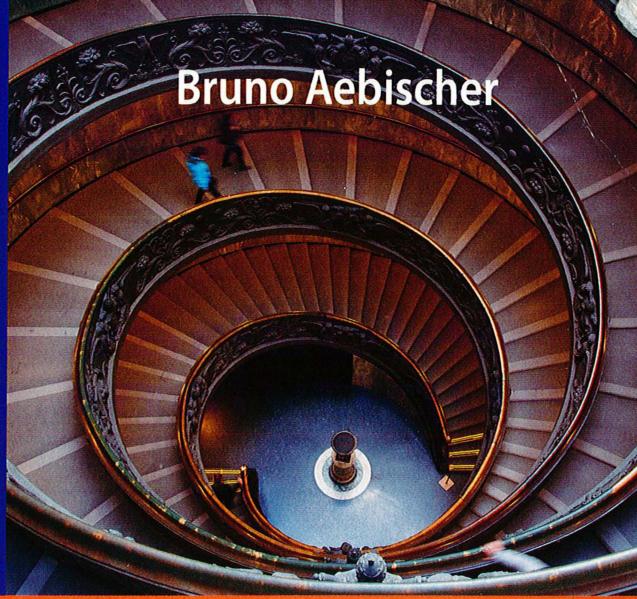


Bruno Aebischer

LICENCE 2
MATHÉMATIQUES



Analyse Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique

- Cours complet
- + de 100 exercices
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert

Bruno Aebischer

Analyse
Fonctions
de plusieurs variables
& géométrie analytique

Cours & exercices corrigés

LICENCE 2
MATHÉMATIQUES

Vuibert

Du même auteur chez le même éditeur

Introduction à l'analyse. Cours et exercices corrigés. Licence 1, 288 pages.

Géométrie. Géométrie affine, géométrie euclidienne & introduction à la géométrie projective.

Cours et exercices corrigés. Licence 3, 288 pages environ.

et des dizaines d'autres livres de référence, d'étude ou de culture :
mathématiques, informatique et autres spécialités scientifiques

www.vuibert.fr

En couverture : Escalier en double spirale de Giuseppe Momo, Vatican.
© Sylvain Sonnet/Corbis

Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre.net

Composition et mise en page de l'auteur

Couverture : Linda Skoropad/Presricom

ISBN 978-2-311-00275-1

Registre de l'éditeur : 581

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^e de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20 rue des Grands Augustins, F-75006 Paris. Tél. : 01 44 07 47 70

À Anne-Marie

Table des matières

Avant-propos	vii
1 Notions de topologie dans \mathbb{R}^n	1
1.1 Introduction générale	1
1.2 Qu'est-ce que \mathbb{R}^n ?	2
1.3 Normes dans \mathbb{R}^n	3
1.4 Ouverts, fermés, bornés, voisinages dans \mathbb{R}^n	10
1.5 Suites de \mathbb{R}^n	17
1.6 Vocabulaire de topologie	23
1.7 Exercices	25
2 Fonctions vectorielles. Courbes paramétrées.	29
2.1 Introduction	29
2.2 Différents points de vue	29
2.3 Limite, continuité, dérivabilité des fonctions vectorielles	31
2.4 Étude des courbes paramétrées du plan	35
2.5 Étude des points stationnaires	54
2.6 Exercices	60
3 Fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n	63
3.1 Introduction	63
3.2 Limites des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n	63
3.3 Limites et fonctions coordonnées	69
3.4 Étude pratique des limites de fonctions réelles de plusieurs variables	76
3.5 Dérivation partielle	90
3.6 Extrema des fonctions de plusieurs variables	109
3.7 Différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables	117
3.8 Différentiation des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n	132
3.9 Opérateurs différentiels	148
3.10 Exercices	156

4 Intégrale curviligne. Longueur d'une courbe	163
4.1 Introduction	163
4.2 Intégrale d'une fonction vectorielle	165
4.3 Arcs paramétrés orientés	168
4.4 Intégrale curviligne	176
4.5 Propriétés de l'intégrale curviligne	180
4.6 Étude d'exemples	185
4.7 Utilisation des intégrales curvilignes pour des calculs d'aires	190
4.8 Quelques propriétés métriques des arcs	195
4.9 Exercices	208
5 Calculs d'intégrales doubles, triples et de surface	211
5.1 Introduction	211
5.2 Intégrale double	216
5.3 Intégrales triples	230
5.4 Intégrales de surface	236
5.5 Exercices	257
Indications pour la résolution des exercices	263
Solutions des exercices	291
1. Solutions des exercices sur la topologie dans \mathbb{R}^n	291
2. Solutions des exercices sur fonctions vectorielles et courbes paramétrées	304
3. Solutions des exercices sur les fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n	330
4. Solutions des exercices sur l'intégrale curviligne	383
5. Solutions des exercices sur intégrales doubles, triples et de surface .	397

Avant-propos

CET OUVRAGE est destiné à tous les étudiants qui peuvent avoir besoin d'étudier les fonctions de plusieurs variables, les courbes paramétrées, les intégrales doubles ou triples, curvilignes ou de surface, et les opérateurs différentiels.

Bien sûr, les étudiants en deuxième année de licence de mathématiques sont les premiers concernés, mais il ne fait aucun doute qu'un étudiant scientifique curieux d'avoir des explications rigoureuses sur les outils qu'il est obligé de manipuler quotidiennement, pourra lui aussi être intéressé par le contenu de ce manuel.

Les candidats aux concours de l'enseignement (CAPES et Agrégation de mathématiques), quant à eux, doivent avoir vu et compris les notions développées dans cet ouvrage, qui leur sera donc d'un grand secours.

La particularité de cet ouvrage est qu'il essaie de ne jamais faire de raccourci et que tous les raisonnements sont parfaitement détaillés. Il apparaît ainsi comme un outil idéal pour tout étudiant isolé qui voudrait acquérir, comprendre et dominer par lui-même toutes les notions abordées.

Dans ce manuel, on trouvera d'abord 5 chapitres de cours très détaillés, rédigés dans un style clair et accessible :

1. un chapitre sur l'introduction à la topologie de \mathbb{R}^n dans lequel sont présentés tout le vocabulaire de topologie utile dans cet ouvrage ainsi que l'étude générale de la topologie ;
2. un chapitre sur les études des courbes paramétrées (ou fonctions vectorielles) qui expose de manière exhaustive toutes les particularités classiques de ce type de courbes ;
3. un gros chapitre sur les fonctions de plusieurs variables (de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n) qui constitue le cœur de cet ouvrage et dans lequel sont introduites les notions de continuité, de limites, de dérivées partielles, de différentiabilité pour toutes ces fonctions et étudiés les opérateurs différentiels classiques ;
4. un chapitre sur les intégrales curvilignes qui propose une introduction rigoureuse de la notion d'arc paramétré, avant d'étudier différents aspects possibles de l'intégration sur un arc paramétré, de l'intégration d'une forme différentielle ou d'un champ de vecteurs, mais aussi l'intégration d'une

fonction scalaire, avec le calcul de la longueur d'une courbe. On y montre également comment utiliser l'intégrale curviligne pour calculer des aires ;

5. un dernier chapitre traite des différents aspects des intégrales multiples, dans lequel toutes les démonstrations ne sont pas faites. Cependant, à partir de quelques propriétés admises, tous les résultats utiles pour calculer les intégrales doubles et triples, et faire des calculs d'aires ou de volumes, sont prouvés. Il s'agit ensuite de s'intéresser aux intégrales de surface et, après une introduction rapide de la notion de nappe paramétrée (introduction aux variétés différentiables), les calculs de flux d'un champ de vecteurs, d'aire d'une nappe, et d'intégrale d'une fonction scalaire sur une nappe sont expliqués. Enfin, le chapitre se termine sur les grands théorèmes liant les intégrales multiples entre elles : Green-Riemann, Ampère-Stokes, Ostrogradski, avec pour chacun de ces théorèmes une démonstration élémentaire et convaincante.

À la fin de chaque chapitre, est proposée une liste d'exercices dont la difficulté est très progressive.

Pour chaque exercice, on trouve d'abord des « indications » pour les résolutions, puis un corrigé détaillé, regroupés dans deux chapitres distincts, situés en fin d'ouvrage. Le lecteur est invité à commencer par essayer de résoudre seul les exercices proposés, et à ne consulter les indications que s'il ne voit pas comment commencer. Enfin, il pourra vérifier sa solution en la comparant avec celle de l'ouvrage, qui est toujours très détaillée et dont la rédaction se veut pouvoir servir de modèle.

C'est à partir d'un cours par correspondance qui a fait la preuve de son efficacité avec des générations d'étudiants, que ce livre a été réalisé.

Nous souhaitons une bonne réussite à tous nos lecteurs.

CHAPITRE 1

Notions de topologie dans \mathbb{R}^n

1.1 Introduction générale

La notion la plus utilisée en analyse mathématique a longtemps été tout simplement la notion de *nombre réel*. Pour apprécier la proximité de deux nombres réels a et b , on utilise la valeur absolue $|a - b|$, qui mesure la *distance* entre ces deux nombres. Cette notion de proximité des nombres est essentielle pour toutes les questions d'analyse. Elle sert pour :

- le calcul de l'erreur dans un calcul approché ;
- la définition de la limite d'une fonction $f : |f(x) - \ell|$ doit pouvoir devenir arbitrairement petit lorsque $|x - x_0|$ est petit ;
- la définition de la continuité d'une fonction $f : |\Delta f| = |f(x + \Delta x) - f(x)|$ doit être aussi petit qu'on le désire à condition que $|\Delta x|$ soit suffisamment petit ;
- la définition de la dérivabilité d'une fonction f en $x : \left| \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) \right|$ doit tendre vers zéro lorsque $\Delta x \rightarrow 0$;

Une première généralisation de cette notion est classiquement faite à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, le module $|z - z'|$ mesurant la distance de deux nombres complexes z et z' . Nous ne nous étendrons pas sur cette possibilité.

Mais les progrès en mathématiques ont amené une évolution irréversible : actuellement, la notion fondamentale n'est plus celle de nombre, mais celle de *vecteur*, ou *tableau de nombres*. Que ce soit en analyse théorique, ou en analyse numérique, comme en informatique, on manipule maintenant comme objet, essentiellement des vecteurs, et on doit leur appliquer des traitements analogues à ce qu'on faisait avec des nombres : on doit savoir mesurer la proximité de deux vecteurs, pour pouvoir parler de limites, de continuité, de dérivabilité d'une fonction dont l'ensemble de départ n'est pas un intervalle de \mathbb{R} mais un ensemble de vecteurs, un ensemble de tableau de nombres.

L'objet de ce chapitre est donc, après avoir rappelé quelques principes sur les opérations concernant les vecteurs, de définir une notion permettant de mesurer la distance de deux vecteurs. Cet outil est la *norme*.

1.2 Qu'est-ce que \mathbb{R}^n ?

1.2.1 Définition abstraite

Mathématiquement, n étant dans tout ce chapitre un entier non nul (et si possible au moins égal à 2) on définit \mathbb{R}^n comme le produit cartésien de \mathbb{R} par lui-même n fois : \mathbb{R}^n est l'ensemble des n -uples de réels. Par exemple, \mathbb{R}^2 est l'ensemble des couples de réels, \mathbb{R}^3 l'ensemble des triplets...

Un n -uple est une suite *ordonnée* de n éléments, à ne pas confondre avec l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Par exemple, on doit distinguer un couple (a, b) de la paire de ses éléments $\{a, b\}$, car $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont deux ensembles égaux.

$$X \in \mathbb{R}^n \iff \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on appelle x_1, x_2, \dots, x_n les composantes de X .

1.2.2 Structure de \mathbb{R} -espace vectoriel

On munit \mathbb{R}^n d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} , en définissant la somme de deux n -uples de réels et le produit d'un nombre réel (un *scalaire*) par un n -uple de réels : pour X et Y deux éléments quelconques de \mathbb{R}^n , de composantes respectives (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) , et pour λ un scalaire quelconque, on pose

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda X = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Il est classique que ces deux opérations confèrent à \mathbb{R}^n une structure d'espace vectoriel.

On notera $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ le vecteur nul de \mathbb{R}^n et parfois simplement 0 ou O . Les n vecteurs $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^n appelée *base canonique*.

1.2.3 Universalité de ce point de vue

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Il existe donc une base \mathcal{B} de E possédant n éléments. Alors tout élément x de E est caractérisé par ses coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} . Ces coordonnées sont en fait un élément de \mathbb{R}^n . Ce procédé définit un isomorphisme entre un espace vectoriel de dimension n et \mathbb{R}^n qui est en fait le modèle des espaces vectoriels de dimension n .

De même, l'ensemble des points du plan [de l'espace] peut être modélisé à l'aide de \mathbb{R}^2 [de \mathbb{R}^3] : dès qu'on a fixé un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) [$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$], tout point est caractérisé par le couple [le triplet] de ses coordonnées qui est un élément de \mathbb{R}^2 [de \mathbb{R}^3]. Par analogie, on appellera souvent « points » des éléments de \mathbb{R}^n , alors

que le terme « vecteur » serait plus correct. Il faut accepter ces abus de langage en gardant un esprit tolérant.

De la même façon, l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes peut aussi être modélisé comme l'ensemble \mathbb{R}^2 , chaque complexe $z = x + iy$ étant associé au couple (x, y) de \mathbb{R}^2 .

1.2.4 Notation

En général, on note en ligne les éléments de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire, qu'on écrit, pour un vecteur X de \mathbb{R}^n , $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mais dans certaines situations, il est plus pratique d'utiliser une notation de vecteur-colonne : en particulier en algèbre linéaire, lorsqu'on doit multiplier par une matrice un élément de \mathbb{R}^n , il vaudra

mieux noter $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, la base canonique étant dans ce cas formée des vecteurs
 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous serons amenés à utiliser ce type de notation lorsqu'on manipulera les matrices jacobiniennes.

1.3 Normes dans \mathbb{R}^n

1.3.1 Définition

Définition 1.1 Soit $(E, +, .)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel, on appelle *norme* sur E toute application N de E dans \mathbb{R}^+ telle que :

- (i) $\forall X \in E, \quad N(X) = 0 \iff X = 0_E$;
 - (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall X \in E \quad N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$;
 - (iii) $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$;
- (cette dernière propriété est connue sous le nom d'*inégalité triangulaire*).

1.3.2 Propriétés immédiates

Proposition 1.2 Pour établir qu'une application N définie sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E est une norme, il suffit d'établir que N est à valeurs dans \mathbb{R}^+ (c'est-à-dire que $N(X) \geq 0 \forall X \in E$) et

- (i)' $\forall X \in E, \quad N(X) = 0 \implies X = 0_E$;
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall X \in E \quad N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$;
- (iii) $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$.

Preuve La seule différence avec la définition étant le remplacement dans (i) de \iff par \implies , pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que (ii) $\implies N(0_E) = 0$

En effet, on a $N(0_E) = N(0 \cdot 0_E) = |0|N(0_E) = 0$ en utilisant (ii). \square

Proposition 1.3 Si N est une norme sur E , alors pour tous X et Y de E , on a
(ii)' $N(-X) = N(X)$;
(ii)'' $N(X - Y) = N(Y - X)$;
(iii)' $N(X - Y) \leq N(X) + N(Y)$.

Preuve Pour (ii)', il suffit de remarquer que $-X = (-1)X$ et d'utiliser (ii) : $N(-X) = N((-1)X) = |-1|N(X) = N(X)$.

Pour (ii)'', on applique (ii)' à $Y - X = -(X - Y)$.

Puis pour (iii)', on écrit $X - Y = X + (-Y)$ et on applique (iii) puis (ii)' :

$$N(X - Y) = N(X + (-Y)) \leq N(X) + N(-Y) = N(X) + N(Y)$$

\square

Proposition 1.4 (Deuxième inégalité triangulaire)

Si N est une norme sur un espace vectoriel E , alors on a :

(iv) $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad |N(X) - N(Y)| \leq N(X + Y)$

et

(iv)' $\forall X \in E \quad \forall Y \in E \quad |N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y)$

Preuve En écrivant $X = (X + Y) - Y$, et en utilisant (iii)', on a

$$N(X) = N((X + Y) - Y) \leq N(X + Y) + N(Y) \quad \text{donc} \quad N(X) - N(Y) \leq N(X + Y)$$

de même en échangeant le rôle de X et Y , on obtient

$$N(Y) = N((Y + X) - X) \leq N(Y + X) + N(X)$$

$$\text{donc } N(Y) - N(X) \leq N(Y + X) = N(X + Y)$$

En remarquant que pour tout réel A , on a $|A| = \max(A, -A)$, et puisque l'opposé de $A = N(X) - N(Y)$ est $-A = N(Y) - N(X)$, puisque ces deux nombres sont tous deux inférieurs ou égaux à $N(X + Y)$, le plus grand des deux est aussi majoré par ce nombre, c'est-à-dire qu'on a

$$|N(X) - N(Y)| = \max(N(X) - N(Y), N(Y) - N(X)) \leq N(X + Y)$$

(iv)' se démontre comme (iii)', en utilisant (ii)' et (iv). \square

1.3.3 Les normes usuelles de \mathbb{R}^n

La Norme Euclidienne

Pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Proposition 1.5 N_2 est une norme sur \mathbb{R}^n

Preuve La démonstration des points (i)' et (ii) ne pose aucune difficulté. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on élève au carré puis on simplifie :

$$\begin{aligned} N_2(X + Y) &\leq N_2(X) + N_2(Y) \\ \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est donc équivalente à l'inégalité triangulaire

Or, cette dernière inégalité est vraie, car, comme nous allons le voir, c'est une conséquence du § qui suit.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Il est d'usage de poser $X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ (produit scalaire du vecteur X et du vecteur Y).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit dans ce cadre :

$$|X \cdot Y| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$$

Puisque $X \cdot Y \leq |X \cdot Y|$, notre inégalité en est clairement une conséquence. Pour démontrer Cauchy-Schwarz, qui est une inégalité entre nombres positifs, on l'élève au carré et elle est équivalente à

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Le raisonnement qui suit est très classique, et il est important de savoir le retrouver ; X et Y étant deux vecteurs de \mathbb{R}^n fixés, on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \lambda^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \lambda + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Il est clair que $f(\lambda)$ est un *polynôme du second degré* en λ puisque tous les x_i et les y_i sont des constantes, (le coefficient dominant n'est nul que si $X = \mathbf{0}$ et dans ce cas l'inégalité de Cauchy-Schwarz est acquise puisque elle s'écrit $0 \leq 0$)

Or, en tant que somme de carrés de par sa première expression, il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda) \geq 0$. Mais un polynôme du second degré ne garde un signe constant que si son discriminant est négatif, ou à la rigueur nul (si le discriminant est positif, il y a deux racines réelles et entre ces racines ce n'est pas le même signe qu'à l'extérieur!). On peut donc affirmer que $\Delta \leq 0$ c'est-à-dire :

$$4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \leq 0$$

d'où le résultat attendu en simplifiant par 4. □

La Norme du Max

Pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_\infty(X) = \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Proposition 1.6 N_∞ est une norme sur \mathbb{R}^n

Preuve Remarquons tout d'abord que le max de la définition ci-dessus est atteint, et que donc, il existe toujours un indice i_0 (pas forcément unique) tel que $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$; cet indice est donc tel que pour tout i entre 1 et n , on a $|x_i| \leq |x_{i_0}|$. Les points (i)' et (ii) de la définition d'une norme se vérifient aisément.

Pour le point (iii), il suffit d'écrire que pour tout X, Y dans \mathbb{R}^n , posant $Z = X+Y$, si i_0 est un indice tel que $\|Z\|_\infty = |z_{i_0}|$, alors on a :

$$\begin{aligned} \|X+Y\|_\infty &= \|Z\|_\infty = |z_{i_0}| = |x_{i_0} + y_{i_0}| \leq |x_{i_0}| + |y_{i_0}| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|X\|_\infty + \|Y\|_\infty \end{aligned}$$

□

La Norme « Somme »

Cette norme est moins utilisée en pratique que les deux précédentes.

Pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $N_1(X) = \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Proposition 1.7 N_1 est une norme sur \mathbb{R}^n

La démonstration de cette propriété ne présente aucune difficulté et est laissée en exercice au lecteur (voir exercice 1.2).

Un peu de culture

Pourquoi ces différents indices 1, 2 ou ∞ sous le N ou après les doubles barres ? En fait, on peut définir une « norme p » pour tout $p \in [1, +\infty[$ en posant

$$N_p(X) = \|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il est clair que pour $p = 1$ ou $p = 2$, on retrouve la « norme somme » et la norme euclidienne.

Dans le cas général (pour $p \notin \{1, 2\}$), la démonstration que N_p est une norme est trop difficile à notre niveau. Je vous déconseille de vous lancer dans ce calcul : cela butera pour établir l'inégalité triangulaire, car on a besoin d'une inégalité comparable à celle de Cauchy-Schwarz en bien plus compliquée, la classique inégalité de Hölder.

Il est possible de montrer à notre niveau, avec un peu d'organisation que pour X fixé, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} N_p(X) = N_\infty(X)$. C'est cette propriété qui justifie le nom de cette dernière norme N_∞ .

1.3.4 Équivalence de normes

Définition 1.8 Soient N et \tilde{N} deux normes définies sur \mathbb{R}^n . On dit que les deux normes sont **équivalentes** si il existe deux constantes *strictement positives* C_1, C_2 telles que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \quad C_1 \tilde{N}(X) \leq N(X) \leq C_2 \tilde{N}(X)$$

On peut à la rigueur noter cette propriété par : $N \sim \tilde{N}$. C'est une relation d'équivalence dans l'ensemble de normes définies sur \mathbb{R}^n . (La démonstration du fait que c'est une relation d'équivalence est un excellent exercice : voir TD, exercice 1.3)

Théorème 1.9 Les normes N_1, N_2 et N_∞ sont équivalentes.

On a pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} N_\infty(X) &\leq N_2(X) \leq N_1(X) \leq n N_\infty(X) ; \\ N_\infty(X) &\leq N_2(X) \leq \sqrt{n} N_\infty(X) ; \\ N_2(X) &\leq N_1(X) \leq \sqrt{n} N_2(X) ; \\ N_\infty(X) &\leq N_1(X) \leq n N_\infty(X). \end{aligned}$$

Ces constantes ne peuvent être améliorées car pour chacune de ces inégalités, on peut trouver un X pour lequel on a l'égalité.

Pour la démonstration de ce théorème, voir l'exercice 1.4, et son corrigé.
 Signalons un théorème important mais que nous n'utiliserons pas, car on ne le démontre pas dans ce cours et il « tue » tout un tas d'exercices :

Théorème 1.10 (admis) *Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Remarque : Dans le cas particulier (assez peu intéressant) où $n = 1$, on considère que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, et les trois normes que nous avons étudiées sont en fait les mêmes : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $N_1(x) = N_2(x) = N_\infty(x) = |x|$

1.3.5 Distance dans \mathbb{R}^n

Nous arrivons maintenant véritablement à la mesure de l'écartement de deux éléments de \mathbb{R}^n . Les normes que nous avons rencontrées jouent le rôle de la valeur absolue dans \mathbb{R} . Pour les nombres, la mesure de l'éloignement de deux réels utilisait la valeur absolue de la différence de ces nombres. Dans \mathbb{R}^n , on prendra la norme de la différence de deux vecteurs pour apprécier leur distance. Mais tout d'abord définissons ce qu'est mathématiquement une distance.

Définition 1.11 Soit \mathbf{E} un ensemble ; on appelle *distance* sur \mathbf{E} toute application d définie sur $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$, à valeurs dans \mathbb{R} , et vérifiant les 4 propriétés suivantes :

$$(d0) \forall x, y \in \mathbf{E} \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(d1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(d2) \forall x, y \in \mathbf{E} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(d3) \forall x, y, z \in \mathbf{E} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

(cette dernière inégalité s'appelle aussi « l'inégalité triangulaire »).

Un ensemble dans lequel existe une distance s'appelle un *espace métrique*.

Dans un espace métrique, il y a aussi une deuxième inégalité triangulaire

$$(d3)' \forall x, y, z \in \mathbf{E} \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

Elle se démontre un peu comme la deuxième inégalité triangulaire des espaces normés (voir exercice 1.6).

La notion de distance est étroitement liée à celle de norme puisque l'on a la proposition :

Proposition 1.12 Si \mathbf{E} est un espace muni d'une norme N , alors l'application d définie sur $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$ par $d(X, Y) = N(X - Y)$ est une distance. C'est la distance associée à la norme N .

Preuve La démonstration de cette proposition est tout à fait évidente en utilisant les propriétés d'une norme. \square

Remarque : Il ne faut pas croire que tous les espaces métriques sont des espaces normés (munis d'une norme).

En effet, pour qu'il y ait une norme, l'ensemble doit avoir une structure d'espace vectoriel, alors qu'un espace métrique n'a pas forcément de structure algébrique. En revanche, tous les espaces normés sont des espaces métriques comme le prouve la proposition ci-dessus.

Conséquence

\mathbb{R}^n est un espace métrique de trois façons : à chacune des trois normes classiques de \mathbb{R}^n correspond une distance.

À la norme euclidienne N_2 , correspond la distance dite distance euclidienne d_2 de \mathbb{R}^n :

$$d_2(X, Y) = N_2(X - Y) = \|X - Y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est la distance usuelle, la seule que l'on comprenne bien intuitivement ; on peut la qualifier de distance naturelle, bien que mathématiquement, cet adjectif ait assez peu de sens. Souvent on omet l'indice 2, et la on note simplement d .

C'est celle que l'on utilise en géométrie, lorsque le plan ou l'espace est rapporté à un repère orthonormé :

Si A et B sont deux points du plan [de l'espace],

$$d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\|_2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Remarque : On peut à cette occasion justifier ici le terme *inégalité triangulaire* : Si ABC est un triangle ; si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et donc $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$, l'inégalité triangulaire s'écrit

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_2 \leq \|\vec{u}\|_2 + \|\vec{v}\|_2 \iff \|\overrightarrow{AC}\|_2 \leq \|\overrightarrow{AB}\|_2 + \|\overrightarrow{BC}\|_2 \iff AC \leq AB + BC.$$

Elle exprime le résultat classique que dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des deux autres longueurs de côtés ou encore plus prosaïquement que la ligne droite est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, puisque pour aller de A vers C , il est plus court d'y aller directement qu'en passant par B . Cette dernière interprétation n'étant d'ailleurs pas valable avec une autre norme que la norme euclidienne.

La deuxième inégalité triangulaire exprime, elle, que dans un triangle, la longueur d'un côté est supérieure (ou égale) à la différence des deux autres longueurs de côtés. Avec les mêmes notations, on a :

$$AC \geq |AB - BC| \iff \left| \|\vec{u}\|_2 - \|\vec{v}\|_2 \right| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|_2$$

À la norme du max N_∞ correspond la distance d_∞ de \mathbb{R}^n définie par :

$$d_\infty(X, Y) = N_\infty(X - Y) = \|X - Y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

À la norme somme N_1 correspond la distance d_1 de \mathbb{R}^n définie par :

$$d_1(X, Y) = N_1(X - Y) = \|X - Y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

1.4 Ouverts, fermés, bornés, voisinages dans \mathbb{R}^n

1.4.1 Boules ouvertes et fermées de \mathbb{R}^n

Ces notions sont essentiellement liées à la notion de norme. Comme il y a trois normes usuelles dans \mathbb{R}^n , et pour ne pas nous répéter, nous appellerons N_k une quelconque de ces trois normes, et d_k la distance associée, étant entendu que k vaut soit 2, soit ∞ , soit 1.

Boule ouverte

Définition 1.13 Pour X_0 un élément de \mathbb{R}^n et r un réel strictement positif. On appelle *boule ouverte de centre X_0 et de rayon r* , pour la norme N_k , et on note $B_k(X_0, r)$ le sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par :

$$B_k(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d_k(X, X_0) = N_k(X - X_0) < r\}.$$

Boule fermée

Définition 1.14 Pour X_0 un élément de \mathbb{R}^n et r un réel strictement positif. On appelle *boule fermée de centre X_0 et de rayon r* , pour la norme N_k , et on note $\overline{B}_k(X_0, r)$ le sous-ensemble de \mathbb{R}^n défini par :

$$\overline{B}_k(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid d_k(X, X_0) = N_k(X - X_0) \leq r\}$$

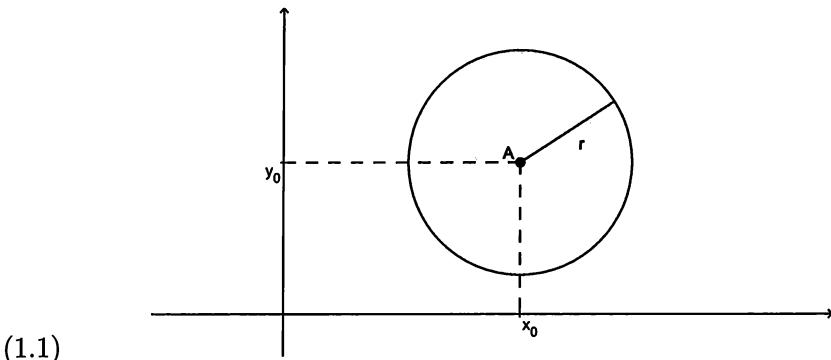
Boules dans \mathbb{R}

Les trois normes usuelles étant confondues dans \mathbb{R} avec la valeur absolue, il n'y a qu'une seule notion classique de boules, que l'on note sans indice k : elle correspond à la notion d'intervalles centrés ; les définitions des notions de limite, continuité pour des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} font largement appel à ces intervalles centrés. Dans \mathbb{R} , $B(x_0, r) =]x_0 - r, x_0 + r[$; l'inégalité $|x - x_0| < \varepsilon$ caractérise $x \in B(x_0, \varepsilon)$. De même, $\overline{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$; l'inégalité $|x - x_0| \leq \varepsilon$ caractérise $x \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$.

Boules usuelles en dimension 2

Une remarque préliminaire s'impose : entre une boule ouverte et une boule fermée, la différence est « mince ». On a bien sûr $B_k(x_0, r) \subset \overline{B}_k(x_0, r)$ et seuls les X qui sont exactement à la distance r de X_0 sont dans la boule fermée $\overline{B}_k(X_0, r)$ et pas dans la boule ouverte $B_k(X_0, r)$.

D'autre part, pour une bonne compréhension de ces notions il est utile de se placer systématiquement dans un repère orthonormé.



Boules Euclidiennes : ce sont les plus simples à concevoir, car ce sont des disques, ouverts ou fermés, selon le cas, c'est-à-dire sans ou avec le cercle frontière. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'inéquation caractérisant une boule :

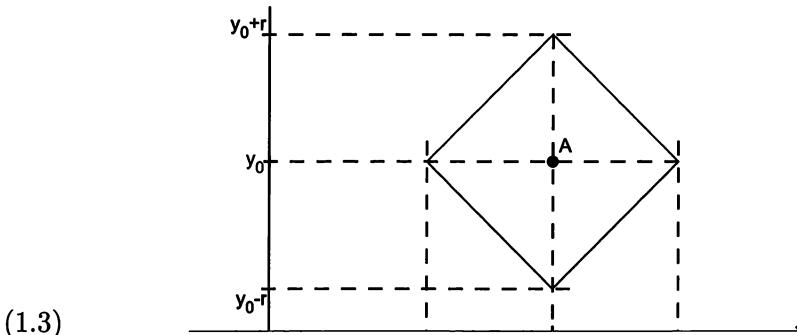
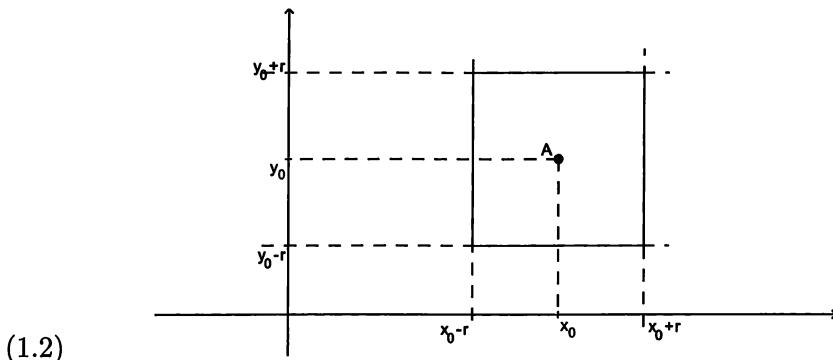
$$d_2(X - X_0) \leq r \iff (x_1 - x_{1,0})^2 + (x_2 - x_{2,0})^2 \leq r^2.$$

Il est bien connu que cette dernière inéquation caractérise le disque fermé de rayon r et de centre le point de coordonnées $(x_{1,0}, x_{2,0})$. (*Vous connaissez sans doute mieux ce résultat en nommant (x, y) les coordonnées : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ caractérise le disque fermé limité par le cercle d'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.*)

Boules pour la norme du max : ce sont des carrés. En effet,

$$\|X - X_0\|_\infty < r \iff \max(|x - x_0|, |y - y_0|) < r \iff \begin{cases} |x - x_0| < r \\ |y - y_0| < r. \end{cases}$$

Or, $|x - x_0| < r$ caractérise une bande verticale de largeur $2r$, limitée par les deux droites verticales $x = x_0 - r$ et $x = x_0 + r$. De même, $|y - y_0| < r$ caractérise une bande horizontale de largeur $2r$, limitée par les deux droites horizontales $y = y_0 - r$ et $y = y_0 + r$. L'intersection de ces deux bandes est un carré dont le centre est le point $X_0(x_0, y_0)$.

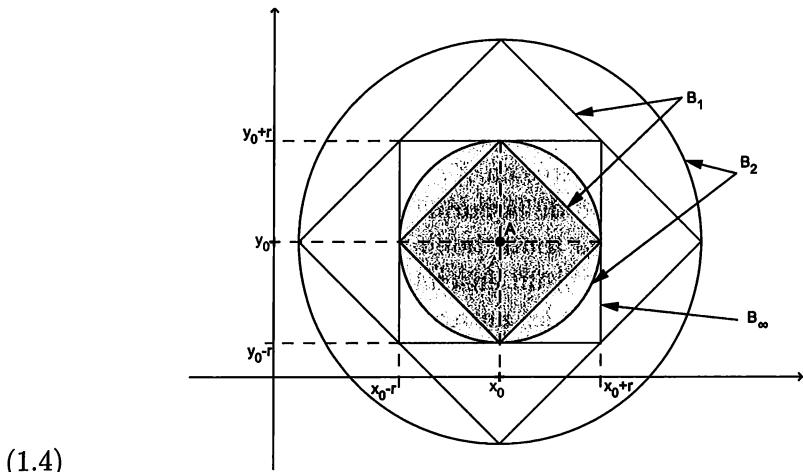


Boules pour la norme somme : ce sont aussi des carrés, mais « posés sur la pointe ». Voir la figure ci-dessus ; la démonstration un peu technique est laissée en exercice (voir exercice 1.7.)

Boules usuelles dans \mathbb{R}^3

On montre sans grande difficulté que les boules euclidiennes sont de « vraies » boules, limitées par des sphères, que les boules pour la norme du max sont des cubes, et avec un peu plus de mal, on peut établir que les boules pour la norme somme sont des octaèdres.

Remarque : La propriété d'équivalence des trois normes usuelles est illustrée par la figure de la page suivante, qui illustre qu'à l'intérieur de toute boule pour une des normes, on peut en inclure une autre, de même centre, pour une des autres normes. Réciproquement, toute boule pour une des normes est incluse dans une autre boule de même centre, pour une des autres normes. Cette propriété est vraie en dimension quelconque. Nous verrons dans la suite l'intérêt de cette possibilité.



Remarque : Lorsque le contexte aura privilégié un des trois types de norme, on s'abstiendra de préciser à chaque fois laquelle, et on notera simplement N au lieu de N_k , d au lieu de d_k , $\|X\|$ au lieu de $\|X\|_k$, $B(X_0, r)$ au lieu de $B_k(X_0, r)$ etc. C'est en général la norme euclidienne qui sera ainsi privilégiée.

1.4.2 Parties bornées

Définition 1.15 Une partie de \mathbb{R}^n est bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule.

Grâce à la remarque 1.4.1, il est clair que cette définition ne dépend pas de la norme considérée. On peut aussi clairement utiliser des boules ouvertes ou fermées sans changer cette notion de partie bornée.

Proposition 1.16 Une partie P de \mathbb{R}^n est bornée si et seulement si il existe $R > 0$ tel que $\forall X \in P$, on a $\|X\| \leq R$.

Preuve La remarque 1.4.1 permet de ne pas spécifier quelle norme on utilise. Si on a $\forall X \in P$, $\|X\| \leq R$, cela signifie que $P \subset \overline{B}(O, R)$ (en posant $O = 0_{\mathbb{R}^n}$) donc P est une partie bornée.

Si P est bornée, alors il existe X_0 et r tel que $P \subset \overline{B}(X_0, r)$.

Soit alors $R = r + d(X_0, 0) = r + \|X_0\|$. Alors pour tout $X \in P$, puisque $X \in \overline{B}(X_0, r)$, on a $\|X - X_0\| \leq r$ et donc

$$\|X\| = \|(X - X_0) + X_0\| \leq \|X - X_0\| + \|X_0\| \leq r + \|X_0\| = R.$$

□

1.4.3 Ouverts de \mathbb{R}^n

Définition 1.17 Une partie \mathcal{O} de E est dite **ouverte** si elle vérifie la propriété suivante :

$$X \in \mathcal{O} \implies \exists r_X \in \mathbb{R}^+, \quad B_k(X, r_X) \subset \mathcal{O}$$

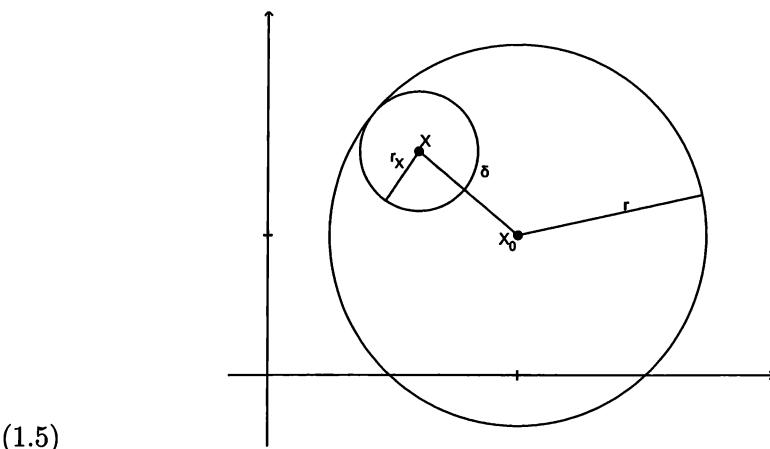
Cette définition signifie que dès que \mathcal{O} contient un élément X , alors il contient nécessairement toute une boule centrée en X .

Apparemment, cette notion dépend de la norme considérée. Mais en fait, d'après la remarque 1.4.1 (p.12), puisque toute boule d'un type en contient d'autres de même centre des autres types, si un ensemble est ouvert au titre d'une des normes, il est ouvert également pour les autres normes et on dit simplement qu'il est ouvert.

Proposition 1.18 Toute boule ouverte est un ensemble ouvert

Preuve Cette démonstration se fera en utilisant une quelconque des normes et sans la numérotter.

Soit $B = B(X_0, r)$ une boule ouverte pour la norme $N = \|\cdot\|$. Soit $X \in B$. Par définition, $\delta = d(X, X_0) < r$. Posons $r_X = r - \delta > 0$. Alors la boule $B(X, r_X)$ est incluse dans B . En effet, soit $Y \in B(X, r_X)$, alors par l'inégalité triangulaire,



$d(Y, X_0) \leq d(Y, X) + d(X, X_0) = d(Y, X) + \delta$. Or, $d(Y, X) < r_X$ par définition de la boule ouverte $B(X, r_X)$. Donc $d(Y, X_0) < r_X + \delta = r - \delta + \delta = r$ et $Y \in B(X_0, r) = B$. \square

Remarque : Cette proposition est rassurante, et elle justifie a posteriori la pertinence des dénominations. Il ne faudrait surtout pas croire que l'adjectif « ouverte » dans boule ouverte est à lui tout seul une preuve de la proposition.

1.4.4 Fermés de \mathbb{R}^n

Définition 1.19 Une partie F de E est dite **fermée** si elle est le complémentaire d'une partie ouverte.

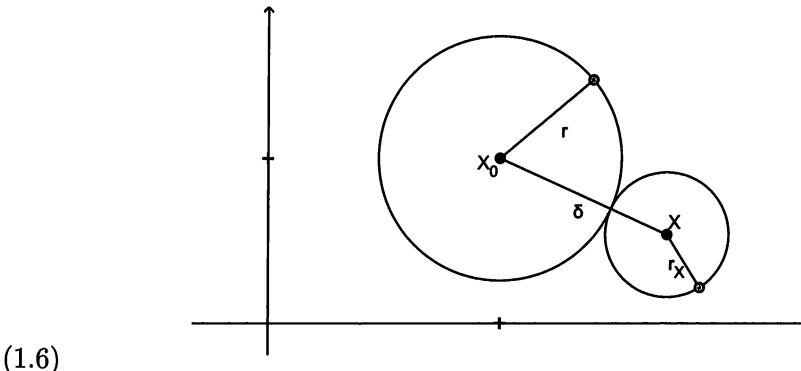
Cette définition « en creux » est assez difficile à manier. Nous verrons un peu plus loin un théorème important qui permet de définir les fermés de façon plus positive.

Comme pour les ouverts, nous avons la proposition rassurante :

Proposition 1.20 Toute boule fermée est un ensemble fermé.

Preuve Comme pour la proposition 1.18 (p.14) on ne numérote pas la norme utilisée.

Soit $\overline{B} = \overline{B}(X_0, r)$ une boule fermée pour la norme $N = \|\cdot\|$. Pour montrer que c'est un ensemble fermé, on doit considérer le complémentaire C de \overline{B} et montrer que C est un ensemble ouvert. Soit $X \in C$. Par définition, puisque $X \notin \overline{B}$, $\delta = d(X, X_0) > r$. Posons $r_X = \delta - r > 0$. Alors la boule $B(X, r_X)$ est incluse dans C . En effet, soit $Y \in B(X, r_X)$, alors grâce à la deuxième inégalité triangulaire, $d(Y, X_0) \geq |d(Y, X) - d(X, X_0)| \geq d(X, X_0) - d(Y, X) = \delta - d(Y, X)$.



Or, $d(Y, X) < r_X$ par définition (1.13) de la boule ouverte $B(X, r_X)$.

Donc $-d(Y, X) > -r_X$ et $d(Y, X_0) > \delta - r_X = \delta - (\delta - r) = r$.

On peut donc affirmer que $Y \notin \overline{B}$, donc $Y \in C$. On a trouvé une boule $B(X, r_X)$ centrée en X et incluse dans C , ceci quel que soit X dans C : c'est exactement ce qui permet d'affirmer que C est bien un ouvert, donc \overline{B} est un bien fermé. \square

1.4.5 Voisinages, bases de voisinages dans \mathbb{R}^n

Définition 1.21 Pour X_0 dans E , on appelle **voisinage** de X_0 , toute partie de \mathbb{R}^n qui contient une boule ouverte centrée en X_0 .

On note $\mathcal{V}(X_0)$ l'ensemble de tous les voisinages de X_0 .

Grâce à la remarque 1.4.1 (p.12), cette notion ne dépend pas de la norme utilisée.

Proposition 1.22 V est un voisinage de X_0 si et seulement si il existe un ensemble ouvert contenu dans V et qui contient X_0 . En particulier tout ouvert est voisinage de chacun de ses points. C'est même une autre caractérisation des ouverts.

Preuve Si V est un voisinage de X_0 , d'après la définition, il existe une boule ouverte centrée en X_0 , de rayon r , qui est incluse dans V et une boule ouverte est un ouvert d'après la proposition 1.18 (p.14). Donc V contient un ouvert contenant X_0 .

Réciproquement : si \mathcal{E} est une partie qui contient un ouvert \mathcal{O} qui contient X_0 . Puisque \mathcal{O} est ouvert, et que $X_0 \in \mathcal{O}$, il existe une boule ouverte centrée en X_0 et incluse dans \mathcal{O} . Par transitivité de l'inclusion, cette boule est incluse dans \mathcal{E} qui est donc un voisinage de X_0 .

Pour la deuxième partie de la proposition : il est évident que si X_0 est un point d'un ouvert, cet ouvert contient un ouvert — lui-même — contenant X_0 , donc c'est un voisinage de X_0 d'après le début de la proposition qu'on vient d'établir.

Réciproquement : Soit \mathcal{E} un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points. Pour chacun de ses points X , il existe donc une boule que l'on peut prendre ouverte, centrée en X et incluse dans \mathcal{E} . C'est justement la définition d'un ensemble ouvert : \mathcal{E} est donc ouvert. \square

Un exemple très important de voisinages de X_0 est fourni par les boules de centre X_0 , de rayon non nul.

En effet, elles contiennent toujours une boule ouverte (elle-même ou la boule ouverte de même centre et de même rayon) contenant X_0 .

Les voisinages d'un point sont extrêmement nombreux, puisque toute partie contenant un voisinage de X_0 devient ipso facto elle aussi un voisinage de X_0 . Cette trop grande richesse peut être gênante, surtout lorsqu'on aura besoin de propriétés utilisant « Pour tout voisinage de X_0 »... Afin de remédier à cet inconvénient, on utilisera la notion de bases de voisinages

Définition 1.23 On appelle base de voisinages de X_0 un sous-ensemble \mathcal{B} de $\mathcal{V}(X_0)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(X_0)$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset V$.

Exemples

L'ensemble des boules ouvertes centrées en X_0 est banalement une base de voisinage de X_0 .

L'ensemble des boules fermées (de rayon non nul) centrées en X_0 est aussi une base de voisinage de X_0 .

Ceci quelle que soit la norme considérée.

1.5 Suites de \mathbb{R}^n

1.5.1 Présentation des suites de vecteurs

Mathématiquement, une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R}^n ; comme pour les suites, la notation est spécifique : on note $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ [ou plus simplement (U_p)] une telle suite, étant entendu que U_p désigne le p -ième terme de la suite (image de p) et que c'est un élément de \mathbb{R}^n . U_p a donc n composantes qui dépendent de p . On a donc besoin d'une double indexation : la i -ème composante de U_p sera notée u_{ip} .

