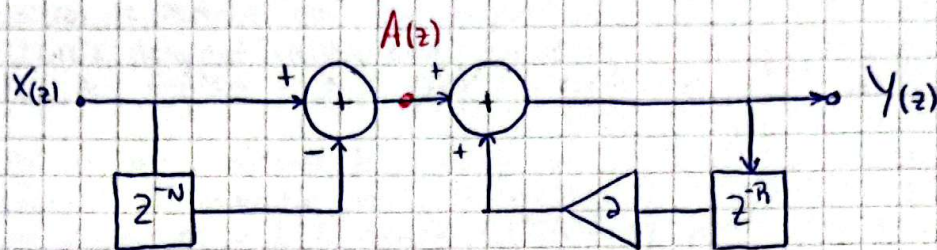


Final - 13/05/2024

Ejercicio 2



- a) Hallar $H(z)$ para $N=4$, $R=2$ y $a=-1$. Diagrama de polos y ceros, respuesta en frecuencia de módulo y retardo.
- b) Modifique los coeficientes para que se comporte como un filtro notch.
- c) Si $N=8$, calcule R y a para que sea del mismo tipo que a). Responda:
- ¿Son filtros recursivos?
 - ¿En qué se diferencian ambos filtros?
 - ¿Ha cambiado su costo computacional?

a)

$$\begin{cases} A(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-N} \\ Y(z) = A(z) + Y(z) \cdot z^{-R} \cdot a \\ N=4, R=2, a=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(z) = X(z) - X(z) \cdot z^{-4} \\ Y(z) = A(z) - Y(z) \cdot z^{-2} \end{cases}$$

$$Y(z) = A(z) - Y(z) \cdot z^{-2} \Rightarrow A(z) = Y(z) \cdot (1 + z^{-2})$$

$$A(z) = A(z) \Rightarrow Y(z) (1 + z^{-2}) = X(z) (1 - z^{-4})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-4}}{1 + z^{-2}} = \frac{\frac{z^4 - 1}{z^4}}{\frac{z^2 + 1}{z^2}} = \frac{z^4 - 1}{z^4} \cdot \frac{z^2}{z^2 + 1}$$

$$H(z) = \frac{z^4 - 1}{z^2(z^2 + 1)} = \frac{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}{z^2(z^2 + 1)} = \boxed{\frac{z^2 - 1}{z^2} = H(z)}$$

b) Para que sea un filtro notch propongo $\alpha = 1$ en vez de $\alpha = -1$. Además mantengo $N=4$ y $R=2$

$$\begin{cases} A(z) = X(z) \cdot (1 - z^{-N}) \\ Y(z) = A(z) + Y(z) \cdot z^{-R} \cdot \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(z) = X(z) (1 - z^{-4}) \\ Y(z) = A(z) + Y(z) \cdot z^{-2} \end{cases}$$

$$Y(z) = A(z) + Y(z) \cdot z^{-2} \Rightarrow A(z) = Y(z) \cdot (1 - z^{-2})$$

$$X(z) (1 - z^{-4}) = Y(z) (1 - z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-2}} = \frac{\frac{z^4 - 1}{z^4}}{\frac{z^2 - 1}{z^2}} = \frac{z^4 - 1}{z^4} \cdot \frac{z^2}{z^2 - 1} = \frac{z^4 - 1}{z^2(z^2 - 1)}$$

$$H(z) = \frac{(z^2 + 1)(z^2 - 1)}{z^2(z^2 - 1)} \Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2}}$$

c) $N=8$, calcular R y α .

$$\begin{cases} A(z) = X(z) (1 - z^{-N}) \\ Y(z) = A(z) + Y(z) \cdot z^{-R} \cdot \alpha \end{cases} = \begin{cases} A(z) = X(z) (1 - z^{-8}) \\ Y(z) = A(z) + Y(z) \cdot z^{-R} \cdot \alpha \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-8}}{1 + \alpha \cdot z^{-R}} = \frac{\frac{z^8 - 1}{z^8}}{\frac{\alpha + z^R}{z^R}} = \frac{z^8 - 1}{z^8} \cdot \frac{z^R}{\alpha + z^R}$$

$$H(z) = \frac{z^8 - 1}{z^{(8-R)}(\alpha + z^R)} = \frac{(z^4 + 1)(z^2 + 1)(z^2 - 1)}{z^6(z^2 + 1)} = \frac{(z^4 + 1)(z^2 - 1)}{z^6}$$

Planteamos entonces que sea un pasa banda

$$z^{8-R} (\alpha + z^R) = z^6 (z^2 + 1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ R = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{H(z) = \frac{z^6 + z^2 - z^4 - 1}{z^6}}$$