Yıldız Teknik Üniversitesi
Kimya-Metalurji Fakültesi
Matematik Mühendisliği

MTM2521 Nümerik Analiz 1 Gr.1

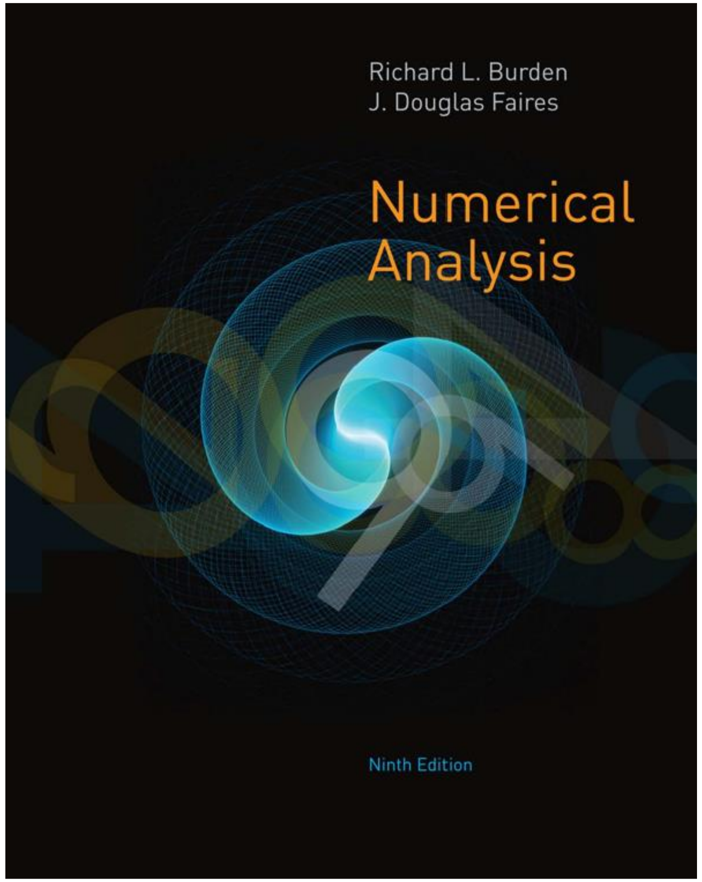
Dr. Öğr. Üyesi Fatih Aylıkcı

İletişim Bilgileri

Arş. Gör. Dr. Fatih Aylıkcı
Yıldız Teknik Üniversitesi. Kimya-Metalurji Fakültesi. Matematik Mühendisliği Bölümü A237 DAVUTPAŞA

Tel: 02123834616 E-mail: faylikci@yildiz.edu.tr
Web: https://avesis.yildiz.edu.tr/faylikci

Kaynak Kitaplar



Numerical Analysis,
Richard L. Burden, J. Douglas Faires

Haftalık Konular

Hafta	Konular	Ön Hazırlık
1	Matematiksel Önbilgiler	Kaynaklardaki ilgili bölüm
2	Lineer olmayan denklemlerin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
3	Lineer olmayan denklemlerin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
4	İnterpolasyon ve polinom yaklaşımı	Kaynaklardaki ilgili bölüm
5	İnterpolasyon ve polinom yaklaşımı	Kaynaklardaki ilgili bölüm
6	Ters interpolasyon ve Eğri uydurma	Kaynaklardaki ilgili bölüm
7	Eğri uydurma	Kaynaklardaki ilgili bölüm
8	Ara Sınav 1	
9	Lineer denklemler sistemlerinin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
10	Lineer denklemler sistemlerinin çözümü	Kaynaklardaki ilgili bölüm
11	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
12	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
13	Nümerik Türev ve integrasyon	Kaynaklardaki ilgili bölüm
14	Doğrusal Olmayan Denklem Sistemlerinin Sayısal çözümleri	Kaynaklardaki ilgili bölüm
15	Final	

http://bologna.yildiz.edu.tr/index.php?r=course/view&id=1503&aid=24

Ders Öğrenim Çıktıları

Ders Öğrenim Çıktıları

1. Öğrenciler nümerik çözüm yapma becerisi kazanırlar.
2. Matematik bilgilerini kullanma, matematiksel model kurma ve çözme becerisi kazanırlar.
3. Karmaşık veya Analitik olarak çözümü zor veya mümkün olmayan problemleri basit aritmetik işlemler kullanarak çözüm üretme becerisi kazanırlar.
4. Metodların doğruluğu ve kararlılığını analiz etme yeteneği edinirler.

