Analiz I

DR. ÖĞR. ÜYESİ FATİH AYLIKCI

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ, KİMYA-METALURJİ FAKÜLTESİ, Y.T.Ü

Y.T.Ü, Matematik Müh., A228

E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr

Reel değerli fonksiyonların limiti Komşuluk ve yığılma noktası kavramları

Tanım 1.5.14. $\varepsilon > 0$ ve x_0 bir reel sayı olsun. Bu taktirde

$$X = \{x \in R : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

kümesine veya aralığına **x_0 noktasının ε - komşuluğu** ve $X \setminus \{x_0\}$ kümesine de **x_0 noktasının delinmiş ε -komşuluğu** adı verilir. $x_0 \in (a,b)$ ise bu aralık tarafından kapsanan x_0' ın bir ε - komşuluğu vardır. Bunun için ε sayısını $\varepsilon = \min\{b - x_0, x_0 - a\}$ biçiminde seçmek yeterlidir.

Tanım 1.5.15. $X \subset R$ ve $x_0 \in R$ olsun. Eğer x_0 noktasının her ε-komşuluğunda X kümesinin x_0'dan farklı en az bir $y \in X$ noktası varsa, **x_0 noktasına X kümesinin bir yığılma noktası** denir ve X'in bütün yığılma noktalarının kümesi **X'** ile gösterilir.

Bu tanıma göre bir yığılma noktasının her ε-komşuluğunda X kümesinin x_0 dan farklı sonsuz çoklukta elemanı bulunur. Gerçekten, x_0 noktasının bir ε komşuluğunda sonlu sayıda $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ olsaydı

$$\varepsilon_1 = \min\{|x_i - x_0| : i = 1,2,\cdots,n\}$$

seçilirse, x_0 noktasının ε_1 komşuluğunda x_0'dan farklı X kümesinin hiç bir elemanı bulunamazdı, çünkü bu durumda i=1,2,...,n için $|x_i - x_0| \geq \varepsilon_1$ olurdu. Bu da x_0' ın yığılma noktası olması ile çelişirdi. Buna göre x_0 bir yığılma noktası değilse, bu noktanın öyle bir komşuluğu bulunabilir ki bu komşulukta X kümesinin x_0 dan farklı hiçbir elemanı yoktur.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Yakınsak dizi kavramı

Tanım 3.4.2. (x_n) dizisi ve $x_0 \in R$ verilmiş olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için dizinin sonlu sayıdaki terimleri dışındaki bütün terimleri x_0 noktasının ε komşuluğunda kalıyorsa, (x_n) dizisine **x_0 noktasına yakınsaktır** denir ve **x_0'a dizinin limiti** adı verilir. Bu durum

$$\lim_n x_n = x_0 \text{ veya } (x_n) \to x_0 \text{ veya } x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$$

biçiminde yazılır.

Bu tanıma göre, $(x_n) \to x_0 \Leftrightarrow \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde dizinin, $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ aralığının dışında sonlu çoklukta terimi vardır. Yani $\{n \in N : x_n \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)\}$ kümesi sonludur. Dolayısıyla bu kümenin bir maksimum elemanı vardır. Bu eleman $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ile gösterilirse $\forall n > n_0$ için $x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ olur. O halde $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ aralığında $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}$ terimlerinden en fazla n_0 adetteki terimi bulunmasına rağmen $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \cdots$ terimlerinin tamamı bulunur. Böylece aşağıdaki eşdeğer tanım ifade edilebilir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Yakınsak ve ıraksak dizi kavramları

Tanım 3.4.3. (x_n) dizisi ve $x_0 \in R$ verilmiş olsun. Bu taktirde $(x_n) \to x_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde ε' a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır.

Bu tanım matematiksel sembollerle daha kısa olarak şu biçimde de verilebilir :

$$(x_n) \to x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N \ni \forall n > n_0 \text{ için } |x_n - x_0| < \varepsilon \text{ kalır.}$$

Yakınsak olmayan veya limiti mevcut olmayan diziye ise **ıraksak dizi** adı verilir.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Limitin dizisel tanımı (Heyne)

Heyne Herrix Eduart (1821-1881) Alman matematikçisidir.

