Introdução à Física Computacional - Quinto Projeto

Dinâmica Populacional

Matheus Neme Campos Brustelo (n°15479472)

Universidade de São Paulo, Instituto de Física de São Carlos

(Data: 13 de novembro de 2025)

SUMÁRIO

I. RESUMO E OBJETIVOS

Este relatório tem como objetivo mostrar o comportamento qualitativo do mapeamento logístico e o cálculo númerico de algumas grandezas relevantes, compreendendo como pequenas variações nas condições iniciais podem levar à resultados muito distintos. Na Seção II, fazemos o tratamento geral qualitativo do problema. Na Seção III, calculamos a Constante de Feigenbaum. Na seção IV, calculamos o Expoente de Lyapunov.

II. TRATAMENTO GERAL

Seja N(t) o número de indivíduos de uma população em função do tempo, vamos modelar seu crescimento com base na seguinte equação diferencial:

$$dN(t) = \alpha N(t)dt \tag{1}$$

em que α é uma constante positiva.

Discretizando essa equação, ou seja, tomando $dN = N_{i+1} - N_i = \alpha N_i \Delta t$, temos:

$$N_{i+1} = (1 + \alpha\Delta t)N_i = rN_i \tag{2}$$

em que Δt é um valor fixo (não necessariamente pequeno) e r é uma constante positiva que é, necessariamente, maior que 1. Caso fosse menor que 1, α seria negativo,e, caso fosse igual a 1, α seria nulo, o que contradiz a descrição do problema e, portanto, não tem sentido físico.

Vamos, agora, limitar o crescimento da população até um teto, introduzindo o seguinte termo:

$$N_{i+1} = rN_i(1 - N_i/N_{max}) \tag{3}$$

em que N_{max} é o número máximo de indivíduos. Definindo $x_{i+1} = N_{i+1}/N_{max}$ e $x_i = N_i/N_{max}$, segue que:

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i) \tag{4}$$

tais que qualquer x_i deve estar entre 0 e 1 inclusives (limite máximo N_{max} e mínimo 0 de indivíduos). Define-se, então o mapa logístico $G(x) = rx(1 - x)$.

Já tinhámos visto que, para ter sentido físico, $r > 1$, mas também temos que impor que qualquer valor x_i deve ser mapeado para x_{i+1} válido, isto é, entre 0 e 1 inclusives. Sabemos que $G(x)$ é uma parábola, e, assim, seu máximo tem $x_{max} = 1/2$ (válido) e $G(x_{max}) = r/4$. Como $G(x)$ deve ser menor ou igual 1, segue que $r \leq 4$. Com respeito a ser maior ou igual a zero, não precisamos nos preocupar, já que temos uma parábola tal que 0 e 1 são raízes e a concavidade é para baixo. Logo:

$$1 < r \leq 4 \tag{5}$$

O objetivo geral, a partir de agora, é encontrar os pontos fixos dessa relação e, posteriormente, entender se há ou não convergência. Começando pelos pontos fixos, temos que procurar pelos pontos tais que $G(x^*) = x^*$. Matematicamente, temos:

$$x^* = rx^*(1 - x^*) \Rightarrow x^* = 0 \; ou \; 1 = r - rx^* \tag{6}$$

ou seja, os pontos fixos são $x^* = 0$ e $x^* = (r-1)/r = 1 - 1/r$.

Graficamente, isso é equivalente a encontrar os pontos sobre $G(x)$ e sobre a reta $y = x$ simultaneamente. Vamos observar essas duas curvas, juntamente com uma análise qualitativa da convergência ou não ao ponto fixo, a partir dos diagramas de cobweb da Figura 2. É evidente que apenas houve convergência para os valores de r menores que 3. Nos outros casos, as "teias" aparentaram circular o ponto fixo de forma mais organizada em $r = 3$ e menos organizada em $r = 4$. Para esses mesmos valores, podemos fazer um diagrama de evolução temporal, em que também podemos visualizar a convergência ou não dos resultados na Figura 1. As conclusões são, obviamente, as mesmas, mas, dessa vez, podemos ter noção do quão disperso é o resultado encontrado para $r = 4$ e podemos ver que, para $r = 3$, o gráfico parece convergir muito lentamente ao ponto fixo.

