Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Türev
Bazı temel teoremler

Teorem 6.19.1. $f:(a,b)\to R$ fonksiyonu $x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir ve $f'_r(x_0) \neq 0$ olsun.

a-) Eğer $f'(x_0) > 0$ ise $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ için $f(x) < f(x_0)$ ve $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ için $f(x) > f(x_0)$,

b-) Eğer $f'(x_0) < 0$ ise $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ için $f(x_0) < f(x)$ ve $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ için $f(x_0) > f(x)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Türev
Bazı temel teoremler

Uyarı: Bu teoreme göre, $f'(x_0) > 0$ olduğunda f fonksiyonu artan olacak şekilde x_0'ın bir koşuluğu vardır diyemeyiz. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alırsak

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x\sin(1/x) - 2\cos(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

olur. $f'(0) = 1 > 0$ dır ve dolayısıyla 0 noktasının öyle bir $(-\delta, \delta)$ komşuluğu vardır ki $\forall x \in (-\delta, 0)$ için $f(0) > f(x)$ ve $\forall x \in (0, \delta)$ için $f(0) < f(x)$ kaldığı açıktır. Fakat 0'a keyfi derecede yakın x değerleri için $f'(x)$ hem pozitif hem de negatif değerler aldığından f'nin artan olduğu 0 noktasının komşuluğu yoktur.

Türev
Ekstremum noktaları - tanım

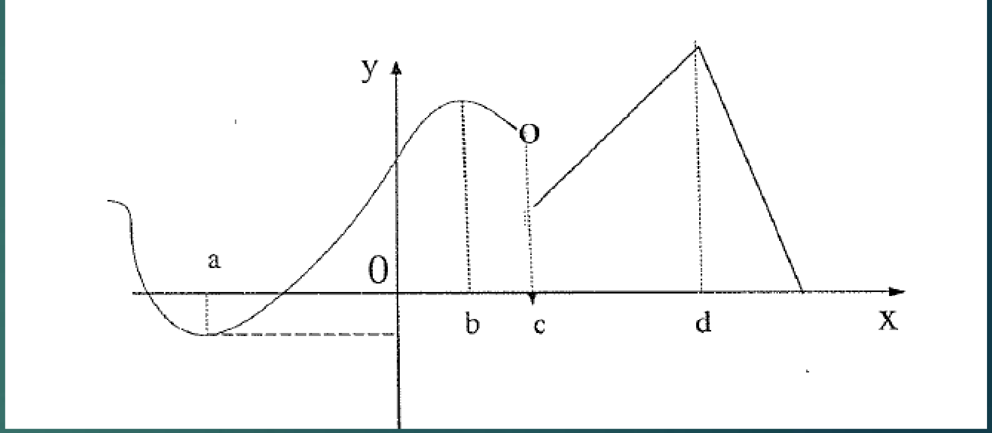
Tanım 6.19.2. $X \subset R$, $f : X \to R$ ve $a,b,c,d \in X$ olsun. Eğer

a-) $\forall x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$ için $f(x) \leq f(a)$ olacak şekilde a'nın bir $\delta > 0$ komşuluğu varsa **f'ye a noktasında yerel (lokal) maksimuma,**

b-) $\forall x \in X \cap (b-\delta, b+\delta)$ için $f(x) \geq f(b)$ olacak şekilde b'nin bir $\delta > 0$ komşuluğu varsa, **f'ye b noktasında yerel (lokal) minimuma** sahiptir denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine **fonksiyonun ekstremumları** veya **ekstrem değerleri** adı verilir.

c-) Eğer $\forall x \in X$ için $f(x) \leq f(c)$ ise **f'ye c noktasında mutlak maksimuma,** $f(x) \geq f(d)$ ise **d noktasında mutlak minimuma** sahiptir denir.



a,c : yerel minimum
b,d : yerel maksimum
a : mutlak minimum
d : mutlak maksimum

Türev
Fermat Teoremi

Teorem 6.19.3. (Fermat Teoremi). $f:(a,b)\to R$ fonksiyonu $x_0 \in (a,b)$ noktasında yerel maksimuma veya yerel minimuma sahip olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebiliyorsa bu taktirde

$$f'(x_0)=0$$

dır.

Uyarı . Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani f fonksiyonu $x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0)=0$ olduğunda, f bu noktada yerel ekstremuma sahip olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(x)=x^3$ fonksiyonu için $f'(0)=0$ olmasına karşın f , $x_0=0$ noktasında yerel ekstremuma sahip değildir. Çünkü, bu noktanın herhangi bir $(-\delta,\delta)$ komşuluğu verildiğinde

$$\forall x \in (-\delta,0) \text{ için } f(x)<0=f(0) \text{ ve } \forall x \in (0,\delta) \text{ için } f(x)>0=f(0)$$

dır.

Türev
Fermat Teoremi

Teorem 6.19.4. Eğer $f:(a,b)\to R$ fonksiyonu x_0 noktasında yerel ekstremuma sahip ise bu taktirde $f'(x_0)=0$ veya $f'(x_0)$ mevcut değildir.

