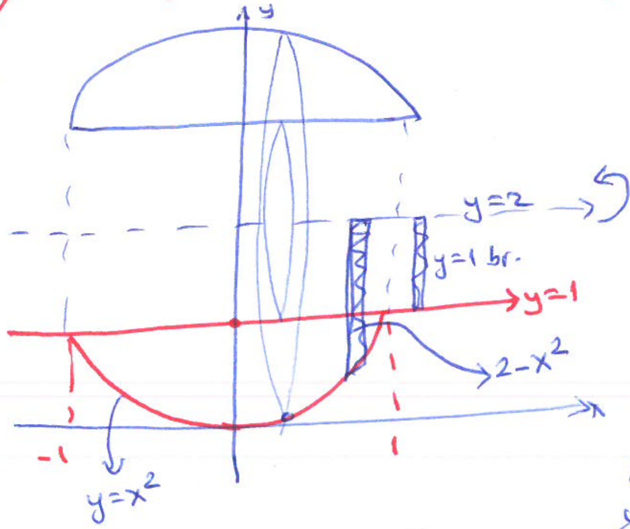
1/ $y=x^2$ ve $y=1$ doğrusu ile sınırlı bölgenin $y=2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluzan hacmi bulunuz.



Yarıçapı $2-x^2$ olan dairenin $y=2$ etrafında dönmesi ile oluzan hacimden $y=1$ doğrusu ($r=1$ yarıçaplı) tarafından oluzan hacim çıkarılacaktır.

$$dV=\left[\pi.(2-x^2)^2-\pi.(1)^2\right].dx$$

$$=\pi(3-4x^2+x^4)dx$$

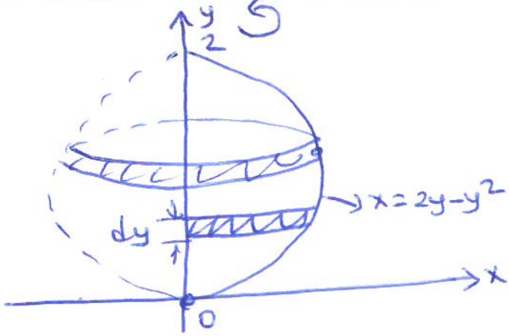
$$V=\pi\int_{-1}^{1}(3-4x^2+x^4)\,dx=2\pi\int_{0}^{1}(3-4x^2+x^4)\,dx$$

$$=2\pi\left(3x-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$=2\pi\left(3-\frac{4}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{56}{15}\pi\ br^3$$

2/ $x = 2y - y^2$ eğrisinin y ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan hacmi bulunuz.



$$2y - y^2 = 0 \Rightarrow y(2-y) = 0$$
$$y = 0,\ y = 2$$

$$dV = \pi (x-0)^2_{dy} = \pi x^2_{dy} = \pi (2y - y^2)^2 \cdot dy$$

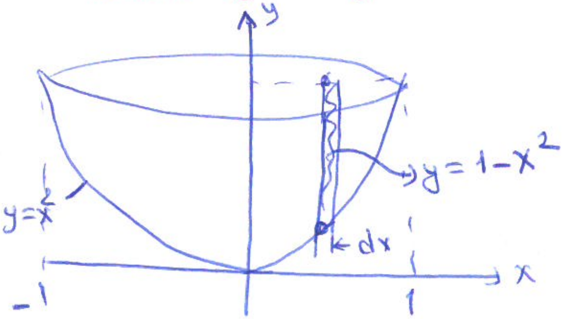
$$= \pi (4y^2 - 4y^3 + y^4)\, dy$$

$$V = \pi \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4)\, dy$$

$$= \pi \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{4y^4}{4} + \frac{y^5}{5} \right]_0^2$$

$$V = \frac{16}{15} \pi \text{ br}^3$$

3/ $y=x^2$ eğrisinin $0\le x\le 1$ ile sınırlı kısmının y ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan hacmi -silindirik kabuk- yöntemiyle bulunuz.



