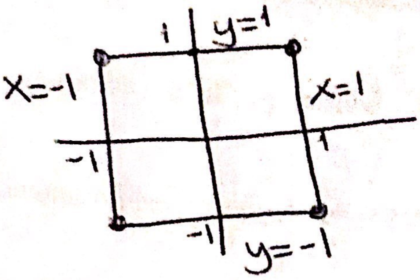
(1)

$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x^2y + 4$ $\quad -1 \leq x \leq 1$ ve $-1 \leq y \leq 1$ diktörgensel bölge ile sınırlı fonksiyonun mutlak ext ?



(1) $(1,1), (1,-1), (-1,-1)$ $(-1,1)$ köşe noktaları yerel max veya min

(2) $f_x = 2x - 4xy = 0$ (*)

$f_y = 8y - 2x^2 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$

(*) da $2x - 4x \cdot \dfrac{x^2}{4} = 2x - x^3$

$= x(2 - x^2) = 0$

$x = 0$ $\quad \cancel{x = \mp\sqrt{2}}$

$y = \dfrac{x^2}{4} = 0$ $\boxed{(0,0)}$ yerel max veya min

(3) $x = 1$

$f(1,y) = g(y) = 1^2 + 4y^2 - 2 \cdot 1^2 \cdot y + 4 = 5 + 4y^2 - 2y$

$g'(y) = 8y - 2 = 0$

$y = 1/4$

$\boxed{(1, 1/4)}$

$x = -1$

$f(-1,y) = g(y) = (-1)^2 + 4y^2 - 2(-1)^2y + 4 = 5 + 4y^2 - 2y$

$g'(y) = 8y - 2 = 0$

$y = 1/4$

$\boxed{(-1, 1/4)}$

$y = 1$

$f(x,1) = g(x) = x^2 + 4 \cdot (1)^2 - 2x^2 \cdot 1 + 4 = 8 - x^2$

$g'(x) = -2x \Rightarrow x = 0$

$\boxed{(0,1)}$

(2) $y=-1$

$f(x,-1)= x^2+4\cdot(-1)^2-2x^2(-1)+4=8+3x^2=g(x)$

$g'(x)=6x \Rightarrow x=0$

$\boxed{(0,-1)}$

yerel min veya max'lar

$(0,0)$ $(1,1)$ $(1,-1)$ $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1/4)$, $(-1,1/4)$

$(0,1)$ ve $(0,-1)$

$\boxed{f(0,0)=4}$ $f(1,1)=7$ $\underline{f(1,-1)=11}$ $\underline{f(-1,-1)=11}$

$f(1,1/4)=19/4$ $f(-1,1/4)=19/4$, $f(0,1)=8$

$f(-1,1)=7$

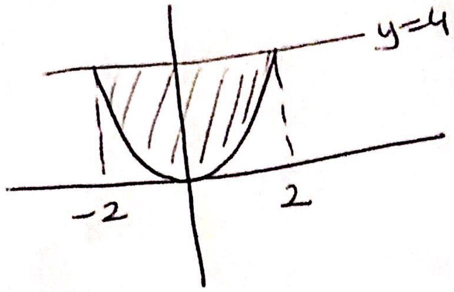
$f(0,-1)=8$

$f(0,0)=4 \rightarrow$ mutlak min değeri

$f(-1,-1)=11$ mutlak max d.

$f(1,-1)=11$

③ $z=f(x,y)=4x^2+y^2-4xy$ fonksiyonunun mutlak ekstremumlarını $y=x^2$ ve $y=4$ eğrileri ile sınırlandırılmış bölgede bulun.



① $\boxed{(-2,4)\quad(2,4)}$

② $f_x=8x-4y=0$

$2/\quad f_y=2y-4x=0$

$y=2x$

$(x,2x)$ formundaki her nokta kritiktir.

Fakat $x\in[0,2]$ aralığında olmalı!

③ $y=x^2$

$f(x,x^2)=g(x)=4x^2+x^4-4x^3 \Rightarrow g'(x)=8x+4x^3-12x^2$

$4x(2+x^2-3x)=0$

$x=0 \quad x=1 \quad x=2$

$\boxed{(0,0)\quad(1,1)\quad(2,4)}$

$y=4$

$f(x,4)=g(x)=4x^2+16-16x \Rightarrow g'(x)=8x-16=0$

$x=2$

$\boxed{(2,4)}$

(x,y)	$f(x,y)=4x^2+y^2-4xy$	
$(x,2x),\ x\in[0,2]$	0	$\rightarrow$ mutlak min
$(-2,4)$	64	mutlak max
$(1,1)$	1	

4

Lagrange Çarpanları Yöntemi:

f ve g fonksiyonlarının ($g(x,y)=0$ denklemi ile verilen bir C eğrisinin) $P_0(x_0,y_0)$ noktası civarında sürekli olduğunu varsayalım. Eğer,

→ P_0 noktası C eğrisinin sınır noktası değilse

→ $\nabla g|_{P_0} \neq 0$

ise öyle bir λ_0 sayısı vardır ki, (x_0, y_0, λ_0) noktası Lagrange fonksiyonlarının kritik noktasıdır.

ve

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y), \quad L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

dir. Aynı zamanda $f(x,y)$'P_0 da yerel max'a veya min'a sahiptir.