En général, quand il n'y a pas d'ambiguïté avec les exposants, on préfère envoyer en haut un des indices : on note alors la suite $(U^p)_{p \in \mathbb{N}}$ [ou (U^p)], avec $U^p = (u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p)$.

évidemment, dans certains cas il peut être intéressant de noter en colonne les

$$\text{éléments de } \mathbb{R}^n : \text{dans ce cas on aura } U^p = \begin{pmatrix} u_1^p \\ u_2^p \\ \vdots \\ u_n^p \end{pmatrix}$$

Remarquons que la lettre n est « taboue » pour les indices tant qu'on travaille dans \mathbb{R}^n .

Une suite de vecteurs $(U^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est entièrement déterminée par la donnée des n suites réelles $(u_1^p)_{p \in \mathbb{N}}, (u_2^p)_{p \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$, car la connaissance de ces n suites réelles assure la connaissance de la suite vectorielle et réciproquement. Les n suites $(u_i^p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont les *suites des composantes* de $(U^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

1.5.2 Convergence de suites de \mathbb{R}^n

Grâce à la notion de norme, qui permet de mesurer la notion de proximité dans \mathbb{R}^n , nous pouvons maintenant, comme dans \mathbb{R} définir rigoureusement la notion de convergence d'une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition 1.24 Soit $(U^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^n . On dit que la suite (U^p) converge vers l'élément L de \mathbb{R}^n lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall p \geq p_0 \text{ on a } \|U^p - L\|_k \leq \varepsilon$$

On dit alors que L est la limite de la suite (U^p) et on note $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^p = L$

Dans cette définition, L désigne un vecteur de \mathbb{R}^n , et comme d'habitude $\|\cdot\|_k$ désigne une des trois normes usuelles de \mathbb{R}^n .

Avant de continuer, il est essentiel de préciser un point :

Théorème 1.25 (Unicité de la limite) La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Preuve Supposons que la suite (U^p) converge à la fois vers L et aussi vers L' . On va faire un raisonnement par l'absurde : supposons que $L \neq L'$. Dans ce cas, le réel $\varepsilon = \frac{\|L - L'\|_k}{3}$ est strictement positif, et pour cet ε , d'une part puisque (U^p) converge vers L , $\exists p_1$ tel que si $p \geq p_1$, alors $\|U^p - L\|_k \leq \varepsilon$. d'autre part puisque (U^p) converge vers L' , $\exists p_2$ tel que si $p \geq p_2$, alors $\|U^p - L'\|_k \leq \varepsilon$.

(Il ne faut surtout pas prendre le même p_0 dans les deux cas)

Soit p_0 un entier qui soit à la fois plus grand que p_1 et plus grand que p_2 (il suffit de prendre $p_0 = \max(p_1, p_2)$)

Puisqu'on a à la fois $p_0 \geq p_1$ et $p_0 \geq p_2$, on peut affirmer qu'on a

$$\|U^{p_0} - L\|_k \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|U^{p_0} - L'\|_k \leq \varepsilon$$

Mais en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$3\varepsilon = \|L - L'\|_k \leq \|L - U^{p_0}\|_k + \|U^{p_0} - L'\|_k \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

C'est absurde qu'on trouve $3\varepsilon \leq 2\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. L'hypothèse que l'on a faite $L \neq L'$ n'est donc pas correcte et on a $L = L'$. \square

Remarque : C'est ce théorème qui assure la cohérence de la notation $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^p = L$: le signe $=$ ne devait pas, jusque là être compris comme l'égalité habituelle, mais seulement comme une convention. Maintenant, il n'y a plus de problème, et si on a simultanément $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^p = L$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^p = L'$, on peut sans scrupule affirmer que $L = L'$ (transitivité de l'égalité).

La définition de la convergence utilise une certaine norme N_k , et on devrait donc parler de convergence au sens de N_k ; ce n'est pas pratique, mais nous allons lever cette difficulté grâce à la proposition suivante :

Proposition 1.26 Si N_j et N_k sont deux normes équivalentes sur \mathbb{R}^n , alors la convergence d'une suite vers L au sens de N_j est équivalente à la convergence de cette suite vers L au sens de N_k .

Preuve Remarquons tout d'abord qu'il suffit d'établir l'implication dans un sens pour en déduire l'équivalence, puisque j et k jouent un rôle symétrique, la réciproque s'établira en échangeant les rôles.

Montrons que si (U^p) converge vers L au sens de N_j , alors elle converge vers L au sens de N_k .

Soit (U^p) une suite convergente vers L au sens de N_j .

Puisque ces deux normes sont équivalentes, on sait qu'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$C_1\|X\|_j \leq \|X\|_k \leq C_2\|X\|_j$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C_2} > 0$, d'après l'hypothèse de convergence vers L au sens de N_j , il existe p_0 tel que $\forall p \geq p_0$ on a $\|U^p - L\|_j \leq \varepsilon'$. Mais $\frac{1}{C_2} \|U^p - L\|_k \leq \|U^p - L\|_j$, donc on a donc pour ces p , $\|U^p - L\|_k \leq C_2 \varepsilon' = \varepsilon$. Ce qui est souligné dans le texte ci-dessus assure la convergence vers L au sens de N_k . \square

D'après cette proposition, la convergence d'une suite vectorielle ne dépend plus de la norme considérée, et dans la suite, on utilisera au choix n'importe quelle norme, sans forcément préciser laquelle. En pratique, c'est plutôt la norme euclidienne que l'on comprend, mais dans certains cas la norme du max est bien pratique. Notons une propriété analogue à la précédente, qui peut servir à une autre définition de la convergence d'une suite :

Proposition 1.27 Une suite (U^p) de vecteurs de \mathbb{R}^n est convergente vers L si et seulement si pour tout voisinage V d'une base de voisinages de L , il existe p_0 tel que pour $p \geq p_0$, on a $U^p \in V$

Preuve Notons tout d'abord que la définition 1.24 (p.17) peut être paraphrasée en utilisant les termes de cet énoncé, puisque à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un élément $V_\varepsilon = \overline{B}(L, \varepsilon)$ de la base de voisinages de L formée des boules fermées de centre L , et que $X \in \overline{B}(L, \varepsilon) \iff \|X - L\| \leq \varepsilon$. Quand on lit dans la définition $\forall \varepsilon > 0$, on peut aussi bien comprendre « Pour tout élément $\overline{B}(L, \varepsilon)$ de la base de voisinages de L formée des boules fermées de centre L » ; le dernier morceau de la phrase de la définition « $\|U^p - L\| \leq \varepsilon$ » se comprend alors comme : « $U^p \in \overline{B}(L, \varepsilon)$ ».

Soit \mathcal{B} une autre base de voisinages de L .

Supposons tout d'abord que (U^p) converge vers L .

Soit W un voisinage de L appartenant à la base de voisinages \mathcal{B} . Puisque c'est un voisinage de L , il contient une boule centrée en L que l'on notera $B(L, r)$.

Pour $\varepsilon = \frac{r}{2}$, il existe p_0 tel que pour $p \geq p_0$, on a

$$U^p \in \overline{B}(L, \varepsilon) = \overline{B}(L, \frac{r}{2}) \subset B(L, r) \subset W.$$

On a établi le sens nécessaire de cette propriété.

Réciproquement : Supposons que pour tout $W \in \mathcal{B}$, on puisse trouver un p_0 tel que pour $p \geq p_0$ on ait $U^p \in W$.

Soit $\varepsilon > 0$. La boule fermée $\overline{B}(L, \varepsilon)$ est un voisinage de L . Or, \mathcal{B} étant une base de voisinages de L et $\overline{B}(L, \varepsilon)$ un voisinage de L , on peut trouver un voisinage W de L qui soit un élément de \mathcal{B} et qui soit inclus dans $\overline{B}(L, \varepsilon)$. Pour cet élément W

de \mathcal{B} , d'après l'hypothèse, il existe p_0 tel que pour $p \geq p_0$, on ait $U^p \in W$. Mais puisque $W \subset \overline{B}(L, \varepsilon)$, on a $U^p \in \overline{B}(L, \varepsilon)$ et donc $\|U^p - L\| \leq \varepsilon$. Ce qui est souligné ci-dessus correspond à l'affirmation que (U^p) converge vers L . \square

Une conséquence importante de cette propriété est que dans la définition, on peut si on le souhaite, changer l'inégalité large dans $\|U^p - L\| \leq \varepsilon$ par une inégalité stricte $\|U^p - L\| < \varepsilon$: cela revient alors à considérer la base de voisinages de L formée des boules ouvertes centrées en L . Personnellement, je préfère utiliser quand je le peux des inégalités larges, car il y a en général moins de pièges avec elles.

On peut aussi se restreindre aux ε qui sont plus petits qu'un nombre M fixé à l'avance, car l'ensemble des boules ouvertes (ou fermées) de centre L et dont le rayon est plus petit que M est aussi une base de voisinage (vérification immédiate). Nous arrivons maintenant à une propriété essentielle sur la convergence des suites vectorielles en dimension finie :

Théorème 1.28 Soit $(U^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n et $(u_1^p)_{p \in \mathbb{N}}, (u_2^p)_{p \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$ les suites des composantes de (U^p) . Alors la suite (U^p) est convergente si et seulement si les n suites composantes sont convergentes, et la limite L de la suite (U^p) a alors comme composantes $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$, chaque ℓ_i étant la limite de la suite numérique $(u_i^p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Ainsi dans \mathbb{R}^n , la convergence d'une suite se ramène à celle des suites composantes ; il y en a autant que la dimension de l'espace.

Preuve Supposons tout d'abord que (U^p) soit convergente vers $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$. Soit j un entier entre 1 et n . Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après l'hypothèse, il existe p_0 tel que $p \geq p_0$ implique que $\|U^p - L\|_\infty \leq \varepsilon$.

(Notons le choix fait ici d'utiliser la norme du max parce que « ça nous arrange ».)

Posant $U^p - L = V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, on a donc $\max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \leq \varepsilon$.

En particulier, $|v_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \leq \varepsilon$. Or, la j -ième composante du vecteur $V = U^p - L$ est égale à la différence de la j -ième composante de U^p et de la j -ième composante de L , donc $v_j = u_j^p - \ell_j$.

On a donc $|u_j^p - \ell_j| \leq \varepsilon$ et ce qui est souligné signifie justement que la suite $(u_j^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_j .

Réciproquement :

On suppose maintenant que chacune des n suites $(u_j^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_j .

Soit $\varepsilon > 0$; puisque chaque suite $(u_j^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_j , pour chaque j , il existe p_j tel que $p \geq p_j$ implique que $|u_j^p - \ell_j| \leq \varepsilon$.

Il existe alors $p_0 = \max_{1 \leq j \leq n} p_j$ tel que si on a $p \geq p_0$, alors (puisque pour tout j , $p_0 \geq p_j$) on a $p \geq p_j$.

On a donc pour tout j entre 1 et n : $|u_j^p - \ell_j| \leq \varepsilon$.

On peut donc affirmer que le plus grand de ces n nombres $|u_j^p - \ell_j| = |v_j|$ est lui aussi majoré par ε : on a $\max_{1 \leq j \leq n} |v_j| = \|V\|_\infty \leq \varepsilon$. Mais le vecteur V de composantes (v_1, v_2, \dots, v_n) est justement égal à $U^p - L$ et on a donc $\|U^p - L\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ce qui est souligné prouve que (U^p) converge vers L . \square

Exemple :

Dans $E = \mathbb{R}^2$, considérons la suite de terme général :

$$X^p = \left(\frac{1}{p+1}, 2e^{-p} \right)$$

On sait que les deux suites réelles $(x_1^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_2^p)_{p \in \mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\begin{cases} x_1^p = \frac{1}{p+1} \\ x_2^p = 2e^{-p} \end{cases}$$

convergent dans \mathbb{R} respectivement vers $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 = 0$. Donc la suite $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^2 vers $L = (0, 0)$.

1.5.3 Opérations sur les suites convergentes

Grâce au théorème 1.28 (p.20), on démontre sans aucune difficulté, en passant par les composantes, les propriétés suivantes.

Proposition 1.29 Si (U^p) et (V^p) sont deux suites de \mathbb{R}^n convergentes, respectivement vers L et L' , alors la suite $(U^p + V^p)$ converge et sa limite est $L + L'$.

Proposition 1.30 Si (U^p) est une suite de \mathbb{R}^n convergente vers L et α un réel, alors la suite (αU^p) est convergente et sa limite est αL .

Remarque : Il n'est pas possible de définir, comme on le faisait pour les suites réelles des suites admettant une limite infinie : si une de ses suites composantes d'une suite vectorielle admet une limite infinie, alors cette suite vectorielle n'a pas de limite, et il est inutile de chercher davantage.

1.5.4 Convergence par majoration

Voici une proposition technique très intéressante.

Proposition 1.31 Si $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n et $L \in \mathbb{R}^n$; s'il existe une suite réelle $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, convergente vers 0 ; si pour tout p à partir d'un certain rang p_1 , on a

$$\|X^p - L\| \leq u_p$$

Alors on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} X^p = L$.

Preuve Notons tout d'abord que la suite (u_p) est forcément à termes positifs, au moins à partir du rang p_1 .

On a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq p_0$, on a $|u_p| \leq \varepsilon$. (On a simplement traduit la convergence de la suite réelle (u_p) vers 0).

Soit $p_0 = \max\{p_1, p_2\}$;

On peut dire qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq p_0$,

On a d'une part, $p \geq p_1$, donc $\|X^p - L\| \leq u_p$ et donc forcément $0 \leq u_p = |u_p| \leq \varepsilon$, et d'autre part on a $p \geq p_2$, donc $u_p = |u_p| \leq \varepsilon$.

Mettant bout à bout ces deux inégalités, on obtient

$$\underline{\|X^p - L\| \leq \varepsilon}.$$

□

1.5.5 Suites et fermés

Nous allons maintenant revenir sur la notion d'ensemble fermé et établir une caractérisation « positive » de ces ensembles. Les raisonnements qui vont suivre sont valables dans tout espace métrique.

Théorème 1.32 Soit \mathcal{F} une partie non vide de \mathbb{R}^n . Alors \mathcal{F} est fermée si et seulement si pour toute suite convergente (U^p) d'éléments de \mathcal{F} , la limite L de cette suite est un élément de \mathcal{F} .

La démonstration de ce théorème use et abuse du raisonnement par l'absurde. Elle peut être sautée en première lecture.

Supposons d'abord que \mathcal{F} soit fermé.

Soit (U^p) une suite convergente d'éléments de \mathcal{F} . Soit $L = \lim_{p \rightarrow +\infty} U^p$. Pour montrer que $L \in \mathcal{F}$, on va supposer le contraire, c'est-à-dire que $L \notin \mathcal{F}$ et montrer qu'on arrive à un contradiction.

Soit \mathcal{O} le complémentaire de \mathcal{F} . Puisque \mathcal{F} est fermé, \mathcal{O} est par définition un ouvert. On a donc supposé que $L \in \mathcal{O}$. Puisque \mathcal{O} est un ouvert, et que $L \in \mathcal{O}$, il existe une boule fermée de centre L , de rayon ε qui est incluse dans \mathcal{O} . Pour cet ε , puisque $L = \lim_{p \rightarrow +\infty} U^p$, alors on peut affirmer qu'il existe p_0 tel que pour $p \geq p_0$,

on a $\|U^p - L\| \leq \varepsilon$, donc entre autres $U^{p_0} \in \overline{B}(L, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$. On a donc trouvé un terme U^{p_0} de la suite (U^p) qui appartient à \mathcal{O} : ça veut dire qu'il n'appartient pas à \mathcal{F} , mais c'est absurde puisque cette suite a tous ses termes dans \mathcal{F} . Notre hypothèse $L \notin \mathcal{F}$ est donc incompatible avec les autres hypothèses et on a donc forcément $\underline{L \in \mathcal{F}}$

Réiproquement :

Supposons maintenant que toutes les suites convergentes d'éléments de \mathcal{F} ont leur limite appartenant à \mathcal{F} .

Pour montrer que \mathcal{F} est fermé, nous allons supposer que ce n'est pas le cas : son complémentaire \mathcal{O} est donc supposé non ouvert. Il existe donc un point L de \mathcal{O} tel que on ne peut pas trouver un $r > 0$ avec $B(L, r) \subset \mathcal{O}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\overline{B}(L, \varepsilon) \not\subset \mathcal{O}$ (sinon on aurait $B(L, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$), il existe donc un X tel que $\|X - L\| \leq \varepsilon$ mais $X \notin \mathcal{O}$, donc $X \in \mathcal{F}$. En particulier, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, en considérant $\varepsilon = \frac{1}{2^p}$, on peut trouver un $X^p \in \mathcal{F}$ tel que $\|X^p - L\| \leq \frac{1}{2^p}$.

On construit ainsi une suite (X^p) d'éléments de \mathcal{F} . Montrons qu'elle converge vers L : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p_0 tel que $p \geq p_0$ implique $0 < \frac{1}{2^p} \leq \varepsilon$ (ceci parce que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^p} = 0+$). On a donc, puisque $\|X^p - L\| \leq \frac{1}{2^p}$, $\|X^p - L\| \leq \varepsilon$. La suite (X^p) dont tous les termes sont dans \mathcal{F} converge donc vers un vecteur L qui n'est pas dans \mathcal{F} : c'est contradictoire avec l'hypothèse, donc l'hypothèse supplémentaire \mathcal{F} n'est pas fermé est absurde et on a établi que \mathcal{F} est fermé. \square

1.6 Vocabulaire de topologie

Voici quelques notions qu'il est bon de comprendre, mais sur lesquelles nous ne nous attarderons pas.

En première lecture, cette partie peut être sautée : elle peut servir de référence en cas de besoin.

1.6.1 Adhérence

Définition 1.33 Soit \mathcal{P} une partie de \mathbb{R}^n . Un élément L de \mathbb{R}^n est dit *adhérent* de \mathcal{P} lorsqu'il existe une suite d'éléments de \mathcal{P} qui converge vers L .

L'ensemble des points adhérents de \mathcal{P} est appelée *l'adhérence* ou la *fermeture* de \mathcal{P} et se note $\overline{\mathcal{P}}$

Voici quelques propriétés concernant l'adhérence d'une partie dont nous ne donnons pas la démonstration.

Proposition 1.34 • $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}}$

- $\overline{\mathcal{P}}$ est un fermé.
- \mathcal{P} est fermé $\iff \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$
- $\overline{\mathcal{P}}$ est le plus petit fermé de \mathbb{R}^n qui contient \mathcal{P} .
- Si $B = B(X_0, r)$, alors $\overline{B} = \overline{B}(X_0, r)$

1.6.2 Intérieur

Définition 1.35 Soit \mathcal{P} une partie de \mathbb{R}^n . On appelle *intérieur* de \mathcal{P} , et on note $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ l'ensemble des points U de \mathcal{P} pour lesquels il existe une boule ouverte de centre

U qui soit incluse dans \mathcal{P} .

Ici aussi, quelques propriétés sans démonstration.

Proposition 1.36 • $\overset{\circ}{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$

- $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ est un ouvert.
- \mathcal{P} est ouvert $\iff \overset{\circ}{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$
- $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ est le plus grand ouvert de \mathbb{R}^n qui est inclus dans \mathcal{P} .
- Si $B = B(X_0, r)$, alors $\overset{\circ}{B} = B(X_0, r)$

1.6.3 Frontière

Définition 1.37 Soit \mathcal{P} une partie de \mathbb{R}^n . On appelle frontière de \mathcal{P} , on note $\text{Fr}(\mathcal{P})$ l'ensemble des points de \mathbb{R}^n qui sont adhérents de \mathcal{P} sans être à l'intérieur de \mathcal{P} .

$$\text{Fr}(\mathcal{P}) = \overline{\mathcal{P}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{P}}$$

Proposition 1.38 La frontière d'une boule fermée ou ouverte de centre X_0 , de rayon r est formée de l'ensemble des points qui sont exactement à la distance r de X_0 .

Si la norme utilisée est la norme euclidienne, si on est dans \mathbb{R}^2 , cette frontière est le cercle de centre X_0 et de rayon r (si on est dans \mathbb{R}^3 , c'est la sphère).

Ce qu'il suffit de retenir, à notre niveau, c'est que la notion intuitive qu'on peut avoir de la frontière d'un domaine du plan ou de l'espace correspond pour tous les domaines usuels, pas trop compliqués, à la frontière au sens mathématique.

1.6.4 Point d'accumulation

Cette notion est très importante en vue des calculs de limites. En effet, on ne peut calculer une limite de fonction qu'en des points d'accumulation de l'ensemble de définition de cette fonction, comme nous le verrons au chapitre III.

Définition 1.39 Soit \mathcal{P} une partie de \mathbb{R}^n . Un élément U de \mathbb{R}^n est dit *point d'accumulation* de \mathcal{P} lorsqu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{P} \setminus \{U\}$ qui converge vers U .

On peut remarquer que la définition d'un point d'accumulation ressemble beaucoup à celle d'un point adhérent. Un point d'accumulation est d'ailleurs un point adhérent, la réciproque étant fausse. En effet il y a des points adhérents qui ne sont pas point d'accumulation : ce sont les points *isolés*.

Un point isolé Y de \mathcal{P} est un point tel qu'il existe une boule $B(Y, \varepsilon)$ ne contenant pas d'autre point appartenant à \mathcal{P} à part Y . Il y a une seule façon de construire

une suite (U^p) d'éléments de \mathcal{P} convergeant vers Y : c'est de prendre une suite stationnaire, telle que à partir d'un rang p_0 , on a $U^p = Y$. Mais une telle suite n'est pas formée d'éléments de $\mathcal{P} \setminus \{Y\}$.

Un point d'accumulation X est tel que toute boule centrée en X contient d'autres points que X appartenant à \mathcal{P} . Les terminologies « point d'accumulation » et « point isolé » sont assez imagées pour aider à comprendre ces notions.

1.6.5 Compacité

Sans démonstration, une propriété très importante de \mathbb{R}^n

Théorème 1.40 *Les parties fermées bornées de \mathbb{R}^n sont les compacts de \mathbb{R}^n . Cela signifie que si \mathcal{K} est une partie fermée bornée de \mathbb{R}^n , alors de toute suite (U^p) d'éléments de \mathcal{K} , on peut extraire une sous-suite convergente vers $L \in \mathcal{K}$, et réciproquement, si une partie \mathcal{P} a la propriété que de toute suite d'éléments de \mathcal{P} , il est possible d'extraire une sous-suite convergente vers un élément de \mathcal{P} , alors \mathcal{P} est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n .*

1.7 Exercices

Exercice 1.1.

Expliciter la démonstration de la formule

$$|N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y)$$

(voir proposition 1.3 p.4).

Exercice 1.2.

Montrer que N_1 est une norme.

Exercice 1.3.

Montrer que l'équivalence entre normes est une relation d'équivalence dans l'ensemble des normes définies sur un espace vectoriel E .

Exercice 1.4.

Montrer le Théorème 1.9 (p.7), qui affirme que :

Les normes N_1 , N_2 et N_∞ sont équivalentes.

On a pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$N_\infty(X) \leq N_2(X) \leq N_1(X) \leq n N_\infty(X) ;$$

$$N_\infty(X) \leq N_2(X) \leq \sqrt{n} N_\infty(X) ;$$

$$N_2(X) \leq N_1(X) \leq \sqrt{n} N_2(X) ;$$

$$N_\infty(X) \leq N_1(X) \leq n N_\infty(X).$$

Ces constantes ne peuvent être améliorées car pour chacune de ces inégalités, on peut trouver un X pour lequel on a l'égalité.

Exercice 1.5.

- Soit N la norme définie sur \mathbb{R}^3 par

$$N(X) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + |x_3|}.$$

N est-elle une norme ? Si oui montrer qu'elle est équivalente à une des normes usuelles.

- Mêmes questions avec N définie par

$$N(X) = \sqrt{\left(\max(|x_1|, |x_2|)\right)^2 + 2x_3^2}.$$

- Mêmes questions avec N définie par

$$N(X) = |x_1 + 2x_2| + |x_3|.$$

Exercice 1.6.

Montrer la deuxième inégalité triangulaire pour les distances (propriété (d3)' p.8)

Dans un espace métrique E ,

$$(d3)' \quad \forall x, y, z \in E \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Exercice 1.7.

Montrer le résultat sur les boules de la norme somme suggéré par la figure (1.3) de la p.12 (on pourra dans un premier temps se contenter d'établir le résultat dans le cas où $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $r = 1$).

Exercice 1.8.

Pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\widehat{N}(X) = \widehat{N}(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}.$$

- Montrer que \widehat{N} est une norme sur \mathbb{R}^2 .
- Montrer que \widehat{N} et $\|\cdot\|_2$ sont des normes équivalentes.
- Représenter graphiquement la boule fermée $\overline{\widehat{B}}(O, 1)$ de centre $O(0, 0)$, de rayon 1, pour la norme \widehat{N} ;
(on a posé, naturellement, $\overline{\widehat{B}}(O, 1) = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \widehat{N}(X) \leq 1\}$.)
Représenter sur le même dessin les deux boules fermées $\overline{B}_2(0, 1/\alpha)$ et $\overline{B}_2(0, 1/\beta)$.
Commentaires...

Exercice 1.9.

Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de points de \mathbb{R}^n .

Étudier la convergence de la suite réelle $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_p = d_2(Y_0, X^p).$$

Exercice 1.10.

Montrer que $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est un ouvert.

On utilisera successivement deux méthodes :

1. directement ;
2. avec la caractérisation séquentielle des fermés pour le complémentaire de \mathcal{U} (théorème 1.32 p.22).

Exercice 1.11.

1. Montrer que dans \mathbb{R}^2 , l'axe des abscisses (Ox), c'est-à-dire l'ensemble des couples sous la forme $(x, 0)$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .
2. Étendre le résultat au cas d'une droite D quelconque de \mathbb{R}^2 , d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

On utilisera dans chaque cas successivement deux méthodes :

- a) le complémentaire de la droite est un ouvert ;
- b) avec la caractérisation séquentielle des fermés (théorème 1.32 p.22.)

CHAPITRE 2

Fonctions vectorielles. Courbes paramétrées.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons des fonctions d'une seule variable réelle, à valeurs dans \mathbb{R}^n . Nous allons d'abord considérer les différents points de vue, et constater leur équivalence, avant de faire le choix du point de vue le plus facile à concevoir : l'étude des courbes données par une représentation paramétrique, ou courbes paramétrées.

Nous ferons une petite digression topologique pour justifier les notions de continuité, dérivabilité, de ces fonctions.

Puis nous donnerons les méthodes pratiques d'étude des courbes paramétrées essentiellement pour des courbes planes, représentant des fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^2 .

2.2 Différents points de vue

2.2.1 Fonctions vectorielles

Soit \vec{F} une fonction définie sur une partie de \mathbb{R} à valeurs dans un espace vectoriel \vec{E} , de dimension n finie. Pour étudier une telle fonction, on fixe une base de \vec{E} , et on associe ainsi n nombres réels à tout t appartenant à l'ensemble de définition de \vec{F} : ce sont les n coordonnées de $\vec{F}(t)$ dans la base qu'on a choisie. Puisque ces nombres dépendent de t , ce sont des fonctions de t , on les note $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$. Les n fonctions (f_1, f_2, \dots, f_n) ainsi définies sont les *fonctions coordonnées* (ou *fonctions composantes*) de \vec{F} . Il est clair que ces fonctions coordonnées caractérisent \vec{F} car leur donnée permet de connaître \vec{F} .

On ramène donc l'étude d'une fonction vectorielle à l'étude d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n , et à celle de ses fonctions composantes.

2.2.2 Fonctions ponctuelles

On considère un ensemble E , dit « affine », formé de points. E peut être un plan, ou l'espace usuel à trois dimensions.

Soit F une fonction de \mathbb{R} dans \mathbf{E} . Pour étudier F , on commence par choisir un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) si \mathbf{E} est un plan, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si \mathbf{E} est l'espace à trois dimensions. À chaque point de \mathbf{E} correspond de façon biunivoque un couple [ou un triplet] de réels qui sont ses coordonnées.

À chaque réel t de son ensemble de définition, F fait correspondre un point $F(t)$, qui a donc, dans le repère qu'on s'est fixé, des coordonnées $(x(t), y(t))$ [ou $(x(t), y(t), z(t))$] qui se trouvent donc être des fonctions de t . On définit donc les fonctions coordonnées (x, y) [ou (x, y, z)] de F , qui réciproquement caractérisent évidemment F .

On ramène donc l'étude d'une fonction ponctuelle à l'étude d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n = 2$ ou $n = 3$), et à celle de ses fonctions composantes.

2.2.3 Point de vue cinématique

On considère un point mobile du plan [ou de l'espace]. À tout instant t , ce point mobile est à la position $M(t)$. Pour étudier la trajectoire de ce point, on commence par fixer un repère, on définit ainsi les coordonnées $(x(t), y(t))$ [ou $(x(t), y(t), z(t))$] de ce point mobile, et l'étude de ces fonctions coordonnées permet de connaître la position de ce point mobile à tout instant.

On ramène donc l'étude cinématique d'un point mobile à l'étude d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n = 2$ ou $n = 3$), et à celle de ses fonctions composantes.

2.2.4 Fonction complexe

Si z est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qui à tout réel t de son ensemble de définition associe un nombre complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$, elle définit ipso facto deux fonctions réelles x et y , respectivement fonction partie réelle et fonction partie imaginaire de la fonction z . Réciproquement la connaissance des fonctions x et y permettant évidemment de tout savoir de la fonction z , on a donc ramené l'étude d'une fonction complexe à l'étude d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 , et à celle de ses fonctions composantes.

2.2.5 Quel point de vue ?

Les § précédents montrent qu'une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n peut être interprétée de différentes manières. Il faut avoir à l'esprit que toutes ces notions sont *équivalentes*, et qu'on est libre de choisir l'une ou l'autre. Ce que nous privilégierons, c'est le point de vue « ponctuel », avec aussi une compréhension parfois « cinématique ». Néanmoins, le point de vue « vectoriel » réapparaîtra dès que l'on dérivera.

2.3 Limite, continuité, dérivabilité des fonctions vectorielles

2.3.1 Limites

Définition 2.1 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , et (f_1, f_2, \dots, f_n) ses fonctions composantes. Soit α un point où il est possible de calculer des limites ; (α peut être un réel t_0 , $+\infty$ ou $-\infty$, ou même un « réel à gauche » ou un « réel à droite », comme $0+$, t_0+ , t_0- , etc.). On dit que f admet une limite $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ pour t tend vers α , et on note $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = L$ lorsqu'on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \text{on a} \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} f_i(t) = \ell_i.$$

Cette définition par les fonctions composantes est essentielle. On voit que grâce à ce point de vue, les fonctions vectorielles sont aussi simples à étudier que les fonctions réelles vues en analyse I. Nous justifierons dans le chapitre suivant cette définition de façon topologique.

Remarque : Pour des fonctions vectorielles, il n'y a pas de limite infinie (même si on peut considérer des limites à l'infini). Dès qu'une des fonctions composantes n'a pas de limite ou a une limite infinie, on dit que la fonction vectorielle f n'a pas de limite.

Les définitions suivantes sont aussi simples à énoncer et à utiliser.

2.3.2 Continuité

Définition 2.2 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , de composantes (f_1, f_2, \dots, f_n) . Soit t_0 un réel appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}(f)$ de définition de f . Alors f est continue en t_0 si et seulement si ses n fonctions composantes sont continues en t_0 . Cela signifie que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

Soit I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}(f)$. Alors f est continue sur I si et seulement si ses n fonctions composantes sont continues sur I .

f est continue (ou continue sur son ensemble de définition) si et seulement si ses n fonctions composantes sont continues.

Si f est définie sur un intervalle du type $[t_0, \beta[$, alors f est continue à gauche en t_0 si et seulement si ses n fonctions composantes sont continues à gauche en t_0 .

Si f est définie sur un intervalle du type $]γ, t_0]$, alors f est continue à droite en t_0 si et seulement si ses n fonctions composantes sont continues à droite en t_0 .

Prolongement par continuité

Proposition 2.3 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , de composantes (f_1, f_2, \dots, f_n) . On suppose que f est définie sur $]\gamma, t_0[\cup]t_0, \beta[$ [respectivement sur $]\gamma, t_0[,]t_0, \beta[$]. On suppose que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = L$ [resp. $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = L$, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$]. Alors la fonction \hat{f} définie sur $]\gamma, \beta[$ [resp. sur $]\gamma, t_0]$, sur $[t_0, \beta[$] par $\hat{f}(t) = f(t)$ pour $t \neq t_0$ et par $\hat{f}(t_0) = L$ est continue [resp. continue à gauche, continue à droite] en t_0 .

Définition 2.4 La fonction \hat{f} de la proposition 2.3 est appelée le prolongement par continuité [resp. par continuité à droite, par continuité à gauche] en t_0 de la fonction f . Lorsque les hypothèses de cette proposition 2.3 sont satisfaites, on dit que f est prolongeable par continuité [resp. par continuité à gauche, par continuité à droite] en t_0 .

La démonstration de cette propriété est évidente, en passant par les fonctions composantes et en revoyant la notion de prolongement par continuité d'une fonction réelle.

2.3.3 Dérivabilité

On commence par définir la dérivabilité un peu comme pour les fonctions réelles d'une variable.

Définition 2.5 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , de composantes (f_1, f_2, \dots, f_n) . On suppose que f est définie au voisinage de t_0 (c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant t_0). On dit que f est dérivable en t_0 lorsque la fonction vectorielle :

$$h \mapsto \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0)) \text{ admet une limite } L \text{ pour } h \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, le vecteur dérivé de f en t_0 est : $f'(t_0) = L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(t_0 + h) - f(t_0))$

On définit bien entendu (par analogie avec la continuité) la notion de dérivabilité sur un intervalle ou de dérivabilité « tout court », c'est-à-dire sur $\mathcal{D}(f)$.

La *fonction dérivée* d'une fonction dérivable f est la fonction vectorielle f' , de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , qui associe à tout t le vecteur dérivé $f'(t)$.

Voici maintenant une proposition permettant de se ramener aux fonctions composantes.

Proposition 2.6 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , de composantes (f_1, f_2, \dots, f_n) . On suppose que f est définie au voisinage de t_0 (c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant t_0). Alors f est dérivable en t_0 si et seulement si ses n fonctions composantes f_1, f_2, \dots, f_n sont toutes dérivables en t_0 , et dans ce cas on a :

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0)).$$

La démonstration ne présente aucune difficulté :

Preuve Si f est dérivable en t_0 , alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0))$ existe, ce qui signifie que les n fonctions composantes de la fonction :

$g : h \mapsto g(h) = \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0))$ admettent une limite pour $h \rightarrow 0$, d'après la définition 2.1 p. 31. Mais les composantes de $g(h)$ sont $(g_1(h), g_2(h), \dots, g_n(h))$ avec, clairement, pour tout i , $g_i(h) = \frac{f_i(t_0 + h) - f_i(t_0)}{h}$.

Or, ce quotient admet une limite pour $h \rightarrow 0$ si et seulement si f_i est dérivable en t_0 et cette limite vaut alors $\ell_i = f'_i(t_0)$. Ce qui achève la démonstration dans le sens direct.

Réciprocurement, en gardant les mêmes notations, si toutes les fonctions composantes f_i sont dériviales en t_0 , c'est que pour chaque i , ce qu'on a appelé $g_i(h)$ admet pour limite $f'_i(t_0)$ pour $h \rightarrow 0$, donc $g(h)$ admet $(f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0))$ comme limite pour $h \rightarrow 0$. Mais cela signifie justement que f est dérivable en t_0 , et que

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_n(t_0)).$$

□

Remarque : Comme pour les fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , il est possible de définir la dérivabilité à partir de la limite pour $t \rightarrow t_0$ du quotient $\frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0))$: absolument rien ne serait changé et on montre sans peine, en passant par les fonctions composantes que ces deux notions sont les mêmes.

Dérivées successives

Définition 2.7 Une fonction f de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , de composantes (f_1, f_2, \dots, f_n) est deux fois, k fois, indéfiniment dérivable si ses fonctions composantes le sont aussi. Dans ce cas,

le vecteur dérivée seconde en t_0 est $f''(t) = (f''_1(t_0), f''_2(t_0), \dots, f''_n(t_0))$;

le vecteur dérivée k -ième en t_0 est $f^{(k)}(t) = (f_1^{(k)}(t_0), f_2^{(k)}(t_0), \dots, f_n^{(k)}(t_0))$;

la fonction dérivée seconde est la fonction vectorielle de t : $f'' = (f''_1, f''_2, \dots, f''_n)$;

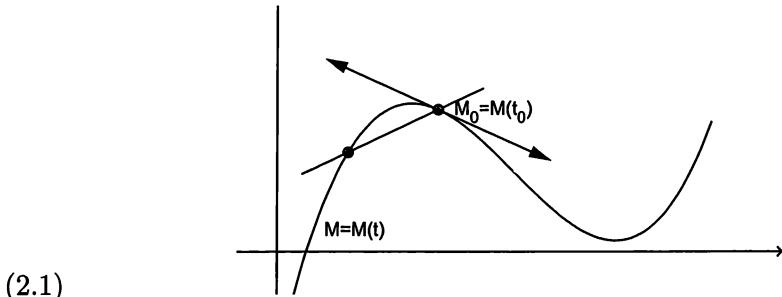
la fonction dérivée k -ième est la fonction vectorielle de t : $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$.

2.3.4 Interprétation géométrique et cinématique de la dérivée

On se place dans un cadre de fonction ponctuelle, ou dans un cadre cinématique, en posant $f(t) = M(t)$. L'espace (de dimension n , avec $n = 2$ ou $n = 3$) est rapporté à un repère. Les coordonnées de $f(t) = M(t)$ sont $(x(t), y(t))$ [ou $(x(t), y(t), z(t))$]. Dans ces deux cadres, il est d'usage de considérer que toutes les fonctions dérivées sont des fonctions vectorielles : même si $M(t)$ est un point, $M'(t)$ sera toujours un vecteur, le plus souvent noté $\overrightarrow{M'}(t)$.

Proposition 2.8 Soit $f(t) = M(t)$ une fonction ponctuelle. On suppose que f est dérivable en t_0 et que $f'(t_0) \neq 0$. Alors la courbe décrite par $f(t)$ admet en son point $M(t_0)$ une tangente dirigée par $f'(t_0)$.

Il n'est pas possible de donner une « vraie » démonstration de cette proposition, mais nous allons en donner une explication graphique.



Dans la situation de la figure ci-dessus, on conçoit sans peine que la tangente à la courbe paramétrée par f soit la position limite de la droite-sécante $\overrightarrow{(M(t_0)M(t))}$, pour $t \rightarrow t_0$. Or, cette droite $(M(t_0)M(t))$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = f(t) - f(t_0)$ (il suffit de passer aux coordonnées pour être convaincu de l'égalité de ces deux vecteurs). Tant que $t \neq t_0$, $\frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0))$ est aussi un vecteur directeur de cette sécante, et pour $t \rightarrow t_0$, il est clair que ce vecteur directeur a pour limite $f'(t_0)$. Puisque par hypothèse, ce vecteur est non nul, il dirige une droite que nous admettrons être la tangente à la courbe en t_0 .

2.3.5 Complément cinématique

Dans ce §, $M(t)$ est un point mobile, M étant une fonction au moins deux fois dérivable. Le repère auquel on se rapporte est orthonormé et on utilisera la norme euclidienne.

Définition 2.9 Dans un contexte cinématique, l'ensemble des points A du plan [ou de l'espace] pour lesquels il existe un instant t tel que $A = M(t)$ s'appelle la trajectoire du point mobile $M(t)$.

Le vecteur dérivé $\overrightarrow{M'}(t) = \overrightarrow{V}(t)$ s'appelle le vecteur vitesse à l'instant t du point mobile (ou vitesse instantanée).

On note souvent $(\dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ [ou $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$] ses coordonnées (au lieu de (x', y') [ou (x', y', z')]).

Le vecteur dérivée seconde $\overrightarrow{M''}(t) = \overrightarrow{A}(t)$ s'appelle le vecteur accélération à l'instant t du point mobile (ou accélération instantanée). On note souvent $(\ddot{x}, \ddot{y}) =$

$(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ [ou $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$] ses coordonnées. (au lieu de (x'', y'') [ou (x'', y'', z'')])

La norme du vecteur vitesse $V = \|\vec{V}\|$ est la vitesse absolue du point mobile. C'est une fonction scalaire du temps (c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R}).

Le mouvement du point mobile $M(t)$ est dit accéléré lorsque V est une fonction croissante ; il est dit retardé lorsque V est une fonction décroissante.

Le point mobile est stationnaire, ou « à l'arrêt » lorsque $V = 0 \iff \vec{V} = \mathbf{0}$.

Proposition 2.10 Le mouvement du point mobile est accéléré sur un intervalle de temps I si et seulement si¹ $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$. Il est retardé si et seulement si $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t) \leq 0$.

Preuve Il suffit d'exprimer en fonction de t et des fonctions coordonnées de $M(t)$ la dérivée de la fonction vitesse absolue. On a $V(t) = \|\vec{V}(t)\|$, donc

$$V(t) = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}, \text{ et } V'(t) = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t)}{\|\vec{V}(t)\|}.$$

$V'(t)$ est donc du signe de $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t)$, d'où le résultat. \square

Une interprétation géométrique intéressante peut être donnée à ce résultat. Si la résultante de toutes les forces qui est proportionnelle à $\vec{A}(t)$ tire dans le sens de la marche, on comprend bien que le mouvement est accéléré ; si elle tire vers l'arrière, il est logique que le mouvement soit retardé.

En effet, le sens de la marche est donné par $\vec{V}(t)$. Dire que $\vec{A}(t)$ tire dans le sens de la marche, cela signifie que l'angle que fait $\vec{A}(t)$ avec $\vec{V}(t)$ est aigu, donc que $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t) > 0$ (se rappeler que $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t) = \|\vec{V}(t)\| \|\vec{A}(t)\| \cos(\vec{V}(t), \vec{A}(t))$ et qu'un angle aigu est caractérisé par le fait que son cosinus est positif).

De même, si ce produit scalaire est négatif, c'est que l'angle de ces deux vecteurs est obtus et que $\vec{A}(t)$ tire à contre-sens de la marche.

2.4 Étude des courbes paramétrées du plan

2.4.1 Introduction

Dans tout ce §, f désigne une fonction au moins deux fois dérivable à valeurs dans \mathbb{R}^2 , et nous adopterons systématiquement un point de vue « fonction ponctuelle » :

¹ Le point entre $V(t)$ et $A(t)$ dans $\vec{V}(t) \cdot \vec{A}(t)$ désigne le *produit scalaire*. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de composantes (α, β) [resp. (α, β, γ)] et (α', β') [resp. $(\alpha', \beta', \gamma')$] dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) [resp. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$], alors on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$.

à tout $t \in \mathcal{D}(f)$ correspondra un point $M(t)$ de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'axe des abscisses sera classiquement horizontal, et orienté vers la droite, l'axe des ordonnées étant orienté vers le haut. Ces conventions sont importantes pour donner un sens à des expressions comme « à droite », « monter », « vertical »...

Lorsque ce sera utile pour la compréhension, nous mélangerons ce point de vue avec un point de vue cinématique, ce qui ne pose aucun problème.

Rappelons que l'interprétation de la fonction dérivée f' est toujours vectorielle : on mettra une flèche sur la dérivée de M en l'écrivant $\overrightarrow{M'}(t) = f'(t)$.

Définition 2.11 On appelle courbe paramétrée du plan un ensemble Γ de points du plan, tels qu'il existe une fonction f , de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^2 telle que

$\forall t \in \mathcal{D}(f)$, on a $f(t) \in \Gamma$ et $\forall M \in \Gamma, \exists t \in \mathcal{D}(f)$ tel que $f(t) = M$.

En d'autres termes, on a $\Gamma = f(\mathbb{R})$.

La fonction f s'appelle une paramétrisation de Γ . On la définit en général par ses fonctions coordonnées $(x(t), y(t))$ en précisant le domaine dans lequel t peut varier.

Exemple 1 : Une droite du plan peut toujours être considérée comme une courbe paramétrée, puisqu'une paramétrisation de la droite D , passant par A , dirigée par le vecteur $\vec{v}(\alpha, \beta)$ est

$$\begin{cases} x(t) = x_A + \alpha t \\ y(t) = y_A + \beta t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Il y a bien sûr bien d'autres paramétrisations d'une droite, il suffit de changer de point A et/ou de changer de vecteur directeur (sans compter toutes les paramétrisations où d'un point de vue cinématique, la droite ne serait pas parcourue à vitesse constante).

Si on restreint le domaine des paramètres, on n'a en général plus qu'une partie de la courbe paramétrée.

Exemple 2 : Un cercle, de centre Ω , de rayon r , peut être paramétré de multiples façons. La plus classique, qu'il faut absolument connaître est la suivante :

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + r \cos t \\ y(t) = y_\Omega + r \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Avec cette paramétrisation, d'un point de vue cinématique, le cercle est parcouru une infinité de fois, dans le sens trigonométrique ; le point correspondant au paramètre $t = 0$ est le point le plus à l' \ll est \gg (au sens géographique), c'est-à-dire le point de coordonnées $(x_\Omega + r, y_\Omega)$.

Si on restreint le domaine des paramètres à un intervalle de longueur 2π (par exemple $[0, 2\pi]$), la totalité du cercle sera encore décrite, mais si on prend un intervalle plus petit, seule une partie du cercle sera décrite. Par exemple, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, seul le quart de cercle en haut à droite est décrit.

Sauf indication contraire, le domaine des paramètres est toujours la plus grande partie de \mathbb{R} possible.

Remarque : La notion de courbe paramétrée correspond exactement à la notion de trajectoire dans un point de vue cinématique.

Contrairement aux deux exemples ci-dessus, une courbe paramétrée est presque toujours définie à partir de ses fonctions coordonnées.

En général on dit : étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) = \dots \\ y(t) = \dots \end{cases} \quad \text{ou simplement} \quad \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

avec à la place des points de suspension deux expressions mathématiques où t intervient.

Il y a là un léger abus de langage, car en fait, ce qui est donné est une paramétrisation de la courbe paramétrée. Il n'est d'ailleurs pas interdit et il est utile dans certains cas de faire un changement de paramètres, par exemple en posant $t = \varphi(s)$. On obtient alors une nouvelle paramétrisation de cette courbe paramétrée, $g = f \circ \varphi$.