Silindirik kabuk yönteminde;

$0\le y\le f(x)$ eğrisinin $0\le a<x<b$ kısmı y ekseni etrafında döndürülürse oluşan hacim

$$V=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\,dx \quad \text{idi.}$$

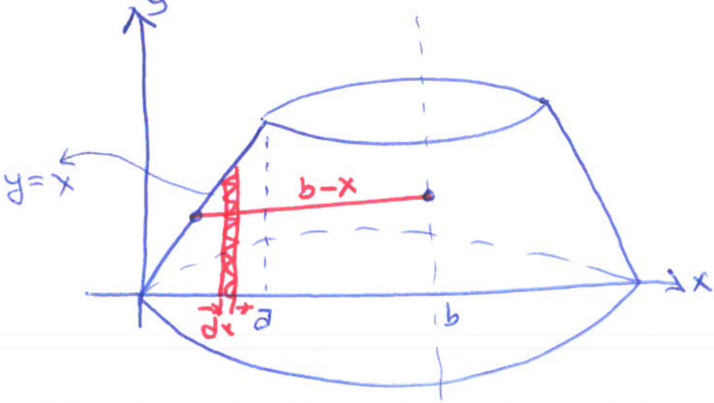
Dolayısıyla:

$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot(1-x^2)\,dx = 2\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ br^3$$

Not: integralin sınırları $\int_{-1}^{1}$ şeklinde alınmaz zira $\int_0^1$ şeklinde sağ taraf döndürülürse hacmi oluşturmuş olur. $\int_{-1}^{1}$ olarak alınırsa aynı hacim iki kez oluşturulmuş olur ki bu yanlıştır.

4/ $y=x$, $y=0$ ve $x=a>0$ ile sınırlı bölgenin $x=b>a$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan hacmi silindirik kabuk yöntemiyle bulunuz.



$$V = 2\pi \int_0^a x \cdot f(x)\,dx = 2\pi \int_0^a x \cdot (b-x)\,dx$$

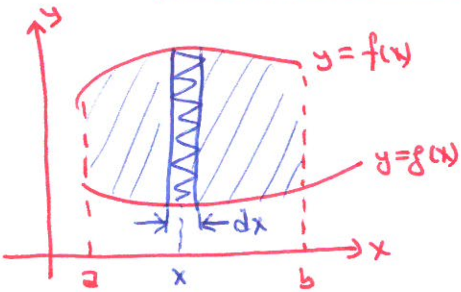
$$= 2\pi \int_0^a (bx - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \left(b\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$= 2\pi \left(\frac{ba^2}{2} - \frac{a^3}{3} \right)$$

$$V = \pi \left(a^2 b - \frac{2}{3} a^3 \right) \text{ br}^3$$

HATIRLATMA



Şekilde verilen alan için

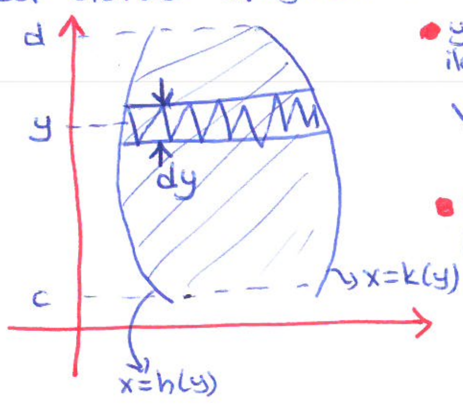
- x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim dilimleme yöntemiyle;

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$$

- y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim silindirik kabuk yöntemiyle;

$$V = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx$$

Benzer olarak aşağıdaki alan için:



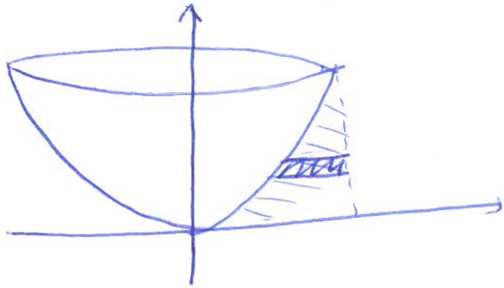
- y ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan hacim (dilimleme yöntemi)

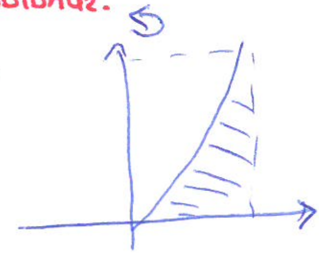
$$V = \pi \int_c^d [k^2(y) - h^2(y)]\,dy$$

- x ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan hacim (silindirik kabuk yön.)

$$V = 2\pi \int_c^d y\,[k(y) - h(y)]\,dy$$

5/ $y=x^2$, $y=0$ ve $x=1$ ile sınırlı bölgenin (alanın) y ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan hacmi dilimleme ve silindirik kabuk yöntemiyle bulunuz.





