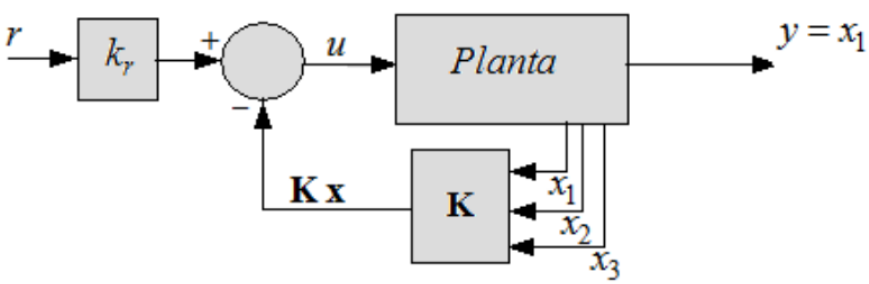
TP #09 - Ejercicio 10

Dada la planta (tipo cero) por su modelo de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.1}{(s+0.5)(s+0.1)(s+2)}$$

Se pide:
a) Obtener un modelo de estado conveniente para la planta.
b) Verificar el comportamiento dinámico de la planta frente a $u(t) = escalón\ \ unitario$
c) Diseñar un sistema de control, realimentando el vector de estado completo y ajustando el factor de escala k_r para tener seguimiento perfecto al escalón de referencia. Los polos de lazo cerrado se ubicarán en $s_{1,2} = -0.8 \pm j1.10 \qquad s_3 = -5$. El sistema responderá a un diagrama en bloques como el siguiente:



d) Verificar mediante simulación con SIMULINK que se cumplen las especificaciones de diseño.

Del enunciado

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.5)\,(s+0.1)(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+s\,0.6+0.05)(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3+s^2\,2.6+s\,1.25+0.1}$$

En base al modelo canónico controlable podemos definir,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -1.25 & -2.6 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \left[(b_0 - b_3a_0) \quad (b_1 - b_3a_1) \quad (b_2 - b_3a_2) \right]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = [b_3]$$

$$[D] = [0]$$

Del gráfico tenemos,

$$\mu(t) = r(t)k_r - K\ X(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = A\ X(t) + B\mu(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = A\ X(t) + B\big(r(t)k_r - K\ X(t)\big)$$
$$\text{overset}.X(t) = (A - B\ K)\,X(t) + B\ r(t)k_r\ ;\ (\mathbf{a})$$

Se pide,

$$\text{PLC}: (s + 0.8 + \text{j}1.1)\ (s + 0.8 - \text{j}1.1)\ (s + 5)$$
$$\text{PLC}: (s^2 + 4s + 20)(s + 10)$$
$$\text{PLC}: s^3 + s^2\ 6.6 + s\ 9.85 + 9.25;\ (\mathbf{b})$$

Quedando entonces,

$$A - \text{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -1.25 & -2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$A - \text{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -1.25 & -2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$A - \text{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 - k_1 & -1.25 - k_2 & -2.6 - k_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente hallamos la expresión de los polos deseados,

$$(\text{sI} - A + \text{BK}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 - k_1 & -1.25 - k_2 & -2.6 - k_3 \end{bmatrix}$$

$$(\text{sI} - A + \text{BK}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0.1 + k_1 & 1.25 + k_2 & s + 2.6 + k_3 \end{bmatrix}$$

Hallamos ahora el determinante,

$$\det(sI - A + BK) = s^3 + s^2\ (2.6 + k_3) + s\ (1.25 + k_2) + k_1 + 0.1$$

Reemplazando con lo hallado en **(b)**

- $k_1 = 9.15$
- $k_2 = 8.6$
- $k_3 = 4$

Podemos además corroborar con la función 'acker'

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -0.1 -1.25 -2.6];
B = [0; 0; 1];
C = [0.1 0 0];
D = [];
PLC=[-0.8+1.1i -0.8-1.1i -5];
disp('Ganancias calculadas con Ackerman:')
```

```
Ganancias calculadas con Ackerman:
```

```
K=acker(A,B,PLC)
```

```
K = 1x3 double

    9.1500    8.6000    4.0000
```

```
disp('Vector de Realimentción de Estados ([An]):')
```

```
Vector de Realimentción de Estados ([An]):
```

```
An=A-B*K
```

```
An = 3x3 double

         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
   -9.2500   -9.8500   -6.6000
```