Le but de ce § 2.4 est de donner un plan d'étude permettant de traiter les différentes courbes paramétrées rencontrées, et d'en faire une représentation graphique soignée.

Il est à noter que la plupart des calculatrices scientifiques récentes possèdent une fonction graphique permettant de représenter directement sur leur petit écran une courbe paramétrée. De nombreux outils graphiques sur ordinateur permettent aussi de construire des courbes paramétrées. Il est tout à fait conseillé d'utiliser soit une calculatrice, soit un ordinateur avec un logiciel adéquat. Une utilisation pertinente d'un tel outil permet de vérifier les résultats trouvés par les calculs, et de détecter des erreurs.

2.4.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Pour étudier une courbe paramétrée, on suivra à peu près le même plan que pour l'étude d'une courbe de fonction $y = f(x)$.

Chacun de ces points sera précisé plus loin.

- **Détermination de l'ensemble de définition $\mathcal{D}(f)$**
- **Réduction éventuelle de l'ensemble d'étude**
(en utilisant symétries et périodicité)

- **Étude des variations des fonctions coordonnées** et résumé de ces variations dans un tableau des variations conjointes.
- **Étude des limites et détermination des branches infinies**
- **Étude complémentaire des éventuels points particuliers** points stationnaires, points multiples, points limites, points d'inflexion...
- **Tracé de la courbe** Cette étape doit être une synthèse de toutes les étapes précédentes.

2.4.3 Ensemble de définition

Il s'agit de l'ensemble de définition de la fonction vectorielle f , dont les fonctions coordonnées sont (x, y) .

Il est important de comprendre que $x(t)$ ne peut pas exister si $y(t)$ n'existe pas. En effet, ces fonctions x et y n'ont de sens qu'en tant que fonctions coordonnées d'une fonction vectorielle.

Par exemple, si $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t^2 - 1} \end{cases}$, il ne faut pas croire que $\mathcal{D}(x) = \mathbb{R}^*$ ou que $\mathcal{D}(y) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

On a $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(x) = \mathcal{D}(y) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. En effet, pour $t = 0$, $x(0)$ n'a pas de sens, donc $f(0)$ n'existe pas, et $y(0)$, n'existe pas non plus, puisque c'est la deuxième coordonnée d'un vecteur qui n'existe pas. D'un point de vue cinématique, à l'instant $t = 0$, il n'y a pas de point $M(0)$, donc ni abscisse, ni ordonnée. Cette remarque est surtout importante pour remplir correctement un tableau de variations conjointes : il faut *prolonger les doubles barres*.

2.4.4 Réduction du domaine d'étude

Périodicité

Si f est une fonction T -périodique, (il est clair que cela arrive quand x et y sont elles-mêmes toutes deux T -périodiques), on restreint évidemment le domaine d'étude déjà à un intervalle de largeur T .

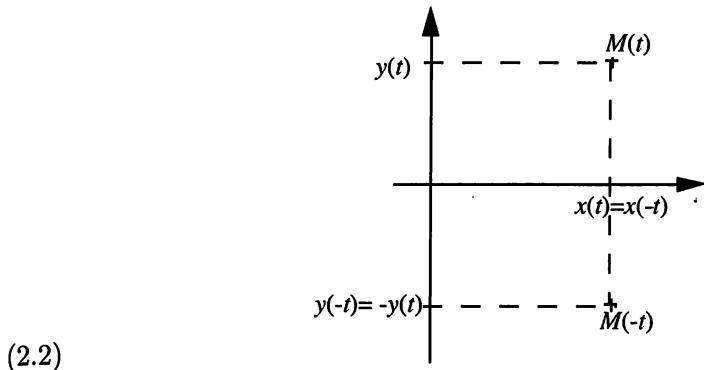
C'est classiquement lorsqu'apparaissent des fonctions trigonométriques dans les expressions caractérisant x est y que cette situation arrive le plus souvent.

Parité

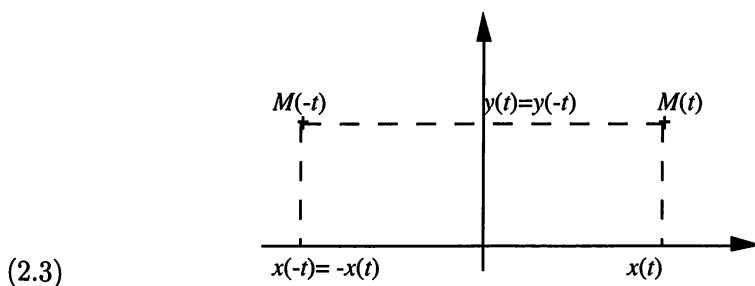
Si x et y ont toutes deux une parité, on peut toujours restreindre le domaine d'étude à $[0, +\infty[$, et compléter ensuite la courbe en utilisant une symétrie. Quelle symétrie ?

Plutôt que d'essayer de retenir par cœur les quatre situations possibles, il est pertinent de s'habituer à retrouver la symétrie grâce à un petit dessin.

Si x est paire et y est impaire, puisque $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ pour tout t , on constate sur la figure (2.2) que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. C'est cette symétrie que l'on utilisera pour compléter la figure.

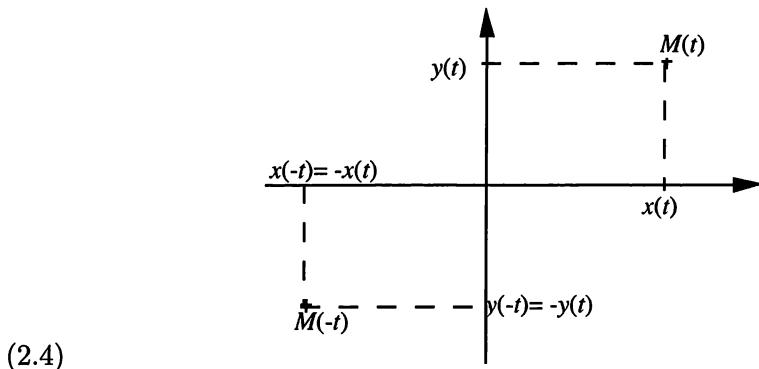


Si x est impaire et y est paire, puisque $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ pour tout t , on constate sur la figure (2.3) que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. C'est cette symétrie que l'on utilisera pour compléter la figure.

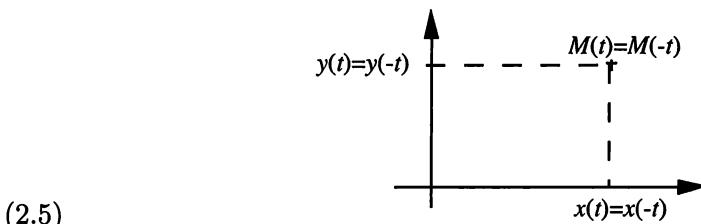


Si x est impaire et y est impaire, puisque $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ pour tout t , on constate sur la figure (2.4) que $M(t)$ et $M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère. C'est cette symétrie que l'on utilisera pour

compléter la figure.



Si x est paire et y est paire, puisque $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ pour tout t , on constate sur la figure (2.5) que $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus. Dans cette situation, on n'utilise pas de symétrie, car on a déjà la totalité de la courbe pour $t \in [0, +\infty[$.



Autres cas de symétrie

En général, il est très difficile de les détecter *a priori*, et d'en profiter pour restreindre le domaine d'étude.

Pour certaines fonctions trigonométriques, il peut être pertinent de comparer à $M(t)$ les points $M(t + \pi)$, $M(\pi - t)$, $M(\frac{\pi}{2} - t)$...

Dans un cas où on soupçonne une symétrie après avoir tracé la courbe, on doit essayer de la démontrer, en comparant $M(t)$ à $M(\varphi(t))$, φ étant une fonction réelle bien choisie.

Autre possibilité

Dans l'exemple classique de la cycloïde, que l'on détaillera dans l'exercice 2.1 p. 60 et dans son corrigé p. 304

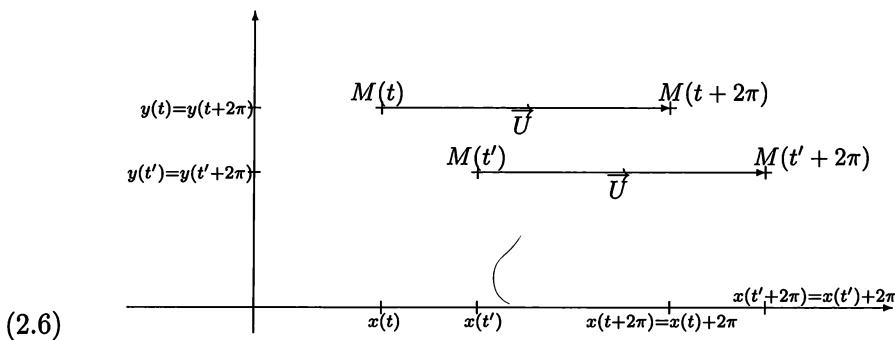
$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

y est bien une fonction 2π -périodique, mais pas x . Cependant, x contient dans son expression une fonction trigonométrique, et on n'aimerait pas être obligé de travailler sur \mathbb{R} tout entier.

La solution vient de l'étude des positions respectives des points $M(t)$ et $M(t+2\pi)$. Puisque y est 2π -périodique, ces points ont même ordonnée.

Mais $x(t+2\pi) = t + 2\pi - \sin(t+2\pi) = t - \sin t + 2\pi = x(t) + 2\pi$

$M(t+2\pi)$ est donc situé « à droite » de $M(t)$, à 2π de ce point (voir figure 2.6). Géométriquement, le point $M(t+2\pi)$ se déduit de $M(t)$ par une **translation** de vecteur $\vec{U}(2\pi, 0)$. De même,



Donc on pourra restreindre le domaine d'étude à un intervalle de largeur 2π , puis ensuite compléter par des translations de vecteur \vec{U} et $-\vec{U}$.

Remarquons que puisque x est impaire et y paire, on a aussi une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. On a donc intérêt à faire l'étude sur $[0, \pi]$, puis à compléter par symétrie, puis à compléter par translations.

2.4.5 Étude des variations

On étudie les variations des fonctions réelles x et y comme on sait le faire, grâce au signe de leurs dérivées. On résume ces variations dans un seul tableau, avec 5 lignes :

- la ligne t , dans laquelle sont portées les bornes du domaine d'étude (ainsi que les éventuels « trous » de l'ensemble de définition) et les valeurs qui annulent au moins une des deux dérivées x' ou y' ;
- la ligne $x'(t)$, dans laquelle est porté le signe de cette fonction dérivée, ainsi bien sûr que les zéros en dessous des valeurs de t pour lesquelles $x'(t)$ s'annule. On n'oublie pas les doubles barres pour les « trous » de $D(f)$;
- la ligne $x(t)$: elle est remplie en suivant les indications de la ligne $x'(t)$. Flèche qui monte sous les $+$, flèche qui descend sous les $-$, et valeurs de $x(t)$ ou de sa limite aux deux extrémités de chaque flèche et sous chaque valeur particulière de t apparaissant dans la première ligne (y compris pour les valeurs annulant $y'(t)$)

et pas $x'(t)$). Les limites sont en général déterminées lors de l'étape suivante, et devront être reportées dans ce tableau. On n'oublie pas les doubles barres pour les « trous » de $\mathcal{D}(f)$;

- juste en dessous, la ligne $y(t)$. Elle se remplit en suivant les mêmes principes que la ligne précédente, mais en utilisant le signe de $y'(t)$, qui apparaît dans la dernière ligne ;
- la ligne $y'(t)$, remplie comme la ligne $x'(t)$.

Prenons pour illustrer cette démarche l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t - 1}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t - 1}. \end{cases}$$

L'ensemble de définition de cette fonction est clairement

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Dans la ligne t devront apparaître les valeurs -1 et 1 , et sous ces valeurs il faut mettre des doubles barres à la fois dans les lignes concernant x ($x(t)$ et $x'(t)$) mais aussi dans les lignes concernant y .

Il n'y a pas de symétrie apparente, car ni x , ni y n'est paire ou impaire, donc le domaine d'étude sera \mathbb{R} sans restriction.

On calcule les fonctions dérivées :

$$x'(t) = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(t^2 - 1)^2}.$$

Il est clair que $x'(t) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, car le trinôme apparaissant au numérateur a un discriminant négatif et est donc toujours du signe du coefficient de x^2 .

$$y'(t) = \frac{t(t - 2)}{(t - 1)^2}$$

$y'(t)$ est du signe du numérateur $t(t - 2)$, donc $y'(t)$ est positif à l'extérieur des racines 0 et 2 .

Il faut donc aussi faire apparaître, dans la ligne t , les valeurs 0 et 2 .

On peut maintenant dresser le tableau de variation :

t	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$x'(t)$	—	—	—	—	—	—
$x(t)$	0	$+\infty$	1	$+\infty$	1	0
$y(t)$	$-\infty$	0	$-1/2$	$+\infty$	4	$+\infty$
$y'(t)$	+	+	0	—	0	+

(2.7)

C'est à la lumière de ce tableau qu'on sait quelles limites on doit calculer, et quelles études de branches infinies on doit faire.

Dans cet exemple, pour compléter ce tableau, on doit calculer les limites suivantes (qui ne présentent aucune difficulté) :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) & \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t < -1}} x(t) & \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} x(t) & \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t < -1}} y(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} y(t) [= « y(-1) »] \\ \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} x(t) & \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} x(t) & \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} y(t) & \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} y(t) & \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) & \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \end{aligned}$$

Remarque : Lors d'une étude pratique, pour des devoirs ou le jour de l'examen, ne perdez surtout pas de temps à expliciter des calculs et des résultats de limites évidents : dites que c'est évident, et reportez simplement ces résultats évidents dans le tableau de variation, et gardez du temps et de l'énergie pour les véritables problèmes intéressants.

Notons les guillemets autour de $y(-1)$, car ce nombre n'existe théoriquement pas, mais c'est bien comme ça qu'on calcule cette limite.

On a besoin aussi des valeurs $x(0)$; $y(0)$; $x(2)$; $y(2)$.

2.4.6 Étude des branches infinies

Il y a branche infinie lorsque pour une valeur α , borne de l'ensemble de définition de f , on a x qui tend vers l'infini ou y qui tend vers l'infini.

Ces branches infinies sont très faciles à repérer une fois qu'on a dressé le tableau de variation et calculé les limites.

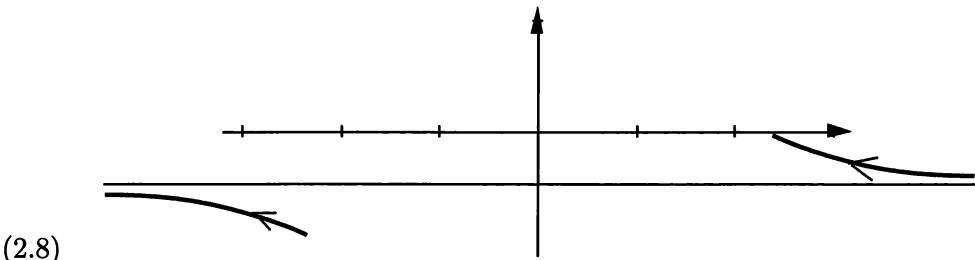
Nous suivrons l'exemple ci-dessus, en gardant un œil sur le tableau de variation de la figure (2.7) p. 43, mais la technique exposée est universelle. Les bornes de $\mathcal{D}(f)$ apparaissent grâce aux doubles barres (sans oublier les deux infinis). Sous ces bornes, dès qu'il y a un ou deux symboles ∞ , on est en présence d'une branche infinie.

Celles-ci sont de plusieurs types. Les plus faciles à traiter sont les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées, horizontales ou verticales : on les détecte lorsqu'une seule des deux coordonnées tend vers l'infini, l'autre ayant une limite finie. Lorsque x et y tendent simultanément vers l'infini, on est en présence d'une vraie étude de branche infinie, et on essaiera de détecter d'éventuelles asymptotes obliques (et de placer la courbe par rapport à ces asymptotes), ou d'éventuelles branches paraboliques ou autres directions asymptotiques...

Dans l'exemple, le tableau de la figure (2.7) p. 43 présente deux (ou 4 : tout dépend comment l'on compte) branches infinies faciles : pour $t \rightarrow -1$ et pour $t \rightarrow \infty$; et une (ou 2) branche infinie plus compliquée car x et y tendent simultanément vers l'infini : pour $t \rightarrow 1$.

Pour $t \rightarrow -1$.

Puisque x tend vers l'infini alors que $y \rightarrow -\frac{1}{2}$, alors la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ (qui est comme chacun sait horizontale !) est asymptote à la courbe et on a l'aspect suivant :



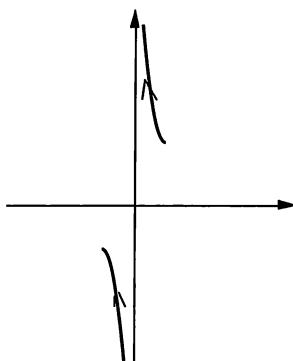
Nous avons matérialisé le « sens de parcours » correspondant à une interprétation cinématique.

Lorsque t se rapproche de -1 par valeurs inférieures, ($t \rightarrow -1^-$), x tendant vers $-\infty$, la courbe « s'éloigne » vers la gauche de la figure ; mais puisque y est croissante au voisinage de -1 , $y(t)$ est encore inférieur à $-\frac{1}{2}$, et la branche de la courbe est à cet endroit en dessous de l'asymptote.

Au contraire, lorsque t se rapproche de -1 par valeurs supérieures, ($t \rightarrow -1^+$), (en considérant une interprétation « temporelle » de t , on peut dire qu'on se place « juste après » l'instant $t = -1$) on a x qui tend vers $+\infty$, et $y(t)$ qui est un peu plus grand que $-\frac{1}{2}$, donc une branche de la courbe tout à droite de la figure, et au dessus de l'asymptote.

Pour $t \rightarrow \infty$.

Puisque x tend vers 0 alors que $y \rightarrow \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = 0$ (qui est représentée verticale) est asymptote à la courbe et on a l'aspect suivant :



(2.9)

Nous avons aussi matérialisé le « sens de parcours » correspondant à une interprétation cinématique.

Précisément, pour $t \rightarrow -\infty$, y tend vers $-\infty$, donc la branche correspondante de la courbe est tout en bas de la figure. D'autre part, x décroît à partir de 0, donc $x(t)$ est inférieur à 0 et la courbe est à gauche de l'asymptote.

Au contraire, pour $t \rightarrow +\infty$, y tend vers $+\infty$, donc la branche de la courbe est tout en haut de la figure, et puisque x se rapproche de 0 par valeurs supérieures (en décroissant), la courbe est à droite de l'asymptote.

Pour $t \rightarrow 1$.

Les variations et les limites permettent juste, sans étude complémentaire de préciser dans quelle zone de la figure se trouve la courbe pour $t \rightarrow 1^+$ et pour $t \rightarrow 1^-$: Le point mobile $M(t)$ s'éloigne à l'infini en bas à gauche pour $t \rightarrow 1^-$, puisque c'est vers $-\infty$ que tendent tous les deux x et y . Au contraire, il « revient » de l'infini depuis en haut à droite pour $t \rightarrow 1^+$, puisque x et y tendent vers $+\infty$. Mais ces renseignements sont bien vagues, et pour les préciser, on procède comme pour l'étude des branches infinies des courbes de fonction. Tout d'abord, un peu de théorie :

Soit α une borne de $\mathcal{D}(f)$ telle que $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = \pm\infty$.

Pour déterminer au voisinage de $t = \alpha$, l'aspect de la branche infinie de la courbe paramétrée de f , on procède ainsi.

- On étudie $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)}$.
- Si cette limite n'existe pas, on ne peut rien dire de la branche infinie (cas très rare et absent des exemples étudiés).
- Si cette limite est infinie ou nulle, on peut conclure que la courbe admet au voisinage de $t = \alpha$, une branche parabolique, de direction asymptotique verticale

- si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, de direction asymptotique horizontale si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.
- Si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0$, on peut déjà affirmer que la courbe admet pour $t \rightarrow \alpha$, une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = ax$ (ou dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$). Attention ! Cela ne signifie nullement que la droite $y = ax$ est asymptote ; seulement que la courbe et la droite, vues depuis l'origine du repère, s'éloignent dans la même direction. Elles peuvent en fait se rapprocher l'une de l'autre, s'éloigner, rester à distance constante : pour l'instant on n'en sait rien !

On étudie alors $\lim_{t \rightarrow \alpha} (y(t) - ax(t))$

- Si cette limite n'existe pas, on n'a pas de renseignement supplémentaire.
- Si cette limite est infinie, on peut affirmer que la courbe de f admet au voisinage de $t = \alpha$ une branche parabolique dont la direction asymptotique est celle de la droite $y = ax$. La branche parabolique est au dessus ou au dessous de cette droite selon le signe de cette limite infinie.
- Si $\lim_{t \rightarrow \alpha} (y(t) - ax(t)) = b \in \mathbb{R}$, alors on peut affirmer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe, au voisinage de $t = \alpha$.

Il est alors d'usage de déterminer la position relative de la courbe avec son asymptote. Pour cela, on étudie le signe de la quantité $\Delta(t) = y(t) - (ax(t) + b)$. La courbe est au dessus de l'asymptote là où $\Delta(t)$ est positif, en dessous lorsque $\Delta(t) < 0$.

On peut souvent se contenter d'une étude locale : on n'étudie alors le signe de $\Delta(t)$ qu'au voisinage de $t = \alpha$.

Revenons à l'exemple :

$$x(t) = \frac{2t-1}{t^2-1} \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1} \quad \text{donc} \quad \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2(t+1)}{2t-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \frac{1^2(1+1)}{2 \times 1 - 1} = 2.$$

On a $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = 2$: on peut donc affirmer que la branche infinie de la courbe, au voisinage de $t = 1$ admet la direction de la droite $y = 2x$ comme direction asymptotique. On étudie $\lim_{t \rightarrow 1} (y(t) - 2x(t))$.

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2}{t-1} - 2 \frac{2t-1}{t^2-1} = \frac{t^2(t+1) - 2(2t-1)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t^3 + t^2 - 4t + 2}{(t-1)(t+1)}.$$

1 est racine évidente du numérateur de cette dernière fraction : on factorise donc $(t-1)$, et on obtient

$$y(t) - 2x(t) = \frac{(t-1)(t^2 + 2t - 2)}{(t-1)(t+1)} = \frac{t^2 + 2t - 2}{t+1} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \frac{1^2 + 2 \times 1 - 2}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

La droite $y = 2x + \frac{1}{2}$ est donc asymptote oblique à la courbe. On étudie maintenant la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Pour cela, on étudie le signe de $\Delta(t) = y(t) - \left(2x(t) + \frac{1}{2}\right)$:

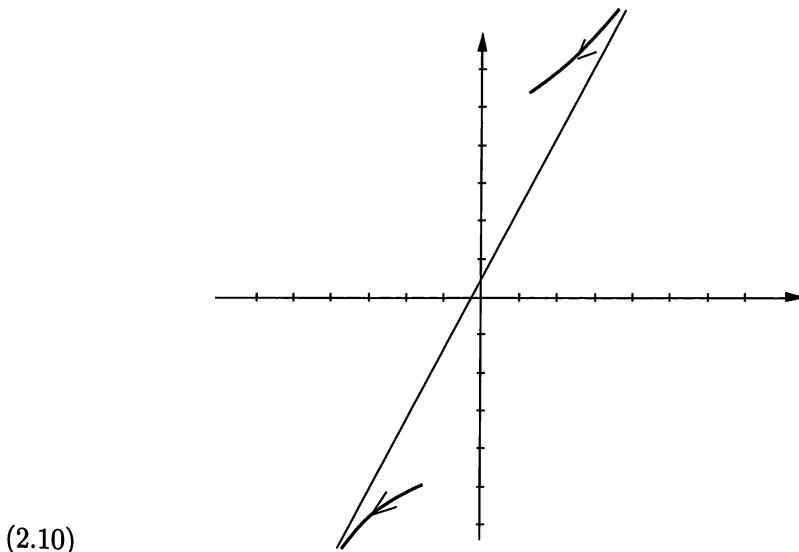
$$\Delta(t) = y(t) - 2x(t) - \frac{1}{2} = \frac{t^2 + 2t - 2}{t+1} - \frac{1}{2} = \frac{2t^2 + 4t - 4 - (t+1)}{2(t+1)} = \frac{2t^2 + 3t - 5}{2(t+1)}.$$

1 est à nouveau racine du numérateur de cette fraction, on obtient

$$\Delta(t) = (t-1) \frac{2t+5}{2(t+1)}$$

Au voisinage de $t = 1$, on a $\frac{2t+5}{2(t+1)} > 0$, donc $\Delta(t)$ est du signe de $(t-1)$, et pour $t \rightarrow 1^-$, la courbe est au dessous de l'asymptote (et en bas à gauche du dessin, ne l'oublions pas, car x et y tendant vers $-\infty$ sont négatifs), et pour $t \rightarrow 1^+$, la courbe est au dessus (et en haut à droite du dessin, puisque x et y tendent vers $+\infty$, donc sont positifs).

On obtient donc l'aspect schématique suivant de la courbe au voisinage de $t = 1$:



2.4.7 Étude des points particuliers

Les points particuliers que l'on peut étudier sont les points stationnaires, les points multiples, les points limites, les points d'inflexion, et les points d'intersection avec les droites particulières de la figure, les axes de coordonnées, les asymptotes...

Points stationnaires

C'est l'étude la plus importante et la plus difficile : c'est l'objet du § suivant 2.5 (p. 54).

On détecte un point stationnaire, ou point d'arrêt, ou point singulier, au vu du tableau de variation, lorsqu'il y a une valeur de t sous laquelle on trouve deux 0, l'un dans la ligne x' et l'autre dans la ligne y' . Dans l'exemple que nous sommes en train d'étudier, comme x' ne s'annule pas, il n'y a aucune chance de trouver un point stationnaire.

Points multiples

Un point multiple d'une courbe paramétrée est un point A de la courbe pour lequel il existe plus qu'une valeur t pour laquelle $A = M(t)$. En général, en pratique, ce sont des points doubles, c'est-à-dire qu'il existe deux valeurs distinctes $t_1 \neq t_2$ telles que $M(t_1) = M(t_2)$.

Pour détecter un tel point, on cherche à résoudre le système $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$ avec la condition $t_1 \neq t_2$.

Cette condition est essentielle, car elle permet de simplifier les équations obtenues par le facteur $(t_1 - t_2)$, qui peut la plupart du temps être factorisé lorsqu'on a passé tous les termes des équations du même côté.

En pratique, il est déconseillé et inutile de se lancer systématiquement dans l'étude des points multiples : on ne fera cette étude que si l'énoncé le demande explicitement, ou si on s'aperçoit, après avoir tracé la courbe, que celle-ci se « recoupe », et donc qu'il y a un point double.

Dans la courbe que nous sommes en train d'étudier, cherchons s'il y a un ou plusieurs points doubles ou multiples.

On résout le système :

$$\begin{cases} x(t) = x(t') \\ y(t) = y(t') \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2t-1}{t^2-1} = \frac{2t'-1}{t'^2-1} \\ \frac{t^2}{t-1} = \frac{t'^2}{t'-1}. \end{cases}$$

Nous avons remplacé (t_1, t_2) par (t, t') , ce qui ne change rien mais est à peine plus court à écrire. Il faut raisonner en pensant qu'on impose aussi la condition $t \neq t'$, donc $t - t' \neq 0$.

On obtient :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (t'^2 - 1)(2t - 1) = (t^2 - 1)(2t' - 1) \\ (t' - 1)t^2 = (t - 1)t'^2 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} 2t'^2t - 2t^2t' - t'^2 + t^2 - 2t + 2t' = 0 \\ t't^2 - tt'^2 - t^2 + t'^2 = 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} 2tt'(t' - t) + (t - t')(t + t') - 2(t - t') = 0 \\ t't(t - t') - (t - t')(t + t') = 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} -2tt' + (t + t') - 2 = 0 \\ tt' - (t + t') = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On pose alors classiquement $tt' = P$ et $t + t' = S$ (comme Produit et Somme)².

Cela donne

$$\left\{ \begin{array}{l} -2P + S - 2 = 0 \\ P = S \end{array} \right. \iff P = S = -2$$

t et t' sont donc les deux racines du trinôme $T^2 - ST + P = T^2 + 2T - 2$.

Ce trinôme a un discriminant positif, et admet comme racines $t_1 = -1 - \sqrt{3}$ et $t_2 = -1 + \sqrt{3}$.

On peut donc affirmer que le point double est le point $A = M(t_1) = M(t_2)$. Reste seulement à déterminer ses coordonnées, que l'on peut obtenir en remplaçant t_1 par sa valeur dans $x(t_1)$ et $y(t_1)$. Notons cependant qu'il est toujours possible de simplifier beaucoup les calculs en se rappelant que $t_1^2 = -2t_1 + 2$. On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_1) = \frac{2t_1 - 1}{t_1^2 - 1} = \frac{2t_1 - 1}{-2t_1 + 1} = -1 \\ y(t_1) = \frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{-2t_1 + 2}{t_1 - 1} = -2. \end{array} \right.$$

Le point double est donc le point $A(-1, -2)$.

Une question que l'on se pose souvent est de déterminer les tangentes à la courbe en ce point double.

Il y a bien deux tangentes en ce point, l'une pour le paramètre t_1 et l'autre pour le paramètre t_2 . Ces tangentes sont dirigées par les vecteurs $\vec{M}'(t_i)$, de coordonnées $(x'(t_i), y'(t_i))$, et ont donc pour coefficient directeur $a_i = \frac{y'(t_i)}{x'(t_i)}$ (bien sûr, i vaut 1 puis 2). Ici aussi, en utilisant astucieusement $t_i^2 = -2t_i + 2$ ou $t_i^2 + 2t_i = 2$ et en

² Dans ces systèmes pour déterminer des points doubles, les inconnues t et t' (ou t_1 et t_2) jouent des rôles tout à fait symétriques, de sorte que le système que l'on étudie est symétrique en t et t' , et la théorie générale sur les équations algébriques symétriques explique que cette technique fonctionne toujours

sachant multiplier les dénominateurs par la « quantité conjuguée », obtenue en utilisant l'autre racine t_j du trinôme $\varphi(T)$, ce qui permet d'utiliser $t_i t_j = P = -2$ et $t_i + t_j = S = -2$, on simplifie beaucoup le calcul de ces coefficients directeurs, et on ne fait qu'un seul calcul :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{y'(t_i)}{x'(t_i)} = \frac{(t_i^2 - 2t_i)}{(t_i - 1)^2} \times \frac{(t_i^2 - 1)^2}{(-2t_i^2 + 2t_i - 2)} = \frac{(-2t_i + 2 - 2t_i)(t_i + 1)^2}{-2(-2t_i + 2) + 2t_i - 2} \\ &= \frac{(-4t_i + 2)(t_i^2 + 2t_i + 1)}{6t_i - 6} = \frac{(-2t_i + 1)(2 + 1)}{3(t_i - 1)} = \frac{(-2t_i + 1)(t_j - 1)}{(t_i - 1)(t_j - 1)} \\ &= \frac{-2P + t_j + 2t_i - 1}{P - S + 1} = -2P + S + t_i - 1 = 1 + t_i = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On obtient donc au point double deux tangentes de coefficients directeurs opposés, et faisant avec l'horizontale un angle θ dont la tangente est a_i : elles font un angle de $\pm \arctan(\sqrt{3}) = \pm \frac{\pi}{3} = \pm 60^\circ$ avec l'horizontale et entre elles.

Points limites

On dit qu'une courbe admet un point limite lorsque pour $\alpha \notin \mathcal{D}(f)$, α point d'accumulation de $\mathcal{D}(f)$, on a cependant $\lim_{t \rightarrow \alpha} x(t) = x_\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} y(t) = y_\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas le point $M_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ est un point limite de la courbe paramétrée par f . C'est le plus souvent pour $\alpha = \pm\infty$ que l'on rencontre des points limites.

Il est d'usage, lorsque l'on rencontre un point limite, de déterminer la tangente à la courbe en ce point limite.

On cherche donc le coefficient directeur de cette tangente, et on a deux possibilités pour cela, dont on admettra l'équivalence :

- On trouve ce coefficient comme limite pour $t \rightarrow \alpha$ du taux d'accroissement $\frac{y(t) - y_\alpha}{x(t) - x_\alpha}$
- On trouve ce coefficient comme limite pour $t \rightarrow \alpha$ du coefficient directeur de la tangente à la courbe, c'est-à-dire de $\frac{y'(t)}{x'(t)}$

La courbe que nous sommes en train d'étudier n'admet pas de point limite ; nous rencontrerons des exemples avec points limites dans les exercices.

Points d'inflexion

Un point d'inflexion d'une courbe paramétrée est un point où sa concavité change de sens. Qu'est-ce que cela signifie ? Une bonne façon de le comprendre est le point de vue cinématique : on peut facilement imaginer que le point mobile $M(t)$ doit faire des virages soit à droite, soit à gauche lorsqu'il décrit sa trajectoire (c'est-à-dire la courbe paramétrée). Un point d'inflexion est un point de la courbe où il n'y a pas de virage, ou plutôt un point où le virage change de côté : avant

ce point, il y avait par exemple un virage à droite, après ce point, il y a virage à gauche.

Comment repérer un point d'infexion ? Là encore, c'est le point de vue cinématique qui apporte l'explication la plus facile à comprendre. Il suffit d'admettre une notion assez simple, c'est que l'accélération d'un point mobile est toujours dirigée vers l'intérieur d'un virage (d'un point de vue dynamique, l'accélération est proportionnelle à la résultante de toutes les forces, et il faut bien qu'une force tire le point mobile vers la droite pour qu'il tourne à droite).

Il ne peut donc y avoir un point d'infexion que si l'accélération ne tire ni à droite, ni à gauche, mais est « dans le sens du mouvement », c'est-à-dire proportionnelle à la vitesse. Cela se traduit par $\vec{V}(t)$ et $\vec{A}(t)$ colinéaires, et, en revenant à l'interprétation de courbe paramétrée, le déterminant des coordonnées de ces vecteurs devant être nul, on trouve la condition nécessaire de point d'infexion :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0.$$

Cette condition est assez compliquée à manier, car elle fait intervenir les dérivées secondes, et cela peut amener des calculs lourds, comme dans notre exemple. On s'abstiendra donc de chercher systématiquement les éventuels points d'infexion à moins que cela ne soit demandé explicitement.

D'autre part, nous n'expliquerons pas pourquoi une condition suffisante est que cette quantité change de signe, mais c'est assez logique.

La courbe que nous étudions possède un point d'infexion que nous ne déterminerons pas car les calculs sont trop compliqués.

Points d'intersection avec les droites de la figure

Pour trouver l'intersection de la courbe avec une droite d'équation $ax + by + c = 0$, il suffit de résoudre l'équation d'inconnue t :

$$ax(t) + by(t) + c = 0$$

On trouve alors le ou les valeurs de t pour lesquelles le point $M(t)$ est sur cette droite. Reste alors à trouver les coordonnées de ces points en remplaçant t par sa valeur dans $(x(t), y(t))$. Il faut remarquer que l'équation $ax + by + c = 0$ permet, connaissant l'une des deux valeurs des coordonnées d'un point d'intersection, de retrouver l'autre facilement.

Revenons à l'exemple que nous étudions.

Intersection avec l'axe des abscisses : il suffit de résoudre

$$y(t) = 0 \iff \frac{t^2}{t-1} = 0 \iff t = 0.$$

La courbe rencontre donc l'axe des abscisses uniquement à l'instant $t = 0$, et le tableau de variation nous indique que c'est au point $B(1, 0)$.

Intersection avec l'axe des ordonnées : il suffit de résoudre

$$x(t) = 0 \iff \frac{2t - 1}{t^2 - 1} = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

La courbe rencontre donc l'axe des abscisses uniquement à l'instant $t = \frac{1}{2}$; à cet instant, le point $M(\frac{1}{2})$ a bien sûr une abscisse nulle et son ordonnée vaut

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées est le point $C(0, -\frac{1}{2})$.

Intersection avec l'asymptote horizontale $y = -\frac{1}{2}$:

Le point que l'on vient de trouver est déjà un point de cette droite. Nous allons vérifier qu'il n'y en a pas d'autre. On résout

$$y(t) = -\frac{1}{2} \iff \frac{t^2}{t-1} = -\frac{1}{2} \iff 2t^2 + t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

(L'autre racine -1 de ce trinôme est à rejeter car elle n'appartient pas à l'ensemble de définition de f). Il n'y a donc pas d'autre point que $C(0, -\frac{1}{2}) = M(\frac{1}{2})$.

Intersection avec l'asymptote oblique $y = 2x + \frac{1}{2}$

On doit éviter de refaire bêtement des calculs déjà réalisés. En effet, lorsqu'on a étudié la position relative de la courbe avec cette asymptote, c'est le signe de $\Delta(t) = y(t) - 2x(t) - \frac{1}{2}$ que l'on a étudié, et on a déjà déterminé pour quels t cette quantité était nulle!

Puisque $\Delta(t) = \frac{(t-1)(2t+5)}{2(t+1)}$, la seule valeur de t dans $\mathcal{D}(f)$ qui convient est $t = -\frac{5}{2}$.

Le seul point d'intersection de la courbe avec l'asymptote oblique est donc $D = M(-\frac{5}{2})$. Pour trouver ses coordonnées, on peut par exemple calculer son abscisse, puis reporter dans l'équation de la droite, ou calculer directement les deux coordonnées.

$$x\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{-5 - 1}{\frac{25}{4} - 1} = -\frac{6 \times 4}{25 - 4} = -\frac{8}{7};$$

$$y\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\frac{25}{4}}{-\frac{5}{2} - 1} = -\frac{25}{14}.$$

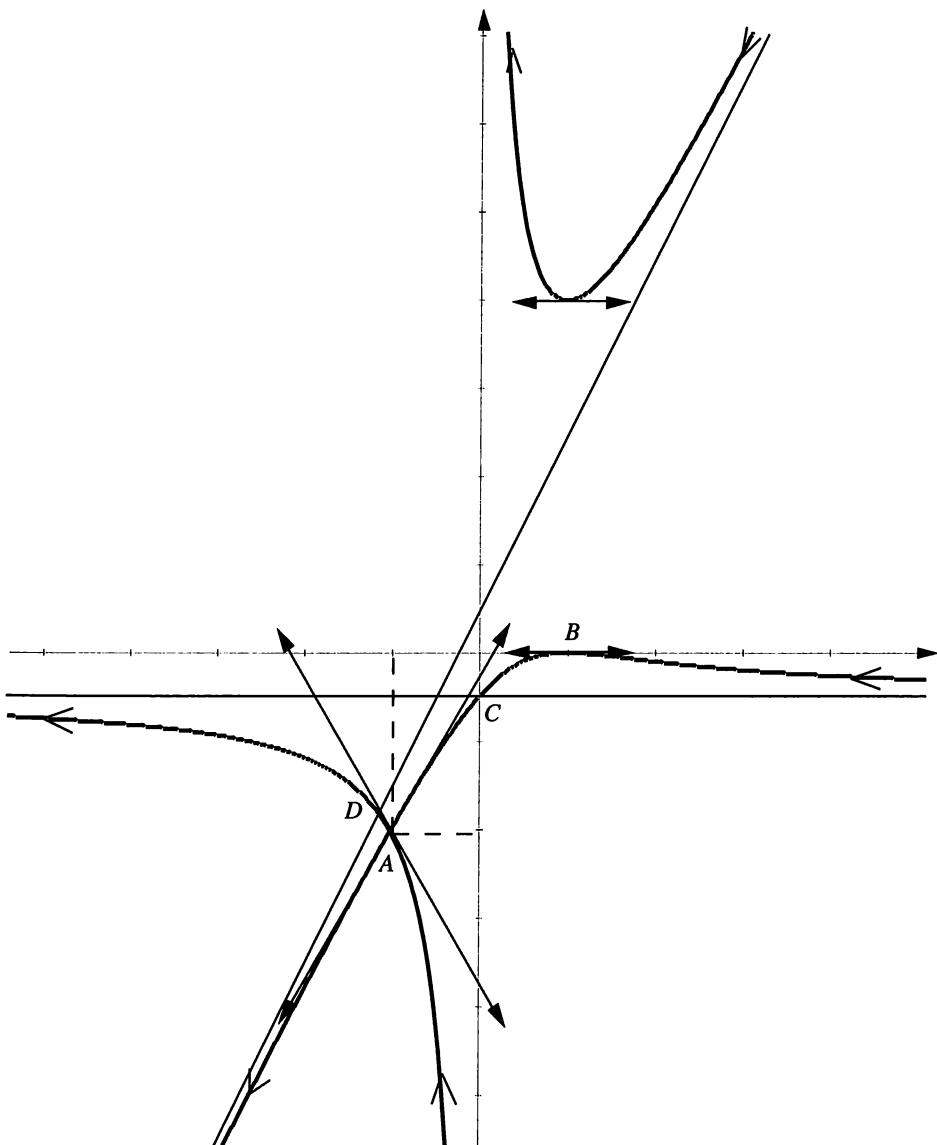
2.4.8 Tracé de la courbe

Le tracé que l'on fera utilisera des valeurs données par une calculatrice ou un ordinateur : on prend quelques valeurs de t et on calcule les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ correspondantes. On peut aussi utiliser un logiciel de traçage de courbe.

Le dessin que l'on fait doit être une synthèse de toutes les études précédentes.

On doit en particulier choisir les unités sur les axes de façon à voir :

- les tangentes horizontales et verticales ;
- les asymptotes ;
- les points particuliers et leurs tangentes éventuelles étudiés au § précédent.



2.5 Étude des points stationnaires

Dans ce §, nous étudions un point stationnaire d'une courbe paramétrée par une fonction f . Nous supposons donc que pour $t = t_0$, $f'(t_0) = 0$, c'est-à-dire qu'on a simultanément $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$.

2.5.1 Tangente en un point stationnaire

Nous supposerons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$, alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < p$, on a $f^{(k)}(t_0) = 0$. En d'autres termes, p est le plus petit ordre d'un vecteur dérivé non nul en t_0 .

On a donc $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$.

écrivons la formule de Taylor-Young, pour x et y , au voisinage de t_0 , à l'ordre p .

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_1(t) \\ y(t) &= y(t_0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_2(t) \end{aligned}$$

avec bien sûr, pour $i \in \{1, 2\}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_i(t) = 0$.

Tenant compte du fait que les dérivées k -ièmes de f sont nulles pour $1 \leq k < p$, on obtient simplement

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_1(t) \\ y(t) &= y(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon_2(t) \end{aligned}$$

En raisonnant comme dans le § 2.3.4 p. 33 (voir aussi la figure (2.1) toujours valable ici), la droite $(M(t_0)M(t))$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = [f(t) - f(t_0)]$. Tant que $t \neq t_0$, $\frac{1}{(t-t_0)^p} [f(t) - f(t_0)] = \overrightarrow{W}(t)$ est aussi un vecteur directeur de cette sécante. Or, les coordonnées de $\overrightarrow{W}(t)$ sont $(X_{\overrightarrow{W}}(t), Y_{\overrightarrow{W}}(t))$ données par

$$\begin{aligned} X_{\overrightarrow{W}}(t) &= \frac{x(t) - x(t_0)}{(t-t_0)^p} = \frac{x^{(p)}(t_0)}{p!} + \varepsilon_1(t) \\ Y_{\overrightarrow{W}}(t) &= \frac{y(t) - y(t_0)}{(t-t_0)^p} = \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!} + \varepsilon_2(t) \end{aligned}$$

Ces fonctions coordonnées ont pour limite $\left(\frac{x^{(p)}(t_0)}{p!}, \frac{y^{(p)}(t_0)}{p!} \right) = \frac{1}{p!} f^{(p)}(t_0)$ lorsque $t \rightarrow t_0$. Puisque par hypothèse, ce vecteur est non nul, il dirige une

droite que nous admettrons être la tangente à la courbe en t_0 . Notons que $f^{(p)}(t_0)$ est aussi un vecteur directeur de cette tangente.

Nous avons « démontré » la proposition suivante :

Proposition 2.12 Si $M(t_0)$ est un point stationnaire d'une courbe paramétrée par la fonction f , si toutes les dérivées de f en t_0 ne sont pas nulles, alors la tangente en $M(t_0)$ à la courbe est dirigée par le premier vecteur dérivé successif de f non nul en t_0 .

Remarquons que cette proposition est aussi vraie si $M(t_0)$ n'est pas un point stationnaire, d'après la proposition 2.8 p. 34.

2.5.2 Aspect de la courbe au voisinage d'un point stationnaire

On garde les hypothèses du § précédent, à savoir qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$, alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < p$, on a $f^{(k)}(t_0) = 0$ et on ajoute comme hypothèse supplémentaire que toutes les dérivées successives suivantes de f ne sont pas colinéaires à $f^{(p)}(t_0)$. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$, $q \geq p+1$, tel que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ forme une base du plan ; bien entendu, si $q \neq p+1$, pour tous les k entre p et q , on a $f^{(k)}(t_0)$ qui est colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ (ou nul, mais dans ce cas il est aussi colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$).

Écrivons à nouveau la formule de Taylor-Young au voisinage de t_0 , pour x et y , mais cette fois à l'ordre q .

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} x^{(p)}(t_0) \\ &\quad + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_3(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} y^{(p)}(t_0) \\ &\quad + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_4(t) \end{aligned}$$

avec bien sûr, pour $i \in \{3, 4\}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_i(t) = 0$.

Pour $1 \leq k < p$, on a $(x^{(k)}(t_0), y^{(k)}(t_0)) = (0, 0)$,

et pour $p+1 \leq k \leq q-1$, puisque $f^{(k)}(t_0)$ est colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(t_0) = \lambda_k f^{(p)}(t_0)$, ou ce qui revient au même

$$\begin{cases} x^{(k)}(t_0) = \lambda_k x^{(p)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_0) = \lambda_k y^{(p)}(t_0). \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \left(\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \lambda_k \right) x^{(p)}(t_0) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^q}{q!} x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_3(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0) + \left(\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \lambda_k \right) y^{(p)}(t_0) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^q}{q!} y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \varepsilon_4(t). \end{aligned}$$

Écrivant vectoriellement cette double égalité, on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \left(\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \lambda_k \right) f^{(p)}(t_0) \\ &\quad + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q \vec{\mathcal{E}}(t). \end{aligned}$$

$\vec{\mathcal{E}}(t)$ est une fonction vectorielle qui tend vers le vecteur nul 0 lorsque $t \rightarrow t_0$ puisque ses coordonnées qui sont $(\varepsilon_3(t), \varepsilon_4(t))$ tendent vers 0.