$\lambda \rightarrow$ Lagrange çarpanı

→ L nin kritik noktaları $f(x,y)$ nin ~~kritik~~ max veya min noktalarıdır. Bu noktalar $g(x,y)=0$ bağıntısını sağlar.

$$L_x = f_x + \lambda g_x = 0$$
$$L_y = f_y + \lambda g_y = 0$$
$$L_\lambda = g(x,y) = 0$$

* $w = f(x,y,z)$ ise $\phi_1(x,y,z)=0$, $\phi_2(x,y,z)=0$ yan şartları olsun.

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda \phi_1 + \mu \phi_2$$

(5)

Uygulaması

(1) Bizi sınırlayan denklemi $g(x,y)$ veya $g(x,y,z)$ $=0$ fonksiyonuna çevirmeliyiz.

(2) L_x ve L_y den eşitlik bulunur ve $L_\lambda = 0$ $\downarrow$ $g(x,y)=0$ dan λ lagrange çarpanı bulunur.

(3) λ çarpanından yararlanarak x ve y bulunur $f(x,y)$ fonksiyonunda yerine yazılır ve max-min değerler bulunur.

Örn

$f(x,y)=5x-3y$ fonksiyonunun $x^2+y^2=136$ eşitliğini sağlayan noktalardaki maks. ve min noktalarını bulun

(1) $g(x,y)=x^2+y^2-136 \rightarrow$ yan şart

(2) $L = 5x-3y+\lambda(x^2+y^2-136)$

$L_x = 5+2\lambda x = 0 \rightarrow x = -5/2\lambda$

$L_y = -3+2\lambda y = 0 \rightarrow y = 3/2\lambda$

$L_\lambda = g(x,y) = x^2+y^2-136 = 0$

$\frac{25}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 136 = 0$

$\lambda^2 = 1/16$

$\lambda = \mp 1/4$

(3)

$\lambda = -\frac{1}{4}$

$x = \frac{-5}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 10$

$y = \frac{3}{2\lambda} = -6$ $\quad 2\lambda \rightarrow -\frac{1}{2}$

$\boxed{10,-6}$

$\lambda = 1/4$

$x = \frac{-5}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = -10$

$y = \frac{3}{2\lambda} = 6$ $\quad \lambda \rightarrow 1/4$

$\boxed{-10,6}$

$f(x,y) = 5x-3y$

$f(10,-6) = 68 \Rightarrow$ max

$f(-10,6) = -68 \rightarrow$ min.

(6) $f(x,y)=4x^2+10y^2$ fonksiyonunun $x^2+y^2=4$ denklemini sağlayan noktalardaki max ve min. bulun.

(1) $x^2+y^2-4=g(x,y)$

(2) $L = 4x^2+10y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$

$Lx = 8x+2\lambda x=0$ $\quad 8x=-2\lambda x \sim x=0 \quad \cancel{\lambda=4}$

$Ly = 20y+2\lambda y=0$ $\quad 20y=-2\lambda y \sim y=0 \quad \cancel{\lambda=10}$

$L\lambda = x^2+y^2-4=0$

$\downarrow$

$x=0 \quad y^2=4 \quad y=\mp 2$ $\quad \boxed{(0,2) \ (0,-2)}$

$y=0 \quad x^2=4 \quad x=\mp 2$ $\quad \boxed{(2,0) \ (-2,0)}$

(3) $f(x,y)=4x^2+10y^2$

$\boxed{f(0,2)=40}$ $\quad f(0,-2)=40$

$\boxed{f(2,0)=16}$ $\quad \boxed{f(-2,0)=16}$

max $\qquad$ min.

—o—

$f(x,y)=x^2+3y^2$ fonksiyonunun $(x-1)^2+y^2\leq 4$ çemberiyle sınırlandırılmış bölgede mutlak max ve min bulun.

$L(x,y,\lambda) = x^2+3y^2+\lambda((x-1)^2+y^2-4)$

$Lx = 2x+2\lambda(x-1)=0$

$Ly = 6y+2\lambda y=0 \Rightarrow 6y=-2\lambda y \Rightarrow y=0$ veya $\lambda=-3$

$L\lambda = (x-1)^2+y^2-4=0$

$\downarrow 0$ $\qquad \Downarrow$

$(x-1)^2=4$ $\qquad 2x+2.(-3)(x-1)=0$

$x=-1 \quad x=3$ $\qquad x=\frac{3}{2}$

$\boxed{(-1,0) \ (3,0)}$ $\qquad (x-1)^2+y^2-4=0$

$\downarrow 3/2$ $\quad y=\mp\frac{\sqrt{15}}{2}$

(7) $(-1,0)$ $(3,0)$ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{15}{2}}\right)$

$\Downarrow$

max ve min noktaları

$f(-1,0) = 1$ ~ mutlak min

$f(3,0) = 9$

$f(3/2, -\sqrt{15}/2) = \frac{9}{4} + 3 \cdot \frac{15}{4} = \frac{54}{4} = f\left(3/2, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