Tanım 4.1.1. $X \subset R, f : X \to R$ bir fonksiyon ve x_0 ise X kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $X \backslash \{x_0\}$ kümesinden seçilen ve x_0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $(f(x_n))$ görüntü dizisi aynı bir A sayısına yakınsıyorsa, A ya **f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti** denir ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ veya } f(x) \to A \ (x \to x_0)$$

şeklinde gösterilir.

Bu tanıma " limitin dizisel tanımı " veya Heyne* anlamında tanımı denir.

Buna göre x_0 noktasına yakınsayan iki farklı (x'_n) ve (x''_n) dizileri için $(f(x'_n))$ ve $(f(x''_n))$ dizileri farklı limitlere yakınsak veya biri yakınsak değilse, bu durumda f'nin x_0 noktasında limiti mevcut değildir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Limitin dizisel tanımı (Heyne)

Örnek 1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ limitini hesap ediniz.

Örnek 2. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ limitini hesap ediniz.

Örnek 3. Eğer varsa, $\lim_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ limitini hesap ediniz.

Örnek 4. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ rasyonelsayı ise} \\ +1, & x \text{ irrasyonelsayı ise} \end{cases}$

fonksiyonunun hiçbir noktada limitinin olmadığını gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti Epsilon-delta limit tanımı (Cauchy)

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Fransız Matematikçisidir.

Tanım 4.1.2. $X \subset R$, $f: X \to R$ bir fonksiyon ve x_0, X kümesinin bir yığılma noktası olsun. $A \in R$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $0 < |x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, bu taktirde A sayısına x, x_0'a giderken (veya x_0 noktasında) f'nin **limiti** denir ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ veya } f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

biçiminde ifade edilir.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Epsilon-delta limit tanımı

Örnek 5. Tanımı kullanarak $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x-2} = 8$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 6. Tanımı kullanarak $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 7. Tanımı kullanarak $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)=0$ olduğunu gösteriniz.

Teorem 4.1.3. $f : X \to R$ bir fonksiyon ve x_0, X kümesinin yığılma noktası olsun. Bu taktirde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ x_0 noktasına yakınsayan ve terimleri $X\setminus\{x_0\}$ kümesinden seçilen her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi L sayısına yakınsaktır.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti Sağdan ve soldan limit

Tanım 4.2.1. $X \subset R$, $f : X \to R$ bir fonksiyon ve x_0, X kümesinin yığılma noktası olsun.

a-) Her $n \in N$ için $x_n \in X$ olmak üzere $x_n < x_0$ şartını sağlayan ve x_0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi aynı bir A sayısına yakınsıyorsa, **A sayısına f'nin x_0 noktasındaki soldan limiti** denir ve

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad f(x_0 - 0) = A$$

sembollerinden birisi ile ifade edilir.

b-) Her $n \in N$ için $x_n \in X$ olmak üzere $x_n > x_0$ şartını sağlayan ve x_0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ dizisi aynı bir B sayısına yakınsıyorsa, **B sayısına f'nin x_0 noktasındaki sağdan limiti** denir ve

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = B, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B, \quad f(x_0 + 0) = B$$

sembollerinden birisi ile ifade edilir.

Tanım 4.1.2'da olduğu gibi sağ ve sol limitleri $\varepsilon - \delta$ cinsinden tanımlamak mümkündür. Bunun için $|x - x_0| < \delta$ şartı yerine sırasıyla $x_0 < x < x_0 + \delta$ ve $x_0 - \delta < x < x_0$ koymak yeterlidir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Sağdan ve soldan limit

Örnek 8. $f: R \to R$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığına göre f'nin x=0 noktasındaki sağ ve sol limitleri bulunuz.

Örnek 9. n bir doğal sayı olmak üzere $\lim_{x \to n^+} \|x\|$ ve $\lim_{x \to n^-} \|x\|$ limitlerini hesap ediniz.

Örnek 10.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^4 + 1, & x > 1 \\ 3, & x = 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımını kullanarak f'nin x=1 noktasındaki sağdan limitinin 1 olduğunu gösteriniz.