Dilimleme yöntemiyle;

$$V=\pi\int_0^1 1^2\,dy-\pi\int_0^1 x^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1(1-y)\,dy=\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\ \text{br}^3.$$

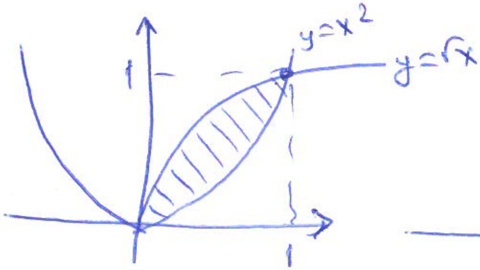
Silindirik kabuk yöntemiyle:

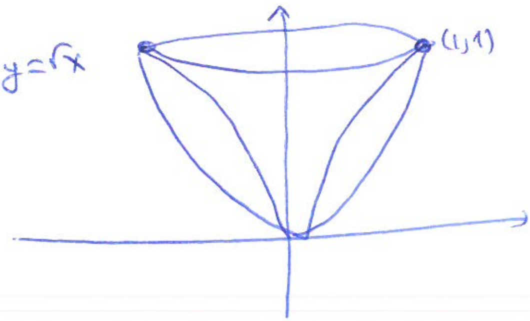
$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx\ ;\quad y=f(x)=x^2$$

$$=2\pi\int_0^1 x\cdot x^2\,dx=2\pi\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

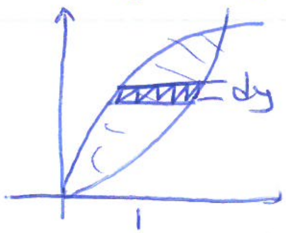
$$=\frac{\pi}{2}\ \text{br}^3.$$

6 / $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$ eğrilerinin $x=0$ ve $x=1$ ile sınırlı kısımlarının y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi dilimleme ve silindirik kabuk yöntemleriyle bulunuz.





Dilimleme yöntemiyle;



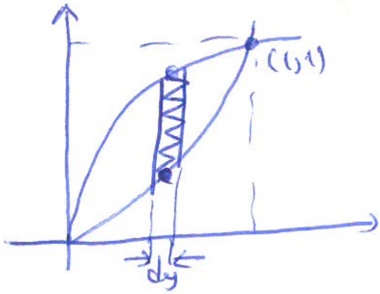
$$V=\pi\int_0^1 (x_2^2-x_1^2)\,dy=\pi\int_0^1 \left[y-y^4\right]dy$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{3}{10}\pi \ br^3.$$

7

Silindirik kabuk yöntemiyle;



$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

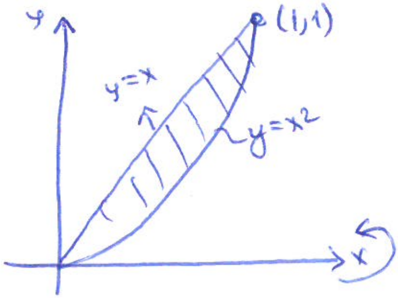
$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

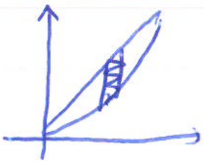
$$= \frac{3}{10}\pi \text{ br}^3.$$

8/ $y=x$ ve $y=x^2$ ile sınırlı bölgenin x ve y eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan hacimleri bulunuz.



