Sujet A - HA 2

Partie cours

1. Donner la définition de la racine carré d'un nombre réel.

2. Montrer que si A et B sont deux ensembles de E, alors $A \subset B \Rightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.

Partie exercices

1. Montrer que: $A \Rightarrow B$ si et seulement si $non(B) \Rightarrow non(A)$.

2. Résolvez les équations/inéquations suivantes. Soit x un nombre réel.

   (a) $x + 1 = \sqrt{x+2}$

   (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} < 4$

   (c) $|2x + 3| - |x - 1| < 3$

   (d) $x + a < \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

   (e) $x + |x - 1| = 1 + |x|$

3. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et donner leur négation:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \mid x \leq n$

   (b) $\exists M \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |U_n| \leq M$

   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy = yx$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \mid yxy^{-1} = x$

4. Montrer par contraposition les assertions suivantes:

   (a) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$

   (b) $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)\ (A \cap B = A \cap C\ et\ A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

$\mathcal{MR}$

Sujet B - HA 2

Partie cours

1. Donner la définition d'une fonction croissante.

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Partie exercices

1. Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions:

   (a) $P \Rightarrow Q$

   (b) P ET NON Q

   (c) P ET (Q ET R)

   (d) P OU (Q ET R)

   (e) (P ET Q) $\Rightarrow (R \Rightarrow S)$

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x + 1$

   (a) Montrer que $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 2$

   (b) Est-il vrai que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 2$?

   (c) Est-il vrai que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$?

   (d) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $f(x) = 0$ sans utiliser Δ

3. Déterminer m pour que l'équation suivante ait deux racines réelles positives: $m^2x^2 + (m-2)x + 6 = 0$

4. Montrer que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \complement B = A \cap \complement C$

$\mathcal{MR}$

Sujet C - HA 2

Partie cours

1. Donner la définition d'un nombre impaire .

2. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Partie exercices

1. Soit m et p deux paramètres réels fixés. Résolvez les équations et innéquations suivantes en x (réel). Pensez à bien déterminer l'ensemble solution:

   (a) $(2x + m)(x - 6p) > 0$

   (b) $(mx - \alpha)(4x - p) = 0$ où $\alpha > 0$

   (c) $(x + m)^2 = 2(x + p)$

   (d) $x + m = \sqrt{x+p} + 4$

   (e) $|x - \frac{5}{3}| < m$

2. Soit A, B deux ensembles de E, montrer que $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ et $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

3. Montrer que $\forall \epsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq N \Rightarrow 2 - \epsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \epsilon)$

4. Écrire la négation des phrases suivantes:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \mid x \leq n$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ xy = yx$

   (c) $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \leq N,\ |U_n| < \epsilon$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \mid \forall f \in \mathcal{F}(E, F),\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

$\mathcal{MR}$