Sonuç 6.19.5. $f:(a,b)\to R$ bir fonksiyon ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer $f'(x_0)$ mevcut ve $f'(x_0)\neq 0$ ise bu taktirde f fonksiyonu x_0'da yerel ekstremuma sahip değildir.

Türev
Rolle Teoremi

Teorem 6.19.6. (Rolle Teoremi). f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise bu taktirde

$$f'(x_0)=0$$

olacak şekilde $x_0 \in (a,b)$ vardır.

Özel olarak f(a)=f(b)=0 alınırsa Rolle teoremi şu şekilde ifade edilebilir ; Kapalı bir aralıkta sürekli ve bu aralığın iç kısmında türevlenebilen bir fonksiyonunun iki kökü arasında türevin en az bir kökü vardır

Türev
Rolle Teoremi - uygulama

Örnek 28. $f(x)=\sqrt[3]{8x-x^2}$ fonksiyonunun $[0,8]$ aralığında Rolle teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz ve teoremdeki x_0 noktasını bulunuz

Örnek 29. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında Rolle teoreminin şartlarını sağlar mı ? Neden ?

Türev
Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi

Teorem 6.19.7 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi). $f, g : [a,b] \to R$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $\forall x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$, bu taktirde

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Türev
Ortalama Değer Teoremi

Eğer bu teoremde özel olarak g(x)=x alınırsa aşağıdaki temel teorem elde edilir :

Teorem 6.19.8 (Ortalama Değer Teoremi). Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir ise bu taktirde

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Türev
Ortalama Değer Teoremi - uygulama

Örnek 30. $f(x)=2x-x^2$ fonksiyonunun $[1,3]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin şartlarını sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

Örnek 31. Aşağıdaki eşitsizlikleri ispat ediniz.

a-) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$

b-) $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$

Örnek 32. (a,b) sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f:(a,b)\to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)$ türevi mevcut ve sınırlı ise f'nin düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Türev
Ortalama Değer Teoremi - uygulama

Örnek 33. $f(x)=\sqrt{x}$ ve $g(x)=1/\sqrt{x}$ fonksiyonları için $a>0$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında Genelleştirilmiş Ortalama Değer teoremini uygulayarak teoremdeki x_0 sayısını bulunuz.

Örnek 34. Eğer f fonksiyonu $x_1.x_2>0$ olmak üzere $[x_1,x_2]$ aralığında türevlenebilir ise gösteriniz ki,

$$\Delta=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(x_0)-x_0 f'(x_0)$$

olacak şekilde $x_1<x_0<x_2$ vardır.

Teorem 6.19.9. f fonksiyonu x_0 noktasının bir δ - komşuluğunda yani $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ için $f'(x)>0$ (veya $f'(x)<0$) ise bu taktirde f bu komşulukta kesin artandır (veya kesin azalandır).

Türev
Kritik noktalar - uygulama

Tanım 6.19.10. Fonksiyonun tanim kümesinde türevinin mevcut olmadığı veya sıfıra eşit olduğu noktalara **kritik noktalar** denir.

Örnek 35. $f(x) = 3 - x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ve $h(x) = |x+1| + 2$ fonksiyonlarının varsa kritik noktalarını bulunuz.

Türev
Yerel maks, yerel min – türevle ilişki

Teorem 6.19.11. f fonksiyonu x_0 noktasının bir δ -komşuluğunda türevlenebilir olsun. Eğer $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ için $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) ve $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ için $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) ise bu taktirde f fonksiyonu x_0 noktasında yerel maksimuma (minimuma) sahiptir.

Uyarı. Bu teorem f'nin x_0 noktasında türevlenebilir olmaması fakat sürekli olması durumunda da doğrudur. Örneğin, $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında türevlenebilir olmamasına karşın sürekli olduğundan bu noktada yerel minimuma sahiptir.

a-) Türevin kökleri ve işareti incelenir.

b-) Türevin süreksizlik noktaları bulunur.

c-) Fonksiyonun kritik noktalarda aldığı değer bulunur.

Türev
Ekstremum noktaları - uygulama

Örnek 36. $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

Örnek 37. $f(x) = (x+3)^2 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ fonksiyonunun ekstrem yerlerini ve cinslerini inceleyiniz.

