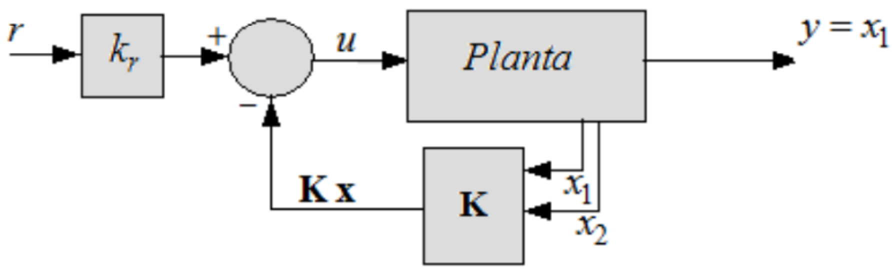
TP #09 - Ejercicio 11

Para la planta del problema 10 (TP Nº 8a), dada por su función transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(1+s/100)^2}$$

Se pide:
a) Obtener un modelo de estado adecuado.
b) Diseñar la matriz ganancia $\mathbf{K}$, y ajustar el factor de escala k_r para tener seguimiento perfecto al escalón de referencia y ubicando los polos de lazo cerrado en $s_{1,2} = -500 \pm j600$. El diagrama en bloques adoptado para el sistema a diseñar es:



c) Una vez diseñado el sistema, realizar la simulación con SIMULINK y verificar el diseño. Comparar con el diseño realizado para la misma planta en el problema 10 del TP Nº 8a.

Del enunciado,

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{100}+1\right)^2}$$

$$G(s) = \frac{10^4}{(s^2 + s\,200 + 10^4)}$$

En base al modelo canónico controlable podemos definir,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -200 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (b_0 - b_2 a_0) & (b_1 - b_2 a_1) \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = [b_2]$$

$$[D] = [0]$$

Busquemos entonces la matríz 'K'

$$\mu(t) = r(t)k_r - K\ X(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = A\ X(t) + B\mu(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = A\ X(t) + B(r(t)k_r - K\ X(t))$$
$$\text{overset}.X(t) = (A - B\ K)\,X(t) + B\ r(t)k_r;\ (\mathbf{a})$$

Se pide,

$$\text{PLC}:\ (s + 500 + \text{j}600)\ (s + 500 - \text{j}600)$$
$$\text{PLC}:\ s^2 + s\ 1000 + 610000;\ (\mathbf{b})$$

$$A - \text{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$
$$A - \text{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$
$$A - \text{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 - k_1 & -200 - k_2 \end{bmatrix}$$

Finalmente hallamos la expresión de los polos deseados,

$$(\text{sI} - A + \text{BK}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 - k_1 & -200 - k_2 \end{bmatrix}$$
$$(\text{sI} - A + \text{BK}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 10^4 + k_1 & s + 200 + k_2 \end{bmatrix}$$

Hallamos ahora el determinante,

$$\det(\text{sI} - A + \text{BK}) = s^2 + s(200 + k_2) + k_1 + 10^4$$

Reemplazando con lo hallado en **(b)**

- $k_1 = 600000$
- $k_2 = 800$

Podemos además corroborar con la función 'acker'

```
A = [0 1; -1e4 -200];
B = [0; 1];
C = [1e4 0];
D = [];
PLC=[-500+600i -500-600i];
```

```
disp('Ganancias calculadas con Ackerman:')
```

```
Ganancias calculadas con Ackerman:
```

```
K=acker(A,B,PLC)
```

```
K = 1x2 double

      600000         800
```

```
disp('Vector de Realimentción de Estados ([An]):')
```

```
Vector de Realimentción de Estados ([An]):
```

```
An=A-B*K
```

```
An = 2x2 double

           0           1
     -610000       -1000
```

```
disp('Posición diseñada de los polos a lazo cerrado:')
```

```
Posición diseñada de los polos a lazo cerrado:
```

```
PLC_d=eig(An)
```

```
PLC_d =
   1.0e+02 *

  -5.0000 + 6.0000i
  -5.0000 - 6.0000i
```