On obtient alors

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = u(t)f^{(p)}(t_0) + v(t)f^{(q)}(t_0)$$

$u(t)$ et $v(t)$ sont les coordonnées de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ (c'est bien un repère puisque par hypothèse $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ ne sont pas colinéaires).

Ce sont deux fonctions réelles qui valent

$$\begin{cases} u(t) = \left(\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \lambda_k \right) + (t-t_0)^q \eta_1(t) \\ v(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + (t-t_0)^q \eta_2(t) \end{cases}$$

$(\eta_1(t), \eta_2(t))$ sont les coordonnées de $\vec{\mathcal{E}}(t)$ dans la base $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$.

Anticipant sur un résultat que nous verrons au chapitre suivant (Proposition 3.27 p. 79), il est facile de comprendre que $\eta_1(t)$ et $\eta_2(t)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 lorsque $t \rightarrow t_0$.

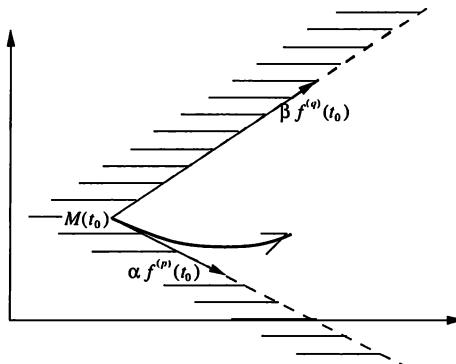
En utilisant la notion de fonctions équivalentes ($f \sim g$ lorsque $\frac{f}{g} \rightarrow 1$) sur les fonctions équivalentes, il est facile de voir directement qu'au voisinage de t_0 , $v(t) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!}$.

C'est à peine plus compliqué pour $u(t)$, mais en factorisant $(t-t_0)^p$, on se rend compte qu'on a aussi $u(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!}$.

$M(t)$ a donc, dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$, des coordonnées $(u(t), v(t))$ qui ont, pour t « proche de t_0 » (« au voisinage de t_0 »), le même signe que les coordonnées du vecteur $\left(\frac{(t-t_0)^p}{p!}, \frac{(t-t_0)^q}{q!}\right)$.

Ces deux coordonnées sont toujours positives lorsque $t > t_0$. Utilisons une interprétation cinématique : on peut affirmer que lorsque le point mobile $M(t)$ « quitte » $M(t_0)$ (juste après son passage en $M(t_0)$), il est dans la partie du plan limité par les deux demi-axes du repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ (partie non hachurée sur la figure).

Mais n'oublions pas que $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe en $M(t_0)$: quels que soient p et q , on a toujours l'aspect suivant pour la trajectoire, juste « après » l'instant t_0 .



(2.11)

Sur cette figure, α et β désignent des réels *positifs*. Il n'est en effet pas toujours aisé de représenter $f^{(p)}(t_0)$ ou $f^{(q)}(t_0)$, si ces vecteurs sont « trop longs » ou « trop courts ». Ce qui est important, c'est leur orientation, et elle n'est pas changée si on multiplie ces vecteurs par un réel *positif*.

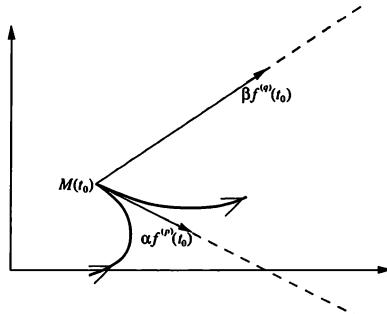
Lorsque $t < t_0$, le signe des coordonnées de $M(t)$ dans ce repère dépend de la parité de p et q . En effet, $(t-t_0)^k$ est toujours positif pour k pair, mais est du signe de $(t-t_0)$ lorsque k est impair.

On comprend donc qu'il y a 4 cas à étudier. N'oublions pas que quel que soit le cas, le vecteur $f^{(p)}(t_0)$ dirige toujours la tangente à la courbe, et que la courbe doit donc « s'appuyer » sur cette tangente « avant » comme « après » l'instant t_0 . Nous conserverons dans nos explications le point de vue cinématique. Puisque le point qui nous intéresse est le point $M(t_0)$, nous appellerons « arrivée » en

$M(t_0)$ la partie du mouvement correspondant à $t < t_0$ et « départ » la partie du mouvement après t_0 .

p pair, q impair

Puisque $u(t)$, première coordonnée de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est du signe de $(t - t_0)^p$ et que p est pair, on a $u(t) > 0$ aussi pour $t < t_0$. Mais $v(t)$, la deuxième coordonnée étant du signe de $(t - t_0)^q$ et q étant impair, on a $v(t) < 0$ avant l'instant t_0 . L'aspect de la courbe est donc le suivant

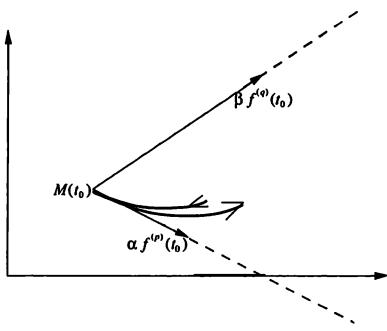


(2.12)

Dans cette situation, on dit que la courbe présente en $M(t_0)$ un *point de rebroussement de première espèce*. La courbe y traverse sa tangente, mais en « se retournant ».

p pair, q pair

Puisque $u(t)$, première coordonnée de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est du signe de $(t - t_0)^p$ avec ici aussi p pair, on a $u(t) > 0$ aussi pour $t < t_0$, mais $v(t)$, la deuxième coordonnée étant du signe de $(t - t_0)^q$, q étant cette fois pair, on a dans ce cas toujours $v(t) > 0$ après et avant l'instant t_0 . L'aspect de la courbe est donc le suivant



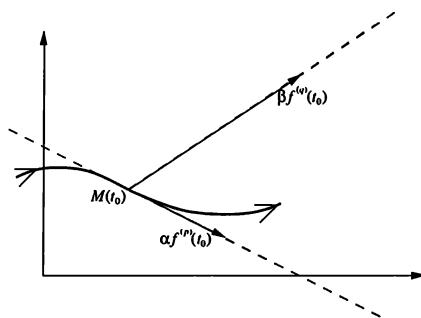
(2.13)

Dans cette situation, on dit que la courbe présente en $M(t_0)$ un *point de rebroussement de deuxième espèce*. La courbe reste du même côté de sa tangente, « mais se retourne ».

La position relative de la partie de courbe correspondant à « avant » l'instant t_0 (qui est au-dessus sur la figure (2.13)) par rapport à la partie de courbe « après » t_0 ne peut pas être prévue sans renseignement supplémentaire. On peut souvent deviner cette position d'après les autres éléments de l'étude, mais démontrer que tel morceau est au-dessus est souvent très compliqué. Il arrive même que ces deux morceaux de courbe soient confondus.

p impair, q impair

Puisque $u(t)$, première coordonnée de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est du signe de $(t - t_0)^p$; or, ici p est impair : on a ici $u(t) < 0$ pour $t < t_0$. Quant à $v(t)$, la deuxième coordonnée, elle est du signe de $(t - t_0)^q$ avec q impair : on a cette fois $v(t) < 0$ avant l'instant t_0 . L'aspect de la courbe est donc le suivant

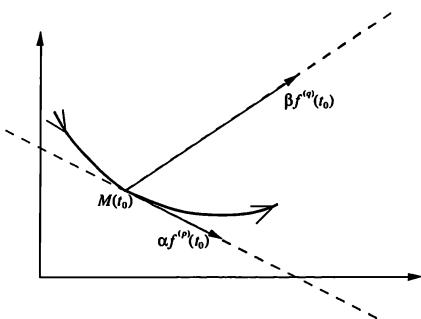


(2.14)

Dans cette situation, on dit que la courbe présente en $M(t_0)$ un **point d'inflexion**. La courbe traverse sa tangente sans se retourner.

p impair, q pair

Puisque $u(t)$, première coordonnée de $M(t)$ dans le repère $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est du signe de $(t - t_0)^p$ avec p impair, on a ici $u(t) < 0$ pour $t < t_0$. $v(t)$, la deuxième coordonnée étant du signe de $(t - t_0)^q$ avec q pair, on a cette fois toujours $v(t) > 0$ après et avant l'instant t_0 . L'aspect de la courbe est donc le suivant



(2.15)

Dans cette situation, on dit que la courbe présente en $M(t_0)$ un **point ordinaire**. La courbe se comporte normalement par rapport à sa tangente, et il existe peut-

être une autre paramétrisation de cette courbe dans laquelle ce point n'est pas un point stationnaire.

Remarque : Les deux derniers cas, qui correspondent tous les deux à p impair, arrivent banalement (surtout le dernier) lorsque la courbe ne présente pas en $M(t_0)$ un point stationnaire, c'est-à-dire lorsque $p = 1$. En effet, l'étude et les calculs que nous avons faits sont aussi valables dans ce cas.

Les exercices proposés à la fin de ce chapitre présentent au moins un cas de chaque sorte.

Une petite remarque importante mais non rigoureuse : il n'est pas évident d'obtenir que de nombreuses fonctions s'annulent simultanément pour le même t_0 . En conséquence, ce qu'on rencontre le plus fréquemment, lorsqu'on trouve un point stationnaire, c'est un point de rebroussement de première espèce, correspondant à $p = 2$ et $q = 3$: il suffit que $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$. On rencontre ensuite, par ordre de fréquence, des points de rebroussement de seconde espèce, puis des points ordinaires et enfin, le plus rarement des points stationnaires d'inflexion (on ne parle pas ici des points non stationnaires d'inflexion étudiés au § 2.4.7).

2.6 Exercices

Les exercices suivants demandent l'étude de courbes paramétrées. Pour chacune des courbes, vous déterminerez l'ensemble de définition, vous réduirez éventuellement l'ensemble d'étude, vous dresserez le tableau de variation, vous étudierez les éventuelles branches infinies, les éventuels points singuliers, les éventuels points multiples, vous déterminerez toutes les tangentes à la courbe aux points particuliers de la courbe et vous terminerez en faisant dans chaque cas, un tracé soigné de chaque courbe, faisant apparaître l'ensemble des propriétés mises en évidence lors de l'étude.

Exercice 2.1.

$$x(t) = t - \sin t \quad ; \quad y = 1 - \cos t \quad (\text{voir cours p. 40}).$$

Exercice 2.2.

$$x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \quad ; \quad y(t) = \frac{t^2}{t + 1}.$$

Exercice 2.3.

$$x(t) = \frac{8t}{t^2 + 1} \quad ; \quad y(t) = \frac{8t - 4}{(t^2 + 1)^2}.$$

Exercice 2.4.

$$x(t) = 2 \cos t + \cos 2t \quad ; \quad y(t) = 2 \sin t - \sin 2t.$$

Exercice 2.5.

$$x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \quad ; \quad y(t) = 2 \sin t \cos t.$$

Exercice 2.6.

$$x(t) = \frac{3t}{(1-t)^2} \quad ; \quad y(t) = \frac{3t-1}{(1-t)^3}.$$

On montrera l'existence d'un axe de symétrie.

Exercice 2.7.

$$x(t) = e^t - t \quad ; \quad y(t) = t^3 + 3t^2.$$

Exercice 2.8.

$$x(t) = \frac{t^4}{2} + 3t^3 + 6t^2 + 4t \quad ; \quad y(t) = \frac{t^4}{4} - 6t^2 - 16t.$$

Exercice 2.9.

$$x(t) = \sin t - t - \frac{t^4}{24} \quad ; \quad y(t) = e^t - t - \frac{t^2}{2}.$$

Pour cette fonction, on étudiera les branches infinies (pour $t \rightarrow \pm\infty$) et le point stationnaire (pour $t = 0$), mais on admettra que y' garde un signe constant (à part en 0), et que x' ne change de signe qu'une fois pour $t = t_0 \simeq -2,070\,344\,719$.

CHAPITRE 3

Fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n

3.1 Introduction

Nous traitons dans ce chapitre l'étude des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n du point de vue de l'analyse, c'est-à-dire que nous définissons leurs limites, leur continuité, et la possibilité qu'on a de les dériver, et de les différentier, ce qui n'est pas pareil, contrairement au fonctions d'une seule variable, comme nous le verrons.

C'est le gros morceau de ce cours.

Après une rapide présentation, nous expliquerons comment par l'intermédiaire des fonctions composantes, on peut facilement se ramener à l'étude des fonctions numériques de plusieurs variables, c'est-à-dire les fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} . Nous étudierons en détail, pour ces fonctions la notion de limite et de continuité, puis nous introduirons la notion de dérivée partielle ; nous appliquerons cette notion pour rechercher des extrema de fonctions. Ensuite nous étudierons la notion de différentiabilité et nous mettrons en évidence l'intérêt des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Nous définirons la notion de différentielle d'une fonction et parlerons de formes différentielles et de champs de vecteurs.

Revenant aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n , nous définirons pour les fonctions régulières la notion de matrice jacobienne et de jacobien, puis nous introduirons le vocabulaire des opérateurs différentiels

3.2 Limites des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n

3.2.1 Notion de limite

Définition 3.1 Soit f une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n . Soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$; on suppose que X_0 est un point d'accumulation de l'ensemble $\mathcal{D}(f)$ de définition de f , (sans forcément que $f(X_0)$ existe). (En pratique, on aime mieux qu'il existe une boule \mathcal{B} de centre X_0 , telle que $\mathcal{B} \setminus \{X_0\}$ soit incluse dans l'ensemble de définition de f , c'est-à-dire que f soit définie « autour » de X_0).

On dit que f admet le vecteur L de \mathbb{R}^n comme limite lorsque X tend vers X_0 (on

note $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$ lorsque

$$(3.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \left. \begin{array}{l} \|X - X_0\|_\alpha \leq \eta \\ \text{et } X \in \mathcal{D}(f) \end{array} \right\} \implies \|f(X) - L\|_\beta \leq \varepsilon.$$

Remarque essentielle : Dans cette définition, $\|\cdot\|_\alpha$ est une des 3 normes usuelles de \mathbb{R}^p et $\|\cdot\|_\beta$ est une des 3 normes usuelles de \mathbb{R}^n .

On a vu que toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.

Comme conséquence, dans cette définition, on pourrait remplacer ces normes par n'importe quelles autres normes. Précisons ce point.

Théorème 3.2 Si N [resp. \tilde{N}] est une autre norme de \mathbb{R}^p [resp. de \mathbb{R}^n], alors l'assertion (3.1) est vraie si et seulement si l'assertion suivante (3.2) est vraie.

$$(3.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta' > 0 \quad \text{tel que} \quad \left. \begin{array}{l} N(X - X_0) \leq \eta' \\ \text{et } X \in \mathcal{D}(f) \end{array} \right\} \implies \tilde{N}(f(X) - L) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété exprime que la définition de la limite est indépendante des normes utilisées.

Preuve

Préliminaire : puisque N et \tilde{N} sont des normes équivalentes respectivement à $\|\cdot\|_\alpha$ et à $\|\cdot\|_\beta$, il existe 4 constantes strictement positives C_1, C_2, C_3, C_4 , telles que

$$(3.3) \quad \forall X \in \mathbb{R}^p, \quad C_1 N(X) \leq \|X\|_\alpha \leq C_2 N(X)$$

$$(3.4) \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n, \quad C_3 \tilde{N}(Y) \leq \|Y\|_\beta \leq C_4 \tilde{N}(Y).$$

D'autre part, pour ne pas alourdir l'écriture, on ne considérera que des X appartenant à l'ensemble $\mathcal{D}(f)$ de définition de f .

Si (3.1) est vraie :

Soit $\varepsilon > 0$; pour $\varepsilon' = \varepsilon C_3 > 0$, d'après (3.1), il existe $\eta > 0$ tel que, lorsque $\|X - X_0\|_\alpha \leq \eta$, on peut en déduire $\|f(X) - L\|_\beta \leq \varepsilon'$.

On pose $\eta' = \frac{\eta}{C_2}$. On peut donc affirmer que $\exists \eta' > 0$ tel que si $N(X - X_0) \leq \eta'$, alors on a $C_2 N(X - X_0) \leq \eta$ et donc, d'après la partie droite de (3.3), on en déduit $\|X - X_0\|_\alpha \leq \eta$ d'où $\|f(X) - L\|_\beta \leq \varepsilon'$.

Utilisant cette fois la partie gauche de (3.4), on en déduit que $C_3 \tilde{N}(f(X) - L) \leq \varepsilon C_3$ et finalement $\tilde{N}(f(X) - L) \leq \varepsilon$.

Ce qui est souligné ci-dessus est l'affirmation que (3.2) est vraie et on a fini de montrer (3.1) \implies (3.2).

Réciproquement, si (3.2) est vraie :

soit $\varepsilon > 0$; alors pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C_4} > 0$, il existe d'après (3.2) $\eta' > 0$ tel que, lorsque $N(X - X_0) \leq \eta'$, alors $\tilde{N}(f(X) - L) \leq \varepsilon'$.

On pose alors $\eta = C_1\eta'$. On peut affirmer que $\exists \eta > 0$ tel que si $\|X - X_0\|_\alpha \leq \eta$, alors d'après la partie gauche de (3.3), on a $C_1N(X - X_0) \leq \eta = C_1\eta'$, c'est-à-dire $N(X - X_0) \leq \eta'$ donc d'après l'hypothèse (3.2) $\tilde{N}(f(X) - L) \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C_4}$ et donc, $C_4\tilde{N}(f(X) - L) \leq \varepsilon$. Utilisant maintenant la partie droite de (3.4), on obtient $\|f(X) - L\|_\beta \leq \varepsilon$. \square

Conséquence : Dans la suite, on ne notera plus $\|\cdot\|_\alpha$ ni $\|\cdot\|_\beta$ les normes de \mathbb{R}^p ou \mathbb{R}^n , mais simplement $\|\cdot\|$. Il est entendu que ce symbole désigne n'importe quelle norme usuelle ou pas de \mathbb{R}^n , mais en général on préférera comprendre qu'il désigne la norme euclidienne.

3.2.2 Unicité de la limite

Proposition 3.3 (unicité) Si une fonction f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n admet une limite L pour $X \rightarrow X_0$, alors cette limite est unique.

Preuve Supposons que l'on ait à la fois $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$ et $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L'$.

Remarque : *Le bon sens, et la transitivité de l'égalité semblent amener à conclure immédiatement $L = L'$. Ce serait abusif, car pour l'instant, la notation $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$ est une convention, dans laquelle le symbole $=$ ne doit pas encore être pris au sens usuel. Après la démonstration de cette propriété, on pourra oublier ces subtilités et comprendre ce symbole $=$ comme d'habitude. (Voir aussi la remarque suivant le théorème 1.25 p. 18).*

D'après l'hypothèse, en ne considérant à nouveau que des $X \in \mathcal{D}(f)$, les deux assertions suivantes sont vraies :

$$(3.5) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_1 > 0, \quad \|X - X_0\| \leq \eta_1 \implies \|f(X) - L\| \leq \varepsilon$$

$$(3.6) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_2 > 0, \quad \|X - X_0\| \leq \eta_2 \implies \|f(X) - L'\| \leq \varepsilon.$$

(Notons que pour le même ε , il n'y a aucune raison que le η de la limite L soit le même que le η de la limite L' : il faut donc distinguer ces η en les numérotant). Nous allons raisonner par l'absurde : supposons $L \neq L'$.

Soit $R = \|L - L'\| > 0$.

Pour $\varepsilon = \frac{R}{3}$, d'après (3.5), il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\|X - X_0\| \leq \eta_1 \implies \|f(X) - L\| \leq \varepsilon$.

D'après (3.6), il existe $\eta_2 > 0$ tel que $\|X - X_0\| \leq \eta_2 \implies \|f(X) - L'\| \leq \varepsilon$.

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$; soit X_1 tel que $\|X_1 - X_0\| \leq \eta$ et tel que $X_1 \in \mathcal{D}(f)$.

(Il est toujours possible de trouver un tel X_1 , car X_0 est un point d'accumulation de $\mathcal{D}(f)$: la boule ouverte de centre X_0 , de rayon η contient des points de $\mathcal{D}(f)$.) D'une part, puisque $\|X_1 - X_0\| \leq \eta \leq \eta_1$, on doit avoir $\|f(X_1) - L\| \leq \varepsilon = \frac{R}{3}$. D'autre part, puisque $\|X_1 - X_0\| \leq \eta \leq \eta_2$, on doit avoir $\|f(X_1) - L'\| \leq \varepsilon = \frac{R}{3}$. On aurait donc

$$\begin{aligned} R &= \|L - L'\| = \|L - f(X_1) + f(X_1) - L'\| \\ &\leq \|L - f(X_1)\| + \|f(X_1) - L'\| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \|f(X_1) - L\| + \|f(X_1) - L'\| \\ &\leq \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}. \end{aligned}$$

On aboutit à l'absurdité $R \leq \frac{2R}{3}$ (car $R > 0$).

L'hypothèse supplémentaire $L \neq L'$ n'était donc pas compatible avec l'hypothèse initiale $\begin{cases} \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L \\ \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L'. \end{cases}$, donc on a forcément $L = L'$. \square

Voici maintenant une proposition qui lie la valeur de $f(X_0)$ avec la limite de f en X_0 si elle existe.

Proposition 3.4 Si $X_0 \in \mathcal{D}(f)$ et si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$, alors nécessairement $L = f(X_0)$

(Nous verrons plus loin que cela signifie que f est continue en X_0).

Preuve Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $X_0 \in \mathcal{D}(f)$ et qu'on a $0 = \|X_0 - X_0\| \leq \eta$, on a $\|f(X_0) - L\| < \varepsilon$. Cette dernière inégalité n'est possible pour tout $\varepsilon > 0$ que si $f(X_0) = L$. \square

3.2.3 Définition « topologique » des limites

Proposition 3.5 Soit f une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n . Soit X_0 un point d'accumulation de $\mathcal{D}(f)$ et soit $L \in \mathbb{R}^n$.

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' des bases de voisinages respectivement de L dans \mathbb{R}^n et de X_0 dans \mathbb{R}^p .

Alors f admet L comme limite lorsque X tend vers X_0 si et seulement si :

Pour tout voisinage V de la base de voisinages \mathcal{B} de L , il existe un voisinage W de la base de voisinages \mathcal{B}' de X_0 tel que pour tout $X \in W \cap \mathcal{D}(f)$, on a $f(X) \in V$.

Cette caractérisation se note formellement :

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L \iff \left[\forall V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B}' \text{ tel que } \begin{cases} X \in W \\ X \in \mathcal{D}(f) \end{cases} \Rightarrow f(X) \in V \right]$$

ou encore

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L \iff [\forall V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B}' \text{ tel que } f(W) \subset V].$$

Preuve Tous les X considérés sont dans $\mathcal{D}(f)$.

Supposons tout d'abord que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$.

Soit V un voisinage de la base de voisinages \mathcal{B} de L . Puisque V est un voisinage de L , il existe une boule de centre L , de rayon r qui est incluse dans V (on ne sait pas si elle est ouverte ou fermée).

Soit $\varepsilon = \frac{r}{2} > 0$; pour cet ε , d'après l'hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que $\|X - X_0\| \leq \eta$ implique $\|f(X) - L\| \leq \varepsilon$.

Considérons la boule $\overline{B}(X_0, \eta)$. C'est un voisinage de X_0 , et \mathcal{B}' est une base de voisinages de X_0 : il existe donc $W \in \mathcal{B}'$ tel que $W \subset \overline{B}(X_0, \eta)$. Pour tout $X \in W$, on a donc $X \in \overline{B}(X_0, \eta)$ et $\|X - X_0\| \leq \eta$. On peut donc affirmer que $\|f(X) - L\| \leq \varepsilon$ et par conséquent $f(X) \in B(L, \varepsilon)$. Or, cette boule est incluse dans la boule de centre L et de rayon r , elle-même étant incluse dans V : on a donc établi que $f(X) \in V$.

Ce qui est souligné correspond à ce qu'on voulait démontrer.

Réciproquement : on suppose que

$$\forall V \in \mathcal{B}, \exists W \in \mathcal{B}' \text{ tel que } X \in W \implies f(X) \in V.$$

Soit $\varepsilon > 0$; la boule $\overline{B}(L, \varepsilon)$ est un voisinage de L et \mathcal{B} est une base de voisinages de L : il existe donc un voisinage V de L , élément de \mathcal{B} qui est inclus dans $\overline{B}(L, \varepsilon)$.

D'après l'hypothèse, pour ce $V \in \mathcal{B}$, il existe un voisinage W de X_0 , élément de \mathcal{B}' , tel que $X \in W$ implique $f(X) \in V$. Ce W étant un voisinage de X_0 , il existe par définition d'un voisinage une boule de centre X_0 , (que l'on peut choisir fermée, quitte à diviser par deux son rayon), incluse dans W . Il existe donc un $\eta > 0$ qui est son rayon. On a donc $\overline{B}(X_0, \eta) \subset W$. Si un X est tel que $\|X - X_0\| \leq \eta$, alors on en déduit que $X \in \overline{B}(X_0, \eta) \subset W$ donc $X \in W$. On peut donc affirmer que $f(X) \in V \subset \overline{B}(L, \varepsilon)$: on a $f(X) \in \overline{B}(L, \varepsilon)$, donc $\|f(X) - L\| \leq \varepsilon$

Ce qui est souligné ci-dessus est justement la caractérisation de la conclusion que l'on voulait atteindre, à savoir $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$. \square

Corollaire 3.6 Dans la définition de la limite, on peut remplacer librement les

\leq par des $<$. Plus précisément, on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$$

$$\iff [\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que}$$

$$\iff [\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que}$$

$$\iff [\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que}$$

$$\left\| X - X_0 \right\| < \eta \right\} \implies \|f(X) - L\| < \varepsilon]$$

$$\left\| X - X_0 \right\| \leq \eta \right\} \implies \|f(X) - L\| < \varepsilon]$$

$$\left\| X - X_0 \right\| < \eta \right\} \implies \|f(X) - L\| \leq \varepsilon].$$

Preuve Puisque l'ensemble des boules ouvertes [fermées] de centre L [ou de centre X_0] forme une base de voisinages de L [de X_0], il est possible d'utiliser n'importe laquelle de ces bases de voisinages dans le rôle de \mathcal{B} ou \mathcal{B}' dans la proposition 3.5 (p. 66). Si par exemple \mathcal{B}' est l'ensemble des boules ouvertes de centre X_0 , un élément de \mathcal{B}' est caractérisé par la donnée de son rayon η , et trouver un élément dans \mathcal{B}' revient à montrer l'existence d'un $\eta > 0$. De sorte que $[\exists W \in \mathcal{B}' \text{ tel que } X \in W \cap \mathcal{D}(f)]$ revient exactement à $[\exists \eta > 0 \text{ tel que } \|X - X_0\| < \eta \text{ et } X \in \mathcal{D}(f)]$.

On raisonne de la même façon pour le rapport entre les ε et les V . □

3.2.4 Composition de limites

Théorème 3.7 Soit f une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n et g une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m .

On suppose que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = Y_0$ et que $\lim_{Y \rightarrow Y_0} g(Y) = Z_0$. On suppose de plus que X_0 est bien un point d'accumulation de $\mathcal{D}(g \circ f)$.

Alors on a $\lim_{X \rightarrow X_0} g \circ f(X) = Z_0$.

Preuve Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{Y \rightarrow Y_0} g(Y) = Z_0$, pour cet ε ,

$$(3.7) \quad \exists \eta > 0 \text{ tel que si } \|Y - Y_0\| < \eta, \text{ avec } Y \in \mathcal{D}(g), \text{ alors } \|g(Y) - Z_0\| < \varepsilon.$$

D'autre part, pour $\varepsilon' = \eta > 0$, puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = Y_0$, il existe $\eta' > 0$ tel que $\|X - X_0\| < \eta'$ et $X \in \mathcal{D}(f)$ implique $\|f(X) - Y_0\| < \varepsilon' = \eta$.

On a donc : $\exists \eta' > 0$ tel que si $\|X - X_0\| < \eta'$, avec $X \in \mathcal{D}(g \circ f)$,

alors on en déduit d'abord forcément que $X \in \mathcal{D}(f)$, et $f(X) \in \mathcal{D}(g)$ (c'est nécessaire et suffisant pour que $X \in \mathcal{D}(g \circ f)$) donc on a $\|f(X) - Y_0\| < \varepsilon' = \eta$, et ensuite, d'après (3.7), $\|g(f(X)) - Z_0\| < \varepsilon$ c'est-à-dire $\|g \circ f(X) - Z_0\| < \varepsilon$. \square

3.3 Limites et fonctions coordonnées

3.3.1 Fonctions coordonnées

Pour l'instant, nous ne nous sommes pas intéressés à l'aspect particulier des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n . Comme dans le chapitre précédent, ces fonctions ont des fonctions coordonnées, et on peut se ramener à l'étude de fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

Soit f une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n .

Alors, pour tout $X \in \mathcal{D}(f)$, puisque $f(X) \in \mathbb{R}^n$, si on pose $Y = f(X)$, le vecteur Y possède des composantes (y_1, y_2, \dots, y_n) . à chaque $X \in \mathcal{D}(f)$, correspond donc n nombres réels y_i ; cela définit donc n fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} , notées (f_1, f_2, \dots, f_n) . f_i est la fonction qui à tout $X \in \mathcal{D}(f)$ associe la i -ème composante de $f(X)$.

Les fonctions f_i sont les fonctions composantes ou fonctions coordonnées de f . Notons que X en tant que vecteur de \mathbb{R}^p possède aussi des composantes : on peut poser $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. On peut donc considérer que les f_i sont des fonctions réelles des p variables x_1, \dots, x_p . (D'où le nom : fonctions de plusieurs variables).

3.3.2 Limite d'une fonction numérique de plusieurs variables

Cette notion n'est en fait pas absolument nouvelle, car c'est un cas particulier des limites étudiées dans la section précédente. En effet, nous n'avons pas exclu que n soit égal à 1, et nous avons admis que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Donc une fonction de plusieurs variables qui va de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} n'est rien d'autre qu'une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n avec $n = 1$. Nous allons cependant expliciter ce que deviennent les définitions dans ce cas pour préparer la suite.

N'oublions pas que dans $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, les trois normes usuelles sont en fait égales à la valeur absolue.

Proposition 3.8 Soit f un fonction numérique de plusieurs variables (x_1, \dots, x_n) , et ℓ un réel. Alors on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell \iff \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \begin{cases} \|X - X_0\| \leq \eta \\ \text{et } X \in \mathcal{D}(f) \end{cases} \right] \Rightarrow |f(X) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Bien entendu, on peut remplacer un ou les deux \leq par des $<$.

3.3.3 Opérations sur les limites des fonctions de plusieurs variables

Nous allons établir, pour des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} , les propriétés d'opérations sur les limites, comparables à ce qu'on sait faire pour les fonctions d'une seule variable réelle. Les démonstrations sont d'ailleurs en tout point semblables à celles des propriétés analogues pour les limites des fonctions numériques d'une seule variable.

Proposition 3.9 (addition) Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} telles que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell_1$ et $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = \ell_2$.

Alors on a $\lim_{X \rightarrow X_0} (f + g)(X) = \ell_1 + \ell_2$.

La démonstration est très simple à condition de savoir « couper un ε en deux ».

Preuve Soit $\varepsilon > 0$

Pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell_1$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \|X - X_0\| &\leq \eta_1 \\ \text{et } X &\in \mathcal{D}(f) \end{aligned} \right\} \implies |f(X) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = \ell_2$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \|X - X_0\| &\leq \eta_2 \\ \text{et } X &\in \mathcal{D}(g) \end{aligned} \right\} \implies |g(X) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut donc affirmer qu'il existe $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\} > 0$ tel que si on a

$$\left. \begin{aligned} \|X - X_0\| &\leq \eta \\ \text{et } X &\in \mathcal{D}(f+g), \end{aligned} \right\} \text{puisque } \mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), \text{ on a}$$

d'autre part

$$(3.8) \quad \left. \begin{aligned} \|X - X_0\| &\leq \eta_1 \\ \text{et } X &\in \mathcal{D}(f) \end{aligned} \right\} \text{ donc } |f(X) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et d'autre part

$$(3.9) \quad \left. \begin{aligned} \|X - X_0\| &\leq \eta_2 \\ \text{et } X &\in \mathcal{D}(g) \end{aligned} \right\} \text{ donc } |g(X) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En additionnant les deux inégalités (3.8) et (3.9), on obtient

$$|f(X) - \ell_1| + |g(X) - \ell_2| \leq \varepsilon.$$

et puisque par inégalité triangulaire,

$$|f(X) + g(X) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |f(X) - \ell_1| + |g(X) - \ell_2|.$$

on peut conclure que $|f(X) + g(X) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq \varepsilon$. □

De même, avec une démonstration sensiblement plus compliquée, on a le résultat analogue pour la limite d'un produit de deux fonctions.

Proposition 3.10 (multiplication) Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} telles que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell_1$ et $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = \ell_2$. Alors on a $\lim_{X \rightarrow X_0} (fg)(X) = \ell_1 \ell_2$.

Preuve Pour trouver le nombre η correspondant au nombre ε quelconque qu'on se donne, on utilise l'« astuce » :

$$\begin{aligned} |f(X)g(X) - \ell_1 \ell_2| &= |f(X)g(X) - \ell_1 g(X) + \ell_1 g(X) - \ell_1 \ell_2| \\ &\leq |f(X)g(X) - \ell_1 g(X)| + |\ell_1 g(X) - \ell_1 \ell_2| \\ &\leq |f(X) - \ell_1| |g(X)| + |\ell_1| |g(X) - \ell_2|. \end{aligned}$$

Tous les X de cette démonstration seront supposés appartenir à $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + 1)} > 0$, puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell_1$, $\exists \eta_1 > 0$ tel que si $\|X - X_0\| \leq \eta_1$, alors on a $|f(X) - \ell_1| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + 1)}$.

De même, pour $\varepsilon'' = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)} \right\} > 0$, puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = \ell_2$, $\exists \eta_2 > 0$ tel que si $\|X - X_0\| \leq \eta_2$, alors on a $|g(X) - \ell_2| \leq \varepsilon'' \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}$.

Pour ces mêmes X tels que $\|X - X_0\| \leq \eta_2$, on a aussi $|g(X) - \ell_2| \leq \varepsilon'' \leq 1$, donc en utilisant la deuxième inégalité triangulaire

$$|g(X)| - |\ell_2| \leq |g(X)| - |\ell_2| \leq |g(X) - \ell_2| \leq 1,$$

et on obtient $|g(X)| \leq |\ell_2| + 1$.

On prendra $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\} > 0$. On peut donc affirmer que $\exists \eta > 0$.

Si X est un élément de $\mathcal{D}(fg)$ tel que $\|X - X_0\| \leq \eta$,

alors on a à la fois $\|X - X_0\| \leq \eta_1$ et $\|X - X_0\| \leq \eta_2$.

On a donc, d'une part, puisque $\|X - X_0\| \leq \eta_1$

$$(3.10) \quad |f(X) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + 1)}.$$

D'autre part, puisque $\|X - X_0\| \leq \eta_2$

$$(3.11) \quad |g(X)| \leq |\ell_2| + 1.$$

De plus, toujours puisque $\|X - X_0\| \leq \eta_2$

$$(3.12) \quad |g(X) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)}.$$

Enfin, on a banalement

$$(3.13) \quad |\ell_1| \leq |\ell_1| + 1.$$

Combinant ces quatre inégalités entre nombres positifs de la façon suivante

$$(3.10) \times (3.11) + (3.13) \times (3.12),$$

on obtient

$$\begin{aligned} |f(X) - \ell_1| \times |g(X)| + |\ell_1| \times |g(X) - \ell_2| &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2(|\ell_2| + 1)} \right) \times (|\ell_2| + 1) \\ &+ (|\ell_1| + 1) \times \left(\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1| + 1)} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'« astuce » signalée en début de démonstration : puisque

$$|(fg)(X) - \ell_1 \ell_2| \leq |f(X) - \ell_1| |g(X)| + |\ell_1| |g(X) - \ell_2|,$$

on en déduit que

$$\underline{|(fg)(X) - \ell_1 \ell_2| \leq \varepsilon}$$

et on a bien montré que $\lim_{X \rightarrow X_0} (fg)(X) = \ell_1 \ell_2$. □

On en déduit le corollaire :

Corollaire 3.11 (linéarité des limites) Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} telles que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell_1$ et $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = \ell_2$.

Alors, pour tous λ, μ réels, on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} (\lambda f + \mu g)(X) = \lambda \ell_1 + \mu \ell_2.$$

Pour démontrer cet énoncé, il suffit de combiner les deux propositions précédentes 3.9 et 3.10, en établissant auparavant (ce qui est très facile) qu'une fonction constante $X \mapsto \lambda$ est telle que pour tout X_0 , on a $\lim_{X \rightarrow X_0} \lambda = \lambda$.

On a aussi le corollaire suivant :

Corollaire 3.12 Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} telles que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell_1$ et $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = \ell_2$.

Si $\ell_1 \neq 0$, on a $\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{1}{f(X)} = \frac{1}{\ell_1}$.

Si $\ell_2 \neq 0$, on a $\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

La première partie de ce résultat s'établit en considérant la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui associe à tout $t \neq 0$ le réel $h(t) = \frac{1}{t}$. On sait que cette fonction h est continue, donc on a $\lim_{t \rightarrow \ell_1} h(t) = h(\ell_1) = \frac{1}{\ell_1}$.

On peut alors appliquer le Théorème 3.7 (p. 68) sur les fonctions composées, puisque $\frac{1}{f} = h \circ f$.

La deuxième partie s'obtient tout simplement en combinant cette première partie avec le résultat sur le produit de deux limites de la Proposition 3.10 (p. 71) puisque $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

Un autre résultat utile est le suivant :

Théorème 3.13 *Si f et g sont deux fonctions définies sur une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , et à valeurs respectivement dans les espaces vectoriels de dimension finie E et F . On suppose qu'il existe une multiplication \cdot entre les éléments de E et F , à valeurs dans un espace vectoriel G , lui aussi de dimension finie.*

On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $(Y, Z) \in E \times F$, on a $\|Y \cdot Z\| \leq C \|Y\| \|Z\|$.

Si f est une fonction bornée dans un voisinage de $X_0 \in \mathcal{U}$, et si $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = 0_F$, alors on a : $\lim_{X \rightarrow X_0} (f(X) \cdot g(X)) = 0_G$.

Ce théorème affirme que le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 a aussi une limite nulle.

En pratique, les 5 multiplications que l'on peut rencontrer qui vérifient les hypothèses sont les suivantes ;

- $E = F = G = \mathbb{R}$ et \cdot est la multiplication de deux réels (on a bien $|YZ| \leq |Y| |Z|$ puisqu'on a l'égalité : on prend $C = 1$).
- $E = F = G = \mathbb{C}$ et \cdot est la multiplication des complexes (on a bien $|YZ| \leq |Y| |Z|$ puisqu'on a l'égalité : on prend $C = 1$).
- $E = \mathbb{R}$ et $F = G = \mathbb{R}^p$; \cdot est la multiplication externe d'un réel et d'un vecteur (on a bien $\|\lambda Z\| \leq |\lambda| \|Z\|$ puisqu'on a l'égalité : on prend $C = 1$).
- $E = G = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}$; \cdot est encore la multiplication externe d'un réel et d'un vecteur, mais ici, c'est la fonction à valeurs réelles qui a une limite nulle et celle qui a ses valeurs vectorielles qui est bornée.
- $E = F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}$; \cdot est le produit scalaire de deux vecteurs (on a bien $|Y \cdot Z| \leq \|Y\| \|Z\|$ (Cauchy-Schwarz) et on prend $C = 1$).
- $E = F = G = \mathbb{R}^3$ et \cdot est le produit vectoriel de deux vecteurs \wedge (il est classique que $\|Y \wedge Z\| = \|Y\| \|Z\| |\sin(Y, Z)|$, donc on a bien $\|Y \cdot Z\| \leq \|Y\| \|Z\|$: on prend $C = 1$).

Preuve du théorème Soit $\varepsilon > 0$

Le fait que f soit bornée dans un voisinage de X_0 impose qu'il existe un $\eta_1 > 0$ et un réel $M > 0$ tels que pour tous X tels que $\|X - X_0\| \leq \eta_1$, on a $\|f(X)\| \leq M$.

Pour $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{CM}$, puisque $\lim_{X \rightarrow 0} g(X) = 0_F$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout X tel que $\|X - X_0\| \leq \eta_2$ on a $\|g(X)\| \leq \frac{\varepsilon}{CM}$.

Il suffit maintenant de choisir $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$.

Il existe $\eta > 0$ tel que pour $\|X - X_0\| \leq \eta$, on a d'une part $\|X - X_0\| \leq \eta_1$, donc $\|f(X)\| \leq M$, et d'autre part, on a $\|X - X_0\| \leq \eta_2$, donc $\|g(X)\| \leq \frac{\varepsilon}{CM}$.
En multipliant ces deux inégalités de nombres positifs, on trouve donc

$$\|f(X)\| \|g(X)\| \leq M \frac{\varepsilon}{CM} = \frac{\varepsilon}{C}.$$

Or, on a $\|f(X) \cdot g(X)\| \leq C \|f(X)\| \|g(X)\| \leq C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$, donc on obtient bien $\|f(X) \cdot g(X)\| \leq \varepsilon$. \square

3.3.4 Théorème fondamental

Voyons à présent la propriété essentielle qui permet de simplifier l'étude des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n .

Théorème 3.14 *Soit f une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n et soient (f_1, \dots, f_n) les fonctions coordonnées de f . On suppose que $L = (\ell_1, \dots, \ell_n)$. On a alors l'équivalence suivante :*

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L \iff \left[\forall i \in \{1, \dots, n\}, \text{ on a } \lim_{X \rightarrow X_0} f_i(X) = \ell_i \right].$$

L'immense intérêt de cette propriété est de permettre de remplacer l'étude de toute fonction vectorielle (à valeurs dans \mathbb{R}^n) par l'étude de n fonctions réelles (à valeurs dans \mathbb{R}) ce qui est *a priori* bien plus simple.

Preuve du théorème fondamental

Si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$:

Pour un i_0 quelconque montrons que $\lim_{X \rightarrow X_0} f_{i_0}(X) = \ell_{i_0}$.

Soit $\varepsilon > 0$;

d'après l'hypothèse, $\exists \eta > 0$ tel que si $\|X - X_0\| < \eta$, alors $\|f(X) - L\|_\infty < \varepsilon$.

Or, $\|f(X) - L\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |f_i(X) - \ell_i|$, donc on a (pour ces X tels que $\|X - X_0\| < \eta$)

$$|f_{i_0}(X) - \ell_{i_0}| \leq \|f(X) - L\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration du théorème dans le sens \implies .

Réciproquement, si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\lim_{X \rightarrow X_0} f_i(X) = \ell_i$ alors :

soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe pour chaque i entre 1 et n , un $\eta_i > 0$ qui assure que dès que $\|X - X_0\| < \eta_i$, on peut en déduire $|f_i(X) - \ell_i| < \varepsilon$.

Posons $\eta = \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i$. Ce nombre est strictement positif. On peut donc dire :

$\exists \eta > 0$ tel que $\|X - X_0\| < \eta$ implique que pour chaque i , puisque $\eta \leq \eta_i$, on a $\|X - X_0\| < \eta_i$ et donc $|f_i(X) - \ell_i| < \varepsilon$.

Le plus grand des $|f_i(X) - \ell_i|$ est donc lui aussi $< \varepsilon$. Mais ce max est

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(X) - \ell_i| = \|f(X) - L\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Un corollaire important en est le suivant.

Proposition 3.15 (linéarité de la limite) Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n , définies au voisinage de X_0 , et admettant une limite en X_0 , si λ et μ sont deux réels quelconques, alors la fonction (de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n) $\lambda f + \mu g$ admet une limite en X_0 et on a :

si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$ et $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = M$, alors

$$\lim_{X \rightarrow X_0} (\lambda f(X) + \mu g(X)) = \lambda L + \mu M.$$

La démonstration est immédiate en considérant les fonctions coordonnées et le Corollaire 3.11 (p. 72).

3.3.5 Continuité

Définition 3.16 (continuité en un point) Une fonction f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n est continue en X_0 lorsque f est définie en X_0 , et au voisinage de X_0 , et lorsque f admet une limite en X_0 (qui ne peut être que $f(X_0)$, d'après la Proposition 3.4 p. 66). On retient

$$f \text{ continue en } X_0 \iff \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0).$$

Définition 3.17 (continuité globale) Une fonction f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n est continue sur un sous-ensemble \mathcal{E} de son ensemble de définition lorsque pour tout $X_0 \in \mathcal{E}$, on a f continue en X_0 .

Une fonction f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n est continue lorsqu'elle est continue sur son ensemble de définition.

Ces définitions sont évidemment les mêmes que pour la continuité des fonctions réelles d'une variable.

Nous admettrons les propriétés suivantes qui sont en fait très simples à démontrer car ce sont simplement des conséquences des propriétés correspondantes sur les limites.

Proposition 3.18 Si f et g sont deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n continues [resp. continues en X_0][resp. continues sur \mathcal{E}], alors pour tous λ, μ réels, $\lambda f + \mu g$ est continue [resp. continue en X_0][resp. continue sur \mathcal{E}].

Proposition 3.19 Si f est une fonction continue de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n , si g est une fonction continue de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m , alors $g \circ f$ est une fonction continue partout où elle est définie.

De même, si f est une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n telle que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$, si g est une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m définie et continue au voisinage de L , alors on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} (g \circ f)(X) = g(L).$$

Remarquons que dans cet énoncé en particulier, comme d'ailleurs dans tout ce §, il est tout à fait possible qu'un ou plusieurs des entiers m, n, p soient égaux à 1.

Proposition 3.20 Une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n est continue [resp. continue en X_0][resp. continue sur \mathcal{E}] si et seulement si ses n fonctions composantes sont continues [resp. continues en X_0][resp. continues sur \mathcal{E}].

