7600017 - Introdução à Física Computacional - 2025

Prof. Guilherme Sipahi

Terceiro Projeto

01/10/2025

Entrega: 10/10/2025

Instruções

- Use o diretório **proj3_*#usp*** em `/public/IntroFisComp25/projeto3`
- Deixe no diretório apenas 4 arquivos, de nomes `exer1.f90`, `exer2.f90`, `output2.txt`, `trajexata.txt`, `exer3A.f90`, `exer3B.f90` e `graf3.pdf`
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para `entrada/saída`
- **Use precisão dupla em seus resultados**
- **Se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente**

Método de Euler

O objetivo deste projeto é o cálculo da velocidade de uma bicicleta em função do tempo, levando-se em conta os efeitos resistivos (hidrodinâmicos) do ar.

1) Ignoremos inicialmente o efeito resistivo do ar e a segunda lei de Newton nos dá

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \, , \tag{1}$$

sendo m a massa do sistema ***ciclista*** + ***bicicleta*** e F a força que o ciclista emprega (devido à sua energia interna) para o movimento. Supomos aqui que não haja atritos nas engrenagens da bicicleta de forma que praticamente toda a força empregada pelo ciclista é transmitida ao movimento do sistema ***ciclista*** + ***bicicleta***. A questão é: como se calcula F? Podemos, ao invés de aplicar (1), tratar o problema de outra forma. Estudos fisiológicos de ciclistas corredores mostraram que a potência

P fornecida pelos ciclistas é de aproximadamente 400 W para corridas de duração da ordem de uma hora. Então temos

$$\frac{dE}{dt} = P \tag{2}$$

e

$$mv\frac{dv}{dt} = P \ , \tag{3}$$

o que implica em

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} \ . \tag{4}$$

De novo, desprezamos o atrito devido às engrenagens da bicicleta e o atrito da roda com o solo. Resolvendo-se a equação (4) temos

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2Pt/m} \ . \tag{5}$$

Discretizando a equação (4) acima usando a relação para a derivada de dois pontos para frente, i.e.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \quad \text{com } t_i = i\ \Delta t \quad \text{e} \quad i = 0, 1, 2, \cdots \quad , \tag{6}$$

temos a relação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i}\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \quad , \tag{7}$$

conhecida como **método de Euler**.

Escreva um programa com nome exer1.f90 que calcule, usando a equação (7), a velocidade como função do tempo. Use $m = 80\ kg$ para a massa do sistema ciclista+bicicleta e $P = 400\ W$. Leia a partir do terminal, em uma única linha, o intervalo de tempo total T (em s), Δt (em segundos) e a velocidade inicial v_0 (pequeno, mas diferente de zero) em m/s. A saída do programa deve ser o arquivo `vel1_out.dat`, com a velocidade em função do tempo para um intervalo de tempo T, no formato

```
t    v(t)
```

A primeira linha do arquivo deve ser

```
0    v0
```

e o número de linhas do arquivo será $1 + \text{int}(T/\Delta t)$.

2) Vamos agora generalizar o método para o movimento bidimensional. Vamos considerar um um projétil disparado por um canhão de grande porte e ignorar a resistência do ar. As equações do movimento são

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= -g \end{aligned} \tag{8}$$

sendo x, a coordenada horizontal do projétil e y, a coordenada vertical.

Como temos equações diferenciais de segunda ordem, temos que adequar a abordagem. Poderíamos usar diferenças finitas para calcular a segunda derivada mas, reformulando as equações da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g \end{aligned} \tag{9}$$

Usando a estratégia do método de Euler, podemos reescrever as equações acima como

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_{x,i}\Delta t \\ v_{x,i+1} &= v_{x,i} \\ y_{i+1} &= x_i + v_{y,i}\Delta t \\ v_{y,i+1} &= v_{y,i} - g\Delta t \end{aligned} \tag{10}$$

Assuma $\Delta t = 0,1s$ e velocidade inicial $v = 500$ m/s.

Escreva um programa com nome exer2.f90 que calcule a trajetória do projétil desde o lançamento das coordenadas

$$(x, y) = (0, 0)$$

até o momento em que a coordenada y seja novamente zero. O programa deve pedir o ângulo de inclinação do lançador. O arquivo de saída, output2.txt, deve conter a trajetória em duas colunas: a primeira com o valor de x e a segunda, o de y.

Com o programa, calcule as trajetórias para ângulos de 35°, 40°, 45°, 50° e 55°e determine qual ângulo de lançamento leva o projétil mais longe. Calcule a trajetória exata para este último ângulo usando o mesmo Δt e inclua num arquivo chamado trajexata.txt.

Método de Euler-Cromer

O método de Euler é simples e muito útil. Entretanto, como todo método numérico, pode não ser apropriado para todos os casos. Usando o movimento de um pêndulo, vamos avaliar as suas limitações do método de Euler e propor o uso de outro método que fazendo uma pequena modificação, possibilita a sua resolução.

3) Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Indicamos com θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m\ a_\theta = m\ l\frac{d^2_\theta}{dt^2} = -m\ g \sin\theta$$

e consequentemente temos a equação diferencial

$$\frac{d^2_\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\ .$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos $sin\theta \approx \theta$ e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d^2_\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta\ .$$

cuja solução é dada por

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0\ t + \phi)\ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\ ,$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\theta \to \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \to \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t\ ,$$

onde $t = i\ \Delta t$. Faça sempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando θ ultrapassar π faça $\theta \to \theta - 2\pi$ ou, se θ ficar menor que $-\pi$, faça $\theta \to \theta + 2\pi$. Neste programa calcule também $E(t)$, sendo E a energia total do sistema. Você notará que a solução está incorreta e que a energia total não é constante. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada. Uma ligeira modificação no método de Euler consertará este problema. Para isso é suficiente considerar as equações (de Euler-Cromer)

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1}\Delta t\ ,$$

Escreva um programa com estas novas equações e mostre graficamente a ausência dos problemas antes apontados.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- a massa **m**
- o comprimento da haste **l**
- o ângulo $\boldsymbol{\theta_0}$

- $\mathbf{\Delta t}$
- o tempo total $\mathbf{T_{sim}}$ de simulação

Use $\omega_0 = 0\ rad/s$. No código **exer3A.f90** use o método de Euler e no código **exer3B.f90** o método de Euler-Cromer. A saída, nos arquivos **exer3A_out.dat** e **exer3B_out.dat**, deve ser no formato:

```
t    theta(t)
```

Além disso, você deve preparar o arquivo **graf3.pdf** com dois gráficos:

- o primeiro com a solução exata para $\theta(t)$, comparando-a com a solução numérica pelo método de Euler (código **exer3A.f90**) e com o método de Euler-Cromer (código **exer3B.f90**);
- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (método de Euler) e para o caso 2 (método de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use $m = 1\ kg$, $l = 1\ m$, $\Delta t = 0.04\ s$ e $\theta_0 = 10°$. (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por $10\ s$, começando do máximo deslocamento ($\theta = \theta_0$) e com velocidade zero.