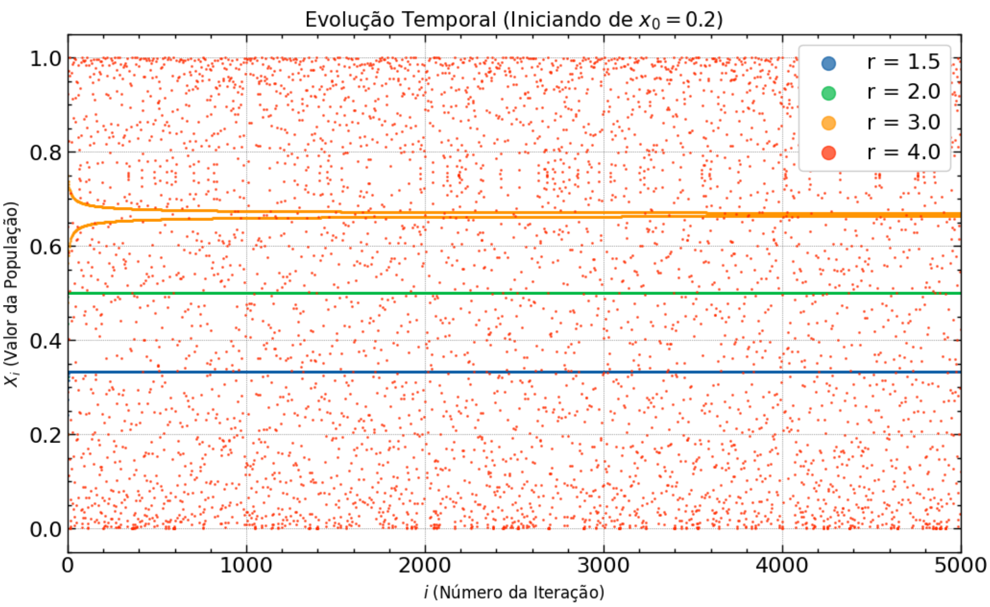

Figura 1. Diagramas de evolução temporal para os diferentes valores de r.