Proposition 3.21 Une fonction f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n est continue en X_0 si et seulement si étant définie en X_0 , on a

$$(3.14) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left. \begin{array}{l} \|X - X_0\| \leq \eta \\ \text{et } X \in \mathcal{D}(f) \end{array} \right\} \implies \|f(X) - f(X_0)\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.22 (continuité d'une fonction réelle de plusieurs variables)

Une fonction f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} est continue en X_0 si et seulement si étant définie en X_0 , on a

$$(3.15) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \left. \begin{array}{l} \|X - X_0\| \leq \eta \\ \text{et } X \in \mathcal{D}(f) \end{array} \right\} \implies |f(X) - f(X_0)| \leq \varepsilon.$$

Dans ces deux dernières propositions, on peut bien sûr remplacer les \leq par des $<$.

Nous sommes maintenant armés pour étudier concrètement les limites et la continuité des fonctions de plusieurs variables.

3.4 Étude pratique des limites de fonctions réelles de plusieurs variables

3.4.1 Présentation de la situation

Dans ce §, nous considérerons des fonctions f à valeurs dans \mathbb{R} , définies sur une partie de \mathbb{R}^p . Dans la plupart des exemples, p vaut 2, et parfois 3, mais en théorie, p peut prendre n'importe quelle valeur entière non nulle, et même 1, mais alors ce n'est plus intéressant : f serait dans ce cas une fonction d'une seule variable.

3.4.2 Fonctions continues « de référence »

Proposition 3.23 (continuité des projections)

Soit p_i la i -ème projection de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} .

p_i est l'application qui à tout vecteur $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$ associe x_i pour $i \in \{1, \dots, p\}$.

Alors p_i est continue.

Preuve Soit $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{p0}) \in \mathbb{R}^p$. Montrons la continuité de p_i en X_0 , qui est quelconque, ce qui assurera la continuité de p_i .

$\forall \varepsilon > 0$, on peut affirmer qu'il existe $\eta = \varepsilon > 0$

tel que si on a $\|X - X_0\|_\infty \leq \eta$ alors on a $\max_{1 \leq j \leq p} |x_j - x_{j0}| \leq \eta = \varepsilon$ (en effet la j -ème composante de $X - X_0$ est bien sûr égale à la différence des j -èmes composantes de X et de X_0 , c'est-à-dire $x_j - x_{j0}$).

En particulier, on a bien sûr $|x_i - x_{i0}| \leq \varepsilon$.

Mais ceci signifie clairement que $|p_i(X) - p_i(X_0)| \leq \varepsilon$. Ce qui est souligné permet d'affirmer que p_i est continue en X_0 d'après la proposition 3.22 ci-dessus. \square

On en déduit la proposition suivante qui généralise ce résultat.

Corollaire 3.24 Si $J = \{j_1, \dots, j_m\} \subset \{1, \dots, p\}$ est un sous-ensemble de m indices, alors l'application p_J de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^m définie par

$$p_J(X) = p_J(x_1, \dots, x_p) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$$

est continue.

Preuve Il suffit de remarquer que toutes les applications composantes de p_J sont des projections p_{j_k} , qui sont continues d'après la Proposition 3.23 p. 77. \square

Proposition 3.25 (Opérations)

Soit S l'application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} , définie par $S(x, y) = x + y$.

Alors S est continue.

Soit P l'application de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} , définie par $P(x, y) = xy$.

Alors P est continue.

Preuve Ces deux résultats sont des corollaires immédiats des propositions correspondantes concernant la somme et le produit des limites (Propositions 3.9 et 3.10 p. 70-71), appliquées aux fonctions projections p_1 et p_2 . \square

Corollaire 3.26 Toute fonction fabriquée avec une seule formule ne contenant que des opérations usuelles ($+, \times, -, /$) et des fonctions usuelles continues ($|\cdot|$ (valeur absolue), \sin , \cos , \exp , \ln , \arcsin , $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, sh , argth , ...) est continue.

Il n'est pas possible de démontrer rigoureusement un énoncé aussi vague, mais nous allons essayer d'en expliquer le principe :

Toute fonction fabriquée avec une seule formule ne contenant que des opérations usuelles et des fonctions usuelles continues peut en fait se décomposer en une succession de fonctions d'une ou plusieurs variables, toutes continues.

Illustrons simplement ce type de raisonnement par un exemple :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par

$$f(x, y, z) = \frac{y e^{x^2 + \sin^2 z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Montrons que f est continue.

Nous allons décomposer f en une composition de fonctions toutes continues.

Considérons

$$u_1 : (x, y, z) \mapsto x \mapsto x^2.$$

u_1 est une application continue comme composée $u_1 = c \circ p_1$, c étant la fonction « carré » $x \mapsto x^2$ est classiquement continue, p_1 qui est la première projection de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} est continue d'après la Proposition 3.23 p. 77.

Soit maintenant

$$u_2 : (x, y, z) \mapsto z \mapsto \sin^2 z.$$

Elle se décompose aussi $u_2 = g_1 \circ p_3$ avec p_3 troisième projection et $g_1 : z \mapsto \sin^2 z$ fonction continue, donc u_2 est aussi continue.

On définit maintenant

$$v_1 : (x, y, z) \mapsto (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)) = (x^2, \sin^2 z).$$

v_1 est continue puisque ses fonctions composantes u_1 et u_2 le sont.

Maintenant $v_2 = S \circ v_1$ (S : notation de la proposition 3.25 p. 77) définie par

$$v_2 : (x, y, z) \mapsto (x^2, \sin^2 z) \mapsto x^2 + \sin^2 z$$

est bien sûr continue et $v_3 = \exp \circ v_2$ est elle aussi continue. On a

$$v_3 : (x, y, z) \mapsto e^{x^2 + \sin^2 z}.$$

On considère ensuite

$$v_4 : (x, y, z) \mapsto (y, e^{x^2 + \sin^2 z}).$$

C'est une application de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^2 dont les fonctions composantes sont p_2 et v_3 : elle est continue.

Ensuite on prend $N = P \circ v_4$ (P : notation de la proposition 3.25 p. 77). C'est une application continue et elle associe à tout (x, y, z) le numérateur de $f(x, y, z)$:

$$N : (x, y, z) \mapsto (p_2(x, y, z), v_3(x, y, z)) = (y, e^{x^2 + \sin^2 z}) \mapsto y e^{x^2 + \sin^2 z}.$$

Pour le dénominateur, on raisonne un peu de la même façon : si

$$u_3 : (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2).$$

on a $u_3 = (c \circ p_1, c \circ p_2)$ donc u_3 est continue.

Ensuite on considère $u_4 = S \circ u_3$, qui est continue. u_4 est définie par

$$u_4 : (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2) \mapsto x^2 + y^2.$$

On considère maintenant $u_5 = c \circ p_3$, qui est continue et est définie par

$$u_5 : (x, y, z) \mapsto z \mapsto z^2.$$

On pose maintenant $u_6 = (u_4, u_5)$ et on obtient (enfin !) la quantité sous le radical avec la fonction $R = S \circ u_6$

$$R : (x, y, z) \mapsto (u_4(x, y, z), u_5(x, y, z)) = (x^2 + y^2, z^2) \mapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Si on pose $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, et $w_1 = h \circ R$, ce sont des fonctions continues et on a

$$w_1 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Pour terminer, on pose $w_2 = (N, w_1)$ et on constate qu'on a $f = P \circ w_2$ puisque

$$f : (x, y, z) \mapsto \left(y e^{x^2 + \sin^2 z}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \mapsto \frac{y e^{x^2 + \sin^2 z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f(x, y, z).$$

Donc f est continue (ouf !)

Il est bien évident qu'un tel raisonnement n'est pas à refaire. En pratique, on se contentera de dire « f est clairement continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ».

3.4.3 Changement de base, de repère

Nous avons maintenant les moyens de démontrer une propriété très importante en théorie de l'analyse en dimension finie.

Théorème 3.27 *La notion de limite ou de continuité d'une fonction d'un espace vectoriel ou affine E de dimension finie p vers un espace vectoriel ou affine F de dimension finie n ne dépend pas de la base ou du repère choisi dans chacun de ces espaces.*

De même la convergence d'une suite à valeurs dans un espace affine ou vectoriel E est indépendante de la base ou du repère de E choisi.

Preuve Pour définir la notion de limite ou de continuité d'une fonction de E vers F , on passe par les coordonnées dans une base ou un repère dans chacun de ces espaces et on se ramène ainsi à une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n . Pour montrer que le choix de la base (ou du repère) est sans importance sur le résultat, il est clair qu'il suffit de montrer la continuité de l'application changement de base (ou de repère).

Or, ce résultat est une conséquence du lemme qui suit. \square

Lemme 3.28 Soit E un espace vectoriel ou affine de dimension finie n .

Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases (ou repères cartésiens) de E .

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit ψ_i l'application de E vers \mathbb{R}^n qui à un élément X de E fait correspondre le n -tuple $\psi_i(X)$ de ses coordonnées dans la base (ou le repère) \mathcal{B}_i .

Alors l'application $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ qui va de \mathbb{R}^n dans lui-même est continue.

Remarquons que cette application $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ est l'application changement de base (ou de repère) de \mathcal{B}_2 vers \mathcal{B}_1 .

En effet, elle associe aux coordonnées dans \mathcal{B}_2 d'un élément X de E les coordonnées de X dans \mathcal{B}_1 .

Preuve Il suffit de se rappeler les formules de changement de base (ou de repère).

Si X a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}_1 et $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}_2 , on a

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + \cdots + a_{1n}x'_n [+ x_{\Omega 1}] \\ \vdots \quad : \quad \vdots \quad : \\ x_n = a_{n1}x'_1 + \cdots + a_{nn}x'_n [+ x_{\Omega n}]. \end{cases}$$

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est la matrice de changement de base, elle est formée par la juxtaposition des vecteurs-colonnes coordonnées dans la base \mathcal{B}_1 des vecteurs de \mathcal{B}_2 . (On rajoute les constantes $x_{\Omega i}$ seulement si on est dans un espace affine, $(x_{\Omega i})_{1 \leq i \leq n}$ étant alors les coordonnées de l'origine Ω du repère \mathcal{B}_2 dans le repère \mathcal{B}_1). Ces formules caractérisent l'application $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$, puisqu'elles donnent les x_i en fonction des x'_i . Chaque ligne caractérise une des fonctions coordonnées de $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$, et il est clair que ces fonctions coordonnées sont continues puisque définies seulement avec des produits et des sommes.

$\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ est donc continue. \square

3.4.4 Continuité partielle

Définition 3.29 Soit f une fonction de plusieurs variables : f est une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} . On dit que f est partiellement continue en $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0})$

par rapport à la i -ème variable (ou par rapport à la variable x_i) lorsque la fonction d'une seule variable

$g_i : x_i \mapsto g_i(x_i) = f(x_1, \dots, x_{(i-1)0}, x_i, x_{(i+1)0}, \dots, x_{n0})$ est continue. g_i est appelée la i -ème fonction partielle de f en X_0 .

Traduisons cette définition dans une situation usuelle : si f est une fonction des trois variables (x, y, z) , la continuité partielle de f en $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ par rapport à la 1^{re} variable (par rapport à x) signifie que la fonction $g_1 : x \mapsto g_1(x) = f(x, y_0, z_0)$ est continue.

Le lien entre la notion de continuité et celle de continuité partielle est assuré par la propriété

Proposition 3.30 Si f est une fonction de plusieurs variables continue en X_0 , alors f est partiellement continue par rapport à toutes ses variables.

Preuve Il suffit de se rendre compte que la i -ème fonction partielle g_i de f en X_0 se décompose comme $f \circ u_i$, u_i étant la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^p définie par $u_i(t) = (x_1, \dots, x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, \dots, x_{n0})$. Cette fonction u_i est évidemment continue, puisque ses fonctions composantes sont continues en tant que fonctions toutes constantes, sauf la i -ème qui est la fonction identique $t \mapsto t$ qui est aussi continue. \square

Remarque : Attention ! La réciproque est fausse, ainsi que nous le verrons un peu plus loin.

3.4.5 Méthodes pour démontrer une limite

Lorsque l'on doit démontrer qu'une fonction f admet une limite pour $X \rightarrow X_0$, en général, c'est qu'il y a un problème en X_0 : la formule définissant $f(X)$ n'est pas valable lorsqu'on remplace X par X_0 . Il y a principalement deux types de situation :

- soit $X_0 \notin D(f)$ et on demande de trouver, si elle existe, $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$;
- soit $f(X_0)$ est défini à part, et on se demande si f est continue.

Dans les deux cas, la démarche est la même : on cherche si $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \neq X_0}} f(X)$ existe, et

si oui, on cherche à déterminer sa valeur.

En général, il faut essayer de deviner si on va démontrer que la limite existe ou si au contraire on va montrer que cette limite n'existe pas. On dispose du théorème suivant :

Théorème 3.31 (caractérisation séquentielle des limites) Soit f une fonction de p variables définie au voisinage de $X_0 \in \mathbb{R}^p$; alors $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$ si et

seulement si, pour toute suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(f)$, convergente vers X_0 , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X^n) = \ell$.

Preuve Supposons $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$.

Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(f)$, convergente vers X_0 . Pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$, il existe $\eta > 0$, tel que si $\|X - X_0\| \leq \eta$, avec $X \in \mathcal{D}(f)$, alors on a $|f(X) - \ell| \leq \varepsilon$.

Mais pour cet $\eta > 0$, puisque $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X_0 , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on a $\|X^n - X_0\| \leq \eta$, avec par construction, $X^n \in \mathcal{D}(f)$. On peut donc conclure que $|f(X^n) - \ell| \leq \varepsilon$ et ce qui est souligné montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X^n) = \ell$.

Réciproquement : on va raisonner par la contraposée. Supposons que l'on n'a pas $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$ (soit cette limite est différente, soit elle n'existe pas). Nous allons montrer qu'on peut alors construire une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(f)$ qui converge vers X_0 , mais qui est telle que la suite de réels $(f(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ .

Puisque $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$ est faux, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe un $X \in \mathcal{D}$ qui vérifie $\|X - X_0\| \leq \eta$, mais pas $|f(X) - \ell| \leq \varepsilon_0$, donc qui est tel que $|f(X) - \ell| > \varepsilon_0$.

En particulier, si on prend $\eta = \frac{1}{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $X^n \in \mathcal{D}(f)$ qui est tel que $\|X^n - X_0\| \leq \frac{1}{2^n}$, mais qui est tel que $|f(X^n) - \ell| > \varepsilon_0$.

On construit ainsi une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(f)$, qui converge vers X_0 puisque $\|X^n - X_0\| \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ (voir la proposition 1.31 p. 21), mais on est sûr que $(f(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ puisque $|f(X^n) - \ell| > \varepsilon_0 > 0$, donc $|f(X^n) - \ell|$ ne tend pas vers 0. \square

Ce théorème permet de montrer qu'une fonction f n'admet pas la limite ℓ lorsque $X \rightarrow X_0$, ou de montrer que cette fonction n'admet pas du tout de limite pour $X \rightarrow X_0$; il permet aussi de trouver la seule valeur possible de la limite éventuelle ℓ de $f(X)$ pour $X \rightarrow X_0$.

- Si on arrive à construire une suite de vecteurs (X^n) de $\mathcal{D}(f)$, convergente vers X_0 , et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X^n) \neq \ell$, on est sûr de ne pas avoir $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$
- Si on arrive à trouver deux suites de vecteurs (X^n) et (X'^n) de $\mathcal{D}(f)$, toutes deux convergentes vers X_0 et telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X^n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(X'^n)$, alors on est sûr que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ n'existe pas.
- Si on trouve une suite de vecteurs (X^n) de $\mathcal{D}(f)$, convergente vers X_0 , telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X^n)$ est facile à calculer, alors si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ existe, sa valeur est égale

à la valeur de cette limite facile à calculer.

- Si on trouve une suite de vecteurs (X^n) de $\mathcal{D}(f)$, convergente vers X_0 , telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X^n) = \pm\infty$, alors on est sûr que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ n'existe pas.

Étude d'un exemple

Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Il est clair que cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Est-ce que f admet une limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

Considérons la suite (X^n) définie par $X^n = (u_n, v_n) = (0, \frac{1}{2^n})$. Elle converge évidemment vers $(0, 0)$ et est formée de vecteurs de $\mathcal{D}(f)$. Calculons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X^n)$ et étudions si cette quantité possède une limite pour $n \rightarrow +\infty$.

$$f(X^n) = f(0, \frac{1}{2^n}) = \frac{0 \cdot \frac{1}{2^n}}{0^2 + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On peut donc affirmer que si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ existe, alors cette limite est nulle, mais il ne faut surtout pas conclure que cette limite existe.

Considérons maintenant la suite (Y^n) définie par $Y^n = (v_n, u_n) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n})$. Évidemment, elle converge aussi vers $(0, 0)$ et est formée de vecteurs de $\mathcal{D}(f)$. Mais on a cette fois

$$f(Y^n) = f(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) = \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{\frac{1}{2^{2n}}}{\frac{2}{2^{2n}}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \neq 0.$$

Puisque $f(Y^n)$ n'a pas la même limite que $f(X^n)$, on peut affirmer que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ n'existe pas, que f n'admet pas de limite pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Autre méthode

Il est un peu lourd d'introduire toujours des suites pour réfuter une limite, et on aime bien utiliser les fonctions vectorielles, faciles à se représenter si on utilise l'interprétation courbe paramétrée.

La propriété suivante est un corollaire immédiat du théorème 3.7 (p. 68) utilisé avec $p = m = 1$.

Proposition 3.32 Si f est une fonction réelle de plusieurs variables (de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}), si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \ell$, alors pour toute fonction vectorielle X de la variable réelle t à valeurs dans $\mathcal{D}(f)$, (X est une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^p), telle que $\lim_{t \rightarrow \alpha} X(t) = X_0$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} f(X(t)) = \ell.$$

Dans cet énoncé, α désigne un endroit de \mathbb{R} où on peut calculer une limite : ce peut être un réel t_0 , ou $\pm\infty$, ou encore un réel à gauche ou à droite comme t_0^+ ou t_0^- .

Une interprétation géométrique ou cinématique importante de cet énoncé est le suivant :

Si $M(t)$ est un point mobile qui tend vers le point M_0 de coordonnées X_0 (n'oublions pas que X_0 est un p -uple, qui peut être considéré comme les coordonnées d'un point), alors l'image par f de ce point mobile tend aussi vers ℓ . En d'autres termes, quel que soit le chemin (au sens courbe paramétrée) qu'utilise X pour se rapprocher de X_0 , on doit avoir $f(X) \rightarrow \ell$.

Attention ! ceci n'est pas une propriété caractéristique de la limite, car aussi difficile à se le représenter que cela puisse paraître, il est possible que X tends vers X_0 sans emprunter un chemin !

En particulier, il est tout à fait insuffisant que $f(X)$ tends vers ℓ uniquement lorsque X se rapproche de X_0 en suivant des droites.

Application

Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas ℓ comme limite lorsque $X \rightarrow X_0$, il suffit de trouver une façon de se rapprocher de X_0 en suivant un chemin (inclus dans $\mathcal{D}(f)$), c'est-à-dire de trouver une fonction vectorielle $X(t)$ telle que $\lim_{t \rightarrow \alpha} X(t) = X_0$, avec $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(X(t))$ qui n'existe pas, ou qui est infinie, ou qui est différente de ℓ .

De même, pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite lorsque $X \rightarrow X_0$, il suffit de trouver deux façons $X(t)$ et $Y(t)$ de se rapprocher de X_0 en suivant des chemins inclus dans $\mathcal{D}(f)$ tels que $\lim_{t \rightarrow \alpha} X(t) = X_0$ et $\lim_{t \rightarrow \alpha} Y(t) = X_0$ mais avec $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(X(t)) \neq \lim_{t \rightarrow \alpha} f(Y(t))$, ou encore de trouver un seul chemin avec la limite de $f(X)$ le long de ce chemin qui est infinie ou qui n'existe pas.

Autre exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

On cherche si f admet une limite lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Pour cela on va chercher la limite de $f(x, y)$ lorsque (x, y) se rapproche de $(0, 0)$ en suivant différents chemins.

Tout d'abord, si (x, y) reste sur la « première diagonale du repère », la droite $y = x$. Une paramétrisation de ce chemin est $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t. \end{cases}$

Il suffit de faire tendre t vers 0 pour que le point (x, y) tends vers $(0, 0)$ en suivant ce chemin. On a alors

$$f(x(t), y(t)) = \frac{t^2 - t^2}{t^2 + t^2} = 0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Donc si f admet une limite en $(0, 0)$, cette limite est nulle.

Maintenant, on fait tendre (x, y) vers $(0, 0)$ en restant sur l'axe des abscisses.

Cela correspond à la paramétrisation $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases}$ avec $t \rightarrow 0$. On a alors :

$$f(x(t), y(t)) = \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1.$$

On peut donc affirmer que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Ce n'est pas utile, mais il est intéressant de se rendre compte que si (x, y) tend vers $(0, 0)$ en restant sur l'axe des ordonnées, alors on trouve une troisième valeur $f(x, y) = -1$.

3.4.6 Comment montrer que f admet une limite ?

Jusqu'alors, nous n'avons montré que des « non-limites ». C'est bien, mais ce n'est pas le plus intéressant.

Pour montrer qu'une fonction f admet une limite ℓ en X_0 , il est en général lourd de revenir à la définition par ε, η . On essaiera en général de procéder comme suit. Tout d'abord, il est essentiel de « deviner » quelle est la valeur de ℓ . Si cette valeur n'est pas donnée par l'énoncé, on dispose des deux méthodes que l'on vient de voir pour essayer de la déterminer : utiliser une suite vectorielle qui converge vers X_0 ou un chemin menant à X_0 .

Ensuite, on a intérêt à se ramener à $X_0 = \mathbf{0}$ et à $\ell = 0$, ce qui ne pose pas de problème :

Pour ℓ , il suffit de considérer $g(X) = f(X) - \ell$, et de chercher à montrer que $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = 0$.

Pour X_0 , on fait le changement de variable $X = X_0 + H$ et $X \rightarrow X_0$ équivaut évidemment à $H \rightarrow \mathbf{0}$. Si on veut être plus rigoureux que ce « évidemment », il suffit de comprendre que, dans la caractérisation de la limite, $\|X - X_0\| \leq \eta$ équivaut, puisque $H = X - X_0$, à $\|H\| \leq \eta$ ou encore $\|H - \mathbf{0}\| \leq \eta$, de sorte que si on trouve un $\eta > 0$ correspondant à un ε , il conviendra aussi bien pour établir une $\lim_{X \rightarrow X_0}$ qu'une $\lim_{H \rightarrow \mathbf{0}}$.

Nous supposons, dans la suite quitte à changer les notations, qu'il s'agit de montrer que $\lim_{X \rightarrow \mathbf{0}} f(X) = 0$.

La meilleure méthode consiste à essayer de majorer, pour $X \neq \mathbf{0}$, en valeur absolue, $f(X)$ par une fonction de référence $g(X)$ qui tend vers $\mathbf{0}$ lorsque $X \rightarrow \mathbf{0}$. Cette fonction de référence est la plupart du temps la valeur absolue d'une fonction régulière, continue en $\mathbf{0}$: cette valeur absolue est également continue en $\mathbf{0}$ comme composée de fonctions continues. On peut alors conclure grâce au théorème suivant, qui est à rapprocher du « théorème des gendarmes » pour les fonctions d'une variable.

Théorème 3.33 *Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} , définies au voisinage de $\mathbf{0}$ (mais $f(\mathbf{0})$ n'existe pas forcément).*

On suppose que $\lim_{X \rightarrow \mathbf{0}} g(X) = 0$ et que pour tout $X \neq \mathbf{0}$, dans un voisinage de $\mathbf{0}$, on a

$$|f(X)| \leq g(X).$$

Alors on peut affirmer que

$$\lim_{X \rightarrow \mathbf{0}} f(X) = 0.$$

Attention ! Dans ce théorème (comme d'ailleurs dans le corollaire suivant 3.34), il est essentiel que la majoration de f se fasse en valeur absolue ! Si on a une relation du type $f(X) \leq g(X)$, même si on connaît la limite de g , on ne peut rien dire pour celle de f .

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{X \rightarrow \mathbf{0}} g(X) = 0$, il existe $\eta > 0$ (qu'on peut choisir suffisamment petit pour que la boule de centre $\mathbf{0}$, de rayon η soit incluse dans tous les voisinages des hypothèses) tel que pour tout $X \neq \mathbf{0}$ tel que $\|X\| = \|X - \mathbf{0}\| \leq \eta$, on a $f(X)$ et $g(X)$ qui existent (puisque ces fonctions sont supposées définies au voisinage de $\mathbf{0}$) et surtout $|g(X)| = |g(X) - 0| \leq \varepsilon$.

Mais η étant suffisamment petit, on a $|f(X)| \leq g(X)$, et l'hypothèse impose que dans ce voisinage de $\mathbf{0}$ on ait $g(X) \geq 0$ donc $g(X) = |g(X)|$. On a donc $|f(X)| \leq |g(X)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $|f(X) - 0| \leq \varepsilon$. \square

Nous verrons que pour les fonctions de deux variables, il est souvent pratique d'utiliser les coordonnées polaires, c'est à dire que si $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|_2$ et θ est l'angle que fait le vecteur de coordonnées (x, y) avec le premier vecteur de la base (orthonormée, directe) (θ est aussi l'argument du nombre complexe $x + iy$).

On peut alors souvent utiliser la propriété suivante qui est un corollaire immédiat du théorème 3.33 :

Corollaire 3.34 Si f est une fonction de deux variables x et y définie au voisinage de $(0, 0)$, s'il existe une fonction d'une variable g , telle que pour tous $(x, y) \neq (0, 0)$, dans un voisinage de $(0, 0)$, posant $r = \|(x, y)\|_2$ on ait $|f(x, y)| \leq g(r)$, si de plus on a $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$, alors on a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Preuve Il suffit de se rendre compte que si on pose $h(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = g(r)$, on a par compositions de limites, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$ et qu'on a $|f(x, y)| \leq |h(x, y)|$. On peut donc sans problème appliquer le théorème 3.33. \square

Quelques exemples

- Soit f définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Montrons que $f(x, y, z)$ tend vers 0 pour $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Il est clair que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ donc $\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq 1$.

De même, on a $\frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq 1$.

On en déduit que :

$$|f(x, y, z)| = \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq |z|.$$

Or, on a $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} z = 0$ (la fonction $(x, y, z) \mapsto z$ est la troisième projection p_3 de la proposition 3.23 p. 77). Le théorème 3.33 (p. 86) s'applique donc et on peut conclure que $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) = 0$.

- Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 - xy + y^2}.$$

On veut montrer que cette fonction tend vers 0 pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Vérifions tout d'abord qu'on a bien $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Cherchons pour quelles valeurs le dénominateur de la fraction définissant f s'annule. On a

$$x^2 - xy + y^2 = \frac{x^2 + (x^2 - 2xy + y^2) + y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{(x-y)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 0.$$

Cette quantité ne peut s'annuler que si $x = y = 0$.

Utilisons maintenant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \frac{|x^3|}{x^2 - xy + y^2} = \frac{|r^3 \cos^3 \theta|}{r^2 \cos^2 \theta - r \cos \theta \cdot r \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &\leqslant \frac{r^3}{r^2(1 - \sin \theta \cos \theta)} = \frac{r}{1 - \sin \theta \cos \theta}.\end{aligned}$$

On a utilisé les « évidences » $|\cos \theta| \leqslant 1$ et $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Or, on a $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \leqslant \frac{1}{2}$ donc $1 - \sin \theta \cos \theta \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, donc

$$\frac{1}{1 - \sin \theta \cos \theta} \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \frac{r}{1 - \sin \theta \cos \theta} \leqslant 2r,$$

d'où finalement

$$|f(x,y)| \leqslant 2r.$$

et on peut conclure grâce au corollaire 3.34 p. 87, puisqu'on a évidemment $\lim_{r \rightarrow 0} 2r = 0$.

Degré total

Un petit « truc » bien utile, mais qui est juste une indication, lorsqu'on doit étudier la limite en **0** d'une fonction de plusieurs variables dont l'expression se présente comme une fraction, c'est de considérer le *degré total* de cette fraction. Ce truc ne marche que si le numérateur et le dénominateur sont *homogènes*, c'est-à-dire, comme dans les quatre exemples que nous venons d'étudier, des polynômes sommes de monômes ayant tous le même degré. Le degré total d'une fraction est alors la différence entre le degré du numérateur et le degré du dénominateur. Si le degré total de la fraction est > 0 , on devrait pouvoir arriver à démontrer que la limite de cette fraction est 0. Si le degré total de cette fraction est $\leqslant 0$, on doit pouvoir démontrer qu'il n'y a pas de limite. Les deux derniers exemples que nous venons de voir avaient un degré total de $3 - 2 = 1$, ça confirme la limite nulle que nous avons démontrée. Les deux premiers exemples étudiés dans ce § avaient un degré total égal à $2 - 2 = 0$ et n'avaient effectivement pas de limite.

Attention ! Ce « truc » n'est pas une démonstration : il donne juste une indication sur ce qu'il faut démontrer (limite nulle ou pas de limite).

Et si la fraction n'est pas homogène ? Dans ce cas, il faut « bricoler » ! Voyons deux exemples de cette situation.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^4}.$$

On étudie la limite de f en $(0, 0)$.

Que doit-on montrer? Lorsque (x, y) se rapproche de $(0, 0)$ en suivant un des deux axes de coordonnées, puisque $x = 0$ ou $y = 0$, on a $f(x, y) = 0 \rightarrow 0$. Lorsque (x, y) reste sur la première bissectrice du repère, on a $x = y$, donc $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2} \rightarrow 0$. Il ne semble donc pas absurde d'essayer de démontrer que la fonction tend vers 0. En fait, pour $x \neq 0$, on a $x^2 + y^4 \geq x^2 > 0$, donc $\frac{1}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{x^2}$.

On en déduit que pour $x \neq 0$, on a

$$|f(x, y)| = \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^4} \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = |y|.$$

Comme pour $x = 0$, on a $f(x, y) = 0$, et donc $|f(x, y)| = 0 \leq |y|$, alors on peut affirmer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$|f(x, y)| \leq |y|.$$

Puisqu'il est clair que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, on peut conclure grâce au théorème 3.33 (p. 86) que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

- Soit maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

On étudie encore la limite de f en $(0, 0)$.

Cette situation ressemble beaucoup à la situation précédente, et l'étude de la limite en suivant les mêmes chemins donne le même résultat : apparemment, la limite est nulle.

Seulement la même tentative de majoration n'aboutit pas, car on obtient dans ce cas :

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x|y^2}{x^2} = \frac{y^2}{|x|},$$

et cette dernière fonction semble ne pas avoir de limite en $(0, 0)$: on ne peut donc rien conclure pour f .

En fait, la solution vient d'une remarque pertinente : si $x = y^2$, alors $f(x, y) = \frac{1}{2}$. Donc si (x, y) se rapproche de $(0, 0)$ en suivant la parabole d'équation $x = y^2$, ce qui correspond à la représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ avec $t \rightarrow 0$, on obtient :

$$f(x(t), y(t)) = \frac{t^2 t^2}{(t^2)^2 + t^4} = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{2}.$$

Mais puisque lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ en suivant l'axe des abscisses ($y = 0$), on a $f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$, cela prouve que la fonction f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

3.5 Dérivation partielle

3.5.1 Présentation

La dérivation d'une fonction de plusieurs variables n'est pas aussi simple que pour une fonction d'une seule variable, même à valeurs vectorielles. En effet, la généralisation de la formule $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ qui définit la dérivée, si elle existe, d'une fonction réelle d'une seule variable était possible, comme nous l'avons vu au chapitre 2, aux fonctions vectorielles d'une seule variable sous la forme $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0))$, mais pour une fonction de plusieurs variables, si $X \rightarrow X_0$, quel sens donner à $\frac{1}{X - X_0}$?

Dans le contexte que nous utilisons, $X - X_0$ est un vecteur, et s'il est possible de multiplier un vecteur par un scalaire, s'il est dans certains cas possible de multiplier entre eux deux vecteurs (produit scalaire, produit vectoriel...), si on peut à la rigueur admettre de diviser un vecteur par un scalaire (en le multipliant par l'inverse), en tout cas, il n'est jamais question de diviser par un vecteur.

Alors, comment s'en sort-on ? C'est un point de détail qui vous a peut-être échappé en première lecture dans le § 3.4.4 (p. 80), sur la continuité partielle qui nous apporte la solution : la notion de *fonction partielle* notée g_i dans la définition 3.29, dont la continuité assurait la continuité partielle de f . Grâce à ces fonctions partielles, en raisonnant comme pour la continuité partielle, nous définirons, lorsqu'elles existent les dérivées partielles de f , et nous verrons ensuite quel lien il y a entre les dérivées partielles et la notion de différentiabilité de f .

3.5.2 Dérivées partielles premières

Définition 3.35 Soit f une fonction de plusieurs variables, (de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}) et X_0 un point intérieur à $\mathcal{D}(f)$ (il existe une boule de centre X_0 , de rayon non nul, incluse dans $\mathcal{D}(f)$). Soit g_i la i -ème fonction partielle de f en $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0})$.

Rappel : $g_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
 $t \mapsto g_i(t) = f(x_{10}, \dots, x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, \dots, x_{n0})$.

On dit que f est partiellement dérivable en X_0 par rapport à la i -ème variable lorsque g_i est dérivable en x_{i0} . Dans ce cas, la dérivée partielle par rapport à la i -ème variable de f en X_0 est le nombre réel noté :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) &= f'_{x_i}(X_0) = g'_i(x_{i0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(x_0 + h) - g_i(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{10}, \dots, x_{i0} + h, \dots, x_{n0}) - f(x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0})}{h}. \end{aligned}$$

Pour bien comprendre cette définition, nous allons la traduire dans les cas particuliers où $p = 2$ ou $p = 3$.

Si f est une fonction de deux variables x et y , de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} , on définit la dérivabilité partielle par rapport à la première variable x , de f en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}(f)$ par le fait que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ existe et est réelle. Cela correspond à la dérivabilité en x_0 de la première fonction partielle g_1 en (x_0, y_0) , définie par $g_1(t) = f(t, y_0)$.

On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = g'_1(x_0)$.

De même, f est dérivable en (x_0, y_0) par rapport à y , la deuxième variable lorsque g_2 est dérivable en y_0 , c'est-à-dire lorsque $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$ existe et est réelle.

On a alors $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = g'_2(x_0)$.

Étudions un exemple :

Soit f la fonction de deux variables définie par

$$f(x, y) = x^2y.$$

L'ensemble de définition de cette fonction est évidemment \mathbb{R}^2 . Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point quelconque. La première fonction partielle de f en (x_0, y_0) est la fonction $g_1 : t \mapsto t^2y_0$; elle est évidemment dérivable sur \mathbb{R} et donc en x_0 et $g'_1(t) = 2ty_0$, de sorte qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0y_0.$$

D'autre part, la deuxième fonction partielle de f en (x_0, y_0) est $g_2 : t \mapsto x_0^2t$; elle est dérivable sur \mathbb{R} , donc en y_0 et on a $g'_2(t) = x_0^2$ de sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^2.$$

Cet exemple illustre la situation que l'on rencontre le plus souvent : il n'est en général pas besoin de recourir aux limites pour calculer les dérivées partielles. En pratique, lorsque f est définie par une seule formule algébrique faisant apparaître uniquement des fonctions de référence dérivables, on dérive f directement, en considérant que les variables qui ne sont pas celle par rapport à laquelle on dérive sont (provisoirement) des constantes. Précisons les choses. Pour dériver partiellement $f(x, y) = x^2y$ par rapport à x , on considère que y est une constante, x étant la seule variable : cela n'est pas différent de savoir dériver ax^2 , on sait bien que la dérivée de ax^2 est $2ax$; ici ce n'est pas une constante a mais une constante y , le résultat est cependant le même, à savoir $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et on retrouve ce qu'on avait obtenu en (x_0, y_0) .

De même, pour dériver f par rapport à y , (on omet souvent le terme « partiellement ») on considère que dans x^2y , x est une constante : (c'est comme si on avait à dériver π^2y , on sait bien qu'on trouverait π^2) on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$, c'est conforme à ce qu'on avait obtenu en passant par la deuxième fonction partielle en (x_0, y_0) .

Voyons maintenant un autre exemple où il faudra revenir à la définition avec les limites.

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0. \end{cases}$$

On cherche à étudier les dérivabilités partielles de f en tout (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 (« les », car il y a la dérivabilité partielle par rapport à x et par rapport à y).

Il est clair qu'il y a deux cas différents à étudier selon que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ou $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. :

Pour $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, on est dans la situation de l'exemple précédent. Pour dériver par rapport à x , on considère que y est une constante, et on a juste à dériver une fraction rationnelle (lorsqu'on n'a pas l'habitude, sur un brouillon, on peut remplacer y par a : on dérive $\frac{ax}{x^2 + a^2}$ puis on remplace dans le résultatat a par y).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pour dériver par rapport à y , c'est x que l'on considère comme une constante : remplaçons le par b ; on doit donc dériver $g_2(y) = \frac{by}{b^2 + y^2}$, avec y qui est la variable.

$$\text{On a } g'_2(y) = \frac{b(b^2 + y^2) - by(2y)}{(b^2 + y^2)^2} = b \frac{b^2 - y^2}{(b^2 + y^2)^2}.$$

On remplace alors b par x , et on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Remarquons que l'expression que l'on obtient est très similaire à celle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Il suffisait d'échanger le rôle de x et y dans l'expression de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour obtenir $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. C'est logique car x et y jouent dans l'expression de $f(x, y)$ des rôles tout à fait symétriques. On utilisera souvent cette technique pour éviter de refaire des calculs en tout point similaires à ce qu'on vient de faire.

Voyons maintenant ce qui se passe en $(0, 0)$.

Il n'est pas question ici d'utiliser uniquement l'expression $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ car cette expression n'est pas valable justement en $(0, 0)$. On sait cependant que $f(0, 0)$ existe et vaut 0.

Il est nécessaire ici de revenir à la définition. f est dérivable par rapport à x en $(0, 0)$ si et seulement si la première fonction partielle g_1 de f en $(0, 0)$ est dérivable en 0.

Or, ici g_1 est définie par $g_1(t) = f(t, 0)$, donc si $t \neq 0$, $g_1(t) = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$ et pour $t = 0$, $g_1(0) = f(0, 0) = 0$.

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_1(t) = 0$. Cette fonction g_1 est donc l'application constante $t \mapsto 0$, qui est dérivable, dont la dérivée est partout nulle. f est donc dérivable par rapport à x en $(0, 0)$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Pour la dérivée partielle de f par rapport à y en $(0, 0)$, on peut évidemment refaire le même raisonnement (ou même se contenter d'un « de même »), mais nous allons voir la démarche que l'on utilise le plus souvent.

f est dérivable par rapport à y en $(0, 0)$ si et seulement si le quotient $\frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k}$ admet une limite lorsque $k \rightarrow 0$. Or,

$$\frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 - 0}{k} = 0 \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0.$$

Donc f est dérivable par rapport à y en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Remarque : Cet exemple a été étudié du point de vue de la limite en $(0, 0)$ au § 3.4.5 (p. 83). On avait vu que f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. f n'est donc pas continue en $(0, 0)$, alors que nous venons de montrer qu'on peut l'y dériver. Quelle est l'explication de ce mini-paradoxe ? En fait, il n'y a aucun paradoxe : simplement, pour une fonction de plusieurs variables, l'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité de la fonction, contrairement à ce qui se passe pour une fonction d'une seule variable, où on sait qu'une fonction dérivable en t_0 est nécessairement continue en t_0 . D'ailleurs, on parle simplement de dérivabilité *partielle*. Elle correspond à la dérivabilité des fonctions partielles g_i , qui sont des fonctions d'une seule variable. Ces fonctions partielles sont donc continues si f est partiellement dérivable. Mais justement, nous avons signalé (voir la remarque 3.4.4 p. 81) que la continuité des fonctions partielles n'implique pas celle de la fonction f . Finalement, c'est très cohérent !

Voyons maintenant un exemple pour une fonction de 3 variables.

Soit f définie sur \mathbb{R}^3 par

$$\begin{cases} f(x, y, z) = \frac{(x^2 + 1)y^2}{x^2 + y^2 + 2z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ f(0, 0, 0) = 0. \end{cases}$$

La dérivabilité partielle de f par rapport à chacune des trois variables sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ ne pose qu'un problème de calcul. En effet, pour $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$, les trois fonctions partielles sont

$$\begin{aligned} g_1 : t &\mapsto \frac{(t^2 + 1)y_0^2}{t^2 + y_0^2 + 2z_0^2} \\ g_2 : t &\mapsto \frac{(x_0^2 + 1)t^2}{x_0^2 + t^2 + 2z_0^2} \\ g_3 : t &\mapsto \frac{(x_0^2 + 1)y_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + 2t^2}. \end{aligned}$$

Elles sont évidemment dérивables partout, donc respectivement en x_0, y_0, z_0 . On trouve pour tout $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ (exercice)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{2x(y^2 + 2z^2 - 1)y^2}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + 1)2y(x^2 + 2z^2)}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{-2z(x^2 + 1)y^2}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2}. \end{aligned}$$

En $(0, 0, 0)$, les fonctions partielles sont

$$\begin{aligned} g_1 : \begin{cases} t \mapsto \frac{(t^2 + 1)0^2}{t^2 + 0^2 + 2 \cdot 0^2} = 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 0 \mapsto f(0, 0, 0) = 0 \end{cases} \\ g_2 : \begin{cases} t \mapsto \frac{(0^2 + 1)t^2}{0^2 + t^2 + 2 \cdot 0^2} = \frac{t^2}{t^2} = 1 & \text{pour } t \neq 0 \\ 0 \mapsto f(0, 0, 0) = 0 \end{cases} \\ g_3 : \begin{cases} t \mapsto \frac{(0^2 + 1)0^2}{0^2 + 0^2 + 2t^2} = 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ 0 \mapsto f(0, 0, 0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions g_1 et g_3 sont constantes sur \mathbb{R} donc dérivables de dérivée nulle en 0, et on peut affirmer que f est partiellement dérivable en $(0, 0, 0)$ par rapport à x et par rapport à z avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0.$$

Mais g_2 étant discontinue en 0, elle n'est certainement pas dérivable en 0 et f n'est pas partiellement dérivable en $(0, 0, 0)$ par rapport à y . On peut aussi retrouver ce résultat avec la méthode plus usuelle : la dérivabilité partielle de f par rapport à y se traduit par le fait que le quotient $\frac{f(0, 0 + k, 0) - f(0, 0, 0)}{k}$ admette une limite réelle pour $k \rightarrow 0$. Or,

$$\frac{f(0, 0 + k, 0) - f(0, 0, 0)}{k} = \frac{\frac{(0^2+1)k^2}{0^2+k^2+2\cdot 0^2} - 0}{k} = \frac{1}{k}.$$

Ce dernier quotient n'a pas de limite finie pour $k \rightarrow 0$, donc f n'est pas partiellement dérivable par rapport à y .

Bien entendu, comme pour les dérivées des fonctions d'une variable, on peut définir la fonction dérivée partielle par rapport à la i -ème variable $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, dont l'ensemble de définition est l'ensemble des X de $\mathcal{D}(f)$ pour lesquels f est partiellement dérivable par rapport à x_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : X \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(X).$$

Cette fonction dérivée partielle est aussi une fonction de p variables, et il n'est pas impossible de la dériver partiellement à son tour, ce que nous ferons un peu plus loin.

3.5.3 Propriétés des dérivées partielles

Tout d'abord une formalisation d'une propriété déjà signalée :

Proposition 3.36 Toute fonction fabriquée avec une seule formule ne contenant que des opérations usuelles ($+, \times, -, /$) et des fonctions usuelles dérivables ($\sin, \cos, \tan, \arctan, \exp, \ln, \text{sh}, \text{ch}, \text{th}, \text{argsh}, \text{argth}, \dots$) est partiellement dérivable par rapport à chacune de ses variables. On dérive partiellement par rapport à x_i une telle fonction en considérant x_i comme la seule variable, les x_j pour $j \neq i$ étant considérées comme des constantes, et on applique les règles usuelles de dérivation des fonctions d'une seule variable.

Attention ! certaines fonctions usuelles ne sont pas dérivables sur leur ensemble de définition. C'est le cas des fonctions $|\cdot|$ (*valeur absolue*), \arcsin , \arccos , $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, argch . Si l'expression définissant une fonction f contient une de ces fonctions, méfiance ! elle n'est peut-être pas partiellement dérivable.

Les propriétés suivantes généralisent aux dérivées partielles des propriétés classiques de la dérivation.

Proposition 3.37 (linéarité de la dérivation partielle) Si f et g sont deux fonctions de plusieurs variables dérивables partiellement par rapport à x_i , alors

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction de plusieurs variables $\lambda f + \mu g$ est partiellement dérivable par rapport à x_i et on a

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Proposition 3.38 Si f et g sont deux fonctions de plusieurs variables dérivables partiellement par rapport à x_i , alors la fonction de plusieurs variables fg est partiellement dérivable par rapport à x_i et on a

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Une situation destinée à devenir très importante est celle où les fonctions dérivées partielles sont continues.

Définition 3.39 Une fonction de plusieurs variables f (de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}) est dite de classe C^1 sur un sous-ensemble \mathcal{U} de $\mathcal{D}(f)$ lorsque f est partiellement dérivable par rapport à chacune de ses p variables en tout $x \in \mathcal{U}$ et que de plus, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est une fonction (de plusieurs variables) **continue sur \mathcal{U} .** Une fonction est dite simplement de classe C^1 lorsqu'elle est de classe C^1 sur $\mathcal{D}(f)$.

De façon évidente, la somme, le produit de fonctions de classe C^1 sont des fonctions de classe C^1 . De même, toutes les fonctions fabriquées uniquement avec des opérations usuelles et des fonctions usuelles dérивables dont les dérivées sont classiquement continues sont de classe C^1 .

3.5.4 Dérivée d'une fonction composée

Nous allons étudier ici une propriété très importante généralisant la formule de dérivation des fonctions composées $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$. Un peu plus loin, nous irons encore plus loin dans la généralisation, mais pour l'instant, nous nous contenterons de dériver une fonction réelle d'une seule variable dont la définition utilise une fonction de plusieurs variables :

La situation que nous allons étudier est celle d'une fonction F , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , qui se décompose de la façon suivante :

$$F = f \circ u$$

avec

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R}^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ F : & t & \mapsto & \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix} & \mapsto & f(u_1(t), \dots, u_p(t)) = F(t). \end{array}$$

Théorème 3.40 Avec les notations définies ci-dessus, si f est une fonction de classe C^1 sur un domaine ouvert \mathcal{U} , et si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , avec, $\forall t \in I$, $u(t) \in \mathcal{U}$; alors $F = f \circ u$ est une fonction dérivable sur I , et on a

$$F'(t) = \sum_{i=1}^p u'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u(t)).$$

Avant de le démontrer, traduisons ce théorème dans le cas d'une fonction de deux variables.