Teorem 4.2.2. $X \subset R$, $f: X \to R$ ve x_0, X'in yığılma noktası olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun x_0'da limitinin mevcut olması için gerek ve yeter şart aynı noktada sağ ve sol limitlerinin mevcut ve eşit olmasıdır.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti
Sonsuz limitler

Tanım 4.3.1. $X \subset R$ olmak üzere $f : X \to R$ bir fonksiyon ve x_0, X'in yığılma noktası olsun. M ve N sayıları verilsin. Eğer $0 < |x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için

a-) $f(x) > M$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(M) > 0$ sayısı varsa, bu taktirde **f'nin x_0 noktasındaki limiti** $+\infty$,

b-) $f(x) < N$ olacak şekilde $\delta = \delta(N) > 0$ sayısı varsa **f'nin x_0 noktasındaki limiti** $-\infty$ dur denir ve sırasıyla

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

ile gösterilir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Sonsuz limitler

Örnek 11. Tanımı kullanarak $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$ olduğunu gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti Sonsuz limitler

Tanım 4.3.2. $f : X \to R$ bir fonksiyon ve her M sayısı için $X \cap (M, \infty) \neq \phi$ olsun.

a-) Eğer $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $x > a$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x \in X$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $a = a(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa, **L sayısına f'nin $x \to \infty$ için limiti** denir ve

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

ile gösterilir.

f' nin $x \to -\infty$ için limiti benzer olarak tanımlanır.

b-) Eğer verilen her K sayısına karşılık, $x > b$ şartını sağlayan $\forall x \in X$ için $f(x) > K$ olacak şekilde $b = b(K)$ sayısı bulunabiliyorsa, **f'nin $x \to \infty$ için limiti ∞'dur** denir ve

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

ile gösterilir.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ ve } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

limitleri de benzer olarak tanımlanır.

Tanımdaki $X \cap (M, \infty) \neq \phi$ şartı $a(\varepsilon)$ sayısı ne kadar büyük seçilirse seçilsin, daima $x > a(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan bir $x \in X$ elemanının bulunmasını garanti eder. Tanım 4.3.1 ile tanım 4.3.2 diziler cinsinden de ifade edilebilir. Bir çok uygulamada limitin dizisel tanımını kullanmak faydalı olur.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Sonsuz limitler

Örnek 12. Tanımı kullanarak $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 13. $\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty \quad (a>1)$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 14. Eğer mevcutsa f(x)=sinx fonksiyonunun $x\to\infty$ için limitini bulunuz.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Limit Teoremleri

Teorem 4.4.1. $X \subset R$, $f : X \to R$, $g : X \to R$ ve $x_0 \in X'$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to x_0} g(x)$$

limitleri mevcut ise bu taktirde

a-) Her $k \in R$ için $\lim_{x \to x_0} (kf)(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$

b-) $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

c-) $\lim_{x \to x_0} (f.g)(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) . \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \right)$

d-) Her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ ise $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti
Limit Teoremleri

Sonuç 4.4.2. $X \subset R$, $n \in N$ olmak üzere $k=1,2,\ldots n$ için $f_k : X \to R$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer $x_0 \in X'$ ve $\lim_{x \to x_0} f_k(x) = \alpha_k$ mevcut ise bu taktirde

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x).f_2(x) \cdots f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x). \lim_{x \to x_0} .f_2(x) \cdots \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

ve özel olarak

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n$$

dır.

Örnek15. $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x + 10}{3x - 7}$ limitini hesap ediniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Limit Teoremleri – Sıkıştırma (Sandviç)

Teorem 4.4.3. $X \subset R$ ve $x_0 \in X'$ olmak üzere $f, g : X \to R$ fonksiyonları verilsin ve $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ mevcut olsun. Eğer x_0' ın bir $\delta > 0$ komşuluğunda yani

$$\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ için } f(x) \le \psi(x) \le g(x)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu taktirde

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = L$$

dir.

İSPAT?

Örnek 16. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 17. $\lim_{x \to \infty \pm} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ olduğunu gösteriniz.

