



EJERCICIO 1

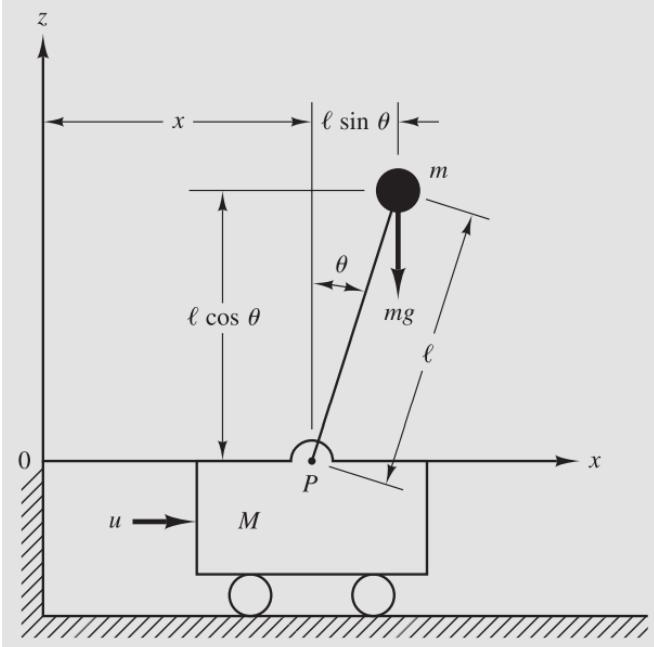
3.5 PUNTOS

La siguiente figura, esquematiza un *Sistema de Péndulo Invertido*, uno de los problemas más interesantes de la Ingeniería de Control. Está compuesto por un carro de masa M , una varilla de longitud l de masa despreciable y una masa m que junto a la varilla, constituyen el péndulo invertido. El sistema completo se desplaza una distancia lineal $x(t)$ y el péndulo una distancia angular $\theta(t)$, cuando se aplica al carro una fuerza $u(t)$. Las ecuaciones físicas que caracterizan el movimiento del sistema completo se muestran a continuación:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mg\ell\theta \end{cases}$$

Se pide:

- a) **(2.5 P)** Realice un *modelo de estados* del sistema de péndulo invertido, es decir, calculando la *matriz de estado A*, la *matriz de entrada B*, la *matriz de salida C* y *matriz de transmisión directa D*. Considere como salidas de su modelo de estados la posición angular de la masa m y la posición traslacional del sistema, es decir, $\theta(t)$ y $x(t)$ respectivamente.
- b) **(1.0 P)** A partir del modelo de estados obtenido en el inciso anterior, demuestre que el sistema de péndulo invertido es *inestable*. Calcule para ello, los polos del sistema.



EJERCICIO 2

3.0 PUNTOS

A partir de lo expresado y obtenido en el Ejercicio 1 (ya sea con las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido, o bien, de su modelo de estados), se pide:

- a) **(2.0 P)** Calcule las *transferencias* de las posiciones angulares y traslacionales del sistema, respecto a la fuerza de control aplicada $u(t)$, es decir, $\theta(s)/U(s)$ y $X(s)/U(s)$ respectivamente.
- b) **(1.0 P)** Suponga que debe controlar la posición traslacional del sistema completo $x(t)$, manteniendo para ello, el péndulo invertido en la posición vertical con pequeñas variaciones de su ángulo $\theta(t)$). Justifique si, realimentando esta posición traslacional con un sensor adecuado a la entrada de referencia, puede usar un *controlador clásico* (P, PI, PD, PID) o *redes compensadoras* (adelanto, retraso, adelanto-retraso).

EJERCICIO 3

3.5 PUNTOS

Siendo $M = 2\text{Kg}$, $m = 0.5\text{Kg}$, $l = 0.5\text{m}$ y $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se desea controlar la posición traslacional del sistema de péndulo invertido $x(t)$, ante la aplicación de una fuerza de referencia constante (manteniendo el péndulo en su posición vertical, con pequeñas variaciones en su ángulo de oscilación $\theta(t)$). Suponiendo que se puede acceder a todos los estados del sistema, se desea realizar un controlador por realimentación completa del vector de estados. El sistema controlado debe cumplir los siguientes requisitos de diseño:

- El desplazamiento traslacional $x(t)$ del sistema ante una señal de referencia en forma de escalón unitario, debe seguirlo sin error en estado permanente.
- Un sobrepaso máximo de respuesta al escalón (sobre elongación) de $M_P = 16.3\%$.
- Un tiempo de asentamiento al 2% de la posición traslacional en el intervalo $4 \leq t_S \leq 5$ (seg).

- a) **(2.0 P)** Diseñe el sistema de control mediante realimentación completa del vector de estados.
- b) **(1.5 P)** Verifique si su diseño (mediante Matlab, Simulink, etc.), cumple con todos los requisitos pedidos. Realice, además, un gráfico de la posición angular del péndulo invertido en función del tiempo y evidencie si la desviación angular del péndulo se mantiene a pocos grados cerca de la vertical.

Ayuda: Utilice el siguiente vector de estados y matrices del modelo de estados, si no pudo calcularlo previamente:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONDICIÓN DE APROBACIÓN: Al menos un ítem correcto de cada ejercicio y sumar 6 puntos. El examen debe estar escrito en tinta (excepto tinta roja). Dispone de **2:30 horas** para desarrollar su examen final. Si utiliza **Matlab y/o Simulink**, debe indicar las rutinas y/o sentencias empleadas, así también como los gráficos de las respuestas y/o los diagramas de Simulink en su examen. Debe subir el **pdf** escaneado de su examen (1 solo documento), al aula virtual destinada al efecto.

1:	2:	3:	NOTA FINAL:
----	----	----	-------------