Sujet A - HA 3

Partie cours

1. Donner la définition du complémentaire d'un ensemble A dans E.
2. Montrer que l'ensemble des majorants de $]0;1[$ est $[1;+\infty[$

Partie exercices

1. Montrer que: $A \Rightarrow B$ si et seulement si $non(B) \Rightarrow non(A)$.
2. (a) Prouvez: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|x-y| \leq 1\ ET\ |x+y| \leq 1) \Leftrightarrow (|x|+|y| \leq 1)$
   (b) Prouvez: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$
3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x)=3x+1$ et $g(x)=x^2-1$.
   (a) A t-on $f\circ g = g\circ f$?
   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$, que vaut $f\circ g(-x)$ et $g\circ f(-x)$?
   (c) Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est paire si et seulement si $\forall x\in\mathbb{R},\ f(-x)=f(x)$. Que peut-on dire des fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$?
4. Montrer par contraposition les assertions suivantes:
   (a) $\forall A,B\in\mathcal{P}(E)\ (A\cap B = A\cup B) \Rightarrow A=B$
   (b) $\forall A,B,C\in\mathcal{P}(E)\ (A\cap B = A\cap C\ et\ A\cup B = A\cup C) \Rightarrow B=C$

$\mathcal{MR}$

Sujet B - HA 3

Partie cours

1. Donner la définition de la réunion de deux ensembles A et B.
2. Démontrer l'inégalité triangulaire suivante: $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R},\ |x+y| \leq |x|+|y|$.

Partie exercices

1. Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions:
   (a) $P \Rightarrow Q$
   (b) P ET NON Q
   (c) P ET (Q ET R)
   (d) P OU (Q ET R)
   (e) (P ET Q) $\Rightarrow (R \Rightarrow S)$
2. Représenter les ensembles suivants:
   (a) $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\}$
   (b) $B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid max\{|x|;|y|\} \leq 1\}$
   (c) $C := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 < 2\}$
   (d) $D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-y| \leq 1\}$
3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$. Déterminer les ensembles suivants: $f([-3;-1])$; $f([-2;1])$; $f([-3;-1]\cup[-2;1])$; $f([-3;-1]\cap[-2;1])$; $f([-3;3]\cap[0;3])$; $f(0)$
4. Montrer que $A\cap B = A\cap C \Leftrightarrow A\cap \complement B = A\cap \complement C$

$\mathcal{MR}$