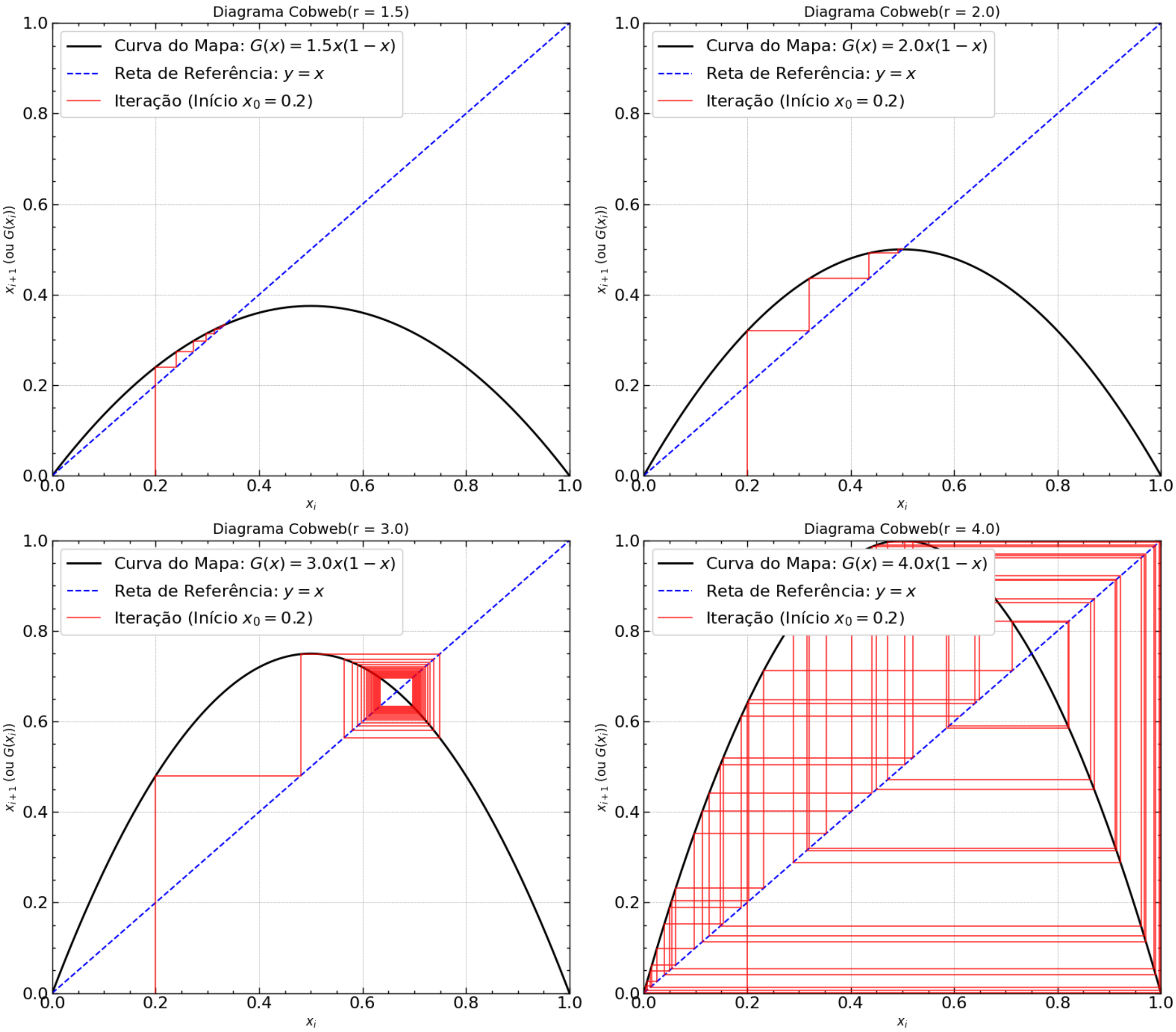

Figura 2. Diagramas de Cobweb para vários valores de r.

III. RUMO AO CAOS

Vamos analisar de forma um pouco mais quantitativa a convergência ou não do ponto fixo, trabalhando antes da ocorrência do caos. Como vimos qualitativamente, para r maior do que 3 (e menor do que aproximadamente 3.5 de acordo com o roteiro do professor) o ponto fixo x^* torna-se instável. Do roteiro e da literatura, temos as seguintes informações: (i) O mapa converge para um comportamento oscilatório entre dois valores (ii) Aumentando progressivamente o valor de r, existe um valor para o qual o ciclo de oscilação passará a ser entre quatro valores fixos (iii) Novamente, se aumentarmos r, o valor será duplicado de novo, e assim por diante, caracterizando o fenômeno da duplicação de período. Com isso, temos que tomar a razão entre diferenças de valores sucessivos de r, e verificar que esse valor é constante (definido como constante de Feigenbaum δ). Feito isso, podemos calcular quando a duplicação de períodos é infinita.

Para que possamos averiguar essas afirmações, vamos começar vendo um diagrama de bifurcações (Figura 3), em que colocamos todos os x_i possíveis no eixo y para cada r do eixo x, ignorando o início instável da evolução temporal. Observando a figura, conseguimos ver exatamente que, a partir de $r = 3$, x_i passa a assumir dois possíveis valores, depois há uma bifurcação próxima de $r = 3,5$, e assim por diante, até que tenhamos caos.