```
disp('Posición diseñada de los polos a lazo cerrado:')
```

```
Posición diseñada de los polos a lazo cerrado:
```

```
PLC_d=eig(An)
```

```
PLC_d = 3x1 complex

  -5.0000
  -0.8000
  -0.8000
```

Finalmente hallamos el valor de k_r, partiendo de **(a)**,

$$\text{overset}.X(t) = (A - B\,K)\,X(t) + B\,r(t)k_r$$

Aplicamos transformada de Laplace, y con condiciones iniciales nulas

$$\mathrm{sX}(s) - X(0) = (A - B\,K)\,X(s) + B\,R(s)k_r$$

$$\mathrm{sX}(s) - (A - B\,K)\,X(s) = B\,R(s)k_r$$

$$(\mathrm{sI} - A + B\,K)\,X(s) = B\,R(s)k_r$$

$$X(s) = (\mathrm{sI} - A + B\,K)^{-1}B\,R(s)k_r$$

Tomando la ecuación de la salida,

$$Y(s) = C\,X(s)$$

$$Y(s) = C(\mathrm{sI} - A + B\,K)^{-1}B\,R(s)k_r$$

Como vamos a excitar al sistema con una señal escalón, podemos analizar el teorema de valor final, suponiendo,

$$\lim_{s\to 0} s\,Y(s) = 1$$

$$\lim_{s\to 0} s\,C\,(s\,I - A + B\,K)^{-1}B\,\tfrac{1}{s}\,k_r = 1$$

$$\lim_{s\to 0} C\,(s\,I - A + B\,K)^{-1}B\,k_r = 1$$

