Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228
E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Haftalık Konular

- 1. Giriş – Analiz ile ilgili Genel Bilgi
- 2. Reel Değerli Fonksiyonlar / Fonksiyonların sınıflandırılması / Fonksiyonların (polinom, rasyonel, irrasyonel, mutlak değer, işaret, Heaviside, tam değer, üstel, logaritmik, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik, ters hiperbolik, bileşik) tanım kümesi ve genel grafiklerinin verilmesi
- 3. Reel değerli fonksiyonlarda limit kavramı / Sol-sağ limit, sol ve sağ limit ilişkisi / Limit için tekniği / Limit teoremleri, Sıkıştırma teoremi / Sonsuz limitleri, sonsuzda limitler / Belirsiz formlar. Fonksiyonlarda süreklilik / Süreklilik-süreksizlik kavramı / Bir noktada süreklilik-süreksizlik / Sol-sağ süreklilik / Limit-süreklilik ilişkisi / Süreksizlik türleri, kaldırılabilir süreksizlik / Kapalı-sonlu aralıkta süreklilik / Düzgün süreklilik / Süreklilik teoremleri (Ara değer teoremi)

Haftalık Konular

- 4. Türev ve Türev alma Kuralları / Türevin tanımı, geometrik ve fiziksel yorumu / Leibniz gösterilimi / Teğet doğru, normal doğru ve eğim / Toplam, fark, çarpım, oran içeren fonksiyonların türevi / Türev operatörünün lineerliği (genel ifade)
- 5. Bileşke fonksiyonun türevi ve zincir kuralı / Polinom, rasyonel, irrasyonel, mutlak değer, işaret, Heaviside, basamak, üstel, logaritmik, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik, ters hiperbolik fonksiyonların türevleri / Yüksek mertebeden türevler / Parametrik fonksiyonların türevleri (parametrik türev) / Kapalı fonksiyonların türevleri / Ters fonksiyonun türevi
- 6. Ortalama Değer Teoremi / Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi / Rolle Teoremi

Haftalık Konular

- 7. Türevin uygulamaları ve Eğri çizimleri / Birinci türev, artan-azalan fonksiyon ilişkisi / Kritik, Tekil, uç nokta / Extremum (Yerel min., Yerel max.) noktalar / Mutlak min., mutlak max. değerler / İkinci türev testi, İkinci türev ve konkavlık yönü ilişkisi / Asimptot kavramı/
- 8. Ara Sınav I
- 9. Eğrilerin değişimlerinin incelenmesi ve grafiklerinin çizilmesi / Polinom, rasyonel, irrasyonel, mutlak değer, işaret, Heaviside, basamak, üstel, logaritmik, trigonometrik, ters trigonometrik, hiperbolik, ters hiperbolik
- 10. Parametrik ve Kutupsal formda eğri çizimi

Haftalık Konular

- 11. Türevin Belirsiz Limit formlarında uygulanması (L'Hospital kuralı) / Diferansiyel / Diferansiyelin geometrik yorumu / Düzlem eğrilerin diferansiyel geometrisi (yay diferansiyeli) / Parametrik ve kutupsal eğrilerin yay diferansiyeli
- 12. Diferansiyel ve yaklaşık hesap / Lineer Yaklaşım fonksiyonu / Maksimum-Minimum problemleri
- 13. Ara Sınav II
- 14. Sigma (Toplam) sembolü ve özellikleri / Temel alan problemi ve Riemann Toplamları (Düzlem bölgeler için temel alan problemi / Alt ve Üst Riemann Toplamları, Genel Riemann toplamı)

Haftalık Konular

- 15. Belirli integral tanımı ve özellikleri / Riemann toplamı ile alan ifadesi / İntegral Ortalama Değer teoremi ve fonksiyonun ortalama değeri / İntegral işareti altında türev
- 16. Final

Kaynak Kitaplar

- Analiz 1, M. Ali Sarıgöl, Sadulla Jafarov, Ekin Basım Yayın / Matematik Dizisi
- Matematik analiz 1, Mustafa Balcı, Balcı Yayınları.
- Introduction to Real Analysis, Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert, John Wiley & Sons, Inc.; 4 edition (January 14, 2011), ASIN: B005G14KD6.
- Çözümlü Matematik Problemleri, Ekrem SAVAŞ, Meridyen Yayıncılık, ISBN: 975-7616-11-7

Değerlendirme

- Vize I (%30)
- Vize II (%30) (Zorunlu)
- Final (%40)

Analiz nedir?