Para calcular o valor de δ, seguiremos a lógica de um algoritmo de busca binária ou

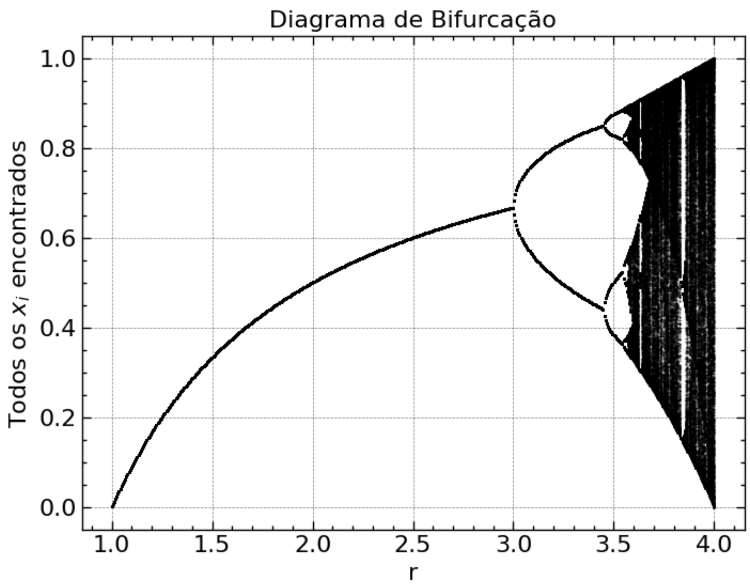

Figura 3. Diagrama de Bifurcação para o Mapa Logístico.

bifurcação. Para cada r a ser verificado, descartaremos o transiente dos primeiros 100 mil pontos, por segurança. Depois, armazenaremos os próximos 2 mil em um array e o ordenaremos. Feito isso, basta contar, com uma tolerância estipulada, qual a quantidade de valores distintos nesse array. Assim, dado um intervalo inicial, que pode ser chutado usando o gráfico e refinado posteriormente, vamos fazer a bisseção do intervalo, buscando o ponto tal que o número de valores distintos muda. Esse é um algoritmo razoavelmente eficiente já que é $O(logN)$, $N = \Delta r/p$, em que Δr é a largura do intervalo e p o menor valor distinguido pela precisão do computador.

Com esse algoritmo, calcularemos 4 valores de δ. Cada δ_i é definido como:

$$\delta_i = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+2} - r_{i+1}} \tag{7}$$

em que r_i é o r mínimo tal que x passa a assumir $i+1$ valores distintos.

Calcularemos os valores de δ_i de 1 até 4 com precisão dupla. A melhor estimativa para δ é a média de cada um dos valores encontrados, calculando, também, o desvio padrão da média (incerteza). Para estimar r_∞, ou seja, o r tal que a duplicação é infinita, vamos usar o valor de δ estimado. Como fomos até o quarto valor de δ, temos até r_6. A soma de Progressão Geométrica nos dá, considerando δ constante:

$$r_\infty = r_6 + \frac{r_6 - r_5}{\delta - 1} \tag{8}$$

em que podemos desprezar as incertezas dos valores de r e propagar a incerteza de δ. Isso faz com que subestimemos levemente a incerteza, mas, ainda sim, é uma boa estimativa.

Os resultados para os pontos de bifurcação estão na Tabela I. As estimativas para δ estão na Tabela II. A comparação dos resultados finais com as incertezas estão na Tabela III. Como mostrado na Tabela III, os valores diferem de menos de duas vezes a incerteza dos resultados, mostrando que estamos dentro do intervalo esperado.

Tabela I. Pontos de bifurcação r_k (período 2^k) calculados numericamente.

k	Período ($2^{k-1} \to 2^k$)	Valor r_k (Calculado)
1	$1 \to 2$	2.999868547986772
2	$2 \to 4$	3.449439071388043
3	$4 \to 8$	3.544069604272262
4	$8 \to 16$	3.564398825674024
5	$16 \to 32$	3.568756001952749
6	$32 \to 64$	3.569690229379870

Tabela II. Estimativas da constante δ a partir dos valores de r_k.