Si f est une fonction des deux variables x et y , de classe C^1 sur \mathcal{U} , et si u est une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs dans \mathcal{U} , de fonctions coordonnées u_1 et u_2 ($u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$),

alors $F = f \circ u$ est dérivable sur I et on a

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t), u_2(t))u'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t), u_2(t))u'_2(t).$$

Cette dernière formule est très souvent utilisée entre autres par les physiciens qui la notent en abrégé (en posant $u_1 = x$ et $u_2 = y$)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Preuve du théorème pour une fonction de deux variables (la démonstration dans le cas général est du même type, mais est un peu plus lourde à rédiger).

Soit $t_0 \in I$; on doit étudier la limite pour $t \rightarrow t_0$ du rapport $F(t) - F(t_0)$. Pour cela, on utilise l'astuce

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f(u_1(t), u_2(t)) - f(u_1(t_0), u_2(t_0)) \\ &= \left(f(u_1(t), u_2(t)) - f(u_1(t), u_2(t_0)) \right) + \left(f(u_1(t), u_2(t_0)) - f(u_1(t_0), u_2(t_0)) \right) \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Nous considérons pour l'instant que t est fixé, même s'il est destiné à varier et à tendre vers t_0 .

On pose aussi $x = u_1(t)$, $x_0 = u_1(t_0)$, $y = u_2(t)$, $y_0 = u_2(t_0)$. Intéressons-nous d'abord au premier crochet A_1 . Il s'écrit

$$A_1 = f(x, y) - f(x, y_0).$$

Si t est suffisamment proche de t_0 , ce que nous supposons bien évidemment, puisque u_1 et u_2 sont continues, on est sûr que (x, y) et (x, y_0) sont dans \mathcal{U} , et on peut affirmer que f est partiellement dérivable par rapport à y en (x, y_0) . Appelons \widehat{g}_2 la deuxième fonction partielle de f en (x, y_0) . \widehat{g}_2 est donc une fonction dérivable en y_0 .

On peut écrire $A_1 = \widehat{g}_2(y) - \widehat{g}_2(y_0)$. Appliquons la formule des accroissements finis entre y_0 et y , pour cette fonction d'une variable \widehat{g}_2 dérivable.

Il existe donc un nombre ξ entre y_0 et y tel que

$$\widehat{g}_2(y) - \widehat{g}_2(y_0) = (y - y_0)\widehat{g}'_2(\xi) = (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi).$$

En fait, ξ dépend de y , bien sûr, mais aussi de x , puisque la fonction \widehat{g}_2 en dépend : on écrira alors $\xi = \xi_{(x,y)}$.

Remarquons que pour $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, on peut affirmer que $y \rightarrow y_0$ et *a fortiori* $\xi_{(x,y)} \rightarrow y_0$ puisque ce nombre est « coincé » entre y et y_0 .

On a aussi le développement limité à l'ordre 1 de u_2 au voisinage de t_0

$$u_2(t) = u_2(t_0) + (t - t_0)u'_2(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_2(t) = 0.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} A_1 &= (y - y_0)\left(\widehat{g}'_2(\xi)\right) = (u_2(t) - u_2(t_0))\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{(x,y)})\right) \\ &= \left((t - t_0)u'_2(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_2(t)\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_{(x,y)}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right) \\ &= (t - t_0)\left(u'_2(t_0) + \varepsilon_2(t)\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t), \xi_{(u_1(t), u_2(t))}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right) \\ &= (t - t_0)u'_2(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + (t - t_0)\varepsilon_3(t). \end{aligned}$$

On a posé

$$\begin{aligned} \varepsilon_3(t) &= \varepsilon_2(t)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t), \xi_{(u_1(t), u_2(t))}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right) \\ &\quad + u'_2(t_0)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t), \xi_{(u_1(t), u_2(t))}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\right). \end{aligned}$$

En considérant attentivement l'expression de $\varepsilon_3(t)$, on constate qu'elle tend vers 0 lorsque $t \rightarrow t_0$; il est entre autres essentiel de comprendre qu'on utilise ici la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ pour obtenir

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t), \xi_{(u_1(t), u_2(t))}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = 0.$$

Nous appliquons maintenant la même démarche pour le terme A_2 (en légèrement plus simple : on n'aura plus à utiliser la continuité des dérivées partielles).

$$A_2 = f(x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

On appelle g_1 la première fonction partielle de f en (x_0, y_0) . g_1 est dérivable en x_0 . On obtient

$$\begin{aligned} A_2 &= g_1(x) - g_1(x_0) = (x - x_0)(g'_1(x_0) + \varepsilon_4(x)) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_4(x) = 0 \\ &= (u_1(t) - u_1(t_0)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_4(x) \right) \\ &= (t - t_0)(u'_1(t_0) + \varepsilon_5(t)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + \varepsilon_4(u_1(t)) \right) \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_5(t) = 0 \\ A_2 &= (t - t_0)u'_1(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + (t - t_0)\varepsilon_6(t). \end{aligned}$$

On a posé $\varepsilon_6(t) = \varepsilon_5(t) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + \varepsilon_4(u_1(t)) \right) + u'_1(t_0)\varepsilon_4(u_1(t))$.

Il est ici tout à fait clair que $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_6(t) = 0$.

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} &= \frac{A_1 + A_2}{t - t_0} \\ &= u'_2(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + \varepsilon_3(t) + u'_1(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + \varepsilon_6(t). \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_3(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon_6(t) = 0$, on peut conclure que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = F'(t_0) = u'_2(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(u_1(t_0), u_2(t_0)) + u'_1(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(t_0), u_2(t_0)).$$

□

Un corollaire important de ce théorème en est une généralisation de la formule des accroissements finis aux fonctions de plusieurs variables.

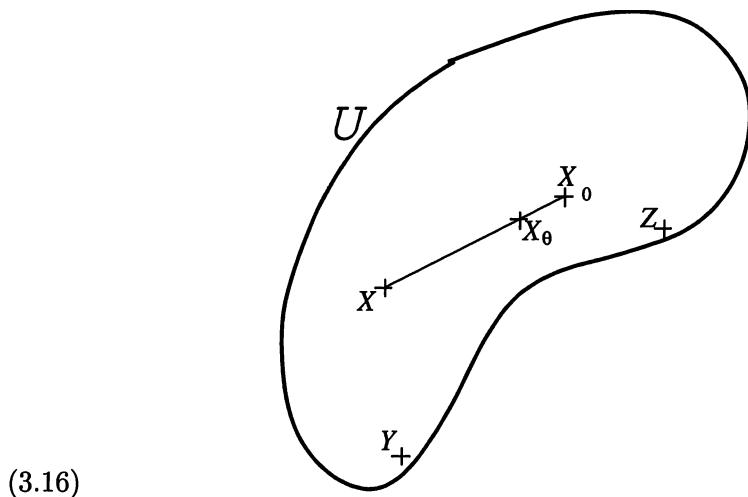
Théorème 3.41 (accroissements finis pour plusieurs variables)

Soit f une fonction de plusieurs variables, de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{U} \subset D(f)$.

Soit $X_0 \in \mathcal{U}$, et $X = X_0 + H \in \mathcal{U}$. On suppose de plus que tout le segment $[X_0, X_0 + H]$ est inclus dans \mathcal{U} . (Rappel : $[X_0, X_0 + H] = \{X_0 + tH \mid t \in [0, 1]\}$)

Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta H).$$



Ce théorème se traduit ainsi : il existe toujours sur le segment $[X_0X]$ un point X_θ tel que la différence $f(X) - f(X_0)$ s'exprime en fonction des dérivées partielles en X_θ . Remarquons que pour $p = 1$, on retrouve exactement le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable.

Pour $p = 2$, ce théorème s'écrit

Si f est une fonction de 2 variables, de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\mathcal{U} \subset D(f)$, si $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$, si $X = (x_0 + h, y_0 + k) \in \mathcal{U}$, le segment $[X_0X]$ étant tout entier inclus dans \mathcal{U} , alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Preuve On introduit la fonction d'une variable

$$F(t) = f(X_0 + tH) = f(x_{10} + th_1, \dots, x_{p0} + th_p).$$

On a bien sûr $F(0) = f(X_0)$ et $F(1) = f(X)$. Cette fonction est définie sur $[0, 1]$ par $F = f \circ u$ avec $u : t \mapsto u(t) = X_0 + tH$, fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^p , dont la i -ème fonction composante est $u_i(t) = x_{10} + th_1$. On a $u'_i(t) = h_i$ donc, d'après le théorème 3.40 (p. 97), F est dérivable et

$$F'(t) = \sum_{i=1}^p u'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u(t)) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + tH).$$

Mais cette fonction F étant dérivable sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis (pour les fonctions d'une seule variable !) entre 0 et 1 : on a

$$\exists \theta \in]0, 1[\quad \text{tel que} \quad \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(\theta).$$

Traduisant cette assertion avec les valeurs de $F(1), F(0)$ et l'expression de F' , on obtient

$$\exists \theta \in]0, 1[\quad \text{tel que} \quad f(X_0 + H) - f(X_0) = \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta H).$$

□

Remarque : Dans les hypothèses du théorème 3.41, la condition que tout le segment $[X_0 X]$ soit inclus dans \mathcal{U} est parfois vérifiée pour tous les couples de points (X_0, X) de points de \mathcal{U} : dans ce cas, on dit que \mathcal{U} est **convexe**. Le domaine \mathcal{U} représenté sur la figure (3.16) de la page précédente n'est pas convexe, car on peut y trouver deux points Y et Z tels que le segment $[YZ]$ n'est pas entièrement inclus dans \mathcal{U} .

Les domaines convexes sont des ouverts « de bonne qualité » dans lesquels il est intéressant de travailler.

3.5.5 Dérivées partielles successives

Définition 3.42 Soit f une fonction des p variables x_1, \dots, x_p , de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} . On suppose que f est partiellement dérivable par rapport à x_i en tout X dans un domaine $\mathcal{U} \subset D(f)$. Si la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est elle-même partiellement dérivable par rapport à x_j en $X_0 \in \mathcal{U}$, alors la dérivée partielle par rapport à x_j de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en X_0 s'appelle dérivée partielle seconde de f par rapport à x_j et x_i en X_0 et se note

$$(3.17) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(X_0) = (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0) = f''_{x_i x_j}(X_0)$$

Si $j = i$, on parle de la dérivée partielle seconde par rapport à x_i en X_0 et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(X_0) = (f'_{x_i})'_{x_i}(X_0) = f''_{x_i^2}(X_0).$$

On peut ainsi définir les fonctions dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{x_i x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f''_{x_i^2}.$$

Si ces fonctions dérivées partielles secondes sont elles aussi partiellement dérивables, on peut itérer le procédé et définir des dérivées partielles troisièmes (d'ordre 3)

$$(3.18) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) = f'''_{x_i x_j x_k} = (f''_{x_i x_j})'_{x_k} \quad \text{etc.}$$

et des dérivées partielles d'ordre n .

Remarque : Attention à l'ordre des indices : si on dérive par rapport à x_j la dérivée par rapport à x_i , on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j}.$$

Bien noter le changement d'ordre entre x_i et x_j selon le formalisme choisi. La logique de ces ordres différents vient de la position respective des indices avant suppression des parenthèses dans (3.17) et dans (3.18) selon le formalisme choisi. (l'importance de cette subtilité décroîtra beaucoup après le théorème de Schwarz)

Étude d'un exemple

Soit f la fonction des trois variables x, y, z définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x e^y}{z}.$$

Son ensemble de définition est l'ensemble des triplets de réels dont le troisième terme est non nul ($\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$). Construite à l'aide de fonctions indéfiniment dérивables, et d'opérations élémentaires, f est évidemment partiellement dérivable autant de fois que l'on veut. Nous allons calculer les dérivées partielles successives de f jusqu'à l'ordre 3. Il est intéressant de prévoir à l'avance combien de calculs cela demandera :

Il y a trois dérivées partielles premières, chacune d'entre elles pouvant se dériver partiellement de trois façons, cela fait *a priori* $3 \times 3 = 9$ dérivées partielles secondes et en poursuivant le raisonnement, cela fait *a priori* 27 dérivées partielles troisièmes. On aura donc intérêt à bien s'organiser pour les calculs. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{e^y}{z} & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{x e^y}{z} & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -\frac{x e^y}{z^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{x e^y}{z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{2x e^y}{z^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{e^y}{z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= -\frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= -\frac{x e^y}{z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & & & & \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y, z) &= 0 & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y, z) &= \frac{x e^y}{z} & \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x, y, z) &= -\frac{6x e^y}{z^4} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y, z) = 0 & & & & \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}(x, y, z) = 0 & & & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y, z) &= \frac{e^y}{z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y, z) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(x, y, z) &= -\frac{x e^y}{z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2}(x, y, z) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}(x, y, z) &= \frac{2 e^y}{z^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x, y, z) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}(x, y, z) &= \frac{2x e^y}{z^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x, y, z) \\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) &= -\frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}(x, y, z) \\
&= \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x, y, z).
\end{aligned}$$

Si vous avez fait honnêtement ces $3 + 9 + 27 = 39$ calculs, vous vous êtes sans doute aperçu que l'ordre des dérivations n'intervient pas. Ce n'est pas un hasard, mais le résultat bien utile d'un théorème très important, le théorème de Schwarz, qui permettra de réduire nettement le nombre de dérivations à faire : ici, par exemple, il suffisait d'en faire 19. Attention, tout de même, ce théorème nécessite des hypothèses supplémentaires sur f , mais ces hypothèses sont toujours satisfaites pour les fonctions construites avec une seule formule n'utilisant que des fonctions usuelles dérivables.

3.5.6 Le théorème de Schwarz

Théorème 3.43 (de Schwarz) Soit f une fonction des p variables x_1, \dots, x_p . Soient i et j deux indices distincts ($1 \leq i < j \leq p$). On suppose qu'il existe une ouvert $\mathcal{U} \subset D(f)$ tel que les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ soient définies et continues sur \mathcal{U} . Alors, pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0).$$

Preuve La démonstration de ce théorème repose sur l'application répétée du théorème des accroissements finis pour les fonctions réelles d'une variable. Rappelons ce théorème :

Si w est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{w(b) - w(a)}{b - a} = w'(c)$.

Nous utiliserons ce théorème des accroissements finis sous la forme suivante, qui en est un corollaire évident :

Si a et $a + h$ sont deux points d'un intervalle où la fonction w est dérivable, alors il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $w(a + h) - w(a) = h w'(a + \alpha h)$.

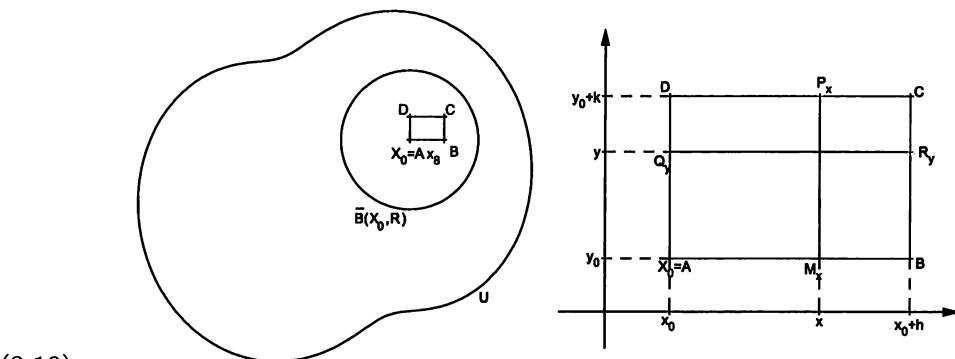
Une remarque préliminaire s'impose : puisque lorsqu'on dérive f par rapport à x_i , toutes les autres variables peuvent être considérées comme des constantes, et que dans ce théorème, seules interviennent les dérivations par rapport à x_i et par rapport à x_j , on peut considérer que tous les autres x_l avec $1 \leq l \leq p$ et $l \neq i, l \neq j$ sont des constantes. Ce point de vue consiste, finalement, pour cette démonstration, à considérer que f est une fonction de seulement *deux variables*. On considérera donc que f est une fonction réelle des deux variables x et y et on admettra que dans le cas général, ce que nous aurons fait reste valable.

Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Puisque \mathcal{U} est un ouvert, il existe une boule de centre X_0 , de rayon R , qui est incluse dans \mathcal{U} . Nous avons le choix d'utiliser n'importe quelle norme de \mathbb{R}^2 , mais ici, la norme la plus pertinente est la norme du max. On suppose donc que $\bar{B}_\infty(X_0, R) \subset \mathcal{U}$.

Soient h et k deux réels strictement positifs, que l'on choisit $< R$.

Considérons $\Delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$. Remarquons que les quatre couples $(x_0 + h, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0, y_0 + k)$ et bien sûr (x_0, y_0) sont dans $\bar{B}_\infty(X_0, R)$, donc dans \mathcal{U} donc dans $\mathcal{D}(f)$ et dans le domaine de continuité des dérivées partielles « croisées » $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; il en est de même de tous les couples situés dans le rectangle délimité par ces 4 points (voir la figure (3.19) de la page suivante).

On appelle $ABCD$ ce rectangle, avec $A = (x_0, y_0) = X_0$, $B = (x_0 + h, y_0)$, $C = (x_0 + h, y_0 + k)$ et $D = (x_0, y_0 + k)$. Les points de ce rectangle sont les points de la forme $P = (x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)$ avec $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$.



(3.19)

Pour tout x entre x_0 et $x_0 + h$, on pose
 $u(x) = f(P_x) - f(M_x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$.

De même, pour tout $y \in [y_0, y_0 + k]$, on pose

$$v(y) = f(R_y) - f(Q_y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

Nous allons calculer de deux façons différentes le nombre $\Delta(h, k)$, d'une part avec la fonction u , d'autre part avec la fonction v .

Premier calcul

On remarque que

$$\begin{aligned}\Delta(h, k) &= (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)) - (f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)) \\ &= u(x_0 + h) - u(x_0).\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction u est dérivable au moins sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$.

En effet, la fonction $u_1 : t \mapsto f(t, y_0 + k)$ est la première fonction partielle de f au point $(x, y_0 + k)$, ceci pour tout $x \in [x_0, x_0 + h]$. Mais pour toutes ces valeurs de x , le point $(x, y_0 + k)$ est dans $\overline{B}_\infty(X_0, R)$, donc dans \mathcal{U} . Or, f est supposée telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ existe dans \mathcal{U} . Cela suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, donc que f est partiellement dérivable par rapport à x pour tout couple dans \mathcal{U} . Or, la dérivabilité partielle de f par rapport à x en $f(x, y_0 + k)$ signifie tout simplement que la première fonction partielle u_1 est dérivable en x , et on a de plus $u'_1(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + k)$.

De même, la fonction $u_2 : t \mapsto f(t, y_0)$ est dérivable sur $[x_0, x_0 + h]$ pour la même raison, et on a $u'_2(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$.

Or, $u = u_1 - u_2$, donc u est dérivable sur $[x_0, x_0 + h]$, et on a

$$u'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0).$$

On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à u entre x_0 et $x_0 + h$.

On obtient qu'il existe $\theta_1 \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned}\Delta(h, k) &= u(x_0 + h) - u(x_0) = h u'(x_0 + \theta_1 h) \\ &= h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right).\end{aligned}$$

(Si on pose $x = x_0 + \theta_1 h$, cela signifie, avec les notations de la figure, que $\Delta(h, k) = h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_x) - \frac{\partial f}{\partial x}(M_x) \right)$.)

On considère maintenant la fonction $g_2 : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, t)$. C'est la deuxième fonction partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0 + \theta_1 h, y)$, et elle est dérivable au moins pour $y \in [y_0, y_0 + k]$, puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ existe dans \mathcal{U} . On a donc g_2

dérivable pour $y \in [y_0, y_0 + k]$, et

$$g'_2(y) = \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0 + \theta_1 h, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x_0 + \theta_1 h, y).$$

Mais on a vu que $\Delta(h, k) = h(g_2(y_0 + k) - g_2(y_0))$. On peut à nouveau appliquer le théorème des accroissements finis à g_2 : il existe $\theta_2 \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= h(g_2(y_0 + k) - g_2(y_0)) = h(kg'_2(y_0 + \theta_2 k)) \\ &= hk \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \right). \end{aligned}$$

On a obtenu la formule

$$(3.20) \quad \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k).$$

On utilise à présent la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $X_0 = (x_0, y_0)$ pour trouver la limite, lorsque (h, k) tendent simultanément vers 0 (en fait vers 0^+ , puisque ces nombres ont été au départ choisis positifs), du membre de gauche de (3.20).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout X tel que $\|X - X_0\|_\infty \leq \eta$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Pour tous h, k strictement positifs tels que $\|(h, k)\|_\infty \leq \eta$ on a à la fois $0 < h \leq \eta$ et $0 < k \leq \eta$, donc θ_1 et θ_2 étant tous deux dans $]0, 1[$, on en déduit que $0 < \theta_1 h \leq \eta$ et $0 < \theta_2 k \leq \eta$, donc $\|(\theta_1 h, \theta_2 k)\|_\infty \leq \eta$. Mais $(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) - X_0 = (\theta_1 h, \theta_2 k)$, donc on a $\|(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) - X_0\|_\infty \leq \eta$. D'après le choix de η , cela permet de conclure que $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0) \right| \leq \varepsilon$, et donc

$$\left| \frac{\Delta(h, k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est souligné, ci-dessus signifie que

$$(3.21) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0).$$

Deuxième calcul

Nous irons cette fois beaucoup plus vite pour les justifications, qui sont en tout point calquées sur celles du premier calcul.

On commence par

$$\Delta(h, k) = v(y_0 + k) - v(y_0).$$

On a v dérivable sur $[y_0, y_0 + k]$ et $v'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$.

Appliquant le théorème des accroissements finis, on trouve qu'il existe $\xi_1 \in]0, 1[$ tel que

$$\Delta(h, k) = h \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \xi_1 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \xi_1 k) \right).$$

On applique à nouveau le théorème des accroissements finis à la première fonction partielle g_1 de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x, y_0 + \xi_1 k)$.

g_1 est dérivable sur $[x_0, x_0 + h]$ et

$$g'_1(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y_0 + \xi_1 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y_0 + \xi_1 k).$$

Il existe donc $\xi_2 \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} \Delta(h, k) &= k \left(g_1(x_0 + h) - g_1(x_0) \right) = k \left(h g'_1(x_0 + \xi_2 h) \right) \\ &= kh \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_0 + \xi_2 h, y_0 + \xi_1 k) \right). \end{aligned}$$

On a obtenu la formule

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_0 + \xi_2 h, y_0 + \xi_1 k).$$

En utilisant maintenant la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en X_0 , on obtient

$$(3.22) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ k \rightarrow 0^+}} \frac{\Delta(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (X_0).$$

Comparant les équations (3.21) et (3.22), grâce au principe de l'unicité de la limite, on obtient ce qu'on devait démontrer, à savoir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (X_0).$$

3.5.7 Fonctions de classe \mathcal{C}^n

Le cas le plus fréquent où l'on peut appliquer le théorème de Schwarz est lorsque f est de classe \mathcal{C}^2 . Définissons cette notion.

Définition 3.44

Soit f une fonction de p variables. On dit que f est de classe \mathcal{C}^n sur un sous-ensemble \mathcal{U} de $\mathcal{D}(f)$ lorsqu'on peut calculer en tout $X_0 \in \mathcal{U}$ toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à n et que toutes ces fonctions sont continues ainsi que f .

f est dite de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Remarquons que cela fait beaucoup de vérifications *a priori*! par exemple pour vérifier qu'une fonction de 3 variables est de classe \mathcal{C}^3 , il faudrait en théorie faire $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ vérifications.

Heureusement, en pratique, on ne fait pas toutes ces vérifications car on a la propriété suivante :

Proposition 3.45 Toute fonction fabriquée avec une seule formule ne contenant que des opérations usuelles ($+, \times, -, /$) et des fonctions usuelles indéfiniment dérивables comme ($\sin, \cos, \tan, \arctan, \exp, \ln, \text{sh}, \text{ch}, \text{th}, \text{argsh}, \text{argth}, \dots$) est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition.

Un corollaire important mais évident du théorème de Schwarz 3.43 est alors le suivant

Corollaire 3.46 Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} , alors pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0).$$

De même, si f est de classe \mathcal{C}^n sur \mathcal{U} , alors on peut calculer une dérivée partielle d'ordre inférieur ou égal à n en prenant dans n'importe quel ordre les variables qui interviennent.

Par exemple, pour une fonction de 3 variables de classe \mathcal{C}^3 , on est sûr que pour tout (x, y, z) , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y, z); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}(x, y, z); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y, z); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y^2}(x, y, z); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x, y, z); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x, y, z); \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x, y, z).\end{aligned}$$

Dans l'exemple du § 3.5.5 (p. 102), au lieu des 39 calculs des dérivées partielles d'ordre ≤ 3 , comme la fonction considérée est bien sûr de classe \mathcal{C}^∞ , on était sûr de pouvoir échanger l'ordre des dérivations et il suffisait de faire 19 calculs (3 dérivées premières, 6 dérivées secondes et 10 dérivées troisièmes). (Rassurez-vous, c'est ce qui a été fait pour faire ce livre, nous sommes bien sûrs que peu de lecteurs ont vraiment fait ces 39 calculs !)

3.6 Extrema des fonctions de plusieurs variables

3.6.1 Introduction

Un des intérêts les plus visibles de la dérivation des fonctions d'une variable a été l'étude des variations des fonctions, et entre autres la détermination des extrema, c'est-à-dire des maximums et des minimums (maxima et minima, au choix).

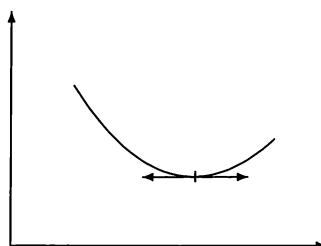
Si une fonction d'une seule variable f dérivable admet un maximum ou un minimum en x_0 , alors on est sûr que $f'(x_0) = 0$.

Si on veut chercher les extrema d'une fonction f d'une seule variable, on a pris l'habitude de résoudre l'équation $f'(x) = 0$, et ensuite, à l'aide du tableau de variation, on peut vérifier que les solutions de cette équation sont effectivement des extrema, la condition $f'(x_0) = 0$ n'étant qu'une condition nécessaire d'extremum. Une méthode pour vérifier qu'une fonction f au moins deux fois dérivable admet bien un minimum en x_0 , lorsqu'on sait déjà que $f'(x_0) = 0$ est d'étudier la

convexité de f en x_0 : une telle fonction f est convexe sur un intervalle I lorsque pour tout $x \in I$, on a $f''(x) \geq 0$.

Si donc on a non seulement $f'(x_0) = 0$, mais aussi $f''(x_0) > 0$, f'' étant continue (c'est le cas lorsque f est de classe C^2), alors on est sûr qu'il existe un intervalle I centré en x_0 dans lequel $f''(x) \geq 0$, donc sur lequel f est convexe. Mais alors la courbe de f a sa concavité tournée vers le haut et le point de la courbe d'abscisse x_0 où on sait déjà que la tangente est horizontale est forcément un minimum relatif (la tangente en tout point de la courbe d'une fonction convexe est en dessous de cette courbe).

(3.23)



Bien entendu, si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, on peut en raisonnant de la même façon affirmer qu'il y a en x_0 un maximum relatif.

C'est ce type de résultat qu'on va essayer d'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

3.6.2 Extremum relatif

Définition 3.47 Soit f une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} . On dit que f admet en $X_0 \in \mathcal{D}(f)$ un minimum [respectivement un maximum] relatif (ou local) s'il existe un voisinage \mathcal{V} de X_0 inclus dans $\mathcal{D}(f)$ tel que pour tout $X \in \mathcal{V}$, on a $f(X) \geq f(X_0)$ [respectivement $f(X) \leq f(X_0)$]. Le minimum [respectivement le maximum] de f sur \mathcal{V} est alors le réel $f(X_0)$.

Un extremum relatif est un maximum relatif ou un minimum relatif.

Bien entendu un extremum relatif se transforme en extremum absolu lorsque le voisinage \mathcal{V} de la définition peut être pris égal à $\mathcal{D}(f)$.

On peut toujours choisir le voisinage \mathcal{V} de la définition dans une base particulière de voisinages de X_0 , par exemple on peut se limiter aux boules pour une certaine norme, de centre X_0 .

Une proposition assez évidente qui permet de se limiter dans les démonstrations aux minimums relatifs est la suivante :

Lemme 3.48 Soit f est une fonction de plusieurs variables. Alors f admet un maximum en X_0 si et seulement si $-f$ admet un minimum en X_0 .

Preuve Il suffit d'appliquer la définition ci-dessus. □

3.6.3 Condition nécessaire d'extremum des fonctions de plusieurs variables

Théorème 3.49 Soit f une fonction des p variables x_1, \dots, x_p , de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} , partiellement dérivable par rapport à toutes ses variables. Si f admet un extremum relatif en X_0 , alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0.$$

Preuve Grâce au lemme 3.48, il suffit d'établir ce résultat dans le cas où f admet un minimum en X_0 , car ensuite, si f admet un maximum, $-f$ admet un minimum, et donc les dérivées partielles de $-f$ sont nulles en X_0 et les dérivées partielles de f (qui sont les opposées de celles de $-f$) sont alors bien sûr elles aussi nulles.

Supposons que f admet un minimum en $X_0 = (x_{10}, \dots, x_{p0})$.

Alors, pour tout indice i , la i -ème fonction partielle g_i est une fonction d'une variable admettant un minimum relatif en x_{i0} .

En effet, on peut trouver une boule $B = \bar{B}_\infty(X_0, R)$ telle que pour tout $X \in B$, on a $f(X) \geq f(X_0)$.

Mais alors, si $t \in [x_{i0} - R, x_{i0} + R]$, on a

$\|(x_{10}, \dots, x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, \dots, x_{p0}) - X_0\|_\infty = |t - x_{i0}| \leq R$,
donc $(x_{10}, \dots, x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, \dots, x_{p0}) \in B$ et

$$g_i(t) = f(x_{10}, \dots, x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, \dots, x_{p0}) \geq f(X_0) = g_i(x_{i0}).$$

Le fait que pour tout $t \in [x_{i0} - R, x_{i0} + R]$, on ait $g_i(t) \geq g_i(x_{i0})$ signifie justement que g_i présente un minimum relatif en x_{i0} .

D'après ce qu'on sait pour les fonctions d'une variable, on peut donc affirmer que $g'_i(x_{i0}) = 0$, mais par définition de la dérivée partielle de f par rapport à la i -ème variable, on a justement $g'_i(x_{i0}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0.$$

□

Attention ! La réciproque est fausse : donnons un contre exemple.

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^3y^3$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^3y^2$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Il pourrait donc y avoir un extremum en $(0, 0)$.

Vérifions qu'en fait $f(0, 0) = 0$ n'est ni un maximum relatif, ni un minimum relatif. Pour cela, il faut prouver que dans tout voisinage de $(0, 0)$, il y a des (x, y) tels que $f(x, y) > 0$ et d'autres tels que $f(x, y) < 0$. Il suffit d'ailleurs de vérifier ceci pour toute boule $\overline{B}_\infty(0, \varepsilon)$.

Or, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $(\varepsilon, \varepsilon) \in \overline{B}_\infty(0, \varepsilon)$ et $f(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^6 > 0$. On a prouvé que $f(0, 0)$ n'est pas un maximum relatif.

De même, on a $(\varepsilon, -\varepsilon) \in \overline{B}_\infty(0, \varepsilon)$ et $f(\varepsilon, -\varepsilon) = -\varepsilon^6 < 0$. On a prouvé que $f(0, 0)$ n'est pas un minimum relatif.

Le théorème 3.49 permet donc de détecter d'éventuels extrema, mais il ne permet pas de prouver quoi que ce soit. Il permet seulement de trouver les points « candidats » pour être extrema. On a vu un exemple où on arrivait à prouver que l'on n'avait pas extremum, alors que les dérivées partielles s'annulent. Mais comment faire pour établir qu'on a vraiment un extremum ? On peut bien sûr « bricoler », faire apparaître des carrés, ... Mais dans le cas des fonctions de deux variables, on a aussi un théorème que nous verrons au § 3.6.5. Auparavant, nous avons besoin d'une généralisation de la formule de Taylor-Lagrange.

3.6.4 Une formule de Taylor pour les fonctions de 2 variables

Dérivée seconde d'une fonction composée

Nous nous plaçons dans un cas très particulier de la situation du §3.5.4 (p. 96), analogue à la situation de la formule des accroissements finis (Théorème 3.41 p. 99). On considère une fonction F de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , qui se décompose $F = f \circ u$, avec

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ F : & t & \mapsto & \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} & \mapsto & f(u_1(t), u_2(t)) = F(t). \end{array}$$

Cette fois, nous supposerons que f est de classe \mathcal{C}^2 et nous prenons comme fonction u celle définie par $u(t) = X_0 + tH = (x_0 + ht, y_0 + kt)$. On a donc

$$F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Proposition 3.50 Sous les hypothèses ci-dessus, F est deux fois dérivable et on a

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Preuve Grâce au théorème 3.40 p. 97 (le calcul a déjà été fait pour le théorème 3.41 p. 99), on a

$$F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

h et k sont des constantes en ce qui concerne la dérivation par rapport à la variable t . Il suffit donc de réappliquer ce théorème 3.40 aux deux fonctions composées $G_1 : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt)$ et $G_2 : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)$.

On a bien sûr

$$\begin{aligned} G'_1(t) &= h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0 + ht, y_0 + kt) + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0 + ht, y_0 + kt) \\ &= h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ \text{et } G'_2(t) &= h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0 + ht, y_0 + kt) + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0 + ht, y_0 + kt) \\ &= h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt). \end{aligned}$$

En utilisant que $F' = hG_1 + kG_2$, on obtient

$$\begin{aligned} F''(t) &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt) \\ &\quad + kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt). \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème de Schwarz, puisque f est de classe C^2 :

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

□

La formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de 2 variables

Théorème 3.51 Soit f une fonction de deux variables, supposée de classe C^2 sur un domaine $\mathcal{U} \subset D(f)$, supposé ouvert et convexe (voir remarque 3.5.4 p. 101). $X_0 = (x_0, y_0)$ et $X = (x, y) = X_0 + H = (x_0 + h, y_0 + k)$ sont deux points de \mathcal{U} . Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0 + \theta H) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0 + \theta H) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0 + \theta H) \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = \\ f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \right. \\ \left. + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \right]. \end{aligned}$$

Preuve La démonstration de ce théorème ressemble beaucoup à celle de la formule des accroissements finis (théorème 3.41 p. 99).

On considère la fonction $F : t \mapsto f(X_0 + tH) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$. C'est une fonction d'une variable, deux fois dérivable sur $[0, 1]$, et on peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, (pour les fonctions d'une variable)

$$(3.24) \quad \exists \theta \in]0, 1[\text{ tel que } F(1) = F(0) + 1F'(0) + \frac{1^2}{2}F''(\theta).$$

Or, les valeurs de $F'(t)$ et de $F''(t)$ ont été déterminées précédemment (théorème 3.41 p. 99 et proposition 3.50 p. 112). On a $F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)$ et

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Reportant ces expressions dans (3.24), on tombe exactement sur ce qu'on voulait démontrer. \square

3.6.5 Une condition suffisante d'extremum

Théorème 3.52 Soit f une fonction de deux variables x et y , à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathcal{U} \subset D(f)$. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0$ (X_0 est un extremum possible). Il est d'usage de poser

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) ; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0) \text{ (Schwarz)} ; \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0).$$

Alors on a les résultats suivants

Si $s^2 - rt < 0$, alors f admet un extremum relatif strict en X_0 ; cet extremum est un minimum si $r > 0$, un maximum si $r < 0$ (remarquons que r et t ont dans ce cas forcément le même signe).

Si $s^2 - rt > 0$, alors on est sûr que f n'admet pas d'extremum relatif en X_0 .

Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut rien conclure : $f(X_0)$ peut être un minimum relatif (dans ce cas, forcément $r \geq 0$ et $t \geq 0$), un maximum relatif (dans ce cas, forcément $r \leq 0$ et $t \leq 0$) ou ni maximum, ni minimum relatif.

Nous ne démontrerons pas en entier ce théorème, et nous admettrons certains points (une preuve complète nécessite la connaissance des formes bilinéaires symétriques, et pourrait alors être faite pour une fonction de n variables, pas seulement pour deux variables). Nous utiliserons cependant plus loin les résultats qu'il contient.

Une façon d'aider à comprendre ce théorème est de le rapprocher de la situation décrite dans l'introduction (§ 3.6.1 p. 109)

Tout d'abord, la représentation graphique d'une fonction f de 2 variables, c'est une nappe dans l'espace à trois dimensions, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ayant comme équation $z = f(x, y)$.

Admettons provisoirement le résultat suivant concernant le plan tangent à la nappe $z = f(x, y)$ en un point $X_0 = (x_0, y_0)$ (tout cela sera précisé lors de l'étude de la différentiabilité) :

Lemme 3.53 Si f admet des dérivées partielles $p = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)$, le plan P passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ dirigé par les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, p)$ et $\vec{v} = (0, 1, q)$ est tangent à la nappe $z = f(x, y)$ en son point M_0 . Le plan P a pour équation cartésienne :

$$z = f(x_0, y_0) + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0).$$

Lorsque $p = q = 0$, c'est-à-dire lorsque X_0 est un extremum possible, il est clair que le plan tangent à la nappe est horizontal.

Cette situation ressemble à ce qui se passe pour une fonction d'une variable, lorsque la dérivée s'annule : la courbe admet en ce point une tangente horizontale. Ce qui joue ici le rôle de la dérivée seconde c'est l'ensemble des trois dérivées partielles secondes.

Démonstration (partielle) du théorème

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où $s^2 - rt < 0$ (le début de la démonstration n'utilise pas ce fait).

La formule de Taylor-Lagrange (proposition 3.51 p. 113) exprime que $f(x, y) = f(X) = f(X_0 + H)$ peut, au voisinage de $X_0 = (x_0, y_0)$ être calculé grâce à une formule du second degré en h et k . En effet, on a, d'après cette proposition

$$f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ph + qk + \frac{1}{2}(r_\theta h^2 + 2s_\theta hk + t_\theta k^2).$$

On a posé $p = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)$ et

$$r_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0 + \theta H) \quad ; \quad s_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0 + \theta H) \quad ; \quad t_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0 + \theta H).$$

Par hypothèse, X_0 est un extremum possible, donc on a $p = q = 0$.

On a donc

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(r_\theta h^2 + 2s_\theta hk + t_\theta k^2).$$

Pour montrer qu'il y a minimum en (x_0, y_0) , il suffit d'établir que la quantité entre parenthèses du membre de gauche $T(h, k) = (r_\theta h^2 + 2s_\theta hk + t_\theta k^2)$ est positive pour (h, k) dans un voisinage de (x_0, y_0) . Il y aura au contraire maximum en (x_0, y_0) si cette quantité est toujours négative dans un voisinage de (x_0, y_0) .

$T(h, k)$ peut être considéré comme un trinôme en h (sauf si $r_\theta = 0$, nous verrons plus loin qu'on peut éliminer cette possibilité).

Le discriminant réduit de ce trinôme est

$$\Delta' = \frac{\Delta}{4} = k^2(s_\theta^2 - r_\theta t_\theta).$$

Considérons la fonction g des deux variables x, y définie par

$$g(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Puisque les dérivées partielles secondees de f sont continues (f est de classe C^2), g est bien entendu continue sur \mathcal{U} .

D'autre part, $g(x_0, y_0) = s^2 - rt$ et $g(x_0 + \theta h; y_0 + \theta k) = s_\theta^2 - r_\theta t_\theta$.

Puisque par hypothèse $s^2 - rt < 0$, on a $g(x_0, y_0) < 0$. D'après la continuité de g en X_0 , il existe une boule de centre X_0 , de rayon η dans laquelle on a $g(x, y) < 0$ (il suffit de considérer le voisinage $]-\infty, 0[$ de $g(x_0, y_0)$ en utilisant la proposition 3.5 p. 66 ; on peut aussi raisonner avec $\varepsilon = -\frac{g(x_0, y_0)}{2}$).

Donc si $X = (x, y)$ est dans ce voisinage de X_0 , on est sûr que $X_0 + H$ est aussi dans cette boule, et on a donc $g(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) < 0$.

(Remarquons que dans ce cas, on est également sûr que $r_\theta \neq 0$

(sinon $g(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = s_\theta^2 \geq 0$) donc $T(h, k)$ est un vrai trinôme en h .)

Mais on a $\Delta' = k^2 g(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, donc $\Delta' \leq 0$.

Or, un trinôme de discriminant négatif ou nul garde un signe constant, celui du coefficient dominant.

On peut donc affirmer que $T(h, k)$ est du signe de r_θ .

Mais puisque $s^2 - rt < 0$, il est impossible que r soit nul ;

Si on a $r > 0$, alors par continuité de la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, on est sûr d'avoir aussi $r_\theta > 0$ si X est suffisamment près de X_0 , et donc dans ce voisinage de X_0 , on a $T(h, k) \geq 0$, donc

$$f(X) - f(X_0) \geq 0.$$

et f admet donc un minimum relatif en X_0 .

Si on a $r < 0$, de la même façon $r_\theta < 0$ dans un voisinage de X_0 et $T(h, k)$ étant négatif, f admet un maximum relatif en X_0 .

Il est plus difficile de montrer qu'à coup sûr on n'a aucun extremum en X_0 si $s^2 - rt > 0$: nous admettrons ce point.

Il n'y a de toutes façons rien à démontrer lorsque $s^2 - rt = 0$. □

3.7 Différentiabilité d'une fonction de plusieurs variables

3.7.1 Introduction

La notion de dérivabilité d'une fonction d'une variable pouvait être caractérisée par l'existence du nombre dérivé $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$; cette approche a été généralisée avec la notion de dérivation partielle.

Une autre façon de caractériser la dérivabilité, évidemment équivalente pour une fonction d'une variable, est l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Rappelons que f (fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}) admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 s'il existe 2 réels a_0 et a_1 et une fonction ε définie au voisinage de x_0 tels que pour tout x dans ce voisinage de x_0 , on a

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

ou ce qui revient au même en posant $h = x - x_0$, soit $x = x_0 + h$ et $\tilde{\varepsilon}(h) = \varepsilon(x_0 + h) = \varepsilon(x)$

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + h\tilde{\varepsilon}(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\varepsilon}(h) = 0.$$

On démontre, sans grande difficulté, que dans ce cas, f est dérivable en x_0 et que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

C'est la tentative de généralisation de ce point de vue aux fonctions de plusieurs variables qui est à l'origine de la notion de différentiabilité. Contrairement à ce qui se passe avec les fonctions d'une variable, pour une fonction de plusieurs variables, la différentiabilité n'est pas équivalente à la dérivation partielle. Nous établirons cependant des liens importants entre la notion de différentiabilité d'une fonction en un point et les dérivées partielles de la fonction en ce point.

3.7.2 Rappel d'algèbre linéaire

On appelle *forme linéaire* sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E toute application linéaire de E vers \mathbb{R} . L'ensemble des formes linéaires sur E est le *dual* de E noté E^* .

Si E est un espace vectoriel de dimension p , rapporté à une base \mathcal{B} , une forme linéaire u sur E est caractérisée (comme toute application linéaire) par sa matrice M . Cette matrice a 1 seule ligne (dimension de l'espace vectoriel d'arrivée \mathbb{R}) et p colonnes (dimension de l'espace vectoriel de départ E). On parle de matrice ligne.

Si $E = \mathbb{R}^p$, il est naturellement rapporté à sa base canonique. Dans ce cas, on a l'habitude d'identifier l'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^p à l'ensemble des matrices-lignes (1 ligne et p colonnes).

On écrit, dans ce cas, si u est une forme linéaire sur \mathbb{R}^p

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_p \end{pmatrix}.$$

Notant en colonne les éléments de \mathbb{R}^p , si $X \in \mathbb{R}^p$, on a dans ce cas

$$u(X) = u \cdot X = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p u_i x_i.$$

Utilisant le produit scalaire de \mathbb{R}^p , il existe un unique vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$

tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, on a

$$u(X) = U \cdot X = \sum_{i=1}^p u_i x_i.$$

En résumé, à toute forme linéaire u sur \mathbb{R}^p correspond de façon biunivoque un p -uple de réels et on a le choix des points de vue : on peut écrire ce tableau comme une matrice ligne (c'est ce que nous ferons pour la différentielle d'une fonction) ou comme une matrice colonne, c'est-à-dire un vecteur de \mathbb{R}^p (c'est ce que nous ferons pour la notion de gradient).

3.7.3 Définition de la différentiabilité

Définition 3.54 Soit f une fonction de p variables. On considère que f va de \mathbb{R}^p (ensemble des vecteurs-colonnes de p lignes) vers \mathbb{R} . Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{p0} \end{pmatrix}$ un point intérieur à $\mathcal{D}(f)$ (il existe une boule centrée en X_0 incluse dans $\mathcal{D}(f)$).

On dit que f est différentiable en X_0 s'il existe une forme linéaire u sur \mathbb{R}^p et une application ε de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} définie au voisinage de 0 tels que pour tout $H \in \mathbb{R}^p$ proche de 0, on a

$$(3.25) \quad f(X_0 + H) = f(X_0) + u(H) + \|H\| \varepsilon(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0.$$

Quelques remarques concernant cette définition

- Les termes « au voisinage », « proche » sont volontairement vagues, pour plus parler à l'imagination. Ils peuvent très facilement être précisés : on doit comprendre que cette définition assure l'existence d'un réel strictement positif r tel que
 - La boule $\overline{B}(X_0, r)$ est incluse dans $\mathcal{D}(f)$.
 - La boule $\overline{B}(0, r)$ est incluse dans $\mathcal{D}(\varepsilon)$, l'ensemble de définition de ε .
 - La formule (3.25) est valable pour tout $H \in \overline{B}(0, r)$.