Örnek 18. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{5x}\right)^{-2x}$ limitini hesap ediniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Limit Teoremleri

Limitlerin hesabında çoğu kez $\infty-\infty$, $0.(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\pm\infty}{\infty}$ durumları ortaya çıkar. Daha sonra değinilecek olan bu durumlara belirsiz haller denir. Ayrıca $x \in R$ olmak üzere

$$x+\infty=\infty,\ x-\infty=-\infty,\ x>0 \text{ için } x.(\pm\infty)=\pm\infty,$$

$$x<0 \text{ için } x.(\pm\infty)=\mp\infty,\ \infty+\infty=\infty,$$

$$-\infty-\infty=-\infty,\ \ \infty.(\pm\infty)=\pm\infty,\ \ -\infty.(\pm\infty)=\mp\infty$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumlarla ilgili bazı örnekleri inceleyelim.

Örnek 19. $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$ fonksiyonunun x=3 noktasındaki sağ ve sol limitleri hesaplayınız.

Örnek 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4-5x^2\right)$ limitini hesaplayınız.

Örnek 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^5-10x^2+2x-1\right)$ limitini hesaplayınız.

Örnek 22. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ limitini hesaplayınız.

Örnek 23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$ limitini hesaplayınız.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Limit Teoremleri

Örnek 24.. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$ limitini hesap ediniz.

Örnek 25. $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}$ limitini hesaplayınız.

Örnek 26. $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreklilik (dizi tanımı)

Tanım 5.1.1. $X \subset R$, $f : X \to R$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer terimleri X kümesinde olan ve x_0 noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizisi $f(x_0)$ noktasına yakınsıyorsa, yani

$$\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$$

ise **f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir** denir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreklilik (epsilon-delta tanımı)

Tanım 5.1.2. $X \subset R$, $f : X \to R$ ve $x_0 \in X$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Eğer $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, **f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir** denir. f 'nin X kümesinin bütün noktalarında sürekli olması durumunda ise f fonksiyonuna X kümesinde süreklidir veya kısaca süreklidir denir.

Bu tanımlara göre, f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması demek $f(x_0)$ noktasının keyfi bir $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ komşuluğu verildiğinde

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

kapsamasını sağlayacak şekilde x_0 noktasının bir $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ komşuluğunun bulunmasıdır.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Süreklilik

Fonksiyonun süreklilik tanımı ile limit tanımı arasında benzerlikler olmasına karşın önemli bazı farklar da vardır. Süreklilikte $x_0 \in X$ fakat $x_0 \in X'$ olmak zorunda değildir. Gerçekten, $x_0 \in X$ ve $x_0 \notin X'$ ise bu durumda f fonksiyonunun x_0 noktasında limitinin tanımsız olmasına rağmen sürekli olabilir. Zira, x_0 noktasının

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X = \{x_0\}$$

olacak şekilde bir $\delta-$ koşuluğu, yani $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ aralığı seçilirse, bu taktirde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X) \subset f(\{x_0\}) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

kapsaması sağlanır. Böylece $x_0 \in X'$ olduğunda bu tanımlar aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreklilik (tanım 3)

Tanım 5.1.3. $X \subset R$, $f : X \to R$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $x_0 \in X'$ ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu taktirde **f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir** denir. f'nin X kümesinin bütün noktalarında sürekli olması durumunda **f fonksiyonuna X kümesinde süreklidir** veya kısaca **süreklidir** denir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreklilik

Örnek 1. $f(x)=3x^2+2x+7$ şeklinde tanımlanan $f:R\to R$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Örnek 2. $f:R\to R$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-8}{x-2}, & x\neq 2\\ 8, & x=2\end{cases}$$

ile tanımlanıyor. f fonksiyonunun x=2 noktasında sürekli olduğunun gösteriniz.

Örnek 3. "$\varepsilon-\delta$" tanımını kullanarak f(x)=sinx ve g(x)=cosx fonksiyonlarının her noktada sürekli olduklarını gösteriniz.

Örnek 4. Eğer $f:X\to R$ fonksiyonu sürekli ise bu taktirde $|f|:X\to R$ mutlak değer fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreklilik

Teorem 5.1.4. $X \subset R$, $f : X \to R$ ve $g : X \to R$ fonksiyonları $x_0 \in X$ noktasında sürekli olsun . Bu taktirde her $\alpha, \beta \in R$ için

a-) $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

b-) $f.g$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

c-) $\forall x \in X$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti
Süreklilik

fonksiyonların noktadaki süreklilik özelliğini kullanarak

Örnek 5. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$ limitini hesaplayınız.

