TP #09 - Ejercicio 07

Una esfera de acero suspendida magnéticamente se puede describir mediante la ecuación lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

Las variables de estado son $x_1 = posición \;\; y \;\; x_2 = velocidad$, y ambas son posibles de medir. Seleccionar un formato de realimentación de manera que el sistema sea críticamente amortiguado y el tiempo de establecimiento (al 2%) sea de 2 segundos. Realizar el diagrama en bloques con SIMULIK y verificar el diseño realizado.

Se pide,

- $\xi = 1$
- $t_s = 2$

Recordando que,

$t_s \approx \frac{5.83}{\xi w_n}$, $\xi w_n \approx \frac{5.83}{2}$,

$$\xi w_n \approx 2.91$$

Como el factor de amortiguamiento es unitario, se desprende de esta condición que estamos ante un amortiguamiento crítico, es decír los polos deben ser reales e iguales.

$\left(s + \xi w_n\right)^2 = s^2 + 5.83s + 8.47$; **(a)**

Con estos datos busquemos entonces la matríz 'K'

$$\mu(t) = -\mathrm{KX}(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = \mathrm{AX}(t) + B\mu(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = \mathrm{AX}(t) + B(-\mathrm{KX}(t))$$
$$\text{overset}.X(t) = (A - \mathrm{BK})X(t)$$

Quedando entonces,

$$A - \mathrm{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$
$$A - \mathrm{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$
$$A - \mathrm{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente hallamos la expresión de los polos deseados,

$$(\mathrm{sI} - A + \mathrm{BK}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 - k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{sI} - A + \mathrm{BK}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ k_1 - 3 & s + k_2 \end{bmatrix}$$