- H est un vecteur de \mathbb{R}^p , donc $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$
- ε est une fonction de p variables ; la notion de limite qui apparaît dans la formule (3.25) est celle de limite d'une fonction de plusieurs variables.
- La norme qui intervient dans la formule (3.25) (et dans la notion de boule qui précise la notion de proximité) est comme d'habitude n'importe quelle norme usuelle, par exemple la norme euclidienne, mais pas forcément. Il est facile de démontrer que changer de norme ne change pas la notion de différentiabilité associée.
- L'existence de la forme linéaire u qui apparaît dans la définition peut être remplacée (ce qui est équivalent d'après les rappels du § précédent) par l'existence de p nombres réels u_1, \dots, u_p . La formule (3.25) devient alors

(3.26)

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + u_1 h_1 + \cdots + u_p h_p + \|H\| \varepsilon(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0.$$

- Dans (3.25), paradoxalement, ce n'est pas la première partie qui est la plus difficile à vérifier. Quelle que soit la forme linéaire u sur \mathbb{R}^p , il est toujours possible de poser, pour H proche de 0 et non nul,

$$\varepsilon(H) = \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - u(H)}{\|H\|} \quad \text{et} \quad \varepsilon(0) = 0.$$

Avec cette fonction ε , il est facile de voir que l'égalité est vérifiée !

Ce qu'il est important de vérifier, c'est au contraire la deuxième partie de (3.25), à savoir le fait que $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$.

On pourrait d'ailleurs remplacer cet énoncé par celui-ci, plus court, mais qui est moins parlant :

Proposition 3.55 f est différentiable en X_0 si et seulement si il existe une forme linéaire u sur \mathbb{R}^p telle que

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - u(H)}{\|H\|} = 0.$$

Traduisons maintenant cette notion de différentiabilité dans les cas les plus usuels, c'est-à-dire lorsque f est une fonction de deux ou trois variables.

Cas d'une fonction de deux variables

Une fonction f de 2 variables x et y est différentiable en $X_0 = (x_0, y_0)$ point intérieur à $\mathcal{D}(f)$ lorsqu'il existe deux réels u_1 et u_2 et une fonction ε tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + u_1 h + u_2 k + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k) \text{ avec } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Cette caractérisation équivaut à

Il existe deux réels u_1 et u_2 tels que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - u_1 h - u_2 k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Cas d'une fonction de trois variables

Une fonction f des trois variables x, y, z est différentiable en $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ point intérieur à $\mathcal{D}(f)$ si et seulement si il existe trois réels u_1, u_2, u_3 et une fonction ε de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} , définie au voisinage de 0 tels que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) = f(x_0, y_0, z_0) + u_1 h + u_2 k + u_3 l + \sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \varepsilon(h, k, l) \text{ avec } \lim_{(h,k,l) \rightarrow (0,0,0)} \varepsilon(h, k, l) = 0.$$

Ce qui revient à

Il existe trois réels u_1, u_2, u_3 tels que

$$\lim_{(h,k,l) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) - u_1 h - u_2 k - u_3 l}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = 0.$$

Voyons un premier exemple :

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = a + bx + cy + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$

Montrons que f est différentiable en $(0, 0)$.

On a $f(0, 0) = a$, donc la formule définissant f ressemble à ce qu'on doit établir si on prend $b = u_1$ et $c = u_2$, à condition que les 3 derniers termes puissent être assimilés à $\|H\|\varepsilon(H)$, si on écrit

$$f(0 + h, 0 + k) = a + bh + ck + (\alpha h^2 + \beta hk + \gamma k^2).$$

On doit nécessairement poser $\varepsilon(h, k) = \frac{\alpha h^2 + \beta hk + \gamma k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$: on a bien, alors

$$f(0 + h, 0 + k) = f(0, 0) + bh + ck + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k).$$

Il n'y a plus qu'à montrer que la fonction ε qu'on s'est donnée convient, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$.

Appliquons la technique de majoration de la proposition 3.33 p. 86. On a

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h, k)| &= \left| \frac{\alpha h^2 + \beta hk + \gamma k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ &\leq |\alpha| \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |\beta| \frac{|h||k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |\gamma| \frac{k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq |\alpha| \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |\beta| \frac{\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |\gamma| \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq (|\alpha| + |\beta| + |\gamma|) \sqrt{h^2 + k^2} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0. \end{aligned}$$

On a donc obtenu ce qu'on voulait, à savoir $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$, et f est bien différentiable en $(0, 0)$.

On voit sur cet exemple, que cette définition est franchement lourde à manier, et on a hâte de découvrir un peu plus loin une condition suffisante de différentiabilité plus facile à utiliser.

Auparavant, nous allons définir ce qu'on appelle la différentielle d'une fonction en un point.

Définition 3.56 Soit f une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , On suppose que f est différentiable en X_0 .

Alors la forme linéaire $u = (u_1 \ \dots \ u_p)$ qui intervient dans la définition s'appelle la différentielle de f en X_0 . On la note $u = df_{X_0}$
 df_{X_0} est une forme linéaire, donc pour tout $H \in \mathbb{R}^p$, $df_{X_0}(H)$ est un réel.

Nous devons à présent énoncer une propriété rassurante :

Proposition 3.57 La différentielle d'une fonction f en un point X_0 , si elle existe, est unique.

Preuve Supposons que la fonction f soit différentiable de deux façons en X_0 : D'une part, il existe une forme linéaire u et une fonction ε telles que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + u(H) + \|H\| \varepsilon(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0.$$

D'autre part, il existe une forme linéaire v et une fonction $\hat{\varepsilon}$ telles que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + v(H) + \|H\| \hat{\varepsilon}(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H \rightarrow 0} \hat{\varepsilon}(H) = 0.$$

Alors on en déduit que pour tout H suffisamment proche de 0, on a

$$(3.27) \quad (u - v)(H) = \|H\| (\hat{\varepsilon} - \varepsilon)(H).$$

$u - v$ est une forme linéaire et $\hat{\varepsilon} - \varepsilon$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque $H \rightarrow 0$.

Montrons que la forme linéaire $u - v$ est nulle. Procédons par l'absurde : on suppose qu'il existe $Y \in \mathbb{R}^p$ tel que $(u - v)(Y) \neq 0$ (remarquons que Y est forcément non nul). On a alors

$$\frac{|(u - v)(Y)|}{\|Y\|} = K > 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, le vecteur $H = tY$ est tel que

$$\frac{|(u - v)(H)|}{\|H\|} = \frac{|(u - v)(tY)|}{\|tY\|} = \frac{|t(u - v)(Y)|}{|t| \|Y\|} = K > 0.$$

Donc $|(u - v)(H)| = K\|H\|$. Mais pour t suffisamment proche de 0, $H = tY$ est suffisamment proche de 0 pour que la formule (3.27) s'applique, et on a

$$|(u - v)(H)| = \|H\| |(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)(H)|.$$

On doit donc avoir $|(\hat{\varepsilon} - \varepsilon)(H)| = K$, mais ceci est incompatible avec le fait que $\lim_{H \rightarrow 0} (\hat{\varepsilon} - \varepsilon)(H) = 0$.

L'hypothèse que $u - v$ n'est pas l'application nulle est donc absurde et on a donc $u - v = \tilde{0}$ et $u = v$. \square

La différentielle en X_0 d'une fonction f différentiable en X_0 est donc une forme linéaire sur \mathbb{R}^p . Mais les fonctions f ne sont pas forcément différentiables seulement en un point, mais en général elle le sont sur tout un domaine $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}(f)$. Comme pour la dérivabilité, ou d'autres notions analogues, on définit la différentiabilité et la différentielle d'une fonction sur un domaine :

Définition 3.58 Une fonction f de plusieurs variables est dite différentiable sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}(f)$ lorsqu'elle est différentiable en tout point $X_0 \in \mathcal{U}$.

La différentielle de f est alors la fonction df , définie sur \mathcal{U} , à valeurs dans l'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^p , qui associe à tout élément $X_0 \in \mathcal{U}$ la forme linéaire dX_0 .

Récapitulons : lorsque f est différentiable en X_0 , la différentielle de f en X_0 est la forme linéaire $df_{X_0} = u = (u_1 \ \cdots \ u_p)$.

Lorsque f est différentiable sur un domaine, la différentielle de f (df) associe à tout $X_0 \in \mathcal{U}$ la différentielle de f en X_0 :

Notant $(\mathbb{R}^p)^*$ l'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^p (c'est ce qu'on appelle le dual de \mathbb{R}^p), on a

$$\begin{aligned} df : \quad \mathcal{U} &\longrightarrow (\mathbb{R}^p)^* \\ X_0 &\longmapsto df_{X_0}. \end{aligned}$$

df est ce qu'on appelle une forme différentielle.

Définition 3.59 On appelle forme différentielle sur un domaine ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ toute application ω , définie sur \mathcal{U} et à valeurs dans l'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^p , c'est-à-dire à valeurs dans le dual $(\mathbb{R}^p)^*$.

$$\begin{aligned} \omega : \quad \mathcal{U} &\longrightarrow (\mathbb{R}^p)^* \\ X_0 &\longmapsto \omega_{X_0} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_{X_0} : \quad \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ H &\longmapsto \omega_{X_0}(H). \end{aligned}$$

Cette notion de différentielle d'une fonction df et surtout de forme différentielle, qui sont donc des applications à valeurs dans un ensemble de formes linéaires est assez difficile à comprendre. Heureusement, cela sera précisé un peu plus loin lorsque nous aurons fait le lien avec les dérivées partielles.

D'autre part, nous verrons un point de vue équivalent, (en remplaçant vecteurs-lignes par vecteurs-colonnes) : celui de gradient d'une fonction qui est un cas particulier de champ vectoriel, comme la différentielle d'une fonction est un cas particulier de forme différentielle.

Une dernière remarque concernant l'interprétation « graphique » de la différentielle d'une fonction f en X_0 (df_{X_0}).

Remarque : Si f est différentiable en X_0 , puisque pour H suffisamment « petit », on a $f(X_0 + H) = f(X_0) + df_{X_0}(H) + \|H\|\varepsilon(H)$ avec $\varepsilon(H)$ qui tend vers 0, il est logique de considérer que le dernier terme est « négligeable », c'est-à-dire que $f(X_0) + df_{X_0}(H)$ est une approximation de $f(X_0 + H)$.

On dit que df_{X_0} est la forme linéaire tangente à f en X_0 . Cela s'explique en particulier en dimension 2.

Soit f une fonction de 2 variables, et $z = f(x, y)$ l'équation de la nappe qui représente f dans un repère de l'espace à trois dimensions. On suppose que f est différentiable en (x_0, y_0) . Pour (x, y) proche de (x_0, y_0) , c'est-à-dire pour $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ avec (h, k) « petit », on a donc

$$f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) \simeq f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(h, k) = f(x_0, y_0) + u_1 h + u_2 k$$

si $df_{(x_0, y_0)} = u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$

Or, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient

$$z = f(x_0, y_0) + u_1(x - x_0) + u_2(y - y_0).$$

est un plan et l'approximation ci-dessus exprime que ce plan est très proche de la nappe $z = f(x, y)$ lorsque (x, y) est proche de (x_0, y_0) . Ce plan est logiquement tangent à cette nappe au point (x_0, y_0) .

3.7.4 Lien entre différentiabilité et dérivées partielles

Théorème 3.60 Soit f une fonction de p variables x_1, \dots, x_p différentiable en X_0 .

Alors f est partiellement dérivable par rapport à chacune de ses variables, et de plus

$$df_{X_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, si $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$, on a $df_{X_0}(H) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) h_i$.

Une autre façon de comprendre ce théorème est la suivante :

Les composantes de la différentielle de f en X_0 sont les dérivées partielles de f en X_0 .

Preuve Il suffit d'établir que pour tout indice i , la i -ème fonction partielle g_i de f en X_0 est dérivable en x_{i0} . Or, on a $g_i(t) = f(x_{10}, \dots, x_{(i-1)0}, t, x_{(i+1)0}, \dots, x_{p0})$. Donc $g_i(x_{i0} + h) = f(X_0 + H_i)$ avec H_i est le vecteur de \mathbb{R}^p dont toutes les composantes sont nulle sauf la i -ème, qui vaut h . Pour h suffisamment petit, H_i est dans le voisinage de 0 pour lequel la formule définissant la différentiabilité est valable et on a

$$\begin{aligned} g_i(x_{i0} + h) &= f(X_0 + H_i) = f(X_0) + df_{X_0}(H_i) + \|H_i\|\varepsilon(H_i) \\ &= g_i(x_{i0}) + u_1 \cdot 0 + \cdots + u_{i-1} \cdot 0 + u_i h + u_{i+1} \cdot 0 + \cdots + u_p \cdot 0 + \|H_i\|\varepsilon(H_i) \\ &= g_i(x_{i0}) + u_i h + |h|\varepsilon(H_i). \end{aligned}$$

En effet, quelle que soit la norme usuelle considérée, on a $\|H\| = |h|$ (vérification immédiate).

On a donc $\frac{g_i(x_{i0} + h) - g_i(x_{i0})}{h} = u_i + \frac{|h|}{h}\varepsilon(H_i)$.

Il est clair que $\lim_{h \rightarrow 0} H_i = 0$, donc par composition de limite, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(H_i) = 0$, et

comme $\frac{|h|}{h} = \pm 1$ reste borné, le produit d'une fonction bornée par une fonction

qui tend vers 0 ayant une limite nulle (voir la proposition 3.13 p. 73), on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \varepsilon(H_i) = 0$ et on est sûr que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(x_{i0} + h) - g_i(x_{i0})}{h} = u_i.$$

Ceci signifie justement que g_i est dérivable en x_{i0} et que $g'_i(x_{i0}) = u_i$.

Mais ceci montre que f est partiellement dérivable en X_0 par rapport à x_i et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = u_i$. Comme tout ceci est valable quel que soit l'indice i , on a terminé. \square

Attention ! La réciproque est fausse.

La meilleure façon de s'en convaincre est d'utiliser le théorème suivant.

Théorème 3.61 *Si une fonction de plusieurs variables f est différentiable en X_0 , alors elle est continue en X_0 .*

Comme on a vu qu'il existe des fonctions qui admettent des dérivées partielles et qui ne sont pas continues, on est sûr que ces fonctions ne sont pas non plus différentiables.

Preuve Il suffit d'établir que $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$, ou ce qui revient au même, que

$$\lim_{H \rightarrow 0} f(X_0 + H) - f(X_0) = 0.$$

Or, f étant différentiable en X_0 , en posant $df_{X_0} = (u_1 \quad \cdots \quad u_p)$, on a $f(X_0 + H) - f(X_0) = u_1 h_1 + \cdots + u_p h_p + \|H\| \varepsilon(H)$.

Lorsque $H \rightarrow 0$, toutes ces composantes h_i tendent vers 0, donc tous les termes $u_i h_i$ ont pour limite 0, et il en est évidemment de même pour le terme $\|H\| \varepsilon(H)$. \square

La liaison sera complète entre différentiabilité et dérivées partielles lorsqu'on aura vu le théorème suivant :

Théorème 3.62 *Si une fonction f de p variables est de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine ouvert $\mathcal{U} \subset D(f)$, alors f est différentiable sur \mathcal{U} .*

Preuve Elle est basée sur la formule des accroissements finis (théorème 3.41 p. 99).

Soit $X_0 \in \mathcal{U}$. \mathcal{U} étant ouvert, il existe une boule ouverte B , centrée en X_0 qui est incluse dans \mathcal{U} . f étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , elle l'est aussi dans B . B étant un ouvert convexe, pour tout $X = X_0 + H \in B$, on peut donc écrire la formule des accroissements finis : il existe $\theta_H \in]0, 1[$ (θ_H dépend de H) tel que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H).$$

Tenant compte de ce qu'on cherche à obtenir, on écrit

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \|H\| \sum_{i=1}^p \frac{h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \right)}{\|H\|} \\ &= f(X_0) + \sum_{i=1}^p h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \|H\| \varepsilon(H). \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$, en ayant posé

$$\varepsilon(H) = \sum_{i=1}^p \frac{h_i}{\|H\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \right) = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i(H).$$

On montrera donc que pour tout indice i , on a $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon_i(H) = 0$ avec

$$\varepsilon_i(H) = \frac{h_i}{\|H\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \right).$$

Or, on a $\left| \frac{h_i}{\|H\|} \right| \leq 1$, (ceci quelle que soit la norme considérée) donc

$$|\varepsilon_i(H)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \right|.$$

Mais pour $H \rightarrow 0$, on a bien sûr¹ $\theta_H H \rightarrow 0$, et puisque f est de classe C^1 , chaque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue en X_0 , donc $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$ et

$$\lim_{H \rightarrow 0} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + \theta_H H) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \right| = 0.$$

On peut conclure que $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon_i(H) = 0$ d'après le théorème 3.33 p. 86 et donc $\lim_{H \rightarrow 0} \varepsilon(H) = 0$ et f est bien différentiable en X_0 . \square

Comme d'habitude, la réciproque est fausse, mais les contre exemples qui existent ne sont pas très intéressants : ce sont des « cas pathologiques », qui amusent surtout les poseurs d'exercices (mefiez-vous). En pratique, c'est la classe des fonctions de classe C^1 qui est intéressante, et la plupart du temps vous démontrerez qu'une fonction est différentiable sur un domaine \mathcal{U} en écrivant :

« f est de classe C^1 sur \mathcal{U} , donc f est différentiable sur \mathcal{U} . »

¹ Pour les amateurs de ε , et pour être plus rigoureux, on peut raisonner ainsi : en exprimant une limite pour $H \rightarrow 0$, on détermine une boule de centre 0, de rayon η dans laquelle on a toujours une certaine majoration valable par exemple pour $(X_0 + H)$. Mais θ étant plus petit que 1, on est sûr que si H est dans telle boule de centre 0, θH est aussi dans cette boule, et si on avait une certaine majoration pour par exemple $(X_0 + H)$, elle est aussi vraie pour $(X_0 + \theta H)$.

Récapitulation

Schématiquement, on peut retenir que

$$\begin{array}{c} \boxed{f \text{ est de classe } C^1} \implies \boxed{f \text{ est différentiable}} \\ \implies \boxed{f \text{ est partiellement dérivable}} \\ \implies \boxed{f \text{ est continue (de classe } C^0\text{)}} \end{array}$$

Chacune des implications inverses étant fausse. En particulier, il n'y a aucune relation de causalité entre les deux assertions les plus à droite : la dérivabilité partielle n'implique pas la continuité, et la continuité n'implique pas la dérivabilité partielle.

Remarque : Dans la définition 3.44 (p. 108) des fonctions de classe C^n , on demandait à une fonction, pour qu'elle soit de classe C^n , que toutes ses dérivées partielles existent et soient continues jusqu'à l'ordre n . Grâce à ce qu'on vient de voir, il suffira de vérifier que toutes les dérivées partielles existent jusqu'à l'ordre n et seulement que les dérivées partielles d'ordre exactement n sont continues. En effet, si par exemple les dérivées partielles secondes de f sont continues, en particulier les dérivées partielles d'ordre 1 se trouvent être de classe C^1 : elles sont donc continues et f est alors de classe C^1 , donc continue. Finalement toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre 2 sont continues donc f est de classe C^2 . Cette remarque permet de vérifier beaucoup moins de continuités pour établir qu'une fonction est de classe C^n .

3.7.5 Quelques applications de la différentiabilité

Forme linéaire tangente

Lors des commentaires explicatifs suivant l'énoncé du théorème 3.52 (p. 114) sur la condition suffisante d'extremum pour une fonction de 2 variables, nous avons signalé que le plan tangent à la nappe $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) avait pour équation $z = f(x_0, y_0) + p(x - x_0) + q(y - y_0)$, avec $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Nous sommes maintenant en mesure de le justifier lorsque f est différentiable en (x_0, y_0) , puisqu'alors on a vu (dans la remarque 3.7.3 p. 123) que $df_{(x_0, y_0)}$ est la forme linéaire tangente à la fonction f en (x_0, y_0) .

On y a vu que plan tangent à la nappe en ce point a pour équation

$z = f(x_0, y_0) + u_1(x - x_0) + u_2(y - y_0)$, u_1, u_2 étant les composantes de $df_{(x_0, y_0)}$. Or, ces composantes ont été déterminées au § précédent : on a $u_1 = p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $u_2 = q = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. □

Approximation d'une fonction de plusieurs variables

La formule définissant la différentiabilité, peut devenir une formule d'approximation si on lui supprime le dernier terme avec ε . L'inconvénient de cette démarche est qu'il n'y a aucune majoration de l'erreur commise, mais il peut être pratique de procéder ainsi

Exemple :

Pour $f(x, y, z) = \frac{x e^y}{z}$ (voir p. 102), on a $f(2, 0, 1) = 2$.

Que vaut approximativement (sans calculatrice) $f(x, y, z)$ lorsque :

$x = 1,997 ; y = 0,002 ; z = 1,0012$?

Réponse :

On utilise la formule d'approximation, valable pour (x, y, z) « proche » de $(2, 0, 1)$, ce qui est le cas ici²

$$f(x, y, z) \simeq f(2, 0, 1) + (x - 2) \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0, 1) + (y - 0) \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0, 1) + (z - 1) \frac{\partial f}{\partial z}(2, 0, 1).$$

$$\text{On a } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{e^y}{z} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0, 1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x e^y}{z} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0, 1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{x e^y}{z^2} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial z}(2, 0, 1) = -2.$$

Puisque $x - 2 = -0,003 ; y - 0 = 0,002 ; z - 1 = 0,0012$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(1,997; 0,002; 1,0012) \simeq 2 + (-0,003).1 + 0,002.2 + 0,0012.(-2) \\ &\simeq 2 - 0,003 + 0,004 - 0,0024 = 1,9986. \end{aligned}$$

Un calcul direct à la calculatrice donne $1,997 \times \exp(0,002) / 1,0012 \simeq 1,998599677051$.

La valeur approchée que l'on a trouvée n'était pas si mauvaise.

3.7.6 Compléments sur les formes différentielles

On se placera dans ce § uniquement dans le cadre de fonctions de 2 ou 3 variables x, y et éventuellement z .

Rappelons qu'une forme différentielle ω est une fonction de \mathbb{R}^2 vers son dual $(\mathbb{R}^2)^*$ (ou de \mathbb{R}^3 vers son dual $(\mathbb{R}^3)^*$).

² Il est impossible de préciser cette notion de proximité ! Les physiciens eux ne font pas tant de « chichis » et sont tout à fait convaincus de la proximité de ces deux triplets !

Formes différentielles de base

Il est d'usage de noter dx la forme différentielle constante qui associe à tout $X \in \mathbb{R}^2$ le premier élément de la base canonique de $(\mathbb{R}^2)^*$, qui est la forme linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, associant à tout élément $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 le réel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h$.
On a donc $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, dx_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad dx_{(x,y)}(h, k) = h.$$

De la même façon on définit dy , forme différentielle constante, associant à tout $X \in \mathbb{R}^2$ le deuxième élément de la base canonique de $(\mathbb{R}^2)^*$, ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, \quad dy_{(x,y)}(h, k) = k.$$

(Dans \mathbb{R}^3 la définition de dx , dy et dz est analogue).

Expression de la différentielle dans cette base

Avec ces conventions, on note alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \left[+ \frac{\partial f}{\partial z} dz \right].$$

Cette notation signifie que la forme différentielle df associe à tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la forme linéaire $df_{(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx_{(x,y)} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy_{(x,y)}$.

Cette forme linéaire associe à tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ le réel

$$df_{(x,y)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx_{(x,y)}(h, k) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy_{(x,y)}(h, k) = h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

D'une façon générale, une forme différentielle ω se décompose dans la « base » (dx, dy) , sous la forme

$$\omega = u_1 dx + u_2 dy.$$

u_1 et u_2 sont deux fonctions à valeurs réelles ayant le même ensemble de définition que ω .

Un problème important que nous traiterons au chapitre suivant consiste à savoir déterminer quand une forme différentielle ω peut s'écrire comme la différentielle d'une fonction f : à quelle condition sur $\omega = u_1 dx + u_2 dy$ peut-elle s'écrire $\omega = df$, c'est-à-dire $\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$?

3.7.7 Complément sur le gradient

Cette notion de gradient d'une fonction de plusieurs variables n'est en fait qu'un deuxième aspect de la même théorie de la différentiation d'une fonction.

Soit f une fonction de 2 (ou 3) variables (cas les plus souvent rencontrés en pratique). On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine \mathcal{U} . Nous allons travailler dans \mathbb{R}^3 pour fixer les idées mais c'est pareil pour \mathbb{R}^2 (ou même \mathbb{R}^p). Alors le gradient de f est une fonction vectorielle, définie sur \mathcal{U} , à valeurs dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), notée $\overrightarrow{\text{grad } f}$. Notons qu'à cause de son utilisation principalement en physique, l'interprétation prioritaire, dans cette situation est que \mathcal{U} est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 considéré comme ensemble de *points* alors que $\overrightarrow{\text{grad } f}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^3 considéré comme ensemble de *vecteurs*.

On pose, pour tout point X de \mathcal{U} ,

$$\overrightarrow{\text{grad } f}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(X) \end{pmatrix}.$$

Le gradient d'une fonction de plusieurs variables est donc un champ vectoriel (ou champ de vecteurs), c'est-à-dire une fonction définie sur un domaine \mathcal{U} de points de l'espace, à valeurs dans l'ensemble des vecteurs de l'espace.

D'une façon générale, un champ de vecteurs \vec{V} est caractérisé par ses fonctions composantes v_i ($1 \leq i \leq 3$), qui ont le même ensemble de définition que \vec{V} . On a, pour tout point $X \in \mathcal{U}$,

$$\vec{V}(X) = \begin{pmatrix} v_1(X) \\ v_2(X) \\ v_3(X) \end{pmatrix}.$$

Les fonctions composantes du champ vectoriel $\overrightarrow{\text{grad } f}$ sont

$$v_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad v_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad v_3 = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Par analogie avec les formes différentielles, un problème important que nous traiterons au chapitre suivant est de savoir dans quels cas un champ de vecteurs \vec{V} est en fait égal au gradient d'une fonction f .

Une interprétation graphique du gradient

Soit f une fonction des deux variables x et y , de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine \mathcal{U} du plan.

À tout réel λ correspond un sous-ensemble de \mathcal{U} , formé de tous les points X tels que $f(X) = \lambda$. On appelle cet ensemble la *courbe de niveau* ou la *ligne de niveau* λ de la fonction f .

Cette terminologie est issue de la géographie : sur une carte d'état-major, la ligne de niveau 100m est l'ensemble de tous les points de la carte qui correspondent sur le terrain à un point d'altitude 100m. Dans cette situation géographique, l'application f associe à tout point de la carte l'altitude du point du terrain qu'il représente.

Lorsqu'on représente la fonction f par une nappe de l'espace, d'équation $z = f(x, y)$, on peut retrouver cette interprétation : la ligne de niveau λ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dont le point correspondant de la nappe est à la cote $z = \lambda$.

On a le théorème suivant, que nous ne démontrerons pas :

Théorème 3.63 *Si f est une fonction de deux variables de classe C^1 sur un domaine \mathcal{U} , si X_0 est un point de \mathcal{U} tel que $f(X_0) = \lambda$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0) \neq 0$, alors la ligne de niveau λ de la fonction f (qui passe forcément par X_0) admet en X_0 une tangente qui est orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0)$.*

Pour une fonction de trois variables f , on peut de la même façon introduire la notion de surface de niveau, et on a le théorème analogue :

Théorème 3.64 *Si f est une fonction de 3 variables de classe C^1 sur un domaine \mathcal{U} , si X_0 est un point de \mathcal{U} tel que $f(X_0) = \lambda$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0) \neq 0$, alors la surface de niveau λ de la fonction f (qui passe forcément par X_0) admet en X_0 un plan tangent qui est orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}} f(X_0)$.*

Exemple d'application : la tangente à une conique.

Vous savez peut-être que les courbes du plan d'équation $f(x, y) = 0$, f étant une fonction polynôme de degré 2 en x et y , sont des coniques.

Par exemple, si $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, la conique d'équation $f(x, y) = 0$ est une ellipse \mathcal{E} .

Alors, la tangente T à cette ellipse en un de ses points $M_0(x_0, y_0)$ est la droite passant par M_0 et orthogonale à $\overrightarrow{\text{grad}} f$. Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2},$$

on a

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) = \left(\begin{array}{c} \frac{2x_0}{a^2} \\ \frac{2y_0}{b^2} \end{array} \right).$$

T est donc caractérisée par

$$\begin{aligned} M \in T &\iff \overrightarrow{M_0 M} \cdot \overrightarrow{\text{grad } f} = 0 \\ &\iff \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \\ &\iff \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0 \\ &\iff \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{puisque } M_0 \in \mathcal{E} \text{ donc } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \end{aligned}$$

3.8 Différentiation des fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n

3.8.1 Définition par les fonctions coordonnées

Nous considérons dans ce § des fonctions F , définies sur un domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^n . Ce sont donc des fonctions vectorielles, et en tant que telles, elles ont des fonctions composantes f_i ($1 \leq i \leq n$), définies sur le même ensemble de définition que F .

Pour tout $X \in \mathcal{U}$, on considère donc $F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$ et comme pour les notions

de limite, de continuité... c'est par l'intermédiaire de l'éventuelle différentiabilité des fonctions coordonnées f_i que l'on définira la différentiabilité de F .

Définition 3.65 Soit F une fonction définie sur un domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^n , de fonctions composantes f_i ($1 \leq i \leq n$). Alors on dit que f est différentiable en $X_0 \in \mathcal{U}$ lorsque toutes ses fonctions composantes sont différentiables en X_0 .

f est différentiable sur \mathcal{U} lorsque toutes ses fonctions composantes sont différentiables sur \mathcal{U} .

Bien entendu, on peut tenter de traduire ces définitions en utilisant la définition de la différentiabilité d'une fonction à valeurs réelles.

Proposition 3.66 Avec les notations précédentes, une fonction F de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n est différentiable en X_0 s'il existe n fois p réels u_{ij} et n fonctions ε_i tels que pour tout $X = X_0 + H$ suffisamment proche de X_0 ,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f_i(X_0 + H) = f_i(X_0) + \sum_{j=1}^p u_{ij} h_j + \|H\| \varepsilon_i(H) \text{ avec } \lim_{H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} \varepsilon_i(H) = 0.$$

La différentiabilité de F en X_0 demande donc entre autres l'existence de n formes linéaires $u_i = (u_{i1} \ \dots \ u_{ip})$ sur \mathbb{R}^p , donc l'existence d'un tableau de n fois p

réels. Mais un tel tableau ne s'appelle-t-il pas une matrice ? Si on écrit l'une en dessous de l'autre les n matrices lignes correspondant à ces n formes linéaires, on obtient une matrice de n lignes et p colonnes.

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{np} \end{pmatrix}.$$

À quoi correspond cette matrice ? C'est la matrice d'une application linéaire U de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n , dont les fonctions composantes sont justement les n formes linéaires u_i .

D'autre part, la donnée des n fonctions de p variables ε_i revient exactement à préciser une fonction vectorielle \mathcal{E} , de fonctions composantes les ε_i , et préciser que les n fonctions ε_i ont toutes 0 pour limite signifie exactement que \mathcal{E} a pour limite $0_{\mathbb{R}^n}$.

Finalement, nous avons démontré la caractérisation suivante :

Proposition 3.67 Avec les notations précédentes, la fonction F est différentiable en X_0 si et seulement si il existe une application linéaire U de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n (ou ce qui revient au même une matrice n lignes et p colonnes $(u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$) et une fonction de p variables \mathcal{E} , également à valeurs dans \mathbb{R}^n , définie au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ telles que, pour H suffisamment petit on a

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + U(H) + \|H\|\mathcal{E}(H) \text{ avec } \lim_{H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} \mathcal{E}(H) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Dans cette situation, il est classique d'identifier l'application linéaire U et sa matrice $(u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Avec cette convention $U = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, et en notant en colonnes

le vecteur $H \in \mathbb{R}^p$, $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$, on a $U(H) = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = U H$.

3.8.2 Différentielle d'une fonction vectorielle

De façon extrêmement logique, l'application linéaire U qui intervient dans la proposition 3.67 est appelée la *différentielle* de F en X_0 , et on la note DF_{X_0} (plus tard, on utilisera aussi la notation plus universelle dF).

Il est clair, d'après la propriété analogue pour les fonctions à valeurs réelles, que la différentielle DF_{X_0} en X_0 d'une fonction F vectorielle est unique.

Lorsque f est différentiable sur \mathcal{U} , ce procédé définit donc une application sur \mathcal{U} , à valeurs dans l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n (qui est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$) (ou ce qui revient au même, à valeurs dans l'ensemble des matrices n

lignes, p colonnes). Cette application est notée DF ; elle s'appelle la différentielle de F , et elle est définie par

$$\begin{aligned} DF : \quad \mathcal{U} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ X_0 &\longmapsto DF_{X_0} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} DF_{X_0} : \quad \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ H &\longmapsto DF_{X_0}(H). \end{aligned}$$

On a quelques propriétés immédiates :

Proposition 3.68 Si F et G sont deux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n , définies et différentiables sur le même domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , alors pour tous réels λ, μ , on peut affirmer que $\lambda F + \mu G$ est différentiable sur \mathcal{U} et que

$$D(\lambda F + \mu G) = \lambda DF + \mu DG.$$

Cela signifie que pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, on a l'égalité entre les applications linéaires

$$D(\lambda F + \mu G)_{X_0} = \lambda DF_{X_0} + \mu DG_{X_0},$$

donc que pour tout $H \in \mathbb{R}^p$, on a l'égalité entre les vecteurs de \mathbb{R}^n

$$D(\lambda F + \mu G)_{X_0}(H) = \lambda(DF_{X_0}(H)) + \mu(DG_{X_0}(H)).$$

Il suffit d'écrire la définition, par exemple avec la caractérisation de la proposition 3.67.

Proposition 3.69 Si F est différentiable en X_0 , alors F est continue en X_0 .

Il suffit de passer par les fonctions coordonnées, et d'utiliser la proposition 3.61 p. 125.

3.8.3 Expression de la différentielle, matrice jacobienne

En traduisant vectoriellement la propriété donnant l'expression de la différentielle d'une fonction à valeurs réelles, on obtient

Théorème 3.70 (et définition) Soit F une fonction définie et différentiable sur un domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors toutes les fonctions composantes f_i de F admettent des dérivées partielles par rapport à toutes les p variables, et de plus, si $DF_{X_0} = U = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors on a pour tout (i, j) ,

$$u_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0).$$

La matrice $J(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{pmatrix}$, (qui est une matrice d'applications) s'appelle la matrice jacobienne de F . On a, pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, $J(F)(X_0) = DF_{X_0}$.

De même l'adaptation vectorielle du théorème 3.62 p. 125 nous donne

Théorème 3.71 Si F est une fonction définie sur un domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^n , si les fonctions composantes f_i de F sont de classe C^1 sur \mathcal{U} , (on dit dans ce cas que F est de classe C^1 sur \mathcal{U}), alors F est différentiable sur \mathcal{U} .

Ce théorème est fondamental : c'est dans le cadre des fonctions de classe C^1 que nous travaillerons désormais, et les fonctions différentiables que nous considérerons seront toujours des fonctions de classe C^1 , même si on peut montrer qu'il existe des fonctions différentiables à dérivées partielles non continues.

Exemple : soit la fonction F de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 , définie par

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y + \frac{1}{z} \\ x \sin y e^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Les deux fonctions composantes f_1 et f_2 de F sont évidemment de classe C^∞ sur leur ensemble de définition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Donc F est différentiable sur cet ensemble, et dF est caractérisée par la matrice jacobienne de F et on a

$$\begin{aligned} DF_{(x,y,z)} = J(F)(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & -\frac{1}{z^2} \\ \sin y e^z & x \cos y e^z & x \sin y e^z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour tout $H = (h, k, l) \in \mathbb{R}^3$ (ou plutôt $H = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$), sachant que $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ est

telle que $\lim_{H \rightarrow (0,0,0)} \mathcal{E}(H) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$F(x + h, y + k, z + l)$$

$$\begin{aligned} &= F(x, y, z) + \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & -\frac{1}{z^2} \\ \sin y e^z & x \cos y e^z & x \sin y e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + \|H\| \mathcal{E}(H) \\ &= \begin{pmatrix} x^2 y + \frac{1}{z} + 2xy h + x^2 k - \frac{1}{z^2} l + \|H\| \varepsilon_1(H) \\ x \sin y e^z + \sin y e^z h + x \cos y e^z k + x \sin y e^z l + \|H\| \varepsilon_2(H) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avant de continuer, il est intéressant de penser à observer ce que devient la notion de différentiabilité, de différentielle, de matrice jacobienne d'une application f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n dans les cas particuliers $p = 1$ ou $n = 1$.

Si $n = 1$, on est ramené à l'étude de la différentiabilité d'une fonction réelle de plusieurs variables, ce qu'on a fait au § 3.7 pp. 117 à 131. Notons que pour une fonction différentiable f de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R} , on a $Df = df$.

Si $n = 1$ et $p = 1$, on est en présence d'une fonction f réelle d'une seule variable. La différentiabilité d'une telle fonction f en x_0 équivaut à sa dérivabilité en x_0 et dans ce cas, on a df_{x_0} qui est la forme linéaire $h \mapsto f'(x_0)h$. La matrice (?) d'une telle forme linéaire n'a dans ce cas qu'une ligne et qu'une colonne ! C'est la matrice $(f'(x_0))$. En fait on assimile dans ce cas Df , df et f' .

Si $p = 1$ et $n \geq 2$, alors f est une fonction vectorielle d'une seule variable t , notion étudiée au chapitre 2. Dans ce cas, la différentiabilité de f équivaut à celle de ses n fonctions composantes, donc à la dérivabilité de celles-ci. La matrice jacobienne est dans ce cas une matrice colonne formée des dérivées des fonctions composantes.

Voyons maintenant deux propriétés importantes de la différentielle

Proposition 3.72 (Différentielle d'une application linéaire)

Soit U une application linéaire de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n ($U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$). On identifie U et sa matrice $(u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Alors quel que soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$, U est différentiable en X_0 et $DU_{X_0} = U$ (et U est donc également continue en X_0 : U est continue sur \mathbb{R}^p).

Il est intéressant de comprendre ce qu'est dans cette situation la matrice jacobienne de U .

C'est une matrice d'applications, et toutes ces applications sont constantes : on note par abus de langage $J(U) = U$. C'est un abus de langage, car en fait, c'est

pour tout $X \in \mathbb{R}^p$ que l'on a $J(U)(X) = U$; on a en fait $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(X) = u_{ij}$ (en appelant u_i la i -ème fonction composante de U), donc le terme de la i -ème ligne et j -ème colonne de $J(U)$ est l'application constante $t \mapsto u_{ij}$, pour laquelle il est d'usage de faire l'abus de langage de l'appeler u_{ij} .

Preuve de la proposition 3.72.

On a pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^p$ et pour tout $H \in \mathbb{R}^p$, U étant linéaire

$$U(X_0 + H) = U(X_0) + U(H) = U(X_0) + U(H) + \|H\|\mathcal{E}(H),$$

en posant $\mathcal{E}(H) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout H (\mathcal{E} est l'application nulle).

On a donc clairement $\lim_{H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} \mathcal{E}(H) = 0_{\mathbb{R}^n}$, on peut conclure que U est différentiable en X_0 et que $DU_{X_0} = U$. \square

On a aussi la proposition suivante, assez évidente

Proposition 3.73 Soit F une fonction définie et différentiable sur un domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^n . Alors F est une fonction constante si et seulement si on a $DF = (0)$ (la matrice n lignes, p colonnes d'applications toutes nulles).

Preuve Il est clair que si F est une fonction constante, toutes ses fonctions composantes sont aussi constantes et donc toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont nulles, (donc continues et F est de classe C^1 , donc différentiable même si on ne l'avait pas mis dans l'hypothèse). On a donc $DF = (0)$.

Réciproquement, si $DF = (0)$, toutes les dérivées partielles de la i -ème fonction composante f_i sont nulles. f_i est donc une fonction qui est constante par rapport à chaque variable x_j : elle est donc constante, et puisque F a toutes ses fonctions composantes qui sont constantes, elle est constante. \square

3.8.4 Différentielle d'une fonction composée

Le théorème fondamental pour la différentiation d'une fonction composée est la généralisation de la formule classique $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$.

Théorème 3.74 Soit F une fonction de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n , de classe C^1 sur un domaine $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$.

Soit G une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m , de classe C^1 sur un domaine $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$.

On suppose que pour tout $X \in \mathcal{U}$, on a $F(X) \in \mathcal{W}$ (en d'autres termes, on a $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$).

Alors $G \circ F$ est différentiable sur \mathcal{U} , et on a, pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$ tel que $F(X_0) = Y_0 \in \mathcal{W}$

$$D(G \circ F)_{X_0} = DG_{Y_0} \circ DF_{X_0}.$$

Preuve Pour bien suivre dans quel espace on se trouve, nous allons noter différemment la norme de chaque espace :

- La norme d'un $X \in \mathbb{R}^p$ sera notée $\|X\|_\alpha$.
- La norme d'un $X \in \mathbb{R}^n$ sera notée $\|X\|_\beta$.
- La norme d'un $X \in \mathbb{R}^m$ sera notée $\|X\|_\gamma$.

On pose $U = DF_{X_0}$. Pour tout $H \in \mathbb{R}^p$ suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} F(X_0 + H) &= F(X_0) + U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} \mathcal{E}(H) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ &= Y_0 + U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H). \end{aligned}$$

De même on pose $V = DF_{Y_0}$. Pour tout $K \in \mathbb{R}^n$ suffisamment petit, on a

$$G(Y_0 + K) = G(Y_0) + V(K) + \|K\|_\beta \widehat{\mathcal{E}}(K) \quad \text{avec} \quad \lim_{K \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \widehat{\mathcal{E}}(K) = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

On a donc

$$(G \circ F)(X_0 + H) = G(F(X_0 + H)) = G(Y_0 + U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)) = G(Y_0 + K),$$

à condition de poser $K = U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)$. On en déduit

$$\begin{aligned} (G \circ F)(X_0 + H) &= G(Y_0) + V(K) + \|K\|_\beta \widehat{\mathcal{E}}(K) \\ &= (G \circ F)(X_0) + V(U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)) + \|K\|_\beta \widehat{\mathcal{E}}(K) \\ &= (G \circ F)(X_0) + (V \circ U)(H) + \|H\|_\alpha V(\mathcal{E}(H)) + \|K\|_\beta \widehat{\mathcal{E}}(K) \\ &= (G \circ F)(X_0) + (V \circ U)(H) + \|H\|_\alpha \left[V(\mathcal{E}(H)) + \frac{\|K\|_\beta \widehat{\mathcal{E}}(K)}{\|H\|_\alpha} \right] \\ &= (G \circ F)(X_0) + (V \circ U)(H) + \|H\|_\alpha \widetilde{\mathcal{E}}(H). \end{aligned}$$

On a obtenu la forme souhaitée pour établir le résultat, en posant

$$\widetilde{\mathcal{E}}(H) = V(\mathcal{E}(H)) + \frac{\|U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)\|_\beta}{\|H\|_\alpha} \widehat{\mathcal{E}}(U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)).$$

En effet, $V \circ U$ est bien une application linéaire de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^m (en tant que composée d'une application linéaire de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n par une application linéaire de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^m) et il suffit donc d'établir que $\lim_{H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} \widetilde{\mathcal{E}}(H) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

Or, on a

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{E}}(H)\|_\gamma &\leq \left\| V(\mathcal{E}(H)) \right\|_\gamma + \frac{\|U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)\|_\beta}{\|H\|_\alpha} \left\| \widehat{\mathcal{E}}(U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)) \right\|_\gamma \\ &\leq \left\| V(\mathcal{E}(H)) \right\|_\gamma + \frac{\|U(H)\|_\beta}{\|H\|_\alpha} \left\| \widehat{\mathcal{E}}(K) \right\|_\gamma + \|\mathcal{E}(H)\|_\beta \left\| \widehat{\mathcal{E}}(K) \right\|_\gamma. \end{aligned}$$

Dans ce dernier membre de gauche, pour $H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}$, il est clair que le premier terme tend vers 0 (car l'application linéaire V est continue) ; le troisième et dernier terme tend aussi vers 0 comme produit de deux fonctions qui tendent toutes deux vers 0 (on compose des limites pour $\widehat{\mathcal{E}}$: puisque $K = U(H) + \|H\|_\alpha \mathcal{E}(H)$, il est clair que $\lim_{H \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}} K = 0_{\mathbb{R}^n}$.)

Il reste à montrer que le deuxième terme tend vers 0. Or, c'est le produit de $\|\widehat{\mathcal{E}}(K)\|_\gamma$ qui tend vers 0 comme on vient de le voir et du quotient $\frac{\|U(H)\|_\beta}{\|H\|_\alpha}$: il suffit de montrer que ce dernier quotient reste borné pour obtenir le résultat souhaité, grâce au théorème 3.13, p. 73.

Nous utiliserons une astuce pour établir ce résultat : nous supposerons que la norme $\|\cdot\|_\alpha$ de \mathbb{R}^p est la norme du max, alors que pour la norme $\|\cdot\|_\beta$ de \mathbb{R}^n nous prendrons la norme somme (voir les normes usuelles p. 6). Si ce sont en fait d'autres normes, l'équivalence des différentes normes usuelles (théorème 1.9 p. 7) permettra néanmoins de conclure.

Si $U = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on pose $M = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p |u_{ij}| \right)$. Pour $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \|U(H)\|_1 &= \sum_{i=1}^n |u_{i1}h_1 + \cdots + u_{ip}h_p| \leq \sum_{i=1}^n (|u_{i1}| |h_1| + \cdots + |u_{ip}| |h_p|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|u_{i1}| \|H\|_\infty + \cdots + |u_{ip}| \|H\|_\infty) \leq \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^p |u_{ij}| \right) \|H\|_\infty \right] = M \|H\|_\infty. \end{aligned}$$

On a donc $\forall H \in \mathbb{R}^p$, $\frac{\|U(H)\|_1}{\|H\|_\infty} \leq M$ donc ce quotient est borné, ce qui achève la démonstration. \square

Traduisons cette propriété dans quelques cas particuliers :

Tout d'abord, si $p = m = 1$. Avec les notations de ce théorème, ($F = f \circ u$, avec u fonction vectorielle d'une seule variable, et f fonction réelle de n variables), on a

pour $t_0 \in \mathcal{D}(F)$, $Du_{t_0} = \begin{pmatrix} u'_1(t_0) \\ \vdots \\ u'_n(t_0) \end{pmatrix}$ et en $Y_0 = u(t_0)$, on a

$Df_{Y_0} = df_{Y_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(Y_0) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{aligned} DF_{t_0} &= D(f \circ u)_{t_0} = df_{Y_0} \circ Du_{t_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(Y_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(Y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1(t_0) \\ \vdots \\ u'_n(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n u'_i(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_0) = \sum_{i=1}^n u'_i(t_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u(t_0)). \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule du théorème 3.40 (p. 97), qui se trouve redémontré dans toute sa généralité.

