Sujet A - HA 4

Partie cours

1. Donner la définition d'un majorant d'un ensemble A.
2. Démontrer l'inégalité triangulaire suivante: $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leq |x|+|y|$.

Partie exercices

1. Montrer par contraposition les assertions suivantes:
   (a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
   (b) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)\ (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$
2. Montrer que: $\forall (x; y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = max\{x, 0\}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq f(x)$
   (b) Montrer que f est croissante.
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(f(x))$
   (d) On pose $F := \{x \in \mathbb{R} \mid x = f(x)\}$ et, pour tout réel x, $F_x := \{y \in F \mid x \leq y\}$. Déterminer F et F_x et montrer que F_x a un ppe.
4. Étudier les limites ci-dessous (existence, valeur éventuelle):
   (a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right)$

$\mathcal{MR}$

Sujet B - HA 4

Partie cours

1. Donner la définition du plus petit élément d'un ensemble A.
2. Donner une CNS sur une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour qu'elle soit croissante et décroissante.

Partie exercices

1. Montrer que $\forall \epsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq N \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon)$
2. Soient A et B des parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$
3. Représenter les ensembles suivants:
   (a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$
   (b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid max\{|x|; |y|\} \leq 1\}$
   (c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$
   (d) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq 1\}$
4. Soit $f \to ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$. Déterminer le domaine de définition de f, puis étudiez sa parité et ses variations.

$\mathcal{MR}$

Sujet C - HA 4

Partie cours

1. Donner la définition du graphe d'une fonction $f : E \to F$.
2. Montrer que l'ensemble des majorants de $]0; 1[$ est $[1; +\infty[$

Partie exercices

1. Soient A et B des parties de E. On note $A \Delta B = (A \cap \complement_E B) \cup (B \cap \complement_E A)$ la différence symétrique. Montrer que:
   (a) $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$
   (b) $A \Delta B = B \Delta A$
   (c) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$
2. Soient u et v deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
   (a) Donner une condition suffisante pour que: $h : D \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = u(x)^{v(x)}$ soit bien définie.
   (b) On se place dans ce cas. Sur quel domaine h est-elle dérivable? donner une expression de $h'(x)$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose f dérivable. Montrer que si f est paire alors f' est impaire. Que peut-on dire si f est impaire? Prouver votre affiramation.
4. Étudier les limites ci-dessous (existence, valeur éventuelle):
   (a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$
   (b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} \right)$
   (c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$
   (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+|x|}{x} \right)$

$\mathcal{MR}$

Sujet D - HA 4

Partie cours

1. Donner la définition de l'ensemble image de $f : E \to F$.
2. Montrer que la composée de deux fonctions monotones est monotone.

Partie exercices

1. Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations d'inconnue $X \subset E$
   (a) $A \cup X = B$
   (b) $A \cap X = B$
2. Soit $f : E \to E$. Pour $n \in \mathbb{N}*$, on note: $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$, et $f^0 = id_E$. Soit $A \subset E$, $A_n = f^n < A >$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que:
   (a) $f < B > \subset B$.
   (b) B est la plus petite partie de E stable par f et contenant A
3. Soit $f : x \to \ln(x) - 2\sqrt{x}$
   (a) Étudiez f et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < 2$
   (b) En déduire la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$
   (c) En déduire la limite de $x \ln(x)$ lorsque x tend vers 0
4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$

$\mathcal{MR}$