$

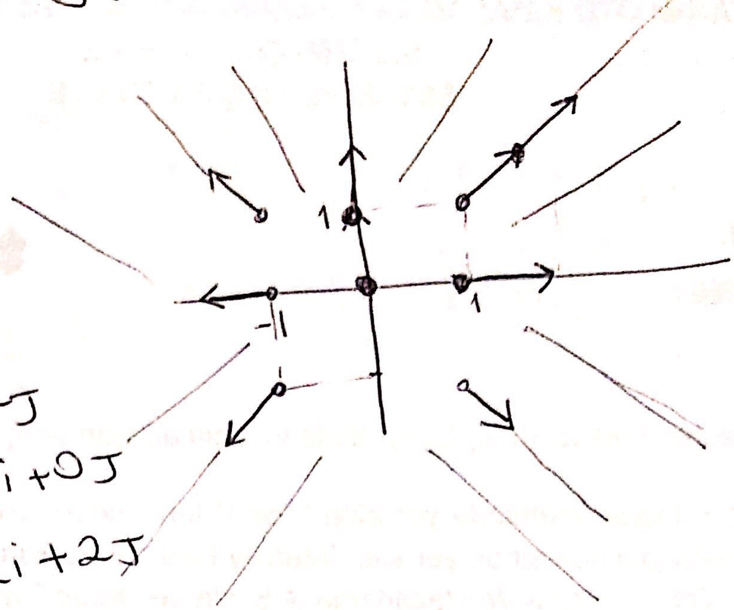
$\vec{F}(-1,0) = -i$

$\vec{F}(-1,-1) = -i - j$

$\vec{F}(0,0) = 0i + 0j$

$\vec{F}(2,2) = 2i + 2j$

⋮



vektör alanı

Diverjans ve Curl: (Rotasyon)

$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$ vektör değerli bir fonk. olsun. Aynı zamanda vektör alanını gösterir. 1. mertebeden tüm kısmi türevler

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \frac{\partial F_3}{\partial z}$$ tanımlı olsun.

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}$$

(13)

$$\text{curl}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot}\vec{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

→ Bir vektör alanının diverjansı, skale bir alandır
  " rotasyonu, vektörel "

→ $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ ile $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}$ aynı değildir!!

→ $\nabla \cdot \vec{F}$ $\Downarrow$ ile $\vec{F} \cdot \vec{\nabla}$ $\Downarrow$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \neq F_1 \frac{\partial}{\partial x} + F_2 \frac{\partial}{\partial y} + F_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

Örn

$\vec{F} = xy\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + yz\vec{k}$ vektör alanının diverjansı ve rotasyonunu bulun.

$$\text{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= y + 2y + y = 4y$$

$$\text{curl}\vec{F} = \text{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 - z^2 & yz \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial (yz)}{\partial y} - \frac{\partial (y^2 - z^2)}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial (xy)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}(yz)\right)$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right) = 3z\vec{i} - x\vec{k}$$

(14) **Örn**

$\vec{F} = x.e^{y}\,\vec{i} - ye^{x}\,\vec{j}$

$\text{div}\,\vec{F} = ?$ $\quad$ $\text{rot}\,\vec{F} = ?$

$\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-ye^{x}) = e^{y} - e^{x}$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ xe^{y} & -ye^{x} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(ye^{x} + xe^{y})\vec{k}$$

Not: $\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ ise

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{dir}$$

Laplace operatörü:

$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$ ifadesine (sembolüne deir)

→ ϕ skaler bir alan

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \text{div grad}\,\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

→ $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ vektör alanı

$$\nabla^2\vec{F} = (\nabla^2F_1)\vec{i} + (\nabla^2F_2)\vec{j} + (\nabla^2F_3)\vec{k} \quad \text{dir}$$

(15)

Bazı önemli eşitlikler:

ϕ ve ψ skaler ve $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ vektör alanları olsun. Tüm kısmi türevler sürekli olmak üzere

1. $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$
2. $\nabla\cdot(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{F} + \phi(\nabla\cdot\vec{F})$
3. $\nabla\times(\phi\vec{F}) = (\nabla\phi)\times\vec{F} + \phi(\nabla\times\vec{F})$
4. $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G} - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$
5. $\nabla\times(\vec{F}\times\vec{G}) = (\nabla\cdot\vec{G})\cdot\vec{F} + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F} - (\vec{F}\cdot\nabla)\cdot\vec{G} - (\vec{F}\cdot\nabla)\cdot$
6. $\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{F}\times(\nabla\times\vec{G}) + \vec{G}\times(\nabla\times\vec{F}) + (\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G} + (\vec{G}\cdot\nabla$
7. $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0$ (div curl $=0$)
8. $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$
9. $\nabla\times(\nabla\times\vec{F}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$

$$\left(\begin{aligned} &\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \\ &\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} \end{aligned}\right)$$

örneğin (8) in ispatını yapalım:

$$\nabla\times\nabla\phi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)}_{0}\vec{i}$$

$$-\underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)}_{0}\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)}_{0}\vec{k} = 0$$

Diğerlerinin ispatı da vektör özelliklerinden yapılabilir.