Türev
Yerel maks, yerel min – ikinci türevle ilişki

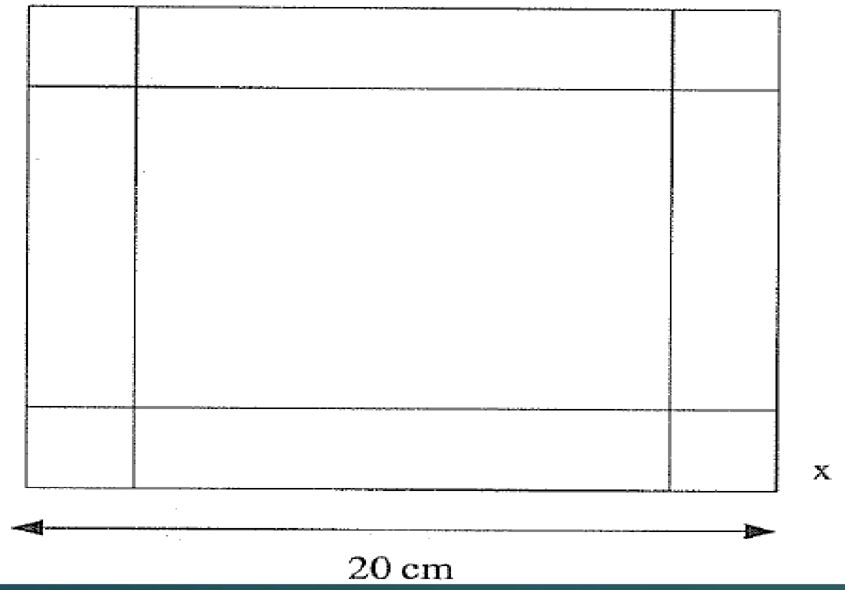
Teorem 6.19.12. $f:(a,b)\to R$ fonksiyonu türevlenebilir ve $x_0 \in (a,b)$ için $f'(x_0)=0$ olsun. Eğer $f''(x_0)>0$ ve $f''(x_0)<0$ ise bu taktirde f'nin x_0 noktasında sırasıyla yerel minimumu ve yerel maksimumu vardır.

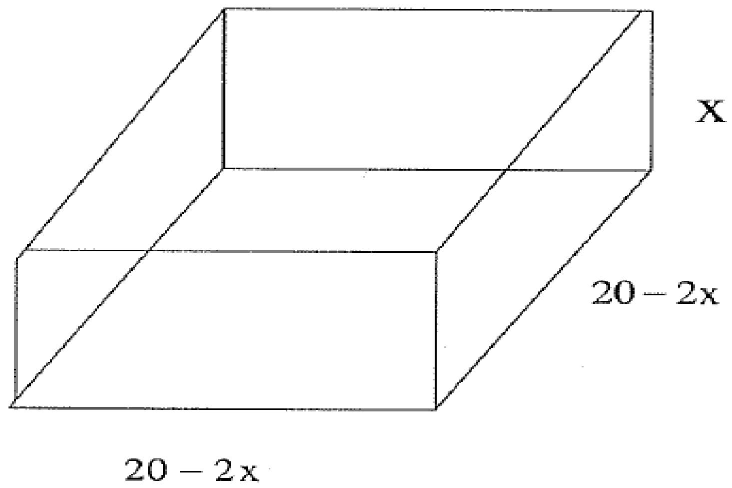
Örnek 38. $f(x)=x^3-12x$, $f:R\to R$ fonksiyonunun ekstrem yerlerini ve cinslerini belirtiniz.

Örnek 39. $f(x)=\sin^2 x$ fonksiyonunun ekstrem yerlerini ve cinslerini belirtiniz.

Türev
Yerel maks, yerel min – uygulama

Örnek 40. Şekil 'de görüldüğü gibi bir kenarının uzunluğu 20 cm olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden bir kenarı x cm olan kare parçalar kesilip atılıyor. Geri kalan parçalar çizgiler boyunca katlanarak üstü açık bir kutu yapılıyor. Bu kutunun maksimum hacimde olması için x kaç cm olmalıdır ?





Türev
Yerel maks, yerel min – genel ilişki

Teorem 6.19.13. f fonksiyonunun (a,b) aralığında $f^{(n)}$ türevi mevcut ve $x_0 \in (a,b)$ noktasında n. mertebeye kadar olan türevler sürekli olsun. Ayrıca

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

şartları sağlansın. Bu taktirde

a-) Eğer n çift ve $f^{(n)}(x_0) > 0$ ise x_0 yerel minimum noktasıdır.

b-) Eğer n çift ve $f^{(n)}(x_0) < 0$ ise x_0 yerel maksimum noktasıdır.

c-) Eğer n tek ise x_0, ne yerel minimum ne de yerel maksimum noktası değildir.

Örnek 41. $f(x) = (x-1)^8 + 3$ fonksiyonun ekstrem yerlerini ve cinslerini belirtiniz.

