Sujet A - HA 5

Partie cours

1. Donner la définition de l'ensemble image de $f : E \to F$.
2. Enoncer puis démontrer la factorisation de $a^n - b^n$.

Partie exercices

1. Soit $f : x \to \ln(x) - 2\sqrt{x}$
   (a) Étudiez f et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < 2$
   (b) En déduire la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$
   (c) En déduire la limite de $x\ln(x)$ lorsque x tend vers 0
2. Étudier les limites ci-dessous (existence, valeur éventuelle):
   (a) $\lim_{x\to -1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right)$
   (b) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$
3. Calculer la valeur des sommes suivantes:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$
   (b) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i2^j$
   (c) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i(j-1)$
   (d) $\sum_{1\leq p,q\leq n} (p+q)^2$ On peut poser $k = p+q$
4. Mettre sous la forme $a+ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants:
   (a) $\frac{3+6i}{3-4i}$
   (b) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$
   (c) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

$\mathcal{MR}$

Sujet B - HA 5

Partie cours

1. Donner la définition de la factorielle de n.
2. Enoncer puis démontrer la relation de Pascal.

Partie exercices

1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. Soit $f \to ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$. Déterminer le domaine de définition de f, puis étudiez sa parité et ses variations.
3. Calculer la valeur des sommes suivantes:
   (a) $\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k^2-1}$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
   (c) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$
   (d) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (n-i)(n-j)$
4. Mettre sous la forme $a+ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants:
   (a) $\frac{5+2i}{1-2i}$
   (b) $\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
   (c) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

$\mathcal{MR}$

Sujet C - HA 5

Partie cours

1. Donner la définition du conjugué de $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
2. Enoncer puis démontrer la formule du Binôme de Newton.

Partie exercices

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose f dérivable. Montrer que si f est paire alors f' est impaire. Que peut-on dire si f est impaire? Prouver votre affiramation.
2. Étudier les limites ci-dessous (existence, valeur éventuelle):
   (a) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right)$
   (b) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$
   (c) $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$
   (d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+|x|}{x}\right)$
3. Calculer la valeurs des sommes suivantes:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$
   (b) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$
   (c) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i-1)j$
   (d) $\sum_{i=1}^{n} i2^i$
4. Mettre sous la forme $a+ib$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants:
   (a) $\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}$
   (b) $\frac{1}{(1+2i)(3-i)}$
   (c) $\frac{1+2i}{1-2i}$
   (d) $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-6i}{1+i}$

$\mathcal{MR}$