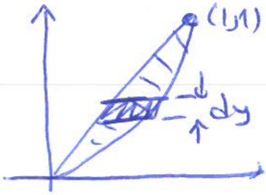
$$\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=x^2$$
$$0=x(1-x)$$
$$x=0,\ x=1$$

x ekseni etrafında döndürülürse;



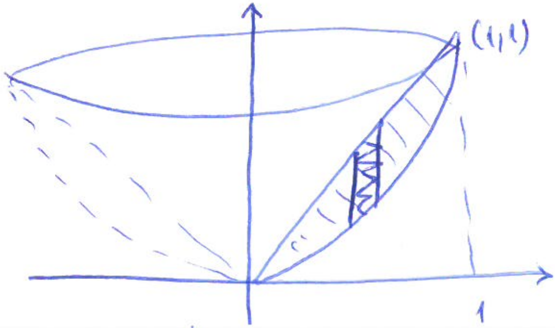
$$V=\pi\int y^2dx=\pi\int(y_2^2-y_1^2)\,dx$$
$$=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$
$$=\frac{2\pi}{15}\ br^3$$

y ekseni etrafında döndürülürse;



$$V=\pi\int x^2dy=\pi\int[x_2^2-x_1^2]\,dy$$
$$=\pi\int_0^1[y-y^2]\,dy$$
$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1$$
$$V=\frac{\pi}{6}\ br^3$$

9 / $y=x$ ve $y=x^2$ ile sınırlı bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi silindirik kabuk yöntemiyle bulunuz.



$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx \quad \text{olarak} \quad ; \quad f(x) = x - x^2$$

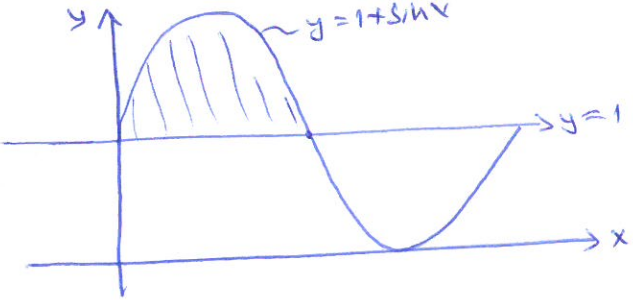
$$= 2\pi \int_0^1 x.(x-x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6} \text{ br}^3$$

10/ $y=1+\sin x$ ve $y=1$ ile sınırlı bölgenin $x=0$ dan $x=\pi$ ye kadar sınırlı kısmının x ve y eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan hacimleri bulunuz.



x ekseni etrafında döndürülürse;

$$V=\pi\int y^2 dx = \pi\int_0^{\pi}\left[(1+\sin x)^2-1^2\right]dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}(2\sin x+\sin^2 x)\,dx \quad ; \quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=\pi\left(-2\cos x+\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\left(-2\pi(-1)+\frac{\pi^2}{2}\right)-\left(-2\pi+0\right)$$

$$V_x=4\pi+\frac{\pi^2}{2}\ br^3$$

y ekseni etrafında döndürülürse (silindirik kabuk ile)

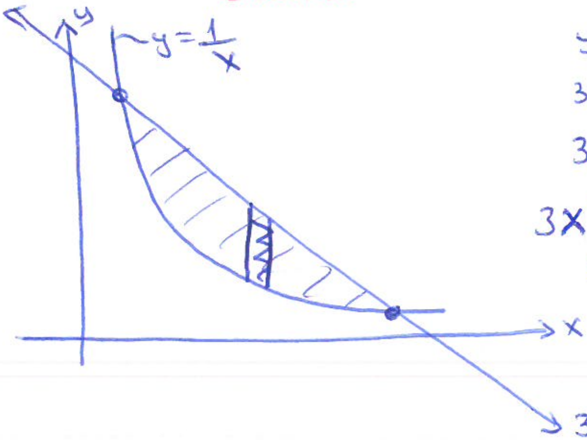
$$V_y=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\,dx=2\pi\int_0^{\pi}x\cdot\sin x\,dx \quad ; \quad \begin{matrix} u=x & dv=\sin x\,dx \\ du=dx & v=-\cos x\end{matrix}$$

$$=2\pi\left[-x\cdot\cos x+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right]_0^{\pi}=2\pi\left[-x\cdot\cos x+\sin x\right]_0^{\pi}$$

$$V_y=2\pi^2\ br^3$$

Doç. Dr. Müslüm Özışık

11/ $y=\frac{1}{x}$ ve $3x+3y=10$ ile sınırlı bölgenin x ve y eksenleri etrafında döndürülmesiyle oluşan hacimleri bulunuz.