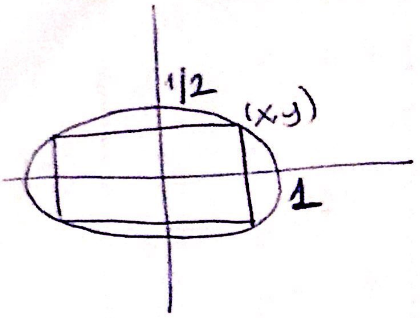
mutlak max değerleri

(8) $x^2+4y^2=1$ elipsinin içerisine simetrik olarak yerleştirilebilen alanı max olan dikdörtgeni bulunuz.

$$x^2+\frac{y^2}{1/4}=1$$

$$A=4xy$$

$$x^2+4y^2-1=0 \text{ yarsat}$$



$$L(x,y,\lambda)=4xy+\lambda(x^2+4y^2-1)$$

$$L_x=4y+2\lambda x=0 \Rightarrow 4y=-2\lambda x \Rightarrow \lambda=\frac{-2y}{x}$$

$$L_y=4x+8\lambda y=0 \Rightarrow 4x=-8y\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{-x}{2y}$$

$$\frac{-2y}{x}=\frac{-x}{2y} \qquad 4y^2=x^2$$

$$L_\lambda=x^2+4y^2-1=0$$

$$x^2+x^2-1=0 \qquad x^2=1/2$$

$$x=1/\sqrt{2}$$

$$y^2=\frac{1-x^2}{4}=\frac{1-1/2}{4}=\frac{1}{8}$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$A=4xy=\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}=1$$

örn

$z=x^2+y^2$ yüzeyinin $x+y+z=12$ düzlemi ile kesişim eğrisi üzerinde bulunan ve orijine en yakın olan nok. bulun.

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-12)+\lambda_2(z-x^2-y^2)$$

$$L_x=2x+\lambda_1-2\lambda_2 x=0$$

$$L_y=2y+\lambda_1-2\lambda_2 y=0$$

$(x-y)(1-\lambda_2)=0$

i) $x=y$ ii) $\lambda_2=1$

$$L_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$L_{\lambda_1}=x+y+z-12=0$$

$$L_{\lambda_2}=z-x^2-y^2=0$$

9)

i) $x=y$

$x+x+z-12=0$

$z-x^2-x^2=0$

$2x+z=12$

$-/ \quad -2x^2+z=0$

$2x+2x^2=12$

$x^2+x-6=0$

$x=-3 \qquad x=2$

$y=-3 \qquad y=2 \qquad z=12-\underset{2}{\underset{\downarrow}{2x}}=8$

$z=12-\underset{-3}{\underset{\downarrow}{2x}}=18$

$(-3,-3,18) \qquad (2,2,8)$

ii) $\lambda_2=1$

$2x+\lambda_1-2x=0$

$\lambda_1=0$

$2z+\lambda_1+\lambda_2=0$

$2z+0+1=0$

$z=-1/2$

$z-x^2-y^2=0$

$\underset{-1/2}{\downarrow} \qquad x^2+y^2=-1/2$ olamaz !!!

$(-3,-3,18) \qquad (2,2,8)$

$d_1=\sqrt{9+9+324}=\sqrt{342}$

$d_2=\sqrt{4+4+64}=\sqrt{72}$, $P(2,2,8)$ noktası en yakın nokta !

(10)

$f(x,y,z) = 4y - 2z$ fonksiyonunun $2x - y - z = 2$ ve $x^2+y^2=1$ ile sınırlandırılmış bölgede ext?

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 4y - 2z + \lambda_1(2x-y-z-2) + \lambda_2(x^2+y^2-1)$$

$$L_x = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \qquad -4 + 2\lambda_2 x = 0 \rightarrow x = 2/\lambda_2$$

$$L_y = 4 - \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \qquad 4+2+2\lambda_2 y = 0 \rightarrow y = -3/\lambda_2$$

$$L_z = -2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$$

$$L_{\lambda_1} = 2x - y - z - 2 = 0$$

$$L_{\lambda_2} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow \frac{4}{\lambda_2^2} + \frac{9}{\lambda_2^2} - 1 = 0$$

$$\lambda_2^2 = 13$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{13} \qquad \lambda_2 = \sqrt{13}$$

$\lambda_2 = -\sqrt{13}$

$$x = \frac{2}{\lambda_2} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$y = -\frac{3}{\lambda_2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$z = 2x - y - 2 = -\frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2$$

$\lambda_2 = \sqrt{13}$

$$x = \frac{2}{\lambda_2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$y = -3/\sqrt{13}$$

$$z = 2x - y - 2 = \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = \frac{7}{\sqrt{13}} - 2$$

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right) \qquad P_2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2\right)$$

$$f|_{P_1} = 4 + \frac{26}{\sqrt{13}} = 11.2111 \quad \text{max} \qquad f|_{P_2} = 4 - \frac{2}{\sqrt{13}} = -3.2111 \quad \text{min}$$