- Matematikte Analiz (Mathematical Analysis), fonksiyonlar, limit, süreklilik, türev, integral gibi kavramların temellerini inceleyen ve bunları mantıksal bir çerçevede ispatlarla açıklayan bir alandır.
- Örneğin "Her sürekli fonksiyonun ara değer alması" sadece bir gözlem değil, kanıtlanması gereken bir matematiksel gerçektir. $\sin(x)/x \to 1$ limit sonuçlarını ezberlemek yerine neden doğru olduğunu öğreniriz.
- Modern matematiğin temeli olup, birçok bilim dalında kullanılır.
- Fizik, mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimi gibi birçok alandaki uygulamaların arkasındaki teoriyi oluşturur.

Calculus nedir?

- Calculus, 17. yüzyılda Newton ve Leibniz'in geliştirdiği, türev ve integral hesaplarını konu alan alandır. Türev ve integral hesaplarını içerir.
- Fiziksel hareketlerin (hız, ivme), alan ve hacim hesaplarının matematiksel yöntemidir.
- Daha çok hesap yapmaya odaklanır. Örneğin:

  Bir fonksiyonun türevini bulmak

  Belirli bir integral hesaplamak

  Eğri altında kalan alanı ölçmek

Analiz ile Calculus arasındaki farklar

- Calculus, daha çok, nasıl hesap yapılır? sorusuna cevap arar.
- Analiz, bu hesapların neden doğru olduğunu, hangi koşullarda geçerli olduğunu, nerede başarısız olacağını inceler.
- Örneğin:

Calculus'ta "Her türevlenebilir fonksiyon süreklidir" kuralını kullanırız.

Analiz'de ise bu kuralı ispatlar, böylece ezbere dayanmadan, mantıksal temele oturturuz.

- Kısaca:

Calculus = Teknikler ve uygulamalar

Analiz = Teorik temel ve ispat

Analizin Önemi

- **Matematiğin dili ve mantığı**: Analiz, matematiğin pek çok alanına açılan kapıdır.
- **Bilimsel düşünme**: Analiz, kesin kanıtların önemini gösterir.
- **Uygulamalar**: Fizik, mühendislik, yapay zeka, ekonomi gibi alanlarda kullanılan pek çok yöntem analize dayanır.

- Analiz, matematiğin temelini oluşturan, hesaplamaları sağlam bir zemine oturtan bir alandır. Calculus'un sağladığı teknikleri mantıksal olarak ispatlar ve geliştirir. Bu ders sayesinde "neden" sorusunu sormayı ve matematiğe daha derin bir bakış açısıyla yaklaşmayı öğreneceğiz.

Kullanım Alanları

- **Mekanik ve İnşaat Mühendisliği**

Kuvvet, hız ve ivme hesapları türev ile yapılır.

Köprüler, binalar, makineler üzerindeki yük dağılımı ve maksimum gerilmeler türev ve integral yöntemleriyle analiz edilir.

Titreşimler (örneğin deprem etkisi) diferansiyel denklemler ve analiz temeliyle modellenir.

Kullanım Alanları

- **Elektrik – Elektronik Mühendisliği**

Elektrik devrelerinde **akım – gerilim ilişkileri** integral ve türevle ifade edilir.

Sinyal işleme: Bir ses ya da görüntü sinyali, süreklilik ve türev kavramlarıyla incelenir.

Fourier analizi (dalgaların frekans bileşenleri) Analiz'in bir uzantısıdır.

Kullanım Alanları

- **Makine ve Endüstri Mühendisliği**

Termodinamik: Basınç, sıcaklık ve hacim değişimlerinin ilişkileri limit ve türevlerle modellenir.

Akışkanlar mekaniği: Borulardaki akış hızı, uçak kanadındaki hava akımı integrallerle hesaplanır.

Optimizasyon: Minimum maliyet, maksimum verim gibi problemler türev ve türev testleriyle çözülür.

Kullanım Alanları

- **Bilgisayar Mühendisliği**

Grafik ve görselleştirme: Eğri ve yüzey çizimleri Analiz temellerine dayanır.

Makine öğrenmesi: Hata fonksiyonunu minimum yapmak → türev tabanlı optimizasyon.

Algoritmalar: Sürekli fonksiyonların ayrıklaştırılması (discretization) limit ve integral mantığına dayanır.

Kullanım Alanları

- **Enerji ve Çevre Mühendisliği**

  Isı transferi: Bir yüzeyden geçen ısı akışı integrallerle hesaplanır.