Türev
Konvekslik, konkavlık, büküm noktası

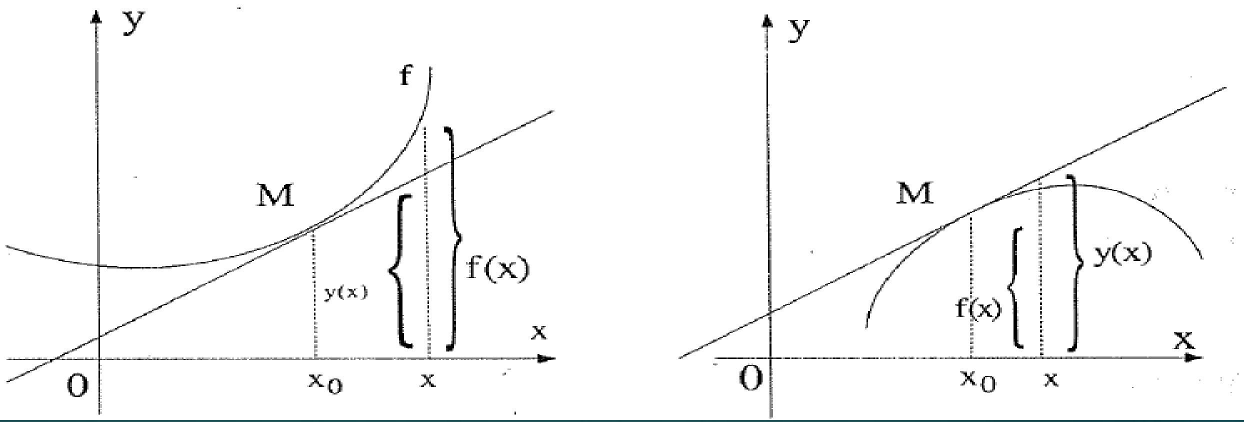
(a,b) aralığında tanımlı sürekli türevlenebilen y=f(x) fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda f'nin grafiğinin her noktasında teğeti vardır ve bir x_0 noktasındaki teğet denklemi ise

$$y(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

dır. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 6.20.1. $f:(a,b)\to R$ ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer x_0'ın bir komşuluğundaki her x $(x\neq x_0)$ için $f(x)>y(x)$ $(f(x)<y(x))$ eşitsizliği sağlanıyorsa, yani $y=f(x)$ eğrisinin bu komşuluğa karşılık gelen kısmı $M(x_0,f(x_0))$ noktasından çizilen teğetin üzerinde(altında) kalıyorsa, bu taktirde eğriye **x_0 noktasında konvekstir (konkavdır)** denir.

Şekil 'de görüldüğü gibi y=f(x) eğrisi x_0 noktasında sırasıyla konveks ve konkavdır.



Türev
Konvekslik, konkavlık, büküm noktası

f fonksiyonunun (a,b) aralığının bütün noktalarında konveks (konkav) olması durumunda f'ye bu aralıkta konvekstir (konkavdır) denir. Bu tanıma göre teğet ile ilgili şartın sağlanması için fonksiyonun türevlenebilir olması gerekir.

Konveks ve konkav fonksiyon aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir.

Tanım 6.20.2. $f:(a,b)\to R$ ve $x_1,x_2\in(a,b)$ verilmiş olsun. Eğer $\forall\lambda\in(0,1)$ için

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

veya

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna (a,b) aralığında sırasıyla **konvekstir** veya **konkavdır** denir.

Türev
Konvekslik, konkavlık, büküm noktası

Konveks (konkav) kavramını fonksiyonun ikinci mertebeden türevi cinsinden de ifade etmek mümkündür. Uygulamalarda da kullanışlı olan bu teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 6.20.3. $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu (a,b) aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $\forall x\in(a,b)$ için $f''(x)>0$ $\left(f''(x)<0\right)$ ise bu taktirde f fonksiyonu (a,b) aralığında konvekstir (konkavdır).

Örnek 42. $f(x)=x^4-6x^2+5,\quad f:R\to R$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Türev
Konvekslik, konkavlık, büküm noktası

Tanım 6.20.4. $y=f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında teğeti mevcut olsun. Eğer x_0 noktasının solunda ve sağında fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği bir komşuluğu varsa, bu noktaya **büküm noktası** denir.

Teorem 6.20.5. Kabul edelim ki f fonksiyonu x_0 noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip olsun. Eğer $M(x_0, f(x_0))$, f 'nin büküm noktası ise bu taktirde

$$f''(x_0) = 0$$

dır.

Uyarı. Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani $f''(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan her $M(x_0, f(x_0))$ noktası fonksiyonun büküm noktası olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(x) = x^4$ fonksiyonu için $f''(0) = 0$ olmasına rağmen $M(0, f(0)) = M(0,0)$ noktası büküm noktası değildir. Zira, bu noktada $f''(x) = 12x^2$ türevi işaret değiştirmez.

Türev
Konvekslik, konkavlık, büküm noktası

Teorem 6.20.6. Kabul edelim ki f fonksiyonu x_0 noktasının bir komşuluğunda ikinci mertebeden türeve sahip olsun. Eğer $f''(x)$ fonksiyonu bu komşulukta x_0'ın solunda ve sağında farklı işaretlere sahip ise bu taktirde x_0 fonksiyonun büküm noktasıdır.