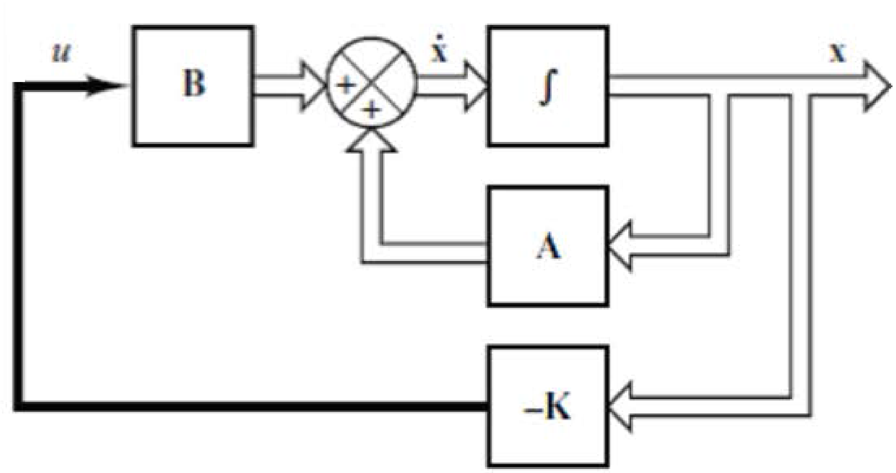
Hallamos ahora el determinante,

$$\det(\mathrm{sI} - A + \mathrm{BK}) = s^2 + s\,k_2 + k_1 - 3$$

Reemplazando con lo hallado en **(a)**

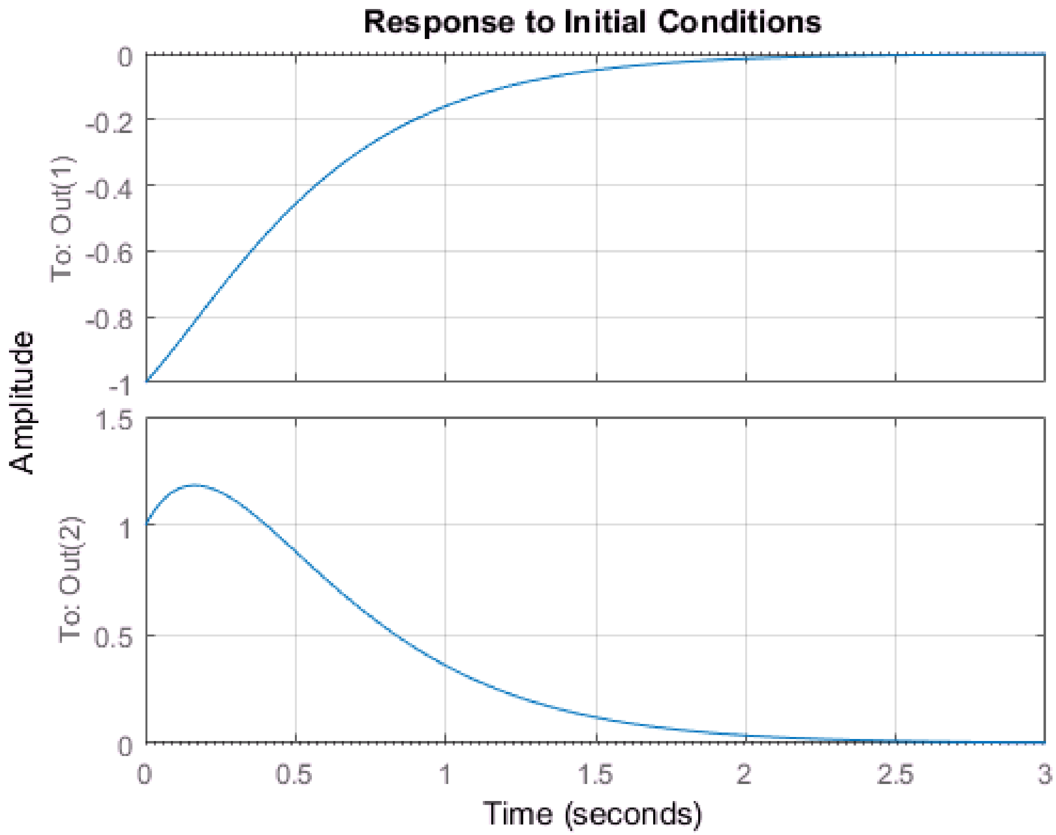
- $k_1 = 11.47$
- $k_2 = 5.83$

Se puede considerar el sistema como un regulador ya que la esfera está suspendida,



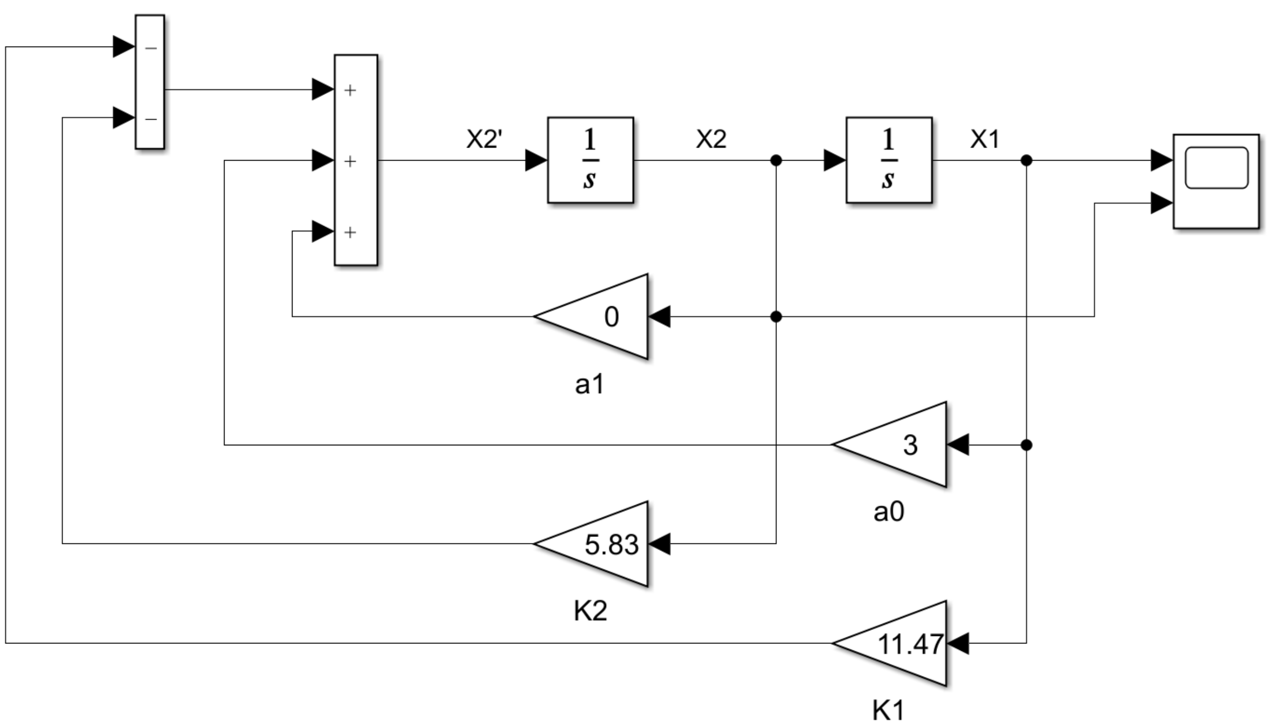
Por lo tanto debemos utilizar el comando 'initial' para poder simular la respuesta del mismo.