Finalmente hallamos el valor de k_r, partiendo de **(a)**,

$$\text{overset}.X(t) = (A - B\,K)X(t) + B\,r(t)k_r$$

Aplicamos transformada de Laplace, y con condiciones iniciales nulas

$$\mathrm{sX}(s) - X(0) = (A - B\,K)X(s) + B\,R(s)k_r$$

$$\mathrm{sX}(s) - (A - B\,K)X(s) = B\,R(s)k_r$$

$$(\mathrm{sI} - A + B\,K)X(s) = B\,R(s)k_r$$

$$X(s) = (\mathrm{sI} - A + B\,K)^{-1}B\,R(s)k_r$$

Tomando la ecuación de la salida,

$$Y(s) = C\,X(s)$$

$$Y(s) = C(\mathrm{sI} - A + B\,K)^{-1}B\,R(s)k_r$$

Como vamos a excitar al sistema con una señal escalón, podemos analizar el teorema de valor final, suponiendo,

$$\lim_{s \to 0} s\, Y(s) = 1$$

$$\lim_{s \to 0} s\, C\,(s\,I - A + B\,K)^{-1} B\, \frac{1}{s} k_r = 1$$

$$\lim_{s \to 0} C\,(s\,I - A + B\,K)^{-1} B\, k_r = 1$$

$$C\,(-A + B\,K)^{-1} B\, k_r = 1$$

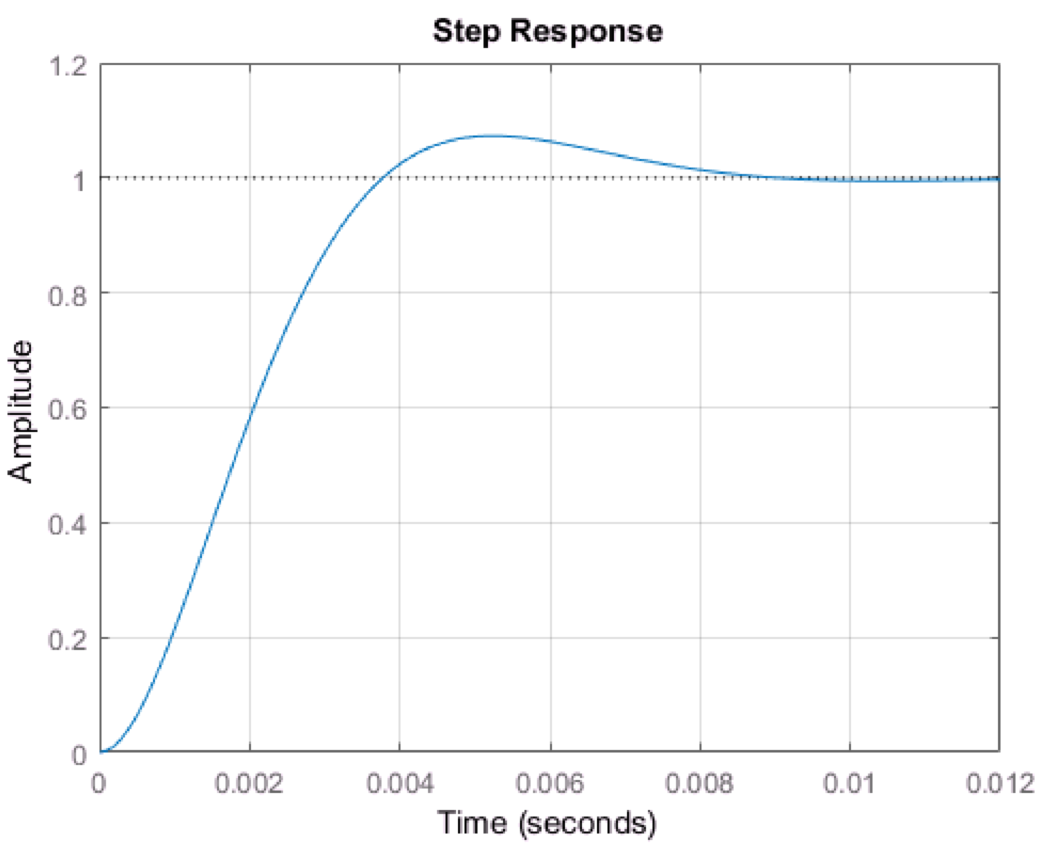