$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{x} \\ 3x+3y=10 \end{array}\right\}$$

$$3x+3\cdot\frac{1}{x}=10$$

$$3x^2+3=10x$$

$$3x^2-10x+3=0$$

$$x_1=\frac{1}{3} \qquad x_2=3$$

$$3x+3y=10 \Rightarrow y=\frac{10}{3}-x$$

Simetriden dolayı $V_x=V_y$ olup

$$V_y=2\pi\int_a^b x.f(x)\,dx \quad \text{(Silindirik kabuk ile)}$$

$$V_y=2\pi\int_{1/3}^{3} x.\left[y_2-y_1\right]dx=2\pi\int_{1/3}^{3} x\left[\frac{10}{3}-x-\frac{1}{x}\right]dx$$

$$=2\pi\left(\frac{5}{3}x^2-\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1/3}^{3}$$

$$=\frac{512}{81}\pi\ br^3.$$

Not: Söz konusu hacim $V_x=\pi\int y^2dx$

$$=\pi\int_{1/3}^{3}\left[\left(\frac{10}{3}-x\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]dx$$

ile de bulunabilirdi.

12/ $y=\sqrt[3]{x^2}$ eğrisinin $x=1$ ile $x=8$ arasındaki uzunluğunu bulunuz.

$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ olarak y' türevi $1\le x\le 8$ arasında sürekli dir.

Dolayısıyla;

$$y=f(x) \Rightarrow ds=\sqrt{1+y'^2}\,.dx \quad \text{olarak}$$

$$s=\int_1^8 \sqrt{1+y'^2}\,.dx$$

$$=\int_1^8 \sqrt{1+\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)^2}\,.dx$$

$$=\int_1^8 \sqrt{\frac{4+9x^{2/3}}{9x^{2/3}}}\,dx=\int_1^8 \frac{\sqrt{4+9x^{2/3}}}{3\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$u=4+9x^{2/3} \Rightarrow du=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$x=1 \Rightarrow u=13$ $\quad$ $x=8 \Rightarrow u=40$

$$=\frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\,du=\frac{1}{27}\,u^{2/3}\Big|_{13}^{40}$$

$$=\frac{40\sqrt{40}-13\sqrt{13}}{27}\ \text{br.}$$

13/ $y=x^4+\dfrac{1}{32x^2}$ eğrisinin $x=1$ ile $x=2$ apsisli noktalar arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$y'=\dfrac{dy}{dx}=4x^3-\dfrac{1}{16x^3}$ olarak verilen aralıkta süreklidir.

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,.dx \Rightarrow s=\int_1^2\sqrt{1+\left(4x^3-\frac{1}{16x^3}\right)^2}\,.dx$$

$$=\int_1^2\left(4x^3+\frac{1}{16x^3}\right)dx$$

$$=\left(x^4-\frac{1}{32x^2}\right)\Bigg|_1^2=15+\frac{3}{128}\text{ br.}$$

14/ $y=ax+b$ eğrisinin $x=A$'dan $x=B$'ye kadar olan kısmının uzunluğunu bulunuz. $(B>A)$

$y=ax+b \Rightarrow y'=a$; $A\leq x\leq B$ olarak

$$s=\int_A^B\sqrt{1+y'^2}\,.dx=\int_A^B\sqrt{1+a^2}\,dx=\sqrt{1+a^2}\,.(B-A)\text{ br.}$$

15/ $y^2=(x-1)^3$ eğrisinin $(1,0)$ ile $(2,1)$ arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$s=\int_A^B\sqrt{1+y'^2}\,.dx=\int_1^2\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{9x-5}\,.dx$$

$$=\frac{1}{27}(9x-5)^{3/2}\Bigg|_1^2.$$

$$=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}\text{ br.}$$

$y^2=(x-1)^3 \Rightarrow y=(x-1)^{3/2}$

$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$

16/ $2(x+1)^3 = 3(y-1)^2$ eğrisinin $(-1,1)$ ile $\left(0, 1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$2(x+1)^3 = 3(y-1)^2 \Rightarrow y = 1+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot(x+1)^{3/2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{3}{2}(x+1)}$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,.dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{0} \sqrt{3x+5}\,.dx = \frac{\sqrt{2}}{9}(3x+5)^{3/2}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{9}\left(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right) \text{ br.}$$