  Nüfus modelleri ve kaynak kullanımı: Diferansiyel denklemler üzerinden tahmin yapılır.

- **Özetleyecek olursak**

  Analiz I'de öğreneceğimiz **limit, süreklilik, türev ve integral** kavramları mühendisliğin her dalında hesaplama ve modelleme için **temel araçtır**.

  Mühendis, gerçek bir sistemi anlamak için önce onu **matematiksel modele** dönüştürür; bu modellerin dili **Analiz**'dir.

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

Önerme; doğru veya yanlış yargı bildiren cümlelerdir. Eğer doğru ya da yanlış yargı bildiren cümle matematiksel bir cümle ise bu önermeye matematiksel önerme veya matematik ile ifade denir. Örnek olarak:

Yağmur yağıyor. (Önermedir)

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (Doğru bir önermedir)

Bu önerme yanlıştır. (Önerme değildir.)

Önermeler, genelde **p,q,r,s,t** gibi küçük harflerle adlandırılırlar. x bir değişken olmak üzere P(x) ifadesi x'in her bir değeri için bir önerme oluyorsa P'ye bir **özellik** denir. x'in P özelliğine sahip olması demek P(x) önermesinin doğru olması demektir.

$$P(x) := x > 5$$

$$P(3) \rightarrow 3 > 5 \ \text{ YANLIŞ ÖNERME}$$

$$P(8) \rightarrow 8 > 5 \ \text{ DOĞRU ÖNERME}$$

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- Önermenin değili: Herhangi bir p önermesinin

$$p' \text{ ya da } \sim p \text{ ya da } \neg p$$

ifadeleri ile gösterilen p doğru iken yanlış, p yanlış iken doğru olan p' önermesine p önermesinin değili denir.

p	p'	$(p')'$
D	Y	D
Y	D	Y

p : Yağmur yağıyor.

p' : Yağmur yağmıyor.

$p : x > 5$

$p' : x \leq 5$

$p : x \in A$

$p' : x \notin A$

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- **Niceleyiciler**

i. Her (Herhangi, her bir) niceleyicisi $\forall$ (EVRENSEL NİCELEYİCİ)

$$\forall x \in A \text{ için } P(x) : \text{A'nın her elemanı için P özelliği sağlanır.}$$

$$\text{A'nın her elemanı P özelliğine sahiptir.}$$

ii. Vardır (en az bir, öyle bir) $\exists$ (VARLIK NİCELEYİCİSİ)

$$\exists x \in A \text{ öyle ki } P(x) : \text{A'nın en az bir elemanı öyle ki P özelliği sağlanır.}$$

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- Önermelerde niceleyicilerin yazılış sırası çok önemlidir.

$$\forall x \in \mathbb{Z} \ \ \exists y \in \mathbb{Z} \quad x < y :$$

Her tam sayı için ondan daha büyük en az bir tamsayı vardır.

- Bu durumda:

$$\exists x \in \mathbb{Z} \ \ \forall y \in \mathbb{Z} \quad x < y :$$

YANLIŞ BİR ÖNERMEDİR.

- Önemli Not: Bir ifadenin doğru olduğunu örnek vererek ispatlayamayız. Ancak yanlış olduğunu göstermek için en az bir örnek göstermek YETERLİDİR!

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- Niceleyicileri içeren önermelerin değillerine örnekler:

$$[\forall x \in A \quad P(x)]' = \exists x \in A \quad P'(x): \text{A'nın en az bir elemanı P özelliğine sahip değildir.}$$

$$[\exists x \in A \quad P(x)]' = \forall x \in A \quad P'(x): \text{A'nın her bir elemanı P özelliğine sahip değildir.}$$

$$[\forall x \in A \quad \exists y \in B \quad P(x,y)]' = \exists x \in A \quad \forall y \in B \quad P'(x,y)$$

$$[\exists x \in A \quad \forall y \in B \quad P(x,y)]' = \forall x \in A \quad \exists y \in B \quad P'(x,y)$$

$$F := \text{Tüm fillerin kümesi}$$

$$P(x) := x'in \text{ pembe renkli olma özelliği}$$

$$\forall x \in F \quad P(x): \text{Bütün filler pembedir.}$$

$$\exists x \in F \quad P'(x): \text{En az bir pembe olmayan fil vardır.}$$

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- Yalnızca bir cümleden oluşan önermelere basit önermeler denir. Birden fazla önermenin mantıksal bağlaçlarla bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye **birleşik önerme** denir.
- **Mantıksal Bağlaçlar**

i. VE bağlacı $\wedge$: p ve q gibi iki önermenin kesişimini ifade eder. $p \wedge q$ (p ve q)

p ve q önermelerinin ikisi de doğruyken DOĞRU, diğer durumlarda YANLIŞ değerini alır.

ii. VEYA bağlacı $\vee$: p ve q gibi iki önermenin birleşimini ifade eder. $p \vee q$ (p veya q)

p veya q önermelerinden en az biri doğru iken DOĞRU, diğer durumlarda YANLIŞ değerini alır.