Estimativa	Fórmula	Valor Calculado
δ_1	$\frac{r_2-r_1}{r_3-r_2}$	4.750797757329750
δ_2	$\frac{r_3-r_2}{r_4-r_3}$	4.654901976522208
δ_3	$\frac{r_4-r_3}{r_5-r_4}$	4.665687156387996
δ_4	$\frac{r_5-r_4}{r_6-r_5}$	4.663935303365092

Tabela III. Comparação dos resultados finais (média de δ e r_∞) com a literatura.

Grandeza	Valor Calculado (com incerteza)	Valor da Literatura
Constante de Feigenbaum (δ)	4.684 ± 0.022	4.6692016...
Início do Caos (r_∞)	3.5699438 ± 0.0000015	3.5699456...

IV. O CAOS

Agora, finalmente, podemos analisar o comportamente caótico, calculando o Expoente de Lyapunov. A análise consiste em dois métodos distintos. O primeiro, é por um ajuste de uma curva exponencial, já o segundo, uma soma de valores da derivada de $G(x)$ ao longo das iterações. Para o primeiro método, temos:

$$d(i) = |G^{(i)}(x_0 + \epsilon) - G^{(i)}(x_0)| \tag{9}$$

em que i é o número de iterações do mapa e $G^{(i)}$ refere-se ao número de vezes que a função foi aplicada. Em outras palavras, $G^{(i)}(x_0) = G(x_{i-1})$, em que x_{i-1} é a iteração anterior do mapa. O valor de ϵ deve ser pequeno em comparação a x_0.

Sabemos da literatura que d_i inicialmente terá um comportamento exponencial, e, depois, irá saturar. Assim, nesse intervalo exponencial, podemos fazer um ajuste para uma reta em gráfico mono-log e calcular o expoente de Lyapunov λ. O segundo método é derivado a partir de uma expansão em taylor da expressão anterior, resultando em:

$$\lambda = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \ln|G'(x_i)| = \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} \ln|r(1-2x_i)| \tag{10}$$

em que $G'(x)$ é a derivada de $G(x)$.

Logo, o que estamos fazendo aqui é uma pequena modificação nas condições iniciais, observando que os resultados divergem exponencialmente dos sem modificação, o que caracteriza o caos se o expoente encontrado for maior que zero. Se o expoente for negativo, isso significa que as duas soluções irão convergir, não havendo caos.

Para os dados de teste pedidos, temos o gráfico da Figura 4. Para fazer o ajuste, usamos o intervalo de comportamento exponencial, estimado de 5 até 40. Além disso, podemos observar que a distância $d(i)$ se torna saturada, já que o máximo de diferença é limitado até um. Para os valores numéricos temos a Tabela IV.

Tabela IV. Resultados para o Expoente de Lyapunov (λ) com os valores da Figura 4

Expoente de Lyapunov (λ)	Valor Calculado
Método do Ajuste	0.20227582043430373
Método da Soma	0.18411637919426829

