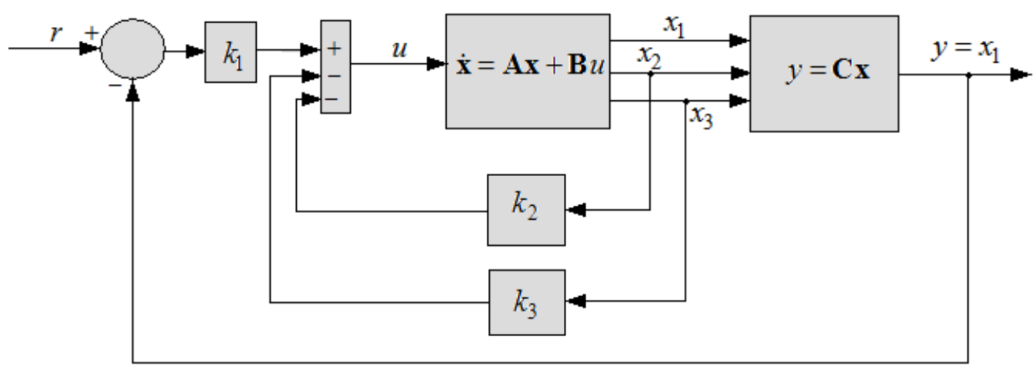
TP #09 - Ejercicio 09

Dada la Planta (tipo 1) mediante la función transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea controlar la salida $y(t)$ realimentando el vector de estado completo $u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + k_1 r$ para lo cual se desea tener los polos de lazo cerrado en $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$ $s_3 = -12$ y error nulo al escalón de referencia (sistema de seguimiento perfecto al escalón). El sistema en el que se ha pensado tiene un diagrama en bloques como el indicado en la figura:



Se pide:
a) Determinar un modelo de estado conveniente.
b) Diseñar la matriz ganancia $\mathbf{K}$.
c) Realizar el diagrama de simulación con Simulink y verificar que la salida tiende a la referencia con la dinámica especificada.
d) Repetir la simulación para condiciones iniciales diferentes de cero.

Del enunciado

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)\,(s+2)\,s}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s^2+3s+2)s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^3+s^2\,3+s\,2}$$

En base al modelo canónico controlable podemos definir,

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [(b_0 - b_3 a_0) \quad (b_1 - b_3 a_1) \quad (b_2 - b_3 a_2)]$$

$$[C] = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$[D] = [b_3]$$

$$[D] = [0]$$

Del gráfico

$$\mu(t) = (r(t) - x_1(t))k_1 - x_2(t)k_2 - x_3(t)k_3$$
$$\mu(t) = r(t)k_1 - x_1(t)k_1 - x_2(t)k_2 - x_3(t)k_3$$
$$\mu(t) = r(t)k_1 - K\ X(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = A\ X(t) + B\mu(t)$$
$$\text{overset}.X(t) = A\ X(t) + B(r(t)k_1 - K\ X(t))$$
$$\text{overset}.X(t) = (A - B\,K)\,X(t) + B\,r(t)k_1$$

Quedando entonces,

$$A - \mathrm{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$
$$A - \mathrm{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$
$$A - \mathrm{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -2-k_2 & -3-k_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente hallamos la expresión de los polos deseados,

$$(\mathrm{sI} - A + \mathrm{BK}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -2-k_2 & -3-k_3 \end{bmatrix}$$
$$(\mathrm{sI} - A + \mathrm{BK}) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ k_1 & 2+k_2 & s+3+k_3 \end{bmatrix}$$

Hallamos ahora el determinante,

$\det(sI - A + BK) = s^3 + s^2\,(3 + k_3) + s\,(2 + k_2) + k_1$; **(a)**

Del enunciado sabemos que los polos a lazo cerrado se desean en,

$$\begin{aligned} &\mathrm{PLC} : \left(s + 2 + j2\sqrt{3}\right)\,\left(s + 2 + j2\sqrt{3}\right)\,(s + 12) \\ &\mathrm{PLC} : \left(s^2 + 4s + 16\right)(s + 12) \\ &\mathrm{PLC} : s^3 + s^2\,16 + s\,64 + 192 \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en **(a)** obtenemos,

- $k_1 = 192$
- $k_2 = 62$
- $k_3 = 13$

Podemos además corroborar con la función 'acker'

```
A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
B = [0; 0; 1];
C = eye(3);
PLC=[-2+(2*sqrt(3))*i -2-(2*sqrt(3))*i -12];
disp('Ganancias calculadas con Ackerman:')
```

```
Ganancias calculadas con Ackerman:
```

```
K=acker(A,B,PLC)
```

```
K = 1x3 double

  192.0000   62.0000   13.0000
```

```
disp('Vector de Realimentción de Estados ([An]):')
```

```
Vector de Realimentción de Estados ([An]):
```

```
An=A-B*K
```

```
An = 3x3 double

         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
 -192.0000  -64.0000  -16.0000
```

```
disp('Posición diseñada de los polos a lazo cerrado:')
```

```
Posición diseñada de los polos a lazo cerrado:
```

```
PLC_d=eig(An)
```

```
PLC_d =
  -2.0000 + 3.4641i
  -2.0000 - 3.4641i
 -12.0000 + 0.0000i
```

Simulink, ejecutar ***TP09_ej09.slx.***