Uyarı. Eğer f fonksiyonu x_0 noktası hariç bu noktanın bir komşuluğunda ikinci mertebeden türevlenebilir ve $M(x_0, f(x_0))$ noktasında teğeti varsa teoremin hükmü doğrudur. Yani, x_0'ın solunda ve sağında $f''(x)$ farklı işarete sahip ve fonksiyonun $M(x_0, f(x_0))$ noktasında teğeti varsa, bu nokta bir büküm noktasıdır. Örneğin, $f(x) = x^{1/3}$ fonksiyonu x=0 noktası hariç bu noktanın komşuluğunda her mertebeden türevlenebilirdir fakat x=0'da $f''(x) = (-2/9)x^{-5/3}$ mevcut değildir. Ayrıca $x \to 0$ için $f'(x) \to \infty$ olduğundan O(0,0) noktasındaki teğeti oy -eksenidir. Dolayısıyla x=0 büküm noktasıdır.

Türev
Konvekslik, konkavlık, büküm noktası

Örnek 43. $y = e^{\sqrt[3]{x}}$ eğrisinin büküm noktalarını ve bu noktalarda eğriye çizilen teğetin eğimini bulunuz.

Örnek 44. y=f(x) fonksiyonu

$$\begin{cases} x = 1 + \cot t \\ y = \dfrac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}, \quad 0 < t < \pi$$

parametrik gösterimi ile verilmiş olsun. Bu fonksiyonun büküm noktalarını bulunuz.

Örnek 45. $\forall x, y \in R$ için $e^{(x+y)/2} \leq \dfrac{e^x + e^y}{2}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Türev
Asimptot kavramı

Kartezyen koordinat sisteminde bir C eğrisini ve bu eğri üzerinde hareket eden M noktasını göz önüne alalım. Eğer M noktasının koordinatlarından en az biri mutlak değer bakımından sınırsız artıyorsa, bu noktanın koordinat başlangıcına olan uzaklığı sınırsız olarak artar. Bu durumda M'ye C eğrisi üzerinde sonsuza uzaklaşan nokta denir. Eğer M noktasının koordinatları M(x,y) ile gösterilirse bu noktanın koordinat başlangıcına olan uzaklığı

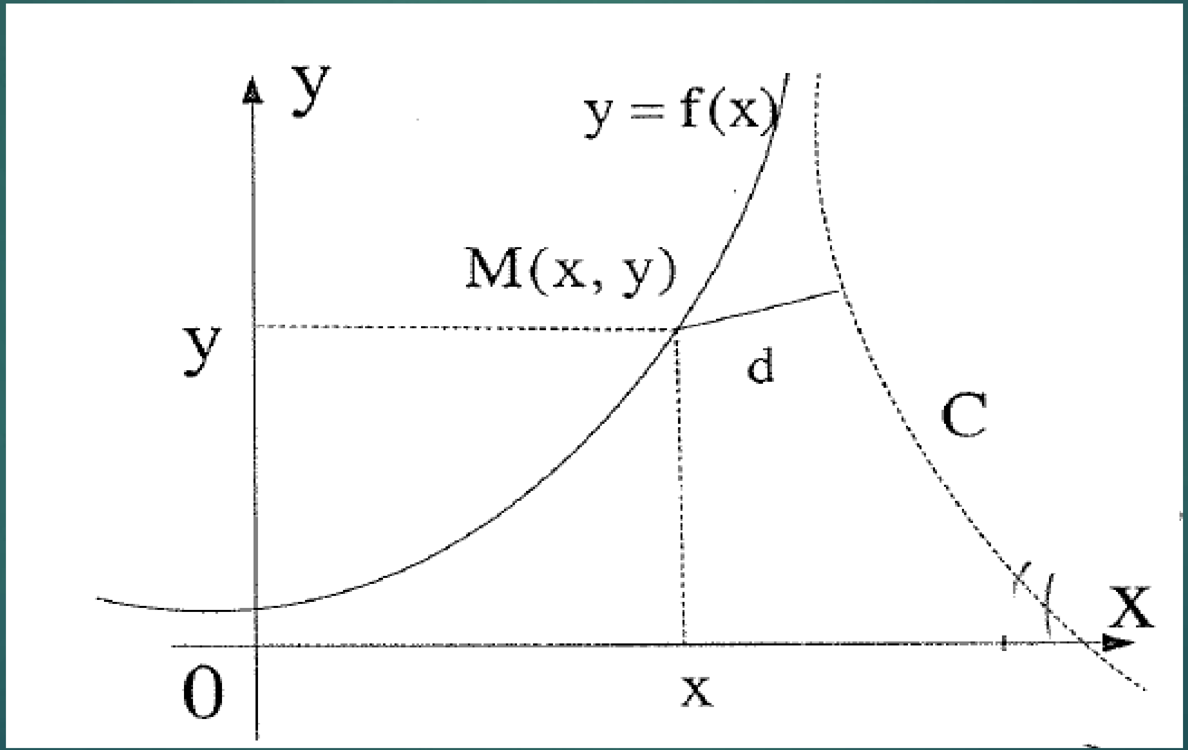
$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ olacağından } \; x \to \pm\infty \text{ veya } y \to \pm\infty \text{ için } r \to \infty$$