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

iii. Gerektirme $\Rightarrow$: p önermesinin q önermesini gerektirdiğini ifade eder.

$p \Rightarrow q$ p gerektirir q

p ise q

p'den q çıkar

q'nun olması için p yeterlidir

p, q için yeter koşuldur

q, p için gerek koşuldur

p doğru, q yanlışsa YANLIŞ, diğer durumlarda DOĞRU değerini alır.

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

iv. Çift Gerektirme $\Leftrightarrow$:

$p \Leftrightarrow q$ p çift gerektirir q

p ancak ve yalnız(ancak) q

p için gerek yeter koşul q'dur

p eşdeğerdir q

p ve q önermelerinden her ikisi doğru veya her ikisi yanlışken DOĞRU, diğer durumlarda YANLIŞ değerini alır.

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- **Vardır Niceleyicisini içeren önermelerin ispatı:** $\exists x \;\; P(x)$

Genellikle; a) Belirli bir x için P(x) önermesinin doğru olduğu gösterilir. b) P özelliğine sahip olan x'lerin varlığı dolaylı yollardan gösterilir.

c) $\exists x \quad P(x)$ ispatı için

$\forall x \quad P'(x)$ doğru kabul edilir. (Çelişki yöntemi)

d) $\exists ! x \; P(x):$ P özelliğini sağlayan yalnız bir tane x vardır.

tipindeki bir önermenin ispatı için P özelliğine sahip farklı iki elemanın var olduğu kabul edilerek çelişkiye varılır.

ÖRNEK:

$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^5 - 5x - 7 = 0$

$f(x) = x^5 - 5x - 7, x \in \mathbb{R}$

$f(1) = -11$

$f(2) = 15$

$f(1) < 0 < f(2) \rightarrow \exists x \in (1,2) \subseteq \mathbb{R} \quad f(x) = 0$

Sürekli fonksiyonlar için Aradeğer Teoremi

Genel Bilgiler
Matematik Mantığın Temelleri

- **Her niceleyicisini içeren önermelerin ispatı:** $\forall x \;\; P(x)$

Genellikle; a) Keyfi eleman yöntemi kullanılır. İspatı her eleman için tek tek yapamayız. Bu nedenle onun yerine herhangi bir x elemanı seçilir ve ispat yapılır. b) Her x için P özelliğinin sağlanmadığı kabul edilir ve çelişkiye varılır.

Ters Örnek Verme Yöntemi: $\forall x \;\; P(x)$ tipindeki önermenin yanlış olduğunu göstermek için $\exists x \;\; P'(x)$ in doğru olduğunu gösterme yöntemidir.

Uyarı: $\forall x \;\; P(x)$ tipindeki önermenin doğruluğu örnek verilerek ispatlanamaz.

Genel Bilgiler
Kümeler

- Küme kavramı matematiğin en temel ve önemli kavramlarından bir tanesidir. Kümenin tam bir tanımı yoktur. Genelde bir takım nesneler topluluğuna küme denir. Kümeler genelde büyük harflerle adlandırılırlar.
- Elemanı olmayan kümeye boş küme denir. $\varnothing, \{\}$
- $\forall x \in A \quad x \in B$ önermesi gerçekleniyorsa A kümesi B kümesinin alt kümesidir. $A \subseteq B$ ile gösterilir. B, A'yı kapsar. A kümesi B kümesi tarafından kapsanır.

$$P : A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \quad x \in B$$

$$P' : A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \in A \quad x \notin B$$

- $A \subseteq B$ olsun. $\exists x \in B \quad x \notin A$ ise bu durumda A kümesi B kümesinin öz alt kümesidir. $A \subset B$ ile gösterilir.

Boş küme her kümenin alt kümesi midir?