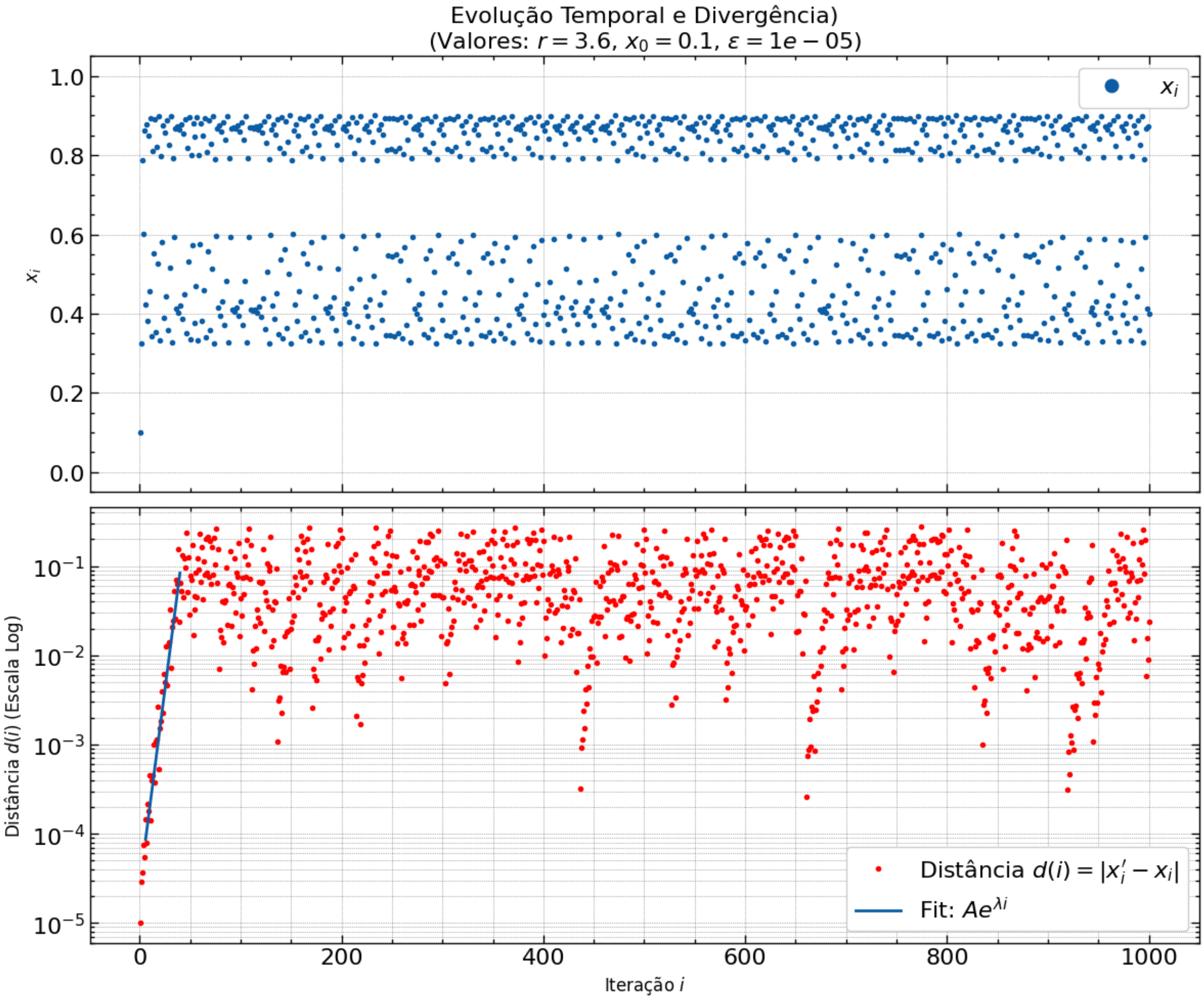

Figura 4. Gráfico da situação pedida no enunciado.

Além dessa análise numérica, podemos ver de forma qualitativa o comportamento conforme r varia. A análise qualitativa genérica pode ser feita rodando o código exigido no projeto para os valores desejados. Nesse relatório, foram expostos os resultados numéricos pedidos explicitamente no enunciado. As três figuras que descrevem o comportamento são as Figuras 5, 6 e 7. Observa-se que, para os valores menores de r, $d(i)$ vai a zero, o que ocorre mais rapidamente para o menor valor de r. Isso reflete o comportamento de $\lambda < 0$. Para o caso com r grande, temos, novamente, comportamento caótico.