(Şekil.7). Tanım veya değer kümelerinden en az biri sınırsız olan y=f(x) fonksiyonunu göz önüne alalım. Herhangi bir g polinomunun grafiğini C eğrisi ile gösterelim. M(x,y) , y=f(x) eğrisi üzerinde keyfi nokta olmak üzere orijinden sonsuza uzaklaştığında, C eğrisine olan uzaklığı sıfıra gidiyorsa, yani M noktasının C eğrisine uzaklığı d olmak üzere

$$\lim_{r \to \infty} d = 0$$

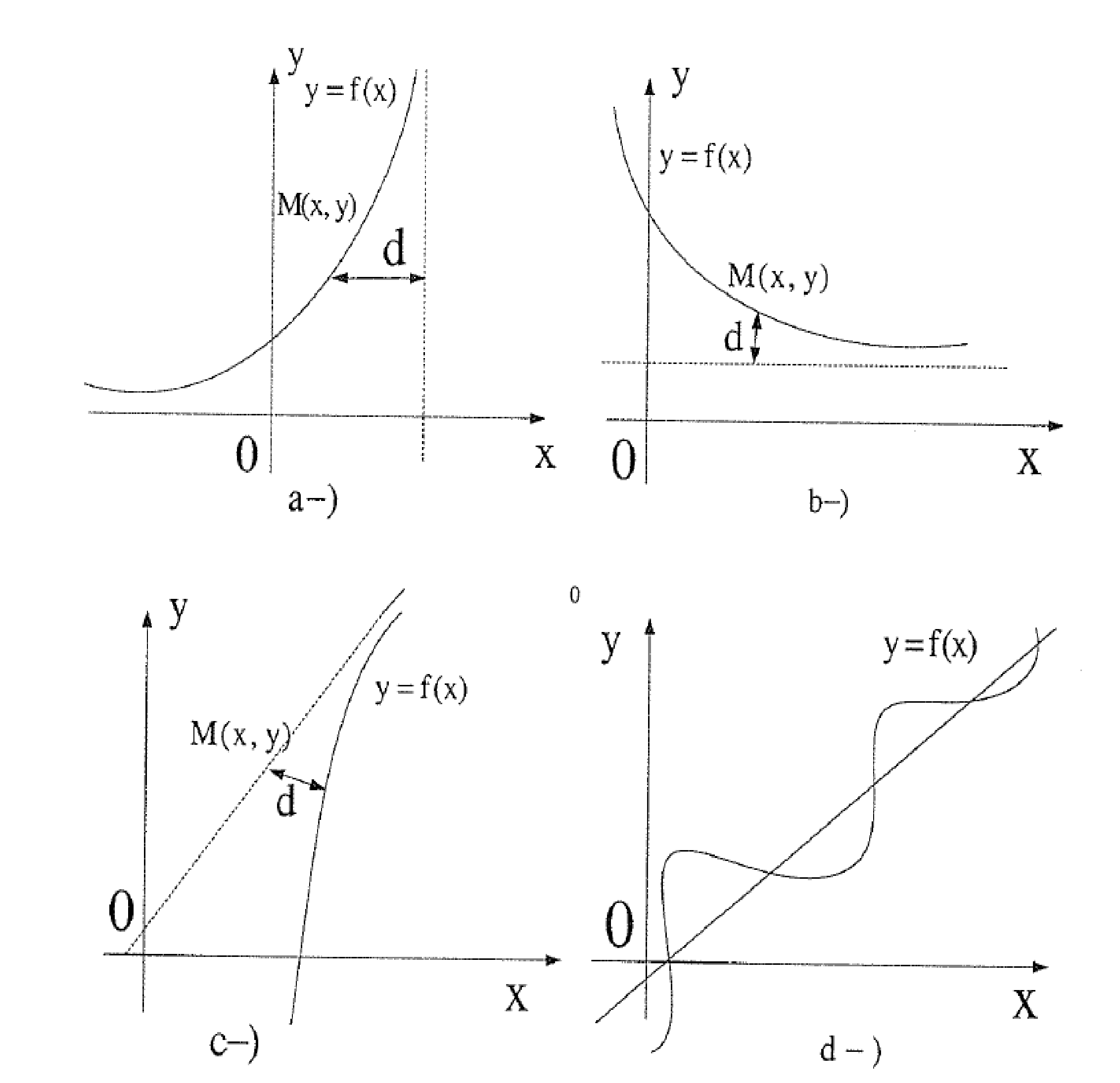
ise bu taktirde C eğrisine y=f(x) eğrisinin **asimptodudur** denir. Asimptot, yunanca anlamı teğet olan **asimgtotos** kelimesinden alınmıştır.

Türev
Asimptot kavramı



Türev
Asimptot kavramı

Bir eğrinin asimptodu olabilir veya (farklı eğri anlamında) olmayabilir. Bu bağlamda sonlu sayıda hatta sonsuz sayıda asimptodu olan eğriler vardır. Açıktır ki asimptot eğriyi kesebilir veya kesmeyebilir.