$\varnothing \not\subseteq A$ olsun. $\varnothing \not\subseteq A \rightarrow \exists x \in \varnothing \quad x \notin A$ (Çelişki)

Genel Bilgiler
Kümeler

- Tamamen aynı elemanlardan oluşan iki kümeye **eşit kümeler** denir. $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

İspat:

Gereklilik: $A = B$ olsun. $\forall x \in A = B \rightarrow x \in B \rightarrow A \subseteq B$

$\forall x \in B = A \rightarrow x \in A \rightarrow B \subseteq A$

Yeterlilik: $A \subseteq B$ olsun $\rightarrow x \in A \rightarrow x \in B$

$B \subseteq A$ olsun $\rightarrow x \in B \rightarrow x \in A$

Bu durumda $A = B$

- Boş küme tektir.

İspat: $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$ olan $\varnothing_1$ ve $\varnothing_2$ iki boş küme olsun. Bu durumda

$$\left.\begin{array}{l} \varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \\ \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1 \end{array}\right\} \varnothing_1 = \varnothing_2 \text{ (Çelişki) Boş küme tektir.}$$

Genel Bilgiler
Kümeler

- Elemanları kümelerden oluşan kümeye kümeler kümesi (kümeler ailesi) denir. $B = \{A_1, A_2, ..., A_n\} = \{A_k\}_{k=1}^{n}$
- Tüm kümeleri kapsayan kümeye evrensel küme denir.
- Bir A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesine A kümesinin kuvvet kümesi denir. $\wp(A)$ veya 2^A

$$A = \{a, b\}$$

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Kümelerde işlemler**

i. Birleşim:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ için } A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\substack{k\in I \\ I=\{1,2,\ldots,n\}}} A_k = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$p : x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$p' : x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Kümelerde işlemler:**

ii. Kesişim:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \text{ için } A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\substack{k \in I \\ I=\{1,2,\dots,n\}}} A_k = \{x \mid x \in A_k, k = 1, 2, \dots, n\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$p : x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$p' : x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

Kesişimleri boş olan kümelere **ayrık kümeler** denir.

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Kesişim ve birleşim kümesine ait özellikler:**

$$\varnothing \cap A = \varnothing \qquad \varnothing \cup A = A$$

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B \subseteq A \qquad A \subseteq A \cup B$$

$$A \cap B \subseteq B \qquad B \subseteq A \cup B$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B$$

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Kümelerde işlemler:**

iii. Fark işlemi: $A \setminus B$ şeklinde gösterilir. (A'da olup B'de olmayan elemanlar)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

iv. Tümleyen

$$A' = \{x \mid x \notin A\}$$

$$p : x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

$$p' : x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$$

$$A \setminus B = A \cap B'$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A \cap B'$$

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Fark ve tümleyen işlemine ait özellikler:**

  $\aleph$, evrensel küme olmak üzere, $A, B \subseteq \aleph$

$$A \cap A' = \varnothing$$

$$A \cup A' = \aleph$$

$$A \setminus \varnothing = A$$

$$\varnothing \setminus A = \varnothing$$

$$A \setminus A = \varnothing$$

$$B \subseteq A \Leftrightarrow B \setminus A = \varnothing$$

$$(A')' = A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Kümelerde işlemler:**

v. Simetrik Fark işlemi: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

vi. Kartezyen Çarpım:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n\}$$

Kesişim ve birleşim işlemlerinin genelleştirilmesi:

I, herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\{A_i\}_{i \in I}$ kümeler ailesi verilsin.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\}$$

$\forall i \in I \quad A_i, B \subseteq \aleph$ olsun. $\forall i \in I \quad A_i \subseteq B \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$

İspat: $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in I, x \in A_{i_0} \subseteq B \Rightarrow x \in B$

Genel Bilgiler
Kümeler

- **Genelleştirilmiş De’Morgan Kuralları:**

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$$

İspat:

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' \Rightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \forall i \in I \quad x \notin A_i \Rightarrow \forall i \in I \quad x \in A_i' \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i'$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

İspat: ?

Genel Bilgiler
Kümeler

$A \neq \varnothing$ kümesinin $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$ sağlayan tüm alt kümelerinin ailesi $\{A_i\}_{i \in I}$

olmak üzere, bu $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi eğer,

1) $\forall i, j \in I \; A_i = A_j$ veya $A_i \cap A_j = \varnothing$ ve

2) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

koşullarını sağlıyorsa buna A kümesinin ayrışımı denir.

$\forall i, j \in I$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesinin elemanları ikişer ikişer ayrıktır denir.

Örnek:

$A_1 = \{1, 3, 5, \ldots, 2n+1\}$

$A_2 = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$

$A_1 \cup A_2 = \mathbb{N} \rightarrow \{A_1, A_2\}$: Doğal sayılar kümesinin ayrışımı