Matematiksel Önbilgiler

Tanım

Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı, $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayan tüm x ler için

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa, o zaman L sayısına $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

olarak yazılır.

Matematiksel Önbilgiler

Tanım

$f(x), X \subseteq \mathbb{R}$ de tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşulun

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

olmasıdır. Eğer $f(x)$, her $x \in X$ için sürekli ise, $f(x)$ e X üzerinde süreklidir denir ve $f(x) \in C(X)$ şeklinde gösterilir.

Matematiksel Önbilgiler

Tanım

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel veya kompleks değerli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|x_n - x| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnız ε a bağlı pozitif $n > N(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x e yakınsaktır denir.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 1

Eğer $f(x)$, $X \subseteq \mathbb{R}$ de tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a. $f(x), x_0$ noktasında süreklidir.

b. Eğer, X deki herhangi bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyorsa,

$\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$ olur.

Matematiksel Önbilgiler

Tanım

Eğer $f(x), x_0$ noktasını içeren bir açık aralıkta tanımlı bir fonksiyon ise, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ifadesiyle tanımlanır ve $f'(x_0)$ ile gösterilir. Bir fonksiyonun X kümesinin her noktasında türevi varsa, bu fonksiyona X kümesinde türevlenebilir denir. $f'(x_0)$ türevi, $f(x)$ fonksiyonunun $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki teğetinin eğimine eşittir.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 2

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirse, $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 3

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilen ve aralığın uçlarında aynı değerleri alan, $f(a) = f(b)$, $y = f(x)$ fonksiyonu için öyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ki, $f'(c) = 0$ olur.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 4

$f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilir ise

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ vardır.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 5

$f(x)$ kapalı ve sınırlı bir $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ maksimum ve minimum değerlerini $[a,b]$ aralığındaki her $x \in [a,b]$ için

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

olacak şekilde $c_1, c_2 \in [a,b]$ noktaları vardır.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 6

$g(x), [a,b]$ kapalı aralığında integrallenebilen pozitif veya negatif bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x), [a,b]$ kapalı aralığında sürekli ise bu durumda $c \in [a,b]$ için

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \quad \text{olur.}$$

Eğer, $g(x)=1$ olarak alınırsa 6. Teorem $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığındaki ortalama değerine karşılık gelir. Yani $g(x)=1$ için

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{olur.}$$

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 7

$f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında n defa diferansiyellenebilir ve ayrıca $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ (burada $x_0, x_1, ..., x_n$ $n+1$ farklı noktadır) için $f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n) = 0$ ise, $f^{(n)}(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ vardır.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 8 (Ara Değer Teoremi)

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Eğer K, $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri arasında herhangi bir sayısı ise, bu durumda $f(c)=K$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Matematiksel Önbilgiler

Örnek 1

$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığında bir çözümünün olduğunu gösteriniz.

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 9

$n \geq 0$ bir tamsayı ve $f^{(n)}$ nin $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında türevlenebilir olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x_0 \in [a,b]$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

olacak şekilde x ile x_0 arasında bir $\xi(x)$ vardır. Burada,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ formülleri ile verilir. $P_n(x)$ ye n. mertebeden Taylor polinomu ve $R_n(x)$ ifadesine de kalan terim ya da hata terimi denir.

Matematiksel Önbilgiler

Örnek 2

$f(x) = \cos x,$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında ikinci ve üçüncü mertebeden Taylor polinomunu bulunuz. Yaklaşık olarak $\cos(0.01)$ değerini hesaplayınız.

Matematiksel Önbilgiler

Örnek 3

$\sqrt{105}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Matematiksel Önbilgiler

Örnek 4

$(1.1)^{1/5}$ sayısı, virgülden sonra dört ondalık basamak doğrulukla hangi aralıkta bulunur?

Matematiksel Önbilgiler

Teorem 10

$n \geq 0$ bir tamsayı ve $f^{(n)}$ nin $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilir olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $x_0 \in [a,b]$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ olacak şekilde x ile x_0 arasında bir $\xi(x)$ vardır. Burada,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ ve

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt$$ formülleri ile verilir.

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

Tanım

En basit deyişle hata, gerçek değer ile yaklaşık değer arasındaki farktır. Üç türlü hata vardır,

1. İnsan hataları,
2. Hatalı formüllerden ortaya çıkan kesme hataları,
3. Bilgisayarların yaptığı hatalar

İnsan hataları, kişilerin bilgisayara veri girerken yaptığı hatalardır.

Kesme hataları (trunction error) ise, bir sonsuz terimli seriden son kısmı atmakla elde edilen, sadecesonlu sayıda terimli ifadeyi kullanmakla yapılan hatadır.