$$C\,(-A + B\,K)^{-1}B\,k_r = 1$$

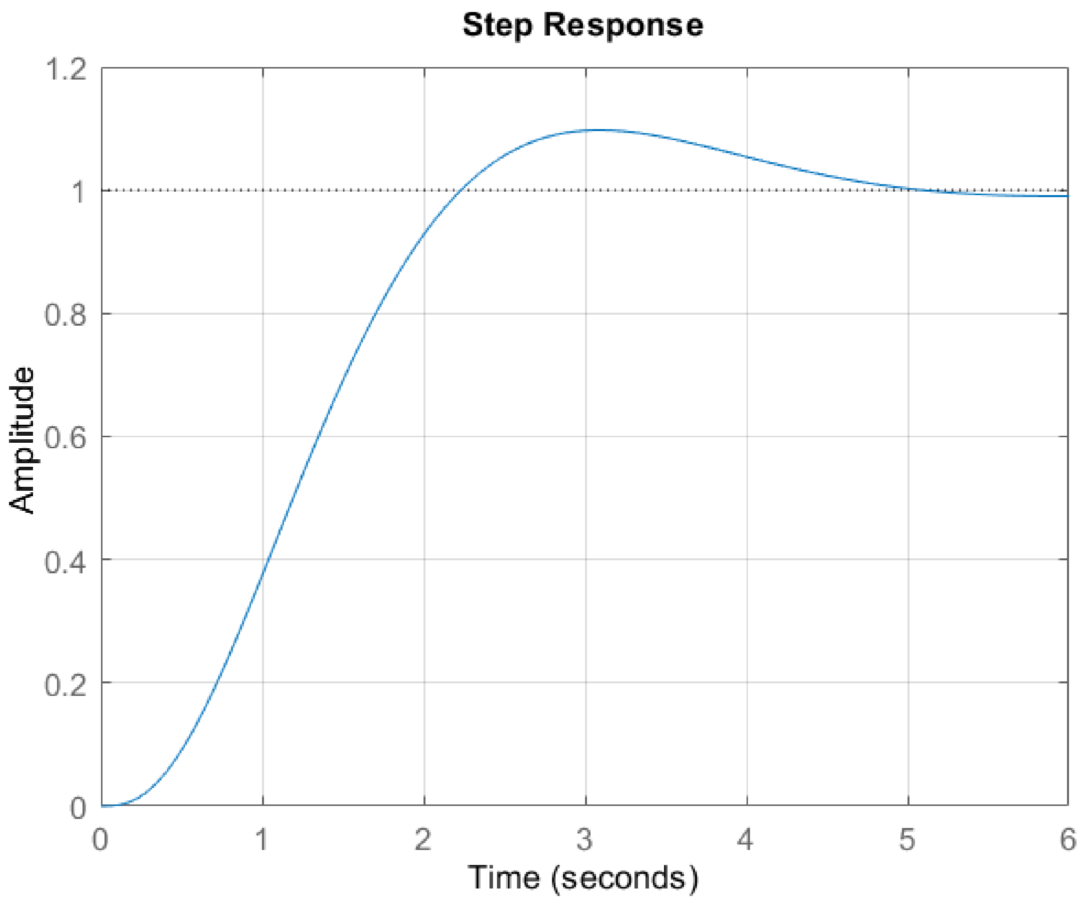
$$k_r = \frac{1}{C(-A+B\,K)^{-1}B}$$

Empleando MATLab para evitar el cálculo matricial,

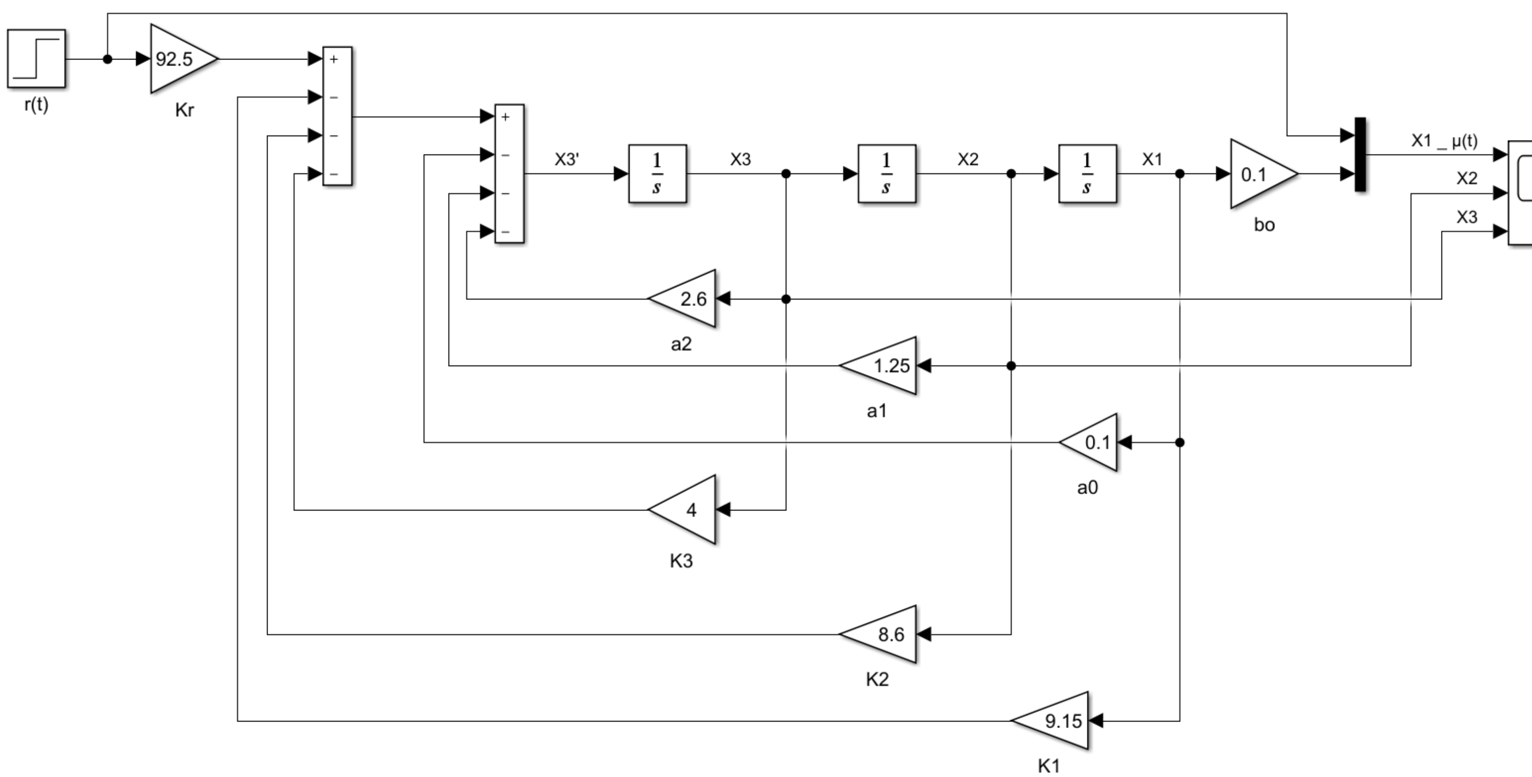
```
kr = 1/(C*inv(-A+B*K)*B)
```

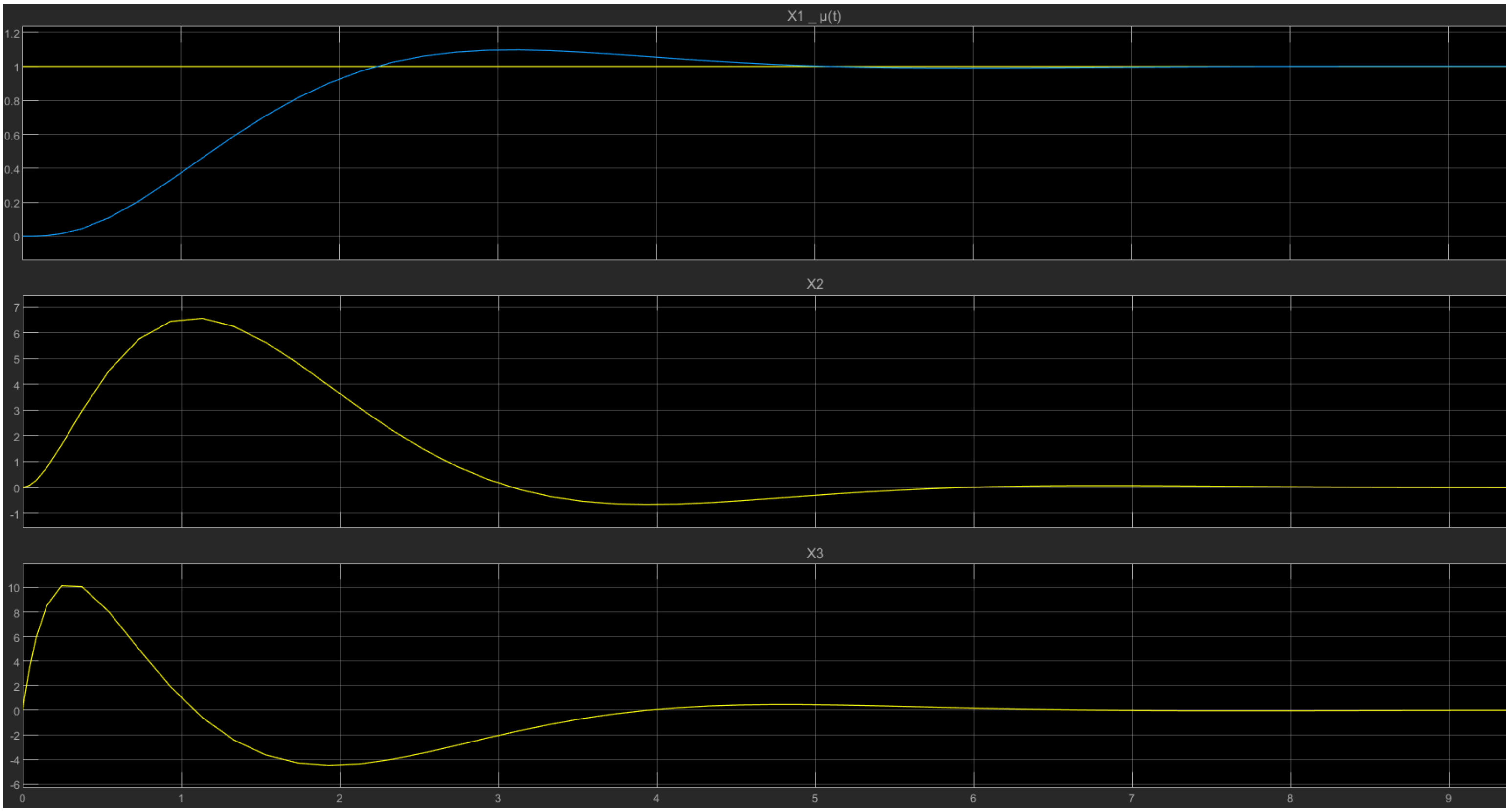
```
kr = 92.5000
```

```
sys=ss(An,B*kr,C,D);
step(sys)
grid on;
```



Simulink, ejecutar ***TP09_ej10.slx.***





X1 _ μ(t)
X2
X3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9