17/ $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $x=1$, $x=2$ arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,.dx \quad ; \quad y' = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,.dx$$

$$ds = \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,.dx = \left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$

$$s = \int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{59}{24} \text{ br.}$$

18/ $y = x^2 - \frac{\ln x}{8}$ eğrisinin $x=1$ ile $x=2$ arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$y' = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,.dx = \sqrt{1+\left(2x-\frac{1}{8x}\right)^2}\,.dx = \left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx$$

$$s = \int_1^2 \left(2x+\frac{1}{8x}\right)dx = \left(x^2+\frac{\ln x}{8}\right)\Big|_1^2 = 3 + \frac{\ln 2}{8} \text{ br.}$$

19/ $y = \ln \cos x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{6}$ ile $x = \frac{\pi}{4}$ arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$y' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,.dx = \sqrt{1+(-\tan x)^2}\,.dx = \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx = \sec x\,dx$$

$$s = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right) \text{ br.}$$

20) $y = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ eğrisinin $x=2$ ile $x=4$ arasındaki kısmının uzunluğunu bulunuz.

$$y' = \frac{e^x+1}{e^x-1} \cdot \frac{(e^x+1).e^x-(e^x-1).e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \ln f(x) \\ y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \end{array}}$$

$$y' = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$s = \int_2^4 \sqrt{1+y'^2}\,.dx = \int_2^4 \sqrt{1+\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\,.dx$$

$$= \int_2^4 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$$

$$= \int_2^4 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$$

$$= \ln(e^x-e^{-x})\Big|_2^4$$

$$= \ln\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)-\ln\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^8-1}{e^4}\right)-\ln\left(\frac{e^4-1}{e^2}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{e^8-1}{e^4}\cdot\frac{e^2}{e^4-1}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{e^4+1}{e^2}\right) \text{ br.}$$

21/ $y=x^2$ eğrisinin $0\le x\le 2$ ile belirli kısmının y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin (dönel yüzeyin) alanını bulunuz.

x ekseni etrafında döndürülürse;

$$S_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} |y| \, ds$$

y ekseni etrafında döndürülürse

$$S_y = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} |x| \, ds$$

YÜZEY ALANI

$$S_y = 2\pi \int_0^2 x.\sqrt{1+y'^2}.\,dx \;; \quad y'=2x$$

$$= 2\pi \int_0^2 x.\sqrt{1+4x^2}.\,dx$$

$u = 1+4x^2$; $x=0 \Rightarrow u=1$, $x=2 \Rightarrow u=17$

$du = 8x\,dx$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^{17} \sqrt{u}.\,du = \frac{\pi}{4}\int_1^{17} u^{1/2}.\,du$$

$$= \frac{\pi}{4}.\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_1^{17}$$

$$S_y = \frac{\pi}{6}\left(17.\sqrt{17}-1\right) \, br^2$$

22/ $y = x^{3/2}$ eğrisinin $0 \leq x \leq 1$ 'lik kısmının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

$$S_x = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y.ds = 2\pi \int_0^1 x^{3/2}.\sqrt{1+y'^2}.dx \qquad x=0 \Rightarrow u=0 \quad x=1 \Rightarrow u=3/2$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^{3/2}.\sqrt{1+\frac{9x}{4}}.dx \; ; \quad \begin{array}{l} 9x = 4u^2 \\ 9dx = 8u\,du \end{array}$$

$$= 2\pi.\frac{64}{243} \int_0^{3/2} u^4.\sqrt{1+u^2}.du$$

$$u = \tan t \qquad u=0 \Rightarrow t=0 \qquad u=\tfrac{3}{2} \Rightarrow t = \text{Arctg}\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$du = \underbrace{(1+tg^2t)}_{sec^2t}dt$$

$$= \frac{128\pi}{243} \int_0^{\text{Arctg}(\frac{3}{2})} \tan^4 t.\sec^3 t\,dt$$

$$= \frac{128\pi}{243} \int_0^{\text{Arctg}(\frac{3}{2})} (\sec^7 t - 2\sec^5 t + \sec^3 t)dt$$

Burada herbir terimi ayrı ayrı integre etmek yerine indirgeme ile;

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x.\tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$

olduğu dikkate alınarak $n=3$ oluncaya kadar indirgeme yapılabilir.