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

Örnek 5

$1/(1+x)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun $[-0.5, 0.5]$ aralığındaki integralinin değerini Taylor polinomunu kullanarak bulalım. Hatayı elde edelim.

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

Tanım

Bir s sayısının bir yaklaşık değeri $\bar{s}$ olsun. Bu durumda

$$E_s = |s - \bar{s}|$$

değerine mutlak hata ve $s \neq 0$ olmak üzere

$$B_s = \frac{|s - \bar{s}|}{|s|}$$

değerine de bağıl hata denir.

$\%100 \times B_s$ ifadesine yüzde hata denir.

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

Teorem

$$\frac{|x-\bar{x}|}{|x|} < \frac{1}{2}\times 10^{-d}$$ sağlanacak şekilde en büyük d pozitif tamsayısı mevcutsa

$\bar{x}$ sayısı x sayısına d anlamlı basamak yakındır denir.

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

Örnekler:

$$x = 3.141592$$
$$\bar{x} = 3.14$$
$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = 0.000507\ ;\ \frac{1}{2} \times 10^{-3} \quad d = 3$$

$$x = 1000000$$
$$\bar{x} = 999996$$
$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = 0.000004 < 0.000005 = \frac{1}{2} \times 10^{-5} \quad d = 5$$

$$x = 0.000012$$
$$\bar{x} = 0.000009$$
$$\frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = 0.25 < 0.5 = \frac{1}{2} \times 10^{-0} \quad d = 0$$

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

Tanım (Asimptotik Semboller)

: tilda (yaklaşık), o (derece), O (derece)

$$1.\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Rightarrow f(x) :\ g(x),\ x\to x_0$$

$$\sin x :\ x,\ x\to 0; \quad e^x :\ 1,\ x\to 0; \quad \ln(x+1) :\ x,\ x\to 0$$

$$2.\ \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=0 \Rightarrow f(x)=o[g(x)],\ x\to x_0$$

$$x^2=o(x),\ x\to 0; \quad \frac{\sin x}{x}=o(1),\ x\to\infty$$

$$3.\ \lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\le k,\ k>0 \quad f(x)=O[g(x)],\ x\to x_0$$

$$\sin x=O(1), \quad \left|\frac{\sin x}{1}\right|\le 1$$

$$\sin x = x+O(x^3),\ x\to 0$$

Matematiksel Önbilgiler
Hatalar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \Rightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + O(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \Rightarrow \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$$

$$1.\; O(h^p) + O(h^p) = O(h^p)$$

$$2.\; O(h^p) + O(h^q) = O(h^r) \quad r = \min\{p, q\}$$

$$3.\; O(h^p)O(h^q) = O(h^s) \quad s = p + q$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

1. Aralık Yarılama Metodu (Bisection Method)

Bu yöntem Ara Değer Teoreminin uygulamasına dayanan bir tekniktir.

$f(x)$ sürekli fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri zıt işaretli olsun. Ara değer teoremi gereğince, $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri zıt işaretli olduğu sürece $a < m < b$ olacak şekilde bir m sayısı vardır. Bu m sayısı için $f(m) = 0$ olur. Algoritmik olarak yarılama yöntemi şu şekilde ifade edilebilir; $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)f(b) \leq 0$ şartını sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun, $n = 0,1,2,...$ için

$m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ hesaplanır.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Eğer, $f(a_n)f(m_n) \leq 0$ ise, $a_{n+1} = a_n$ ve $b_{n+1} = m_n$ alınır.

Aksi durumda, $a_{n+1} = m_n$ ve $b_{n+1} = b_n$ alınır.

Bu şekilde devamla $m_1, m_2, ..., m_N$ dizisi elde edilir. Öyle ki $|m_N - m_{N-1}| < \varepsilon$ olduğunda,

yani ardışık iki değer arasındaki fark son derece küçük kaldığında ya da istediğimiz ε

(bu ε değerine tolerans da denir)

değerinden küçük kaldığında hesaplamayı durdururuz. Bu durumda $f(x)$,

$[a_{n+1}, b_{n+1}]$ aralığında bir köke sahiptir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ fonksiyonunun $[1,2]$ aralığındaki kökünü bulalım.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$2+\cos(e^x-2)-e^x=0$ denkleminin [0.5,1.5] aralığındaki kökü için aralık yarılama metodu ile 3 iterasyon yapınız ve aralıkları belirleyiniz.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığındaki kökü için aralık yarılama metodu ile 3 iterasyon yapınız.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Teorem (Aralık Yarılama Teoremi)