Örnek 6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ limitini hesaplayınız.

Örnek 7. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$ limitini hesaplayınız.

Teorem 5.1.5. $X, Y \subset R$ olmak üzere $f : X \to R$ ve $g : Y \to R$ fonksiyonları verilmiş olsun. Eğer $f(X) \subset Y$ olmak üzere, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında ve g fonksiyonu $f(x_0) \in f(X)$ noktasında sürekli ise bu taktirde $gof : X \to R$ bileşke fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

İSPAT?

Örnek 8. $f(x) = \left|\sin^5 x + \sin^3 x - \sin x + 7\right|$ biçiminde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti Sağdan ve soldan süreklilik

Tanım 5.2.1. $X \subset R, f : X \to R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa **f fonksiyonuna sırasıyla x_0 noktasında sağdan ve soldan süreklidir** denir.

Teorem 5.2.2. $X \subset R, f : X \to R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart bu noktada sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti
Sağdan ve soldan süreklilik

Teorem 5.2.3. $X \subset R, f : X \to R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan (soldan) sürekli olması için gerek ve yeter şart terimleri X kümesinde bulunan, $x_n \geq x_0$ ($x_n \leq x_0$) ve $x_n \to x_0$ özelliklerini sağlayan her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to f(x_0)$ olmasıdır.

Teorem 5.2.4. $X \subset R, f : X \to R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu taktirde f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan (soldan) sürekli olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x_0$ olacak şekilde azalan (artan) her (x_n) dizisi için $f(x_n) \to f(x_0)$ olmasıdır.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti Sağdan ve soldan süreklilik

Örnek 9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ biçiminde tanımlı $f:R\to R$ fonksiyonunun x=0 noktasındaki sürekliliğini araştırınız.

Örnek10. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leq 1\\ 6x-4, & 1<x<2\\ 4x, & x\geq 2\end{cases}$

fonksiyonunun x=1 ve x=2 noktalarındaki süreklilik durumunu araştırınız.

Örnek 11. $f(x)=\begin{cases}x\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

fonksiyonunun x=0 noktasındaki sürekliliğini araştırınız.

Örnek 12. $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun her $x_0\in(0,\infty)$ noktasında sürekli, fakat $x_0=0$ noktasında sağdan sürekli olduğunu gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreksizlik

Tanım 5.2.5 $X \subset R, f : X \to R$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

ise bu taktirde **f fonksiyonuna x_0 noktasında süreksizdir** denir.

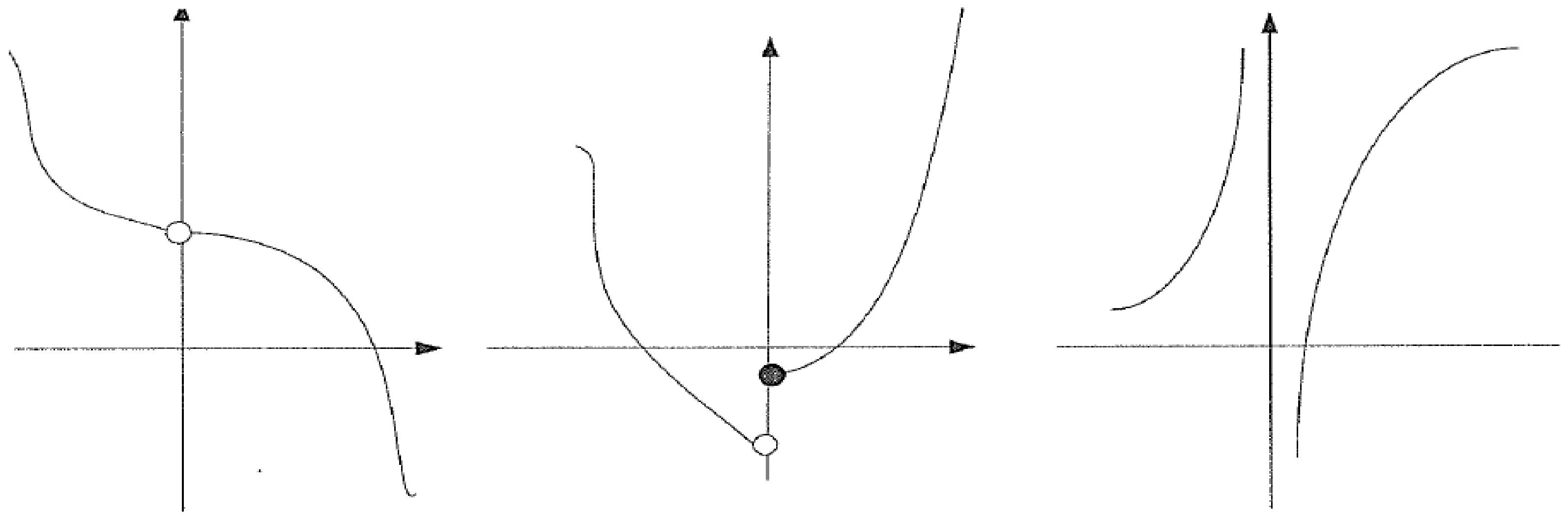
Bu tanıma göre (1) ifadesi irdelenerek süreksiz fonksiyonları üç sınıfa ayırmak mümkündür:

1-) Eğer $\lim_{x \to x_0} f(x)$ mevcut ve bu limit değeri $f(x_0)$ değerinden farklı veya $f(x_0)$ mevcut değil ise **f fonksiyona x_0 noktasında kaldırılabilir süreksizliğe** sahiptir denir. Bu durumda f'nin x_0'daki değeri limit değeri olarak tanımlanarak fonksiyon bu noktada sürekli yapılabilir.

2-) Eğer f'nin x_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri mevcut, fakat farklı ise **f fonksiyonuna x_0'da sıçrama süreksizliğine** sahiptir denir.

3-) Eğer f'nin x_0 noktasındaki sağ veya sol limitlerinden en az biri $-\infty$ veya $+\infty$ veya mevcut değilse, **f fonksiyonuna x_0**'da **sonsuz süreksizliğe** sahiptir denir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreksizlik



x=0 kaldırılabilir süreksizlik noktası

x=0 sıçrama süreksizlik noktası

x=0 sonsuz süreksizlik noktası

Reel değerli fonksiyonların limiti Süreksizlik

Örnek 13. Aşağıdaki fonksiyonların süreksizlik noktalarını bulup süreksizlik çeşitlerini belirtiniz.

a-) $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ b-) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ c-) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$

Örnek 14. Aşağıdaki fonksiyonların süreksizlik noktalarını bulup çeşidini belirtiniz.

a-) $f(x)=\|x\|$ b–) $f(x)=(\operatorname{sgn} x)^2$ c–) $f(x)=(|x|-x)/x^2$

Örnek 15. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$

şeklinde tanımlı $f:R\to R$ fonksiyonunun süreksizliğini araştırınız.

Örnek 16. $n\in N$, $m\in Z$ ve n ile $|m|$ aralarında asal olmak üzere $f:R\to R$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ veya } x\notin Q\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\end{cases}$$

ile tanımlanıyor. f fonksiyonunun irrasyonel sayılar kümesinde sürekli fakat sıfır olmayan rasyonel sayılar kümesinde süreksiz olduğunu gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti Sürekli fonksiyonların özellikleri

Teorem 5.3.1. (İşaret Koruma Özelliği). f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ve $f(x_0) \neq 0$ olsun. Bu taktirde x_0'ın öyle bir δ – komşuluğu vardır ki, bu komşuluktaki her x için $f(x)$ ile $f(x_0)$ aynı işarettedir.

Teorem 5.3.2 (Bolzano Teoremi). Eğer $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli ve aralığın uç noktalarında ters işaretli ise bu taktirde $f(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti
Sürekli fonksiyonların özellikleri
Ara Değer Teoremi

Teorem 5.3.3 (Ara Değer Teoremi). $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu taktirde $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in [a,b]$ verildiğinde f fonksiyonu $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her m değerini (x_1, x_2) aralığında alır.

İSPAT?

Örnek 17. $f(x) = \frac{[illegible]}{4} - \sin \pi x + 3$ olduğuna göre, $f(x_0) = 3$ olacak şekilde bir $x_0 \in (-2,2)$ noktasının mevcut olduğunu gösteriniz.