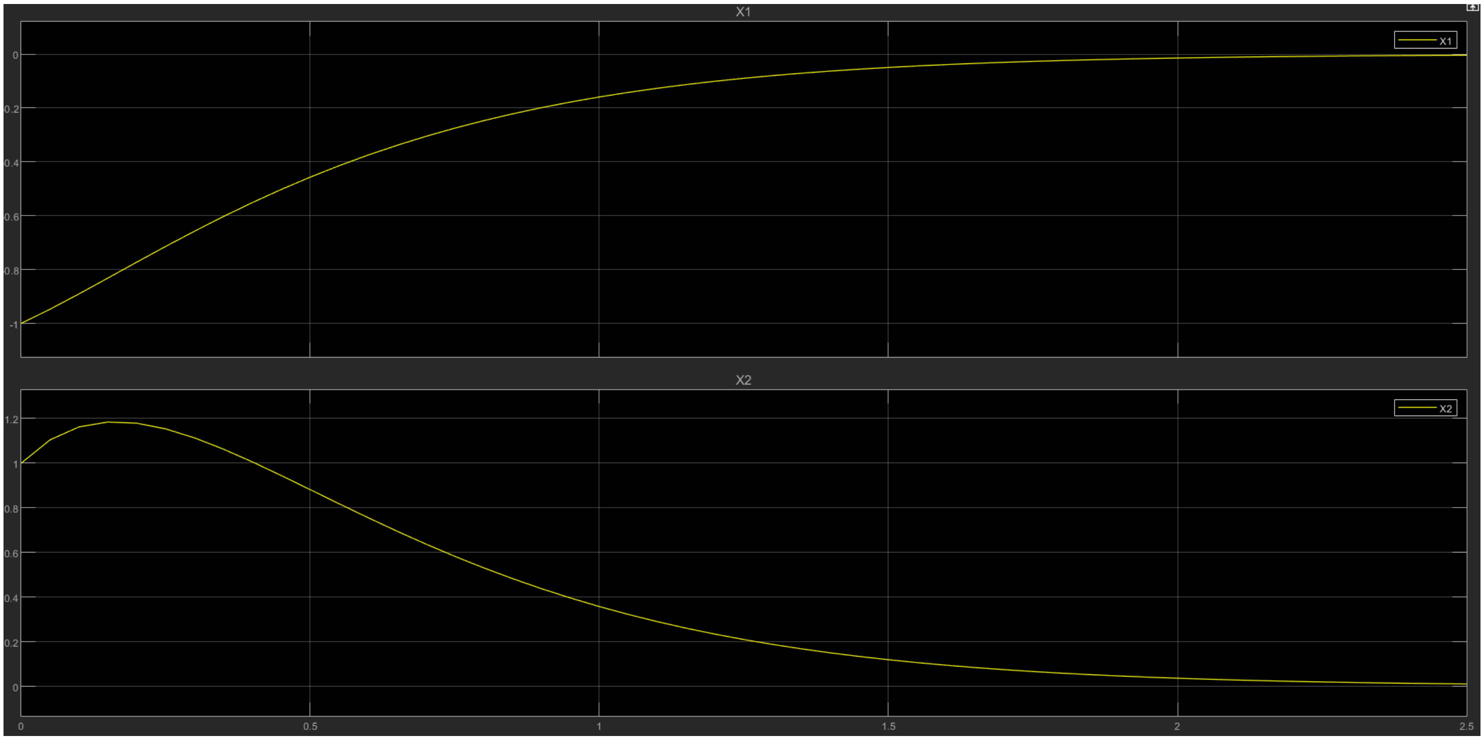
```
An = [0 1; -8.47 -5.83];     % Matriz 'An = (A-BK)' obtenida.
C = [1 0; 0 1];              % Queremos obtener la posición y velocidad de nuestro sistema.
X0 = [-1 1];                 % x0 = -1m; v0 = 1m/s;
sys = ss(An, [], C, []);     % Sistema regulador.
initial(sys, X0);
grid on;
```



El mismo comportamiento lo podemos observar en Simulink, ejecutar ***TP09_ej07.slx.***

Notar que las condiciones iniciales están cargadas en los integradores.





X1
X1
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
X2
X2
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5