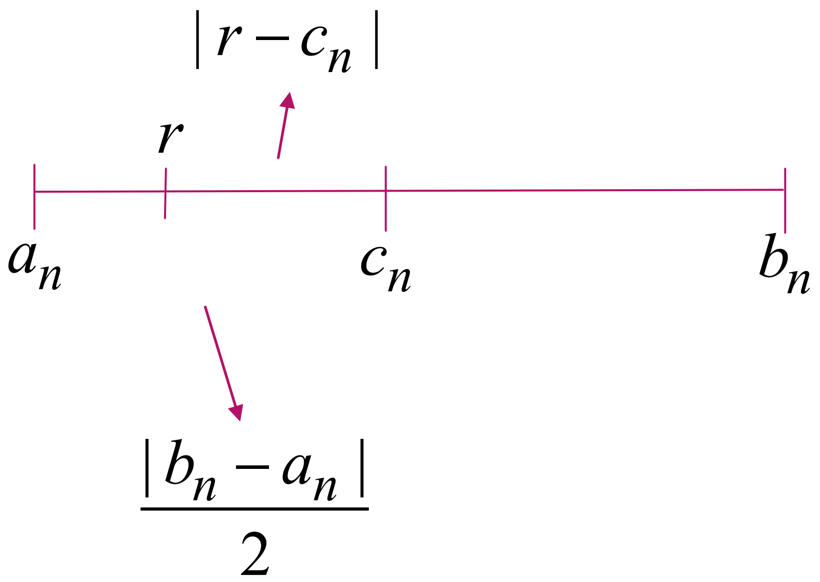
$f, [a,b]$ aralığında sürekli ve $f(r) = 0, r \in [a,b]$ olsun.

$f(a)f(b) < 0$ ve $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aralık yarılama metodu ile elde edilmiş olsun.

Bu takdirde $|r - c_n| < \dfrac{b-a}{2^{n+1}}, n = 1, 2, 3, ...$ dir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

İspat:



$$|r-c_n| \le \frac{|b_n-a_n|}{2}, \forall n$$

$$|b_1-a_1| = \frac{|b_0-a_0|}{2}$$

$$|b_2-a_2| = \frac{|b_1-a_1|}{2}$$

M

$$|b_n-a_n| = \frac{|b_0-a_0|}{2^n} \Rightarrow |r-c_n| \le \frac{|b_0-a_0|}{2^{n+1}}$$

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

k ondalık hane doğrulukta r kökünü elde etmek için

$|r - c_n| \leq \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}} \leq \dfrac{1}{2} \times 10^{-k}$ eşitsizliği sağlanmalıdır.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$x^3 - 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin [1,2] aralığındaki kökünü 2 ondalık hane doğrulukta hesaplamak için kaç aralık yarılanmalıdır?

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

Aralık yarılama metodunu kullanarak

$xe^{-x} + x^3 + 1 = 0$ denkleminin [-1,0] aralığındaki kökü için

3 iterasyon yapınız. Bu kökü aralık yarılama metodu ile 10^{-4}

doğrulukta hesaplamak için kaç iterasyon yapılmalıdır?

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

2. Regula Falsi Metodu

Bu yöntem aralık yarılama metoduna çok benzemektedir. Bu yöntemi aralık yarılama metodundan ayıran özellik, denklemin yaklaşık kökünün bulunduğu aralığın orta noktası yerine ağırlıklı ortalama değerinin hesaplanmasıdır.

$f(x), [a_0, b_0]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ve $f(a_0) f(b_0) \leq 0$ olsun. $n = 0,1,2,...$ için

$w = \dfrac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$ ağırlıklı ortalamasını hesaplayalım. $f(a_n)w < 0$ ise $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = w$ yazalım. Aksi durumda $a_{n+1} = w, b_{n+1} = b_n$ yazalım. Bu şekilde ardışık iki değer arasındaki fark istenildiği kadar küçük kalana kadar işlemlere devam edilerek verilen denklemin yaklaşık kökü bulunmuş olur.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Buradaki,

$$w = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$$

ağırlıklı ortalaması geometrik olarak $(a_n, f(a_n))$ ve $(b_n, f(b_n))$

noktalarını birleştiren doğrunun O$x-$eksenini kestiği noktalardan ibarettir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun $[1,2]$ aralığında bir kökünü Regula Falsi metodunu kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$\cos(x) - xe^{x} = 0$ $[0,1]$ aralığındaki kökünü dört ondalık hane doğruluğunda Regula Falsi metoduyla hesaplayınız.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümleri

Örnek:

$e^x - 1 - 2x = 0$ denkleminin $[1,2]$ aralığındaki kökünü bulunuz.