Örnek 18. x=2, $4^x - 8x = 0$ denkleminin kökü olduğuna göre, bu denklemin başka kökü var mıdır? Neden ?

Reel değerli fonksiyonların limiti Sürekli fonksiyonların özellikleri

Teorem 5.3.4 (Weierstrass'ın Birinci Teoremi). Eğer $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sürekli ise bu taktirde sınırlıdır.

İSPAT?

Teorem 5.3.5 (Weierstrass'ın İkinci Teoremi). Eğer $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sürekli ise bu taktirde f fonksiyonu mutlak minimumunu ve mutlak maksimumunu alır, yani

$$f(x_0)=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}=m_0 \quad \text{ve} \quad f(x_1)=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}=M_1$$

olacak şekilde $x_0,x_1\in[a,b]$ vardır.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti
Düzgün süreklilik

Tanım 5.3.6. $X \subset R$, $f : X \to R$ fonksiyonu ile $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Eğer $|x - z| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x, z \in X$ için $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, bu taktirde **f fonksiyonuna X kümesi üzerinde düzgün süreklidir** denir.

Bir f fonksiyonun X kümesi üzerinde sürekli olması ile düzgün sürekli olması arasında önemli fark vardır. f'nin X kümesi üzerinde sürekli olması her bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması demektir. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı vardır ki $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kalır. Burada δ sayısı hem ε'a hem de x_0 noktasına bağlıdır, yani nokta değiştiği zaman δ sayısı da değişir. Düzgün süreklilikte ise δ sayısı sadece ε'a bağlıdır ve noktadan bağımsızdır, yani nokta değiştiği zaman δ değişmez. Dolayısıyla X kümesi üzerinde düzgün sürekli olan bir f fonksiyonunun sürekli olduğu açıktır. Fakat bunun karşıtı doğru değildir. Bunun için

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \inf\{\delta(\varepsilon, x_0) : x_0 \in X\} > 0$$

olması yeterlidir.

Reel değerli fonksiyonların limiti Düzgün süreklilik

Örnek 19. $f(x)=\sin(1/x)$, $f:(0,1)\to R$ fonksiyonun sürekli fakat düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Örnek 20. $f(x)=x$, $f:R\to R$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Örnek 21. $f(x)=x^2$, $f:R\to R$ fonksiyonunu düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Reel değerli fonksiyonların limiti
Düzgün süreklilik

Her ne kadar düzgün süreklilik ile süreklilik kavramları benzer görünse de gerçekte bu iki kavramın farklı olduğunu gördük. Fakat "acaba bazı kısıtlamalar altında bu iki kavram eşdeğer yapılabilir mi?" sorusu sorulabilir. Buna cevap teşkil edecek olan teoreme geçmeden önce bir yardımcı teoremi verelim.

Diyeceğiz ki, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $[a,b]$ aralığı P_ε **özelliğine** sahiptir $\Leftrightarrow$

$$x_n, z_n \in [a,b], \quad |x_n - z_n| < 1/n, \quad |f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$$

olacak şekilde (x_n) ve (z_n) dizileri vardır.

Yardımcı Teorem 5.3.7. Eğer $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli ve $[a,b]$ aralığı P_ε özelliğine sahipse bu taktirde $c = (a+b)/2$ olmak üzere $[a,c]$ veya $[c,b]$ alt aralığı P_ε özelliğine sahiptir.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti Düzgün süreklilik

Teorem 5.3.8. Eğer $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sürekli ise bu taktirde $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün süreklidir.

İSPAT?

Teorem 5.3.9. $f:[a,b]\to R$ fonksiyonu sürekli ve kesin artan (kesin azalan) bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

a-) $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$ ters fonksiyonu mevcuttur.

b-) f^{-1} fonksiyonu kesin artandır (kesin azalandır).

c-) f^{-1} fonksiyonu süreklidir.

İSPAT?

Reel değerli fonksiyonların limiti Düzgün süreklilik

Örnek 22. $\forall n \in N$ için $f(x) = x^{1/n}$, $f:[1,\infty) \to [1,\infty)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Örnek 23. $f(x) = \arcsin x$, $f:[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.