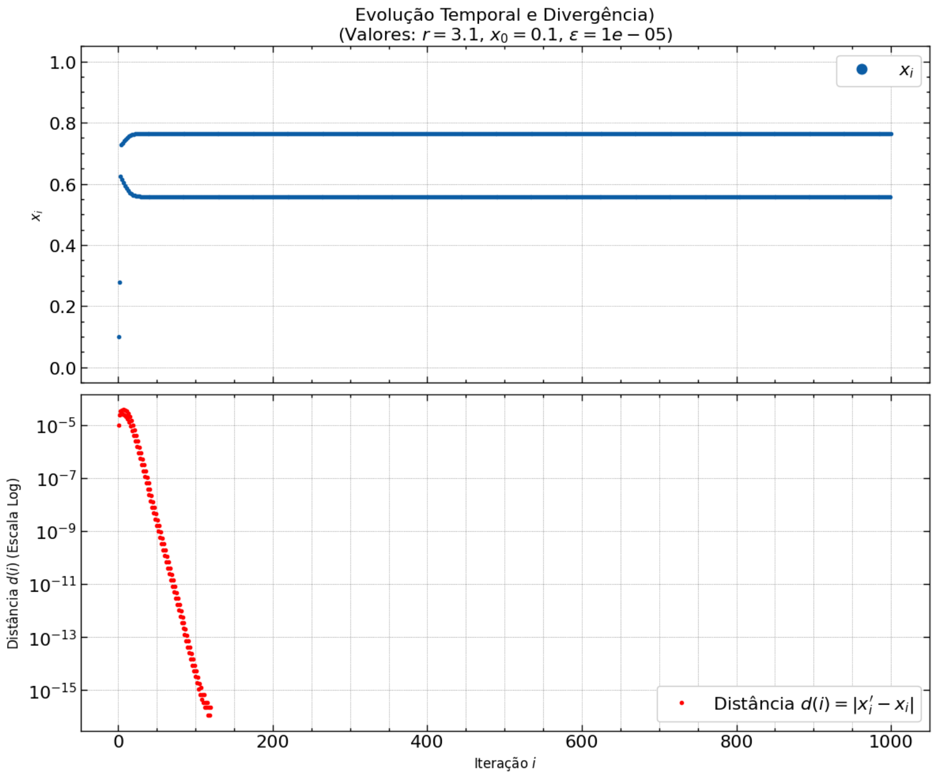

Figura 5. Análise de $d(i)$: vai a zero.

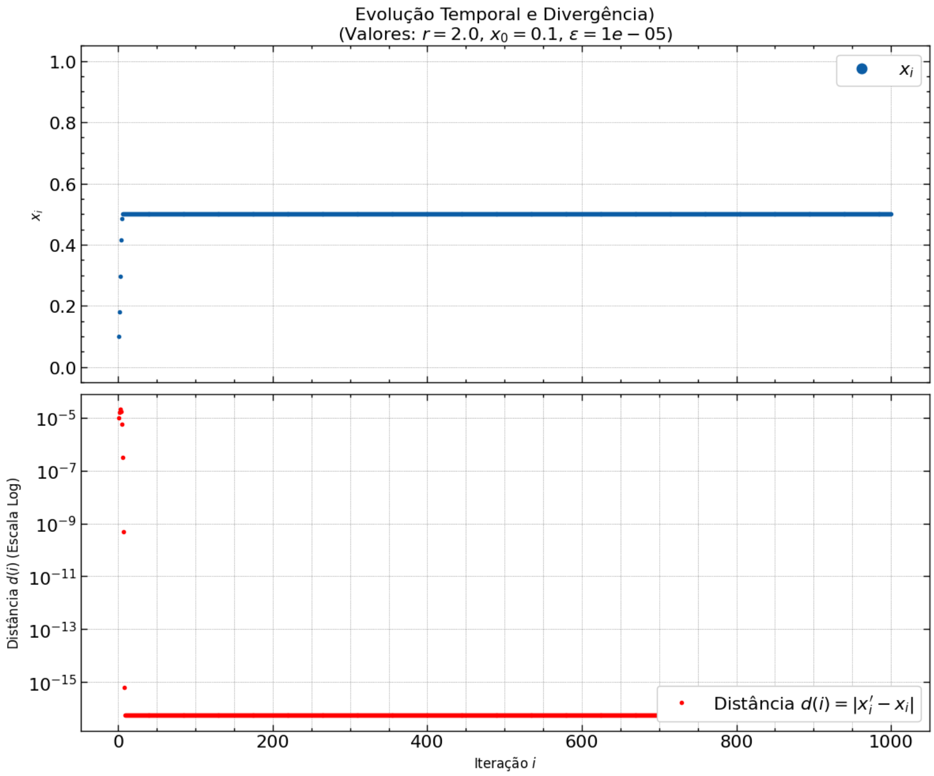

Figura 6. Análise de $d(i)$: vai a zero rapidamente.