$$k_r = \frac{1}{C(-A+B\,K)^{-1}B}$$

Empleando MATLab para evitar el cálculo matricial,

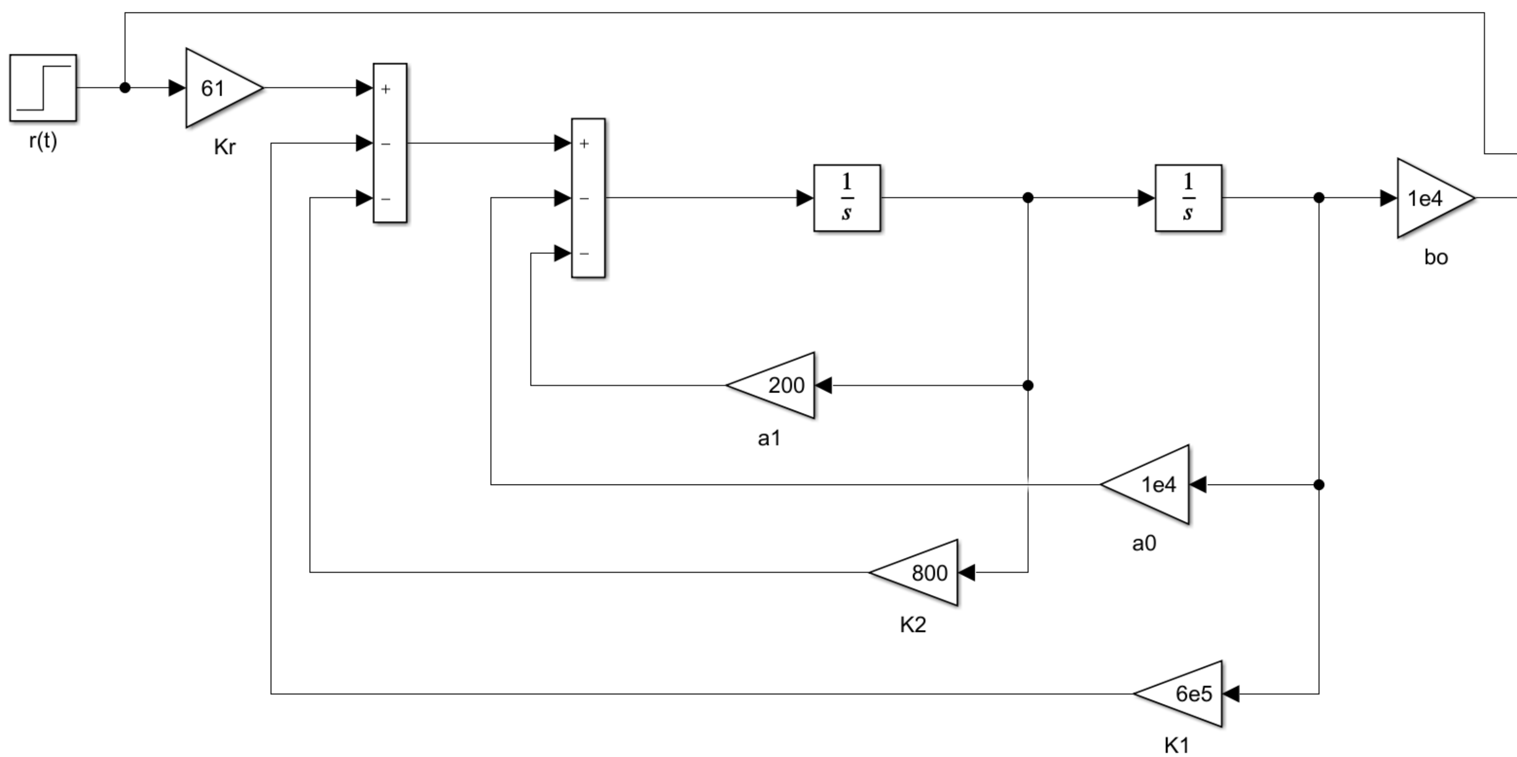
```
kr = 1/(C*inv(-A+B*K)*B)
```

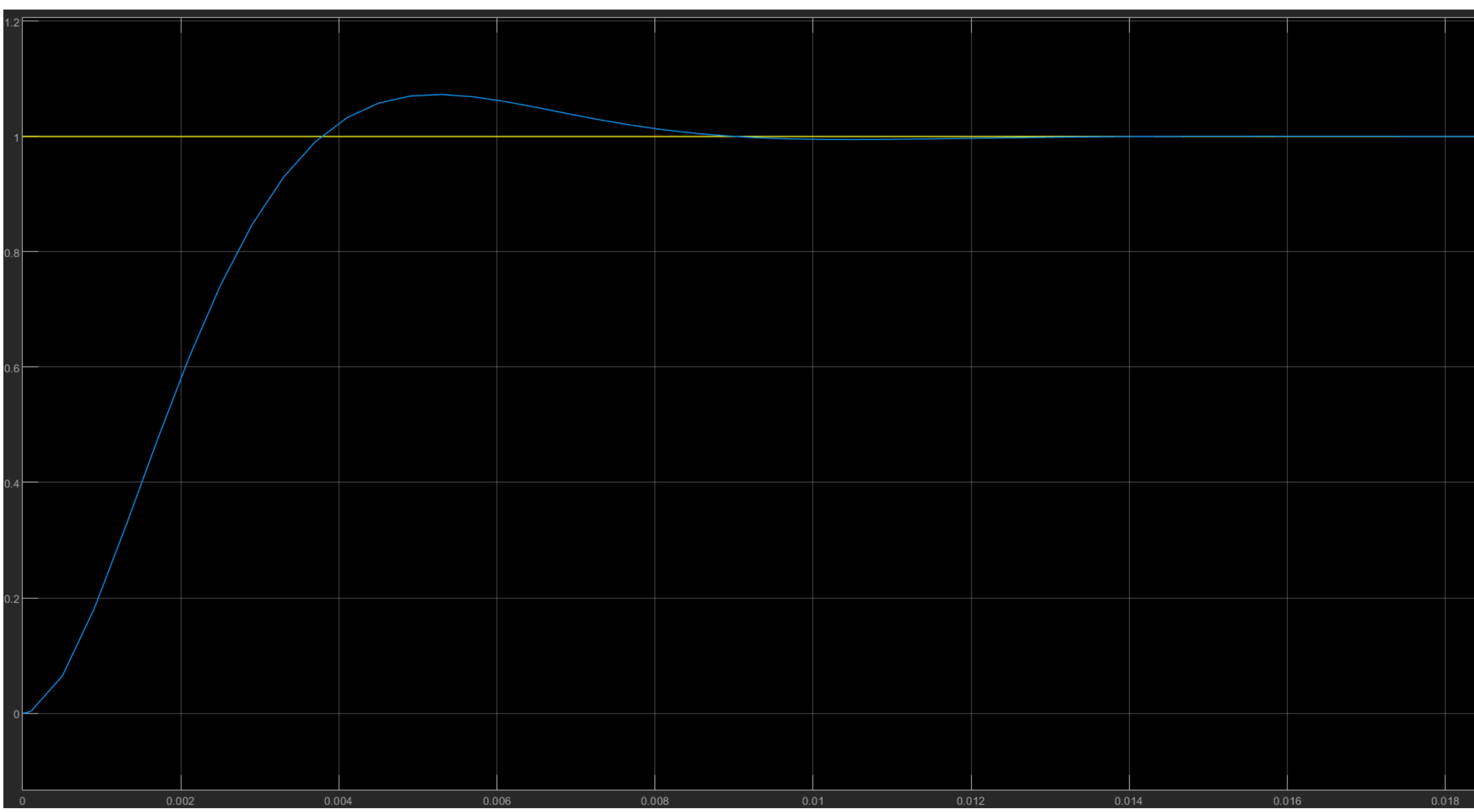
```
kr = 61
```

```
sys=ss(An,B*kr,C,D);
step(sys)
grid on;
```



Simulink, ejecutar ***TP09_ej11.slx.***


r(t)
61
Kr
1/s
1/s
1e4
bo
200
a1
1e4
a0
800
K2
6e5
K1


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018