Ayrıca; $a = \text{Arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$ alınarak

$\int_0^a \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\sec a . tg\,a + Ln(\sec a + tg\,a)\right]$ olduğu

dikkate alınırsa (Bu çözümü kısmi integrasyon ile elde edilir)

$$I = \int_0^a (\sec^7 t - 2\sec^5 t + \sec^3 t)\,dt$$

$$= \frac{\sec^5 t . tg\,t}{6}\Big|_0^a + \left(\frac{5}{6} - 2\right)\int_0^a \sec^5 t\,dt + \int_0^a \sec^3 t\,dt$$

$$= \frac{\sec^5 a . tg\,a}{6} - \frac{7}{6}\left[\frac{\sec^3 t . tg\,t}{4}\Big|_0^a + \frac{3}{4}\int_0^a \sec^3 t\,dt\right] + \int_0^a \sec^3 t\,dt$$

$$= \frac{\sec^5 a . tg\,a}{6} - \frac{7\sec^3 a . tg\,a}{24} + \frac{1}{8}\int_0^a \sec^3 t\,dt$$

$$= \frac{\sec^5 a . tg\,a}{6} - \frac{7\sec^3 a . tg\,a}{24} + \frac{\sec a . tg\,a + Ln|\sec a + tg\,a|}{16}$$

$a = Arctg\left(\frac{3}{2}\right)$

$$S_x = \frac{28\sqrt{13}\,\pi}{81} + \frac{8\pi}{243} Ln\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \text{ br}^2.$$

23/ $y=e^x$ eğrisinin $0\le x\le 1$ kısmının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

$$S_x=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\cdot ds=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\cdot\sqrt{1+y'^2}\cdot dx$$

$$=2\pi\int_0^1 e^x\cdot\sqrt{1+(e^x)^2}\,dx=2\pi\int_0^1 e^x\cdot\sqrt{1+e^{2x}}\cdot dx$$

$\Rightarrow e^x=tgt$; $x=0\Rightarrow t_1=x=0$; $x=1\Rightarrow t_2=x=1$

$$e^x dx=\underbrace{(1+tg^2t)}_{sec^2t}dt$$

$$=2\pi\int_{t_1=x=0}^{t_2=x=1}\sqrt{1+tg^2t}\cdot sec^2t\,dt=2\pi\int_{x=0}^{x=1} sec^3t\,dt$$

$$=\cancel{2}\pi\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\Big[sect\cdot tgt+Ln|sect+tgt|\Big]_{t_1=x=0}^{t_2=x=1}$$

$e^x=tgt$ için

$x=0\Rightarrow tgt=e^0=1$ olup $sect=\sqrt{2}$

$x=1\Rightarrow tgt=e^1=e$ olup $sect=\sqrt{1+e^2}$

değerleri yerine yazılırsa;

$$S_x=\pi\Big[e\sqrt{1+e^2}+Ln\big|\sqrt{1+e^2}+e\big|-\sqrt{2}-Ln|\sqrt{2}+1|\Big]$$

$$=\pi\left[e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+Ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}+e}{\sqrt{2}+1}\right)\right]\ br^2$$

24/ $y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$ eğrisinin $1\leq x\leq 4$ ile sınırlı kısmının x ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan yüzey alanını bulunuz

$$y'=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}$$

$$S_x=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\,ds=2\pi\int_1^4\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot dx$$

$$=2\pi\int_1^4\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot dx$$

$$=2\pi\int_1^4\left(\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=2\pi\int_1^4\left(\frac{x^5}{48}+\frac{x}{3}+\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$=2\pi\left(\frac{x^6}{288}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^4$$

$$S_x=\frac{275}{8}\pi\ br^2$$