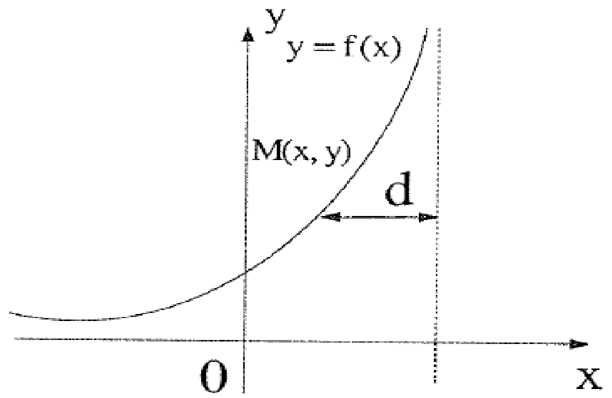
Türev
Düşey Asimptot

M(x,y) noktasının orijinden sonsuza uzaklaşması durumunda yani, $r \to \infty$ için genel olarak aşağıdaki üç durum ortaya çıkar :

1-) Bu noktanın x apsisi a sayısına yaklaşırken y ordinatının mutlak değeri sınırsız olarak artıyorsa x=a doğrusu f'nin sonsuz süreksizlik noktasıdır. Bu durumda f fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan M(x,f(x)) noktasının x=a doğrusuna olan d uzaklığı M sonsuza uzaklaşırken sıfıra gider, yani

$$\lim_{r \to \infty} d = \lim_{x \to a} |x - a| = 0$$

olur. Bu demektir ki x=a doğrusu f'nin asimptodudur. Bu asimtoda **düşey asimptot** adı verilir.



a–)

Türev
Düşey Asimptot

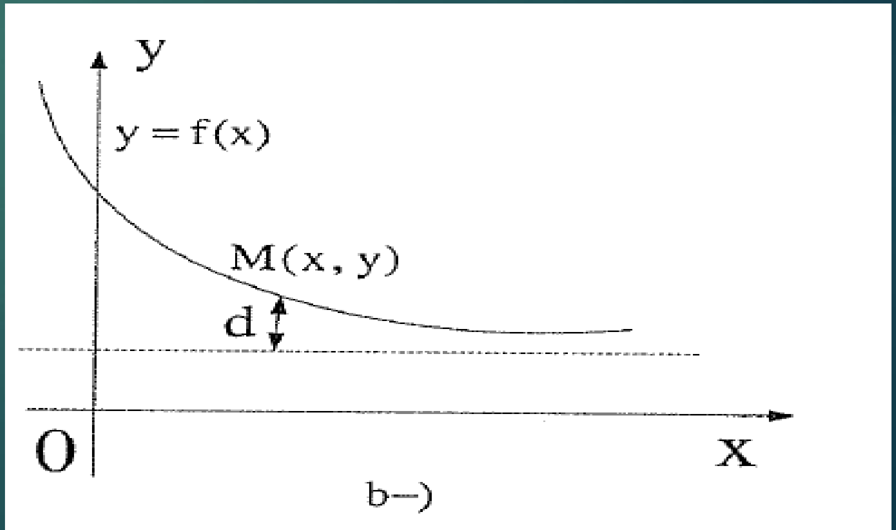
Örnek 59. $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulunuz.

Örnek 60. $y = f(x) = \tan x$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Türev
Yatay Asimptot

2-) Eğer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

olacak şekilde b sayısı varsa, bu taktirde y=b doğrusu bir asimptottur. Çünkü f'nin grafiği üzerinde bulunan M(x, f(x)) noktası sonsuza uzaklaşırken bu noktanın y=b doğrusuna olan $d = |f(x) - b|$ uzunluğu sıfıra gider. Bu tür asimptotlara **yatay asimptot** adı verilir.



Türev
Yatay Asimptot

Örnek 61. $y = f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 + 1}$ fonksiyonun yatay asimptotlarını bulunuz.

Örnek 62. $y = f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ fonksiyonunun yatay asimptotlarını bulunuz.

Türev
Eğik (eğri) Asimptot

3-) M(x,y) noktanın x koordinatının mutlak değeri sınırsız artarken y ordinatının mutlak değeri sınırsız artar. Bu durumda eğrinin düşey ve yatay asimptotlarından başka asimptotoları olabilir. Şimdi bu asimptotları araştıralım. Bunun için y=f(x) fonksiyonunu seçelim ve y =g(x) eğrisinin ne zaman asimptot olacağını inceleyelim. M(x,f(x)) , f'nin grafiği üzerinde herhangi bir nokta ve P(t,g(t)) ise g'nin grafiği üzerinde M noktasına en yakın nokta olsun Bu durumda