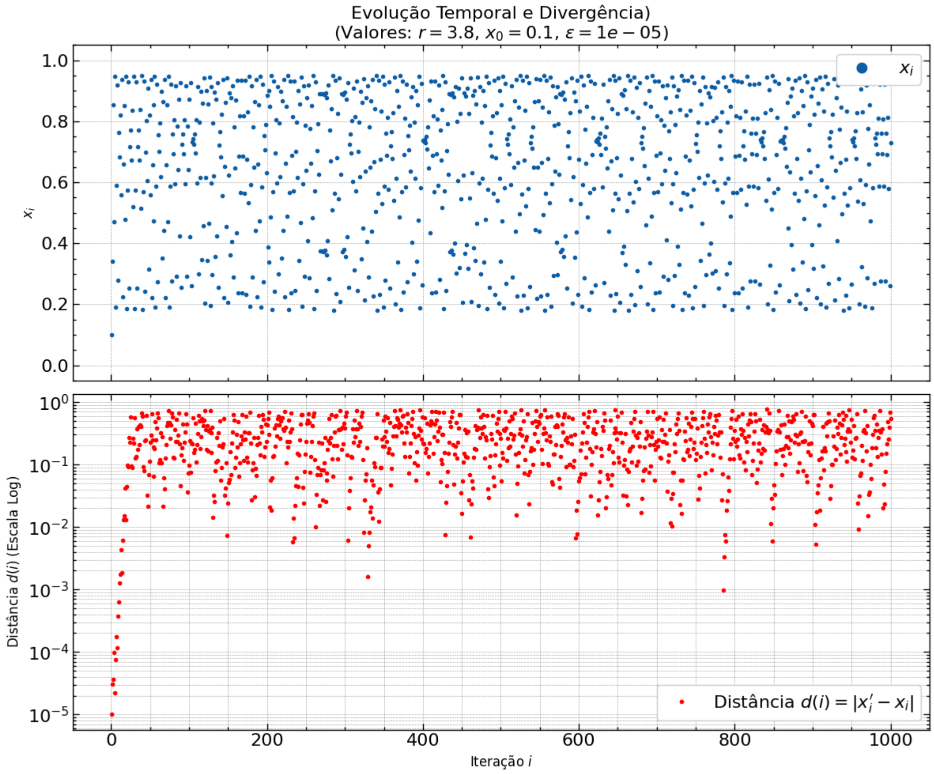

Figura 7. Análise de $d(i)$: caos.

V. CONCLUSÃO

Logo, ao longo das tarefas, foi possível averiguar, tanto de forma qualitativa quanto numérica, a mudança de comportamento de um ponto fixo estável até o caos. Na seção II, focamos em uma análise quantitativa dos valores de r aceitáveis e do comportamento geral qualitativo conforme variamos r. Na seção III, calculamos a Constante de Feigenbaum e o valor de r_∞ para o início do caos, obtendo bons resultados em comparação com a literatura. Por último, na Seção IV, analisamos o Caos propriamente, observando a divergência exponencial de duas condições iniciais muito próximas, calculando o Expoente de Lyapunov por dois métodos distintos, que resultam em valores bem próximos e condizentes.

REFERÊNCIAS

[1] Giordano, N. J. e Nakanishi, H., *Computational Physics*. 2. ed. Pearson/Prentice Hall, 2006.

[2] Vuolo, J. H., *Fundamentos da Teoria de Erros*. 2. ed. Editora Edgard Blücher, 1996.