$$d = \sqrt{(x-t)^2 + (f(x)-g(t))^2}$$

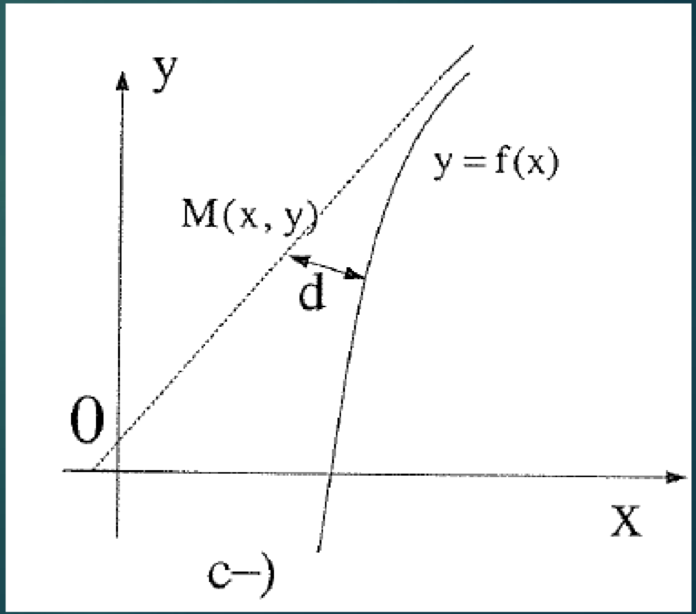
olduğuna göre $x \to t$ ve $f(x) \to g(t)$ olduğundan $d \to 0$ olur. Fakat g polinomu sürekli olduğundan $x \to t$ için $g(x) \to g(t)$ dır. Dolayısıyla yeterince büyük x için

$$d \cong \sqrt{(f(x)-g(x))^2} = |f(x)-g(x)|$$

yazılabilir. Şu halde

$$\lim_{x \to \infty}(f(x)-g(x)) = 0 \text{ veya } \lim_{x \to -\infty}(f(x)-g(x)) = 0$$

şartını sağlayan bir y=g(x) eğrisi bulunabiliyorsa, bu eğri y=f(x) eğrisinin asimptodu olur. Eğer y=g(x)=kx+b ise bu asimptoda **eğik asimptot** ve diğer durumlarda ise **eğri asimptot** adı verilir.



Türev
Eğik (eğri) Asimptot

Teorem 6.22.2. $y = kx + b$ doğrusunun $x \to \infty$ $(\text{veya } x \to -\infty)$ için y=f(x) eğrisinin eğik asimptodu olması için gerek ve yeter şart

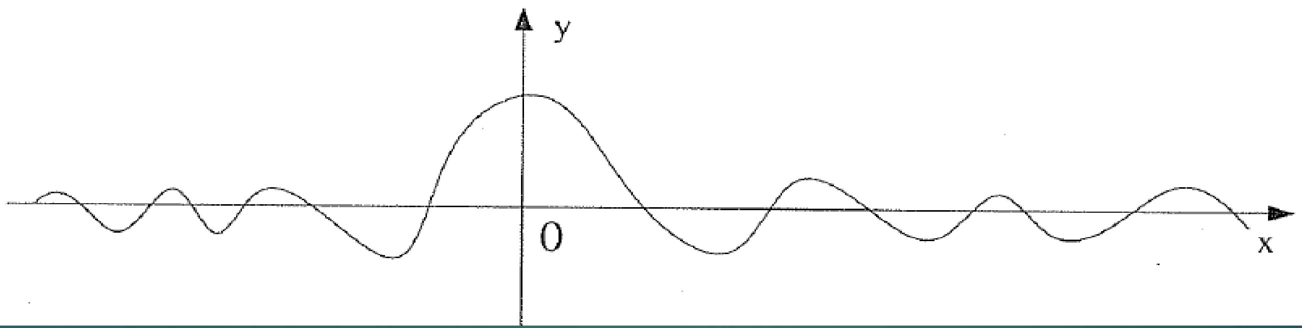
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \left(\text{veya} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right),$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = b \quad \left(\text{veya} \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx\right) = b\right)$$

olmasıdır.

Türev
Eğik (eğri) Asimptot

Dikkat edilmelidir ki eğer $|x|$'in yeteri kadar büyük değerleri için $f(x)-(kx+b)>0$, $f(x)-(kx+b)<0$ ise eğri sırasıyla asimptodun üzerinde ve altında kalacaktır. Buna göre $f(x)-(kx+b)$ farkı değişken işaretli ise eğri salınım yaparak asimptodu keser. Örneğin, $f(x)=(\sin x)/x$ fonksiyonunun yatay asimptodu x-eksenidir ve eğri asimptodu sonsuz çokluktaki noktada keser



Türev
Eğik (eğri) Asimptot

Örnek 63. Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını araştırınız.

a-) $y = \sqrt{4 - x^2}$

b-) $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 2}{x - 1}$

c-) $y = x + \ln x$

d-) $y = \sqrt{x^3 / (x - 2)}$

e-) $y = x + 2\arctan x$

f-) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 5}{x}$