Ensuite, si $p = n = m = 1$, puisqu'on a vu que dans ce cas, $DF = dF = F'$, l'application linéaire $dF_{X_0} = F'(X_0)$ associant à tout h réel le réel $DF_{X_0}(h) = F'(X_0)h$, la formule s'écrit $(G \circ F)'(X_0) = G'(Y_0) \circ F'(X_0)$. Cette formule signifie que pour tout h réel, on a

$$\begin{aligned} (G \circ F)'(X_0)h &= (G \circ F)'(X_0)(h) = (G'(Y_0) \circ F'(X_0))(h) = G'(Y_0)(F'(X_0)h) \\ &= G'(Y_0)F'(X_0)h = G'(F(X_0))F'(X_0)h = ((G' \circ F) \cdot F')(X_0)h. \end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout h réel, et pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, on retrouve bien la formule de dérivation des fonctions composées : $(G \circ F)' = (G' \circ F)F'$

Corollaire 3.75 Avec les notations du Théorème 3.74, la matrice jacobienne de $G \circ F$ est égale au produit de la matrice jacobienne de G par la matrice jacobienne de F . Plus précisément, si $Y_0 = F(X_0)$

$$J(G \circ F)(X_0) = J(G)(Y_0) \cdot J(F)(X_0).$$

Ce résultat est évident en traduisant matriciellement la composition des applications linéaires $U = DF_{X_0}$ et $V = DG_{Y_0}$.

3.8.5 Jacobien d'une fonction de classe \mathcal{C}^1

Définition 3.76 Soit F une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R}^m . Alors le jacobien de F est la valeur absolue du déterminant $|\det(J(F))|$ de la matrice jacobienne de F . (C'est donc une application de \mathcal{U} vers \mathbb{R}).

Remarque : Le jacobien d'une fonction ne peut être défini que si la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée, puisque seules les matrices carrées ont un déterminant.

(Rappel : Le déterminant d'une matrice carrée 2×2 se calcule ainsi :

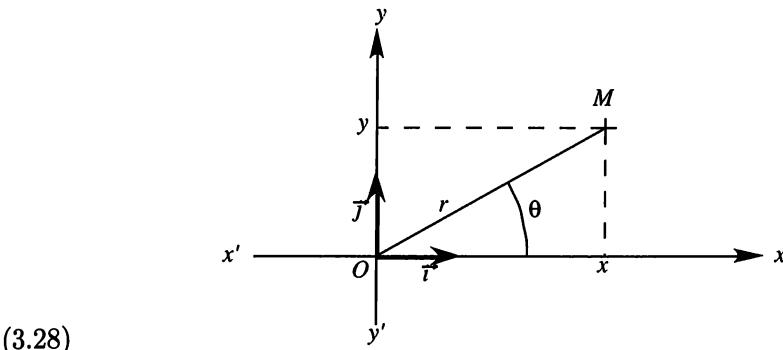
$$\text{si } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors } \det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Le déterminant d'une matrice carrée 3×3 peut se calculer ainsi (même si ce n'est pas toujours, loin de là, la meilleure méthode) (règle de Sarrus) si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, alors $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$)

L'intérêt de la notion de Jacobien apparaîtra lors de l'étude des changements de variables dans les intégrales doubles et triples.

Nous allons néanmoins étudier dès maintenant les changements de variables classiques, car ils fournissent des exemples intéressants.

Coordonnées polaires



On considère la fonction ψ , définie sur une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par

$$\psi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

L'interprétation graphique de ce changement de variable est classique : pour un point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , r désigne la longueur du segment $[OM]$ et θ désigne une des mesures modulo 2π de l'angle entre le vecteur \vec{i} et la demi-droite $[OM]$. En utilisant les nombres complexes, il est intéressant de noter que

$$r = |x + iy| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(x + iy) \quad [2\pi].$$

Les fonctions coordonnées de ψ sont $\psi_1 : (r, \theta) \mapsto r \cos \theta$ et $\psi_2 : (r, \theta) \mapsto r \sin \theta$. Elles sont clairement indéfiniment continûment dérивables, donc ψ est différentiable et sa matrice jacobienne est, en (r, θ)

$$J(\psi)_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$|\det(J(\psi))| = |r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta| = r.$$

Remarque : On peut se poser la question suivante : le sens de l'application ψ est-il bien choisi ? Ne serait-il pas judicieux de considérer une fonction $(x, y) \mapsto (r, \theta)$? La réponse est clairement non. En effet, nous verrons un peu plus loin qu'il n'est pas du tout simple d'exprimer (r, θ) en fonction de (x, y) , d'une part, et d'autre part, c'est paradoxalement dans ce sens que le « passage en polaires » est simple, comme nous allons le voir ci-après. En effet, en général, on rencontre des expressions en (x, y) . Pour passer en polaires, il suffit de remplacer dans ces expressions x et y par leurs valeurs respectives $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$, et dans ce cas les formules qui donneraient r et θ en fonction de (x, y) ne sont pas utiles. Illustrons cela pour une fonction f des deux variables (x, y) .

Soit f une fonction de deux variables (x, y) définie et de classe C^1 sur une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 ne contenant pas $(0, 0)$. On suppose que f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} , mais si f est à valeurs dans \mathbb{R}^p , on peut faire exactement le même type de raisonnement.

Lorsqu'on désire « passer en polaires », on pose $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = \psi(r, \theta)$. Cela revient à étudier l'application $F = f \circ \psi$, qui est définie sur une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et pour laquelle les variables sont (r, θ) . On obtient facilement une relation entre les dérivées partielles de F (par rapport à r et θ) et les dérivées partielles de f (par rapport à x et y), soit en utilisant le théorème 3.40 p. 97, soit le théorème 3.74 p. 137 (ou son corollaire).

La première méthode consiste à écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)r \cos \theta. \end{cases}$$

La seconde méthode revient bien sûr au même, et consiste à écrire le résultat pour les matrices jacobienes.

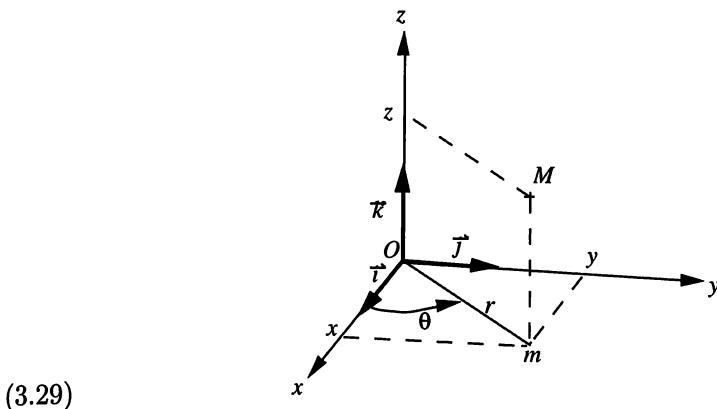
Puisque $J(F)_{(r, \theta)} = J(f \circ \psi)_{(r, \theta)} = J(f)_{(x, y)} J(\psi)_{(r, \theta)}$, on a

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right) J(\psi)_{(r, \theta)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \sin \theta & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)r \cos \theta \end{array} \right).\end{aligned}$$

On retrouve bien sûr le même résultat.

Coordonnées cylindriques

Prendre les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé direct de l'espace consiste à remplacer les deux premières coordonnées (x, y) de ce point par les coordonnées polaires (r, θ) .



Plus précisément, on considère l'application ψ définie sur une partie de \mathbb{R}^3 (en fait, une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) par $\psi(r, \theta, z) = (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$. Il n'y a pas beaucoup de différences avec les coordonnées polaires. L'interprétation graphique est la suivante :

Si M est le point de coordonnées (x, y, z) dans le repère orthonormé direct de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et si M n'est pas un point de l'axe (Oz) , on considère le projeté orthogonal m de M sur le plan (Oxy) ; r représente la longueur Om , et θ est une mesure de l'angle entre le vecteur \vec{i} et le vecteur \overrightarrow{Om} (à $k2\pi$ près, bien sûr), le plan (Oxy) étant orienté par le vecteur \vec{k} , c'est-à-dire que $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$.

L'application ψ est évidemment de classe C^∞ et est donc différentiable. Les fonctions coordonnées de ψ sont (ψ_1, ψ_2, ψ_3) définies par

$$\begin{cases} \psi_1(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ \psi_2(r, \theta, z) = r \sin \theta \\ \psi_3(r, \theta, z) = z. \end{cases}$$

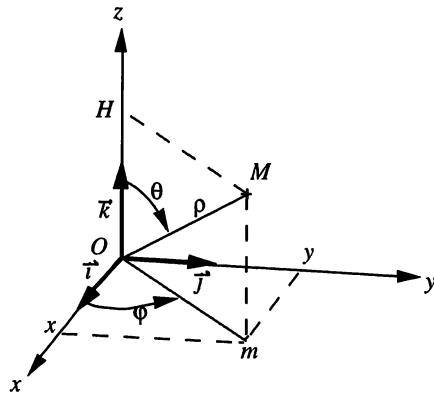
Sa matrice jacobienne en (r, θ, z) est

$$J(\psi)_{(r, \theta, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial \psi_1}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial \psi_2}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial \psi_3}{\partial z}(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien de ψ est donc ici aussi r (calcul immédiat).

Coordonnées sphériques

Ce changement de variable dans \mathbb{R}^3 est un peu plus difficile à manier que le précédent.



(3.30)

Commençons par son interprétation géométrique. On considère encore un point M , de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On suppose ici aussi que $M \notin (Oz)$, et on appelle m le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) , et H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz) .

On appellera ρ la longueur OM (à ne pas confondre avec $r = Om$ des coordonnées cylindriques).

θ est la colatitude : c'est l'angle entre l'axe (Oz) orienté par \vec{k} et le vecteur \overrightarrow{OM} . Cet est toujours « positif » (il est compris entre 0 et π).

La troisième coordonnée est aussi un angle, c'est l'angle φ entre l'axe (Ox) orienté par \vec{i} et le vecteur \overrightarrow{Om} .

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH}$, avec d'une part $\overrightarrow{OH} = \rho \cos \theta \vec{k}$ et d'autre part, $\overrightarrow{Om} = \|\overrightarrow{Om}\|(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})$, tandis que $\|\overrightarrow{Om}\| = \rho \sin \theta$, de sorte que finalement

$$\overrightarrow{OM} = \rho \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \rho \cos \theta \vec{k}.$$

C'est ce calcul qui justifie la définition rigoureuse des coordonnées sphériques : On considère la fonction ϕ définie sur une partie de \mathbb{R}^3 (en fait, une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times]0, \pi[\times \mathbb{R}$) par

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta).$$

Les fonctions coordonnées de ϕ sont (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) avec

$\phi_1(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos \varphi \sin \theta$
$\phi_2(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin \varphi \sin \theta$
$\phi_3(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos \theta$.

Ces fonctions sont évidemment indéfiniment continûment dérивables, donc ϕ est

différentiable et sa matrice jacobienne en (ρ, θ, φ) est

$$\begin{aligned} J(\phi)_{(\rho, \theta, \varphi)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial \phi_3}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice, calculé par la règle de Sarrus vaut :

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{ccc} \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{array} \right| \\ &= \rho^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \theta \\ &\quad + \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \sin \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \theta \\ &= \rho^2 \sin \theta (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \\ &\quad + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) \\ &= \rho^2 \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Finalement, le Jacobien de ϕ vaut donc $|\det(J(\phi)_{(\rho, \theta, \varphi)})| = \rho^2 \sin \theta$.

Remarque : On rencontre parfois d'autres définitions des coordonnées sphériques : par exemple, l'ordre des coordonnées peut être différent ; on peut aussi remplacer la colatitude par la latitude (qui varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, comme la latitude sur le globe terrestre qui varie entre 90° Sud et 90° Nord). L'important est de comprendre la démarche, et de savoir calculer le Jacobien : on trouve dans tous les cas un résultat qui a à peu près la même forme.

3.8.6 Matrice jacobienne de l'application réciproque

Nous allons généraliser dans ce § la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, qui donne la dérivée de l'application réciproque d'un fonction réalisant une bijection d'un intervalle I de \mathbb{R} sur un autre intervalle J de \mathbb{R} .

Proposition 3.77 Soit F une application définie sur un domaine ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^p . On suppose que F réalise une bijection de \mathcal{U} sur $\mathcal{V} = F(\mathcal{U})$, que \mathcal{V} est aussi un domaine ouvert. On suppose que F et son application réciproque F^{-1} (qui est définie sur $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$) sont toutes deux de classe \mathcal{C}^1 .

Alors, pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, si $Y_0 = F(X_0)$, les applications linéaires dF_{X_0} et $d(F^{-1})_{Y_0}$ sont toujours inversibles et sont réciproques l'une de l'autre.

On a donc $d(F^{-1}) = (dF \circ F^{-1})^{-1}$

La matrice jacobienne de F^{-1} est donc, en tout $Y_0 \in \mathcal{V}$,

$$J(F^{-1})(Y_0) = (J(F)(X_0))^{-1}.$$

De plus, le Jacobien de F^{-1} est égal à l'inverse du Jacobien de F : précisément, si $Y_0 = F(X_0)$, alors

$$\left| \det(J(F^{-1})(Y_0)) \right| = \frac{1}{\left| \det(J(F)(X_0)) \right|}.$$

Preuve Il suffit de différentier (c'est-à-dire de calculer la différentielle des deux membres) une des identités caractérisant que F et F^{-1} sont réciproques l'une de l'autre :

$$F^{-1} \circ F = \text{id}_{\mathcal{U}}.$$

On est dans une situation où toutes les applications rencontrées sont différentiables, et on peut appliquer le théorème 3.74, p. 137. En tout $X_0 \in \mathcal{U}$, si $Y_0 = F(X_0)$,

$$D(F^{-1})_{Y_0} \circ DF_{X_0} = D(\text{id}_{\mathcal{U}})_{X_0}.$$

Or, l'application $\text{id}_{\mathcal{U}}$ est définie par $\text{id}_{\mathcal{U}} : X \mapsto X$. C'est donc la restriction à \mathcal{U} de l'application linéaire identité de \mathbb{R}^p , et on peut appliquer le résultat sur la différentielle d'une application linéaire (Proposition 3.72 p. 136) :

$$D(\text{id}_{\mathcal{U}})_{X_0} = D(\text{id}_{\mathbb{R}^p})_{X_0} = \text{id}_{\mathbb{R}^p}.$$

On a donc

$$D(F^{-1})_{Y_0} \circ DF_{X_0} = \text{id}_{\mathbb{R}^p},$$

et cela prouve à la fois que $D(F^{-1})_{Y_0}$ et DF_{X_0} sont des applications linéaires inversibles et qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. \square

Il existe une amélioration de cette proposition nécessitant des hypothèses plus faibles, mais nous ne pouvons pas le démontrer facilement :

Théorème 3.78 (admis) Soit F une application définie sur un domaine ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^p , à valeurs dans \mathbb{R}^p . On suppose que F réalise une bijection de \mathcal{U} sur $\mathcal{V} = F(\mathcal{U})$. On suppose que F est différentiable sur \mathcal{U} , et que pour tout $X_0 \in \mathcal{U}$, dF_{X_0} est une application linéaire inversible de \mathbb{R}^p dans lui-même (ou ce qui revient au même, que $\left| \det(J(F)(X_0)) \right| \neq 0$).

Alors F^{-1} est différentiable sur \mathcal{V} et on peut appliquer le résultat de la proposition 3.77

Exemple des coordonnées polaires

On a vu que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par $\psi(r, \theta) = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ était différentiable.

Plaçons nous maintenant sur un domaine \mathcal{U} où ψ réalise une bijection. On peut par exemple prendre $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{*+} \times]-\pi, \pi[$. \mathcal{V} est alors représenté par le plan privé de la demi-droite $[Ox')$, partie de l'axe des abscisses formée des points d'abscisse négative. (En utilisant les nombres complexes, \mathcal{V} est formé des points dont l'affixe est dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$)

Mais nous nous restreindrons à un domaine \mathcal{U} plus petit, car l'application réciproque ψ^{-1} sera alors plus facile à expliciter : on prendra $\mathcal{U} = \mathbb{R}^{*+} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a dans ce cas $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, et pour $(x, y) \in \mathcal{V}$, on a $\psi^{-1}(x, y) = (r, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$

(en effet, puisque θ est l'angle entre \vec{i} et \overrightarrow{OM} , on a $\tan \theta = \frac{y}{x}$. Puisqu'on a pris la précaution de ne garder que des θ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on a $\arctan \tan \theta = \theta = \arctan \frac{y}{x}$)

Soit $\phi = \psi^{-1}$. Soient (ϕ_1, ϕ_2) les fonctions coordonnées de ϕ . Ce sont des fonctions indéfiniment continûment dérивables et on a $\begin{cases} \phi_1(x, y) = r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi_2(x, y) = \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$

ϕ est donc différentiable et on peut déterminer la matrice jacobienne de $\psi^{-1} = \phi$.

$$\mathbf{J}(\psi^{-1})(x, y) = \mathbf{J}(\phi)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathbf{J}(\psi^{-1})(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant le Jacobien de ψ^{-1} .

$$|\det \mathbf{J}(\psi^{-1})(x, y)| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Comparons maintenant ce résultat avec ce qu'on avait obtenu pour $\mathbf{J}(\psi)$ à savoir

$$\mathbf{J}(\psi)(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'inverse de cette matrice est

$$\left(J(\psi)(r, \theta) \right)^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

D'autre part, en remplaçant x et y par leurs valeurs respectives $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$ dans l'expression de $J(\phi)_{(x,y)}$, on retrouve bien que

$$J(\phi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{r \cos \theta}{r} & \frac{r \sin \theta}{r} \\ \frac{-r \sin \theta}{r^2} & \frac{r \cos \theta}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

De même, le Jacobien de ψ^{-1} est égal à $\frac{1}{r}$: c'est bien l'inverse du jacobien de ψ . Pour cet exemple, tous les résultats de la proposition 3.77 se trouvent donc confirmés par ces calculs

3.9 Opérateurs différentiels

Dans ce § on introduit un vocabulaire surtout utilisé par les physiciens et les mécaniciens, mais aussi utile aux mathématiciens.

3.9.1 Champs

En physique, il est fréquent d'associer à tout point de l'espace un nombre ou un vecteur. Les physiciens parlent de champ scalaire ou de champ vectoriel. Nous allons définir mathématiquement ces notions et constater qu'elles ne sont en fait pas nouvelles.

Toutes les applications considérées ici seront suffisamment régulières pour être continûment dérivées ou différentiées autant de fois que nécessaire.

Champs scalaires

Définition 3.79 On appelle champ scalaire toute application f définie sur un domaine $\mathcal{D}(f)$ de \mathbb{R}^3 (considéré comme l'ensemble des points de l'espace) à valeurs dans \mathbb{R} .

On se rend compte qu'un champ scalaire, c'est mathématiquement, tout simplement une fonction de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} sous réserve que \mathbb{R}^3 soit compris comme ensemble de points. On note en général par des lettres majuscules les points, de sorte que l'on écrira

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto f(M). \end{aligned}$$

On peut aussi considérer des champs scalaires définis sur une partie de \mathbb{R}^2 considéré comme ensemble des points d'un plan.

Notons une subtilité concernant ces champs scalaires : puisqu'ils associent un nombre $f(M)$ à un point M , et que ce point peut être repéré avec d'autres coordonnées que les coordonnées cartésiennes (même sans changer de repère), par exemple les coordonnées cylindriques ou sphériques, que devient ce champ si on change les coordonnées ?

Comprendre bien qu'alors, mathématiquement, on change d'application :

Si $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, et si on utilise les coordonnées cylindriques, par exemple, avec $(x, y, z) = \psi(r, \theta, z)$, alors on étudie une autre application, que l'on peut noter par exemple \tilde{f} et qui associe à (r, θ, z) le réel $\tilde{f}(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = f \circ \psi(r, \theta, z)$ de sorte que $\tilde{f} = f \circ \psi$.

De même, si on utilise les coordonnées sphériques, on étudie alors l'application $\hat{f} = f \circ \phi$ (notations du § 3.8.5 pp. 143–144).

Une des difficultés avec cette notion lorsqu'elle est utilisée par des non-mathématiciens est que souvent ils omettent de distinguer f et \tilde{f} ou \hat{f} , et notent tout avec la même lettre. Pour pouvoir raisonner sainement, il est essentiel de savoir rétablir la distinction ci-dessus au moins au niveau de sa réflexion personnelle.

Champs vectoriels

Définition 3.80 On appelle champ vectoriel toute application \vec{V} définie sur un domaine $\mathcal{D}(f)$ de \mathbb{R}^3 (considéré comme l'ensemble des points de l'espace) à valeurs dans \mathbb{R}^3 (considéré comme ensemble des vecteurs de l'espace).

Nous voyons donc qu'un champ vectoriel n'est mathématiquement rien d'autre qu'une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Il est d'usage de noter (P, Q, R) les fonctions composantes de \vec{V} (P , par exemple est donc un champ scalaire de même ensemble de définition que \vec{V}).

Si, sans changer de repère, on utilise pour repérer un point M les coordonnées cylindriques ou sphériques, on soulève les mêmes difficultés que pour les champs scalaires : on change en fait d'application.

On peut aussi considérer des champs vectoriels plans : dans ce cas l'ensemble de départ est \mathbb{R}^2 considéré comme ensemble des points du plan, et l'ensemble d'arrivée est \mathbb{R}^2 considéré comme ensemble des vecteurs de ce plan.

Notons qu'en fait, on peut toujours plonger \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 , en considérant que le plan est un plan de l'espace et en rajoutant une troisième coordonnée z prise en suivant un vecteur \vec{k} orthogonal au plan.

3.9.2 Gradient d'un champ scalaire

Nous avons vu au § 3.7.7 p. 130 que le gradient d'une fonction de trois variables f (donc d'un champ scalaire, dans notre point de vue) est un champ vectoriel

dont les fonctions composantes sont $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$. En notant en colonne les vecteurs de l'espace, nous avons donc

$$\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu également que le gradient est une notion équivalente à celle de différentielle puisque pour tout $\vec{H} \in \mathbb{R}^3$, en considérant \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire naturel \cdot on a

$$df_M(\vec{H}) = \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}(M) \cdot \vec{H}.$$

Gradient en coordonnées cylindriques

Si un champ vectoriel f est défini à partir de son expression en coordonnées cylindriques $\tilde{f} = f \circ \psi$, il est intéressant de savoir calculer $\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}$ en fonction de ces coordonnées cylindriques, c'est-à-dire de déterminer $\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f} \circ \psi$ en fonction de \tilde{f} .

Une méthode astucieuse consiste à utiliser le théorème 3.74, p. 137.

En effet, $\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f} \circ \psi(r, \theta, z) = \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ a les mêmes composantes que $df_{\psi(r, \theta, z)}$ et on a vu que

$$d\tilde{f}_{(r, \theta, z)} = d(f \circ \psi)_{(r, \theta, z)} = df_{\psi(r, \theta, z)} \circ d\psi_{(r, \theta, z)}.$$

Matriciellement, en utilisant la matrice jacobienne du changement de variable ψ (voir p. 143), qui est inversible puisque son déterminant est $r \neq 0$ si on évite l'axe (Oz), on obtient

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right) (r, \theta, z) = df_{\psi(r, \theta, z)} J(\psi)(r, \theta, z) = df_{\psi(r, \theta, z)} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } df_{\psi(r, \theta, z)} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta, z) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta, z) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(r, \theta, z) \right) \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{Puisque } \left(J(\psi)(r, \theta, z) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_{\psi(r,\theta,z)} &= \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta, z) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta, z) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(r, \theta, z) \right) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right] \quad \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right] \quad \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right] \right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression du gradient en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad } \tilde{f}} \circ \psi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta, z) \cos \theta - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta, z) \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, \theta, z) \sin \theta + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r, \theta, z) \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(r, \theta, z) \end{pmatrix}.$$

On pourrait faire un calcul analogue pour l'expression du gradient en coordonnées sphériques, mais l'inverse de $J(\phi)$ est un peu plus compliquée à obtenir (voir exercices).

3.9.3 Divergence d'un champ vectoriel

Définition 3.81 Soit \vec{V} un champ vectoriel défini sur un domaine \mathcal{D} , de classe C^1 , de composantes (P, Q, R) .

La divergence de \vec{V} est le champ scalaire $\text{div } \vec{V}$ défini sur \mathcal{D} par

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

(Si \vec{V} est un champ vectoriel plan, on supprime les troisièmes coordonnées , donc $\text{div } \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$).

Notons le petit « paradoxe » : si on part d'un champ scalaire, en le « dérivant », on obtient un champ vectoriel (le gradient), alors qu'en « dérivant » un champ vectoriel, on trouve un champ scalaire (la divergence). Ce n'est en fait pas si simple, puisque nous verrons au § suivant une autre façon de dériver un champ vectoriel, dont le résultat est lui vectoriel.

On peut aussi se poser la question : que donne la divergence d'un champ vectoriel en un point M dont on connaît les fonctions composantes exprimées en coordonnées cylindriques ou sphériques (ou même polaires pour un champ vectoriel plan).

3.9.4 Laplacien d'un champ scalaire

Définition 3.82 Soit f un champ vectoriel défini sur un domaine \mathcal{D} , de classe C^2 .

Le Laplacien de f est le champ scalaire Δf défini sur \mathcal{D} par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

(Si f est un champ scalaire plan, on supprime le troisième terme, et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$).

Le Laplacien de f est donc une espèce de dérivée seconde. On vérifie d'ailleurs aisément que

Proposition 3.83

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \Delta f.$$

3.9.5 Rotationnel d'un champ vectoriel

Définition 3.84 Soit \vec{V} un champ vectoriel défini sur un domaine \mathcal{D} , de classe C^1 , de composantes (P, Q, R) .

Le rotationnel de \vec{V} est le champ vectoriel $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}$ défini sur \mathcal{D} par

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(Si \vec{V} est un champ vectoriel plan $\begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$, on rajoute une troisième coordonnée $R = 0$, et on considère P et Q comme des fonctions de trois variables (x, y, z) on

a donc $\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial z}$, de sorte que $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Dans ce cas on peut aussi considérer que le rotationnel est une fonction scalaire (tout dépend du contexte).

$$\operatorname{rot}(\vec{V}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Un des intérêts immédiats du rotationnel est le résultat fondamental suivant.

Théorème 3.85 Soit \vec{V} un champ vectoriel de classe C^1 sur un ouvert étoilé. Alors \vec{V} est un champ de gradients (c'est-à-dire qu'il existe un champ scalaire f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$) si et seulement si

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}.$$

Définition 3.86 Un ouvert \mathcal{U} est dit étoilé lorsqu'il est étoilé par rapport à un de ses points.

Un ouvert \mathcal{U} est étoilé par rapport à son point O lorsqu'on a :

$$\forall M \in \mathcal{U} \quad [OM] \subset \mathcal{U}.$$

Par exemple tout ouvert convexe est étoilé (par rapport à n'importe lequel de ses points).

L'intérieur d'un « étoile » est étoilé (par rapport à son centre et aussi par rapport à des points proches de son centre).

Le plan auquel on enlève une demi-droite est étoilé (par rapport à tout point dans le prolongement de la demi-droite enlevée).

En revanche l'ensemble ouvert formé du plan (ou de l'espace) auquel on a enlevé un point, par exemple l'origine n'est pas étoilé.

Une bonne façon de comprendre la notion d'ouvert étoilé (du plan) est de considérer que le dessin qui le représente est le plan d'une pièce ou d'un domaine, et de se poser la question suivante : peut-on éclairer toute cette pièce avec une seule ampoule ? Y a-t-il un endroit où on peut placer une lampe qui ne laisse aucun point dans l'ombre ? Si la réponse est oui, l'ouvert est étoilé (par rapport à ce point où on peut placer l'ampoule). Si la réponse est non, l'ouvert n'est pas étoilé. Par exemple, le plan privé d'un point peut se concevoir comme une très grande pièce avec un pilier central. Il est clair que dans un domaine de ce type, où que l'on place l'ampoule, il y aura toujours une zone d'ombre (derrière le pilier).

En revanche, si on enlève toute une demi-droite du plan on peut imaginer qu'on a une très grande pièce avec une cloison très mince (infiniment mince) qui part d'un pilier central (lui aussi de diamètre nul !). Il est clair qu'une lampe placée dans le prolongement de la cloison ne laisse (en théorie) aucune zone d'ombre, puisque l'ombre du pilier est justement formée par la cloison qui n'est pas à l'intérieur de la pièce.

Preuve partielle du théorème 3.85

Lemme 3.87 Soit f un champ scalaire de classe C^2 sur un ouvert quelconque \mathcal{U} .

Alors on a $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$.

Ce résultat est évident en écrivant les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}$ puis celles de $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{f}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Schwarz (théorème 3.43 p. 103).

Notons qu'il n'est pas nécessaire que l'ouvert \mathcal{U} soit étoilé pour qu'on ait ce résultat.

Ce lemme permet de démontrer un des sens de l'équivalence énoncée dans le théorème, mais la démonstration de l'autre sens nécessite des outils qui dépassent le cadre de cet ouvrage. \square

3.9.6 L'opérateur Nabla

Nous introduisons dans ce § une notation qui n'est pas rigoureuse, mais qui a le mérite d'unifier un peu les trois sortes de dérivations de champs que sont le gradient, la divergence et le rotationnel. Elle fournit aussi une aide mnémotechnique.

$$\text{On pose } \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \text{ (on lit « Nabla »)}$$

Avec cette convention, sans que l'on ait vraiment défini quel type d'objet est ce Nabla, on remarque que formellement, on a :

Pour le Gradient :

Si f est un champ scalaire, $\overrightarrow{\text{grad}} \vec{f} = \vec{\nabla} f$, en acceptant que multiplier l'espèce de vecteur qu'est $\vec{\nabla}$ par le scalaire f , c'est « multiplier » ou plutôt composer chaque coordonnée de $\vec{\nabla}$ par f .

Pour la Divergence :

Si \vec{V} est un champ vectoriel, alors on a $\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Dans cette expression, \cdot représente le produit scalaire. On « multiplie » donc (ou plutôt on compose) les trois « coordonnées » de $\vec{\nabla}$ avec les coordonnées correspondantes de \vec{V} et on additionne ces trois « produits ».

Pour le Rotationnel :

Si \vec{V} est un champ vectoriel, alors on a $\overrightarrow{\text{rot } V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$. Dans cette expression, \wedge représente le produit vectoriel, dont l'expression est dans une base orthonormée :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \\ z & z' \\ x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}.$$

On a donc bien, formellement

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{rot } V}.$$

Pour le Laplacien

On obtient facilement, pour un champ scalaire f ,

$$\Delta f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f).$$

On note formellement ce résultat

$$\Delta = \vec{\nabla}^2.$$

Interprétation du lemme « rot(grad) »

Le résultat du lemme 3.87 s'écrit, avec le Nabla :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \mathbf{0}.$$

C'est un résultat « évident » si on se rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul ; or, $\vec{\nabla}$ et $\vec{\nabla} f$ sont « clairement » des vecteurs colinéaires

puisque leurs composantes sont respectivement $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$; le coefficient

de proportionnalité est donc f . (Encore une fois, nous ne prétendons pas que tout ceci soit rigoureux).

3.10 Exercices

3.2 Compréhension des définitions

Exercice 3.1. Démontrer en appliquant la définition, que la fonction $f(x, y) = 2 + x - 2y$ admet -3 comme limite quand (x, y) tend vers $(-3; 1)$. Expliciter en fonction de ε une valeur possible du réel η de la définition pour chacune des trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_1$.

Exercice 3.2. Démontrer en appliquant la définition, que la fonction de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^2 définie par

$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ x - 2z \end{pmatrix}$ admet $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ comme limite quand (x, y, z) tend vers $(1, -1, 2)$. Après avoir choisi une norme dans l'espace de départ et une autre dans l'espace d'arrivée, expliciter en fonction de ε une valeur possible du réel η de la définition.

3.4 Détermination pratique de limites

Exercice 3.3. Étudier l'existence d'une éventuelle limite pour $X \rightarrow 0$ des fonctions :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ | ; | 2. $f(x, y) = \frac{x+y^3}{x^2+y^2}$ |
| 3. $f(x, y) = \frac{x^4y^2}{x^4+y^2}$ | ; | 4. $f(x, y) = \frac{ xy ^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$ |
| 5. $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ | ; | 6. $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^4}$ |
| 7. $f(x, y) = \frac{\sin^4 x + (1 - \cos y)^2}{4x^4+y^4}$ | ; | 8. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{(x^2+y^2)^\alpha}$ |
| 9. $f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{y}$ | ; | 10. $f(x, y) = \frac{xy}{ x \cos y + y \cos x}$ |
| 11. $f(x, y) = \frac{y \sin x - x \sin y}{x^2+y^2}$ | ; | 12. $f(x, y) = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - 2}{x^2+y^2}$ |
| 13. $f(x, y) = \frac{1 - \cos xy}{x^2+xy+y^2}$ | ; | 14. $f(x, y) = \frac{\sin xy - xy}{x^2+y^2}$ |
| 15. $f(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}$ | ; | 16. $f(x, y) = x ^\alpha \ln(x^2+y^2)$ |

Exercice 3.4. Soit f la fonction des deux variables x, y définie par

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{|y|}{x^2} \exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0, y) = 0 & \end{cases}$$

1. Étudier la limite de $f(x(t), y(t))$ lorsque $(x(t), y(t))$ est une paramétrisation d'une droite passant par l'origine, t étant choisi pour que le point $(x, y) = (x(t), y(t))$ se rapproche de $(0, 0)$. On montrera que quelle que soit la droite (horizontale, verticale ou oblique), cette limite est nulle.
2. Montrer qu'il est possible de trouver un chemin $(x(t), y(t))$ passant par $(0, 0)$ tel que $f(x(t), y(t))$ ait une valeur constante non nulle. Quelle est la conclusion ?

3.5 Dérivées partielles

Exercice 3.5.

Après avoir donné un domaine dans lequel il n'y a pas de problème de dérivableité, calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$; 2. $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$
3. $f(x, y) = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$; 4. $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$
5. $f(x, y) = x^{xy^2}$; 6. $f(x, y) = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$
7. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 - y^2})$; 8. $f(x, y) = \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$
9. $f(x, y) = \sqrt{x \cos y}$; 10. $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$
11. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$; 12. $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
13. $f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}$; 14. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
15. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$; 16. $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$
17. $f(x, y) = x^y$; 18. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 y^2}}$
19. $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$; 20. $f(x, y) = \ln \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}$
21. $f(x, y) = \operatorname{ch}\left(\frac{xy+1}{xy-1}\right)$. ;

Exercice 3.6.

Soit $f(x, y) = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$; après avoir déterminé les ensembles de définition, de continuité et de dérivableité de f , calculer les dérivées partielles de f et en déduire une expression plus simple de $f(x, y)$.

Exercice 3.7.

Après avoir donné un ensemble ouvert le plus grand possible dans lequel il n'y a pas de problème de dérivabilité, calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ainsi que les dérivées partielles du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, des fonctions suivantes.

1. $f(x, y) = \ln \sqrt{\frac{xy}{x+y}}$; 2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$;
3. $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$; 4. $f(x, y, z) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$;
5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; 6. $f(x, y) = \frac{1}{e^x + e^y}$;
7. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$; 8. $f(x, y, z) = \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$.

Exercice 3.8.

1. Déterminer toutes les fonctions f des deux variables x et y , dérivables par rapport à x sur un domaine \mathcal{U} telles que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0.$$

2. Déterminer toutes les fonctions f des deux variables x et y , dérivables par rapport à y sur un domaine \mathcal{U} telles que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

3. Déterminer toutes les fonctions f des deux variables x et y , deux fois dérivables sur un domaine \mathcal{U} telles que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 3.9.

Soit f la fonction de deux variables définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3.10.

Calculer la dérivée de la fonction $F(t) = f(x(t), y(t))$ (ou $f(x(t), y(t), z(t))$) lorsque :

1. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$; $x(t) = \cos t - \sin t$; $y(t) = \cos t + \sin t$; qu'en déduit-on ?
2. $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$; $x(t) = e^{t^2+1}$; $y(t) = t^2 + 1$
3. $f(x, y, z) = xyz$; $x(t) = t^2 + 1$; $y(t) = \ln t$; $z(t) = \tan t$

Exercice 3.11.

Déterminer les éventuels extrema locaux de la fonction f définie par :

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y$
2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
3. $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^4 - 20y + 8x + 2$
4. $f(x, y) = 2x^2 - 2x(e^y - y + 1) + e^{2y} + (y - 1)^2$
5. $f(x, y) = x^2y^3 + 3x^3y^3 + 2x^2y^4$

3.7 — 3.8 Différentiabilité**Exercice 3.12.**

Soit f une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 . Montrer que f est différentiable en tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et que $df_{(x_0, y_0)} = f$.

Exercice 3.13. On se place dans \mathbb{R}^2 .

1. Étudier la différentiabilité de la fonction N_2 (norme euclidienne).
2. Étudier la différentiabilité de la fonction N_1 (norme somme).
3. Étudier la différentiabilité de la fonction N_∞ (norme du max).

Exercice 3.14.

Étudier la différentiabilité des fonctions f définies sur \mathbb{R}^2 par :

1.
$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 & \end{cases}$$

Exercice 3.15.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, qui est définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y^2 + z \\ xy^2 z \\ x^2 z + xy \end{pmatrix}$$

Justifier la différentiabilité de f , préciser sa différentielle et sa matrice jacobienne. Peut-on calculer le Jacobien de f ?

Exercice 3.16.

On pose $f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2 z)$ et $g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v)$.

Justifier la différentiabilité de f et de g , calculer les différentielles de f , de g , de $g \circ f$ et de $f \circ g$ (pour ces deux dernières fonctions, on utilisera deux méthodes).

Exercice 3.17.

On considère l'équation aux dérivées partielles à résoudre sur le demi-plan \mathcal{P} : $x > 0$

$$(\mathcal{E}) \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

pour laquelle il est suggéré d'utiliser le changement de variables $x = \frac{u^2 + v^2}{2}$;
 $y = \frac{u}{v}$.

Étude du changement de variables

- Montrer qu'il existe une application $\varphi : (u, v) \mapsto (x, y)$, d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 que l'on précisera vers le demi-plan \mathcal{P} , correspondant au changement de variables suggéré et que cette application est bijective et de classe \mathcal{C}^1 .
- Pour toute fonction f définie sur \mathcal{P} , on pose $F = f \circ \varphi$. Donner l'expression des dérivées partielles de F par rapport aux variables u et v en fonction des dérivées partielles de f .
- En inversant le système obtenu à la question précédente, en déduire que pour tout couple $(x, y) = \varphi(u, v)$ de \mathcal{P} , on a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + v \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{v^2}{u^2 + v^2} \left(v \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right) \end{cases}$$

Retour à l'équation (\mathcal{E})

4. Montrer que les fonctions f solutions de (\mathcal{E}) sont les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right)$$

g étant une fonction de classe C^1 définie sur \mathbb{R}^{*+}

5. Déterminer la solution de (\mathcal{E}) qui vérifie en plus

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{et} \quad f(1, 0) = 2$$

Exercice 3.18.

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

il est suggéré d'utiliser le changement de variable $u = x + y$ et $v = x + 2y$. En vous inspirant de la démarche proposée dans l'exercice précédent, et en détaillant chacune des étapes du raisonnement, résoudre cette équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire déterminer toutes les fonctions de deux variables f qui vérifient cette équation en tout (x, y) de \mathbb{R}^2 .

Exercice 3.19.

Lorsque deux résistances R_1 et R_2 sont montées en parallèle, la résistance équivalente R est donnée par la formule : $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Comment varie R lorsque R_1 et R_2 varient respectivement de ΔR_1 et ΔR_2 (petits devant R_1 et R_2) ?

Application numérique : $R_1 = 40\Omega$; $R_2 = 63\Omega$; $\Delta R_1 = -0,1\Omega$; $\Delta R_2 = 0,2\Omega$ (vérifier par un calcul exact).

Exercice 3.20.

1. Calculer les dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ de

a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$; $g(x, y) = 3x^2y - y^3$

b) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $g(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $g(x, y) = \frac{3x^2y - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- 2.a), 2.b) et 2.c), Retrouver ces résultats dans chaque cas en utilisant des coordonnées polaires.

3.9 Opérateurs différentiels

Exercice 3.21.

1. Soit f une fonction des trois variables x, y, z , à valeurs dans \mathbb{R}^3 , de classe C^1 (f est un champ vectoriel) et $\psi : (r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$ étant l'application changement de variables en coordonnées cylindriques, on considère $F = f \circ \psi$.

Exprimer en fonction des dérivées partielles de F par rapport à r, θ et z la divergence de la fonction f en un point $(x, y, z) = \psi(r, \theta, z)$ (expression de la divergence en coordonnées cylindriques).

2. Même question pour l'expression de la divergence en coordonnées sphériques.

Exercice 3.22.

Démontrer la formule suivante qui donne l'expression du Laplacien en polaires (pour une fonction de deux variables)

$$\Delta F(x, y) = \Delta F(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

On précisera toutes les hypothèses, et la signification de \tilde{F} .

Exercice 3.23.

f, g étant des champs scalaires, et \vec{U} et \vec{V} des champs vectoriels, trouver et démontrer les formules donnant l'expression de

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(fg)$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{U} \cdot \vec{V})$
3. $\text{div}(f\vec{U})$
4. $\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{U})$.

CHAPITRE 4

Intégrale curviligne. Longueur d'une courbe

4.1 Introduction

4.1.1 Notions abordées

Nous traiterons d'abord, dans ce chapitre, de la notion d'intégrale curviligne, aussi appelée intégrale le long d'un chemin, ou circulation d'un vecteur. Après avoir rappelé ce que sont les formes différentielles et les champs de vecteurs, deux aspects d'une même notion, ou si on préfère deux notions équivalentes, nous apprendrons à les intégrer le long d'un arc de courbe paramétrée, et nous montrerons l'invariance par rapport à la paramétrisation choisie. Nous traiterons ensuite le cas fondamental où le champ vectoriel dérive d'un potentiel (est un champ de gradients), ou ce qui revient au même, la forme différentielle est exacte. Ensuite, par anticipation avec le chapitre suivant, nous expliquerons comment l'intégrale curviligne peut servir à calculer l'aire d'une partie du plan.

Pour finir nous étudierons une intégrale curviligne particulière, celle qui permet de calculer la longueur d'un arc de courbe (lorsque c'est possible) et nous parlerons un tout petit peu d'abscisse curviligne, de courbure, et d'intégrale curviligne d'une fonction scalaire.

4.1.2 Cadre de cette étude

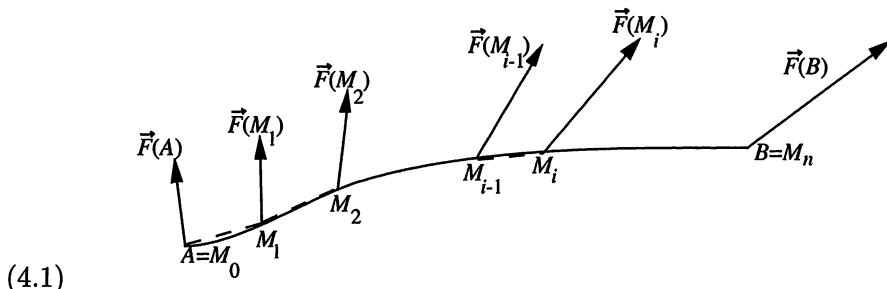
Nous nous placerons systématiquement dans \mathbb{R}^2 , considéré comme étant le plan, rapporté à un repère orthonormé. Cette étude est aussi valable dans l'espace, (dans \mathbb{R}^3), et il suffit dans ce cas de rajouter une troisième coordonnée. Les vecteurs seront désignés par des majuscules surmontés d'une flèche. Les composantes du vecteur \vec{X} seront notées (x, y) .

On n'utilisera que la norme euclidienne, et $\|\cdot\|$ désignera donc toujours cette norme euclidienne. Nous utiliserons aussi le produit scalaire naturel de \mathbb{R}^2 , défini ainsi :

Si $\vec{X} = (x, y)$ et $\vec{X}' = (x', y')$, alors $\vec{X} \cdot \vec{X}' = xx' + yy'$.

4.1.3 Nature des problèmes

On considère un arc de courbe d'origine A , d'extrémité B . (Cela suppose bien sûr que l'on a choisi un sens de parcours). On procède comme pour la définition de l'intégrale d'une fonction : on subdivise cet arc en un grand nombre de petits arcs, en plaçant des points M_i entre A et B , sur l'arc. Classiquement, on posera $A = M_0$ et $B = M_n$, si les points M_i entre A et B sont numérotés de 1 à $n - 1$. Les points M_i sont supposés tellement rapprochés que la courbe entre M_{i-1} et M_i peut presque être considérée comme un segment de droite. Dans ce cadre, on se pose deux problèmes.



Le premier problème est celui de la longueur de la courbe entre A et B . Assez naturellement, on se dit que cette longueur ne doit pas être très différente de la somme des longueurs des n segments $[M_{i-1} M_i]$. Quelle signification mathématique donner à cette intuition ?

Le deuxième problème est issu de la physique : si on dispose d'un champ de vecteurs défini dans un ouvert \mathcal{U} contenant la courbe AB , par exemple un champ de forces \vec{F} , quel est le travail de ces forces le long de cet arc ?

Le travail d'une force constante \vec{F}_0 , le long d'un segment de droite PQ , parcouru de P vers Q est facile à calculer : c'est le produit scalaire de \vec{F}_0 par \overrightarrow{PQ} :

$$W = \vec{F}_0 \cdot \overrightarrow{PQ}.$$

Mais lorsque la force est variable selon la position où on se place (cas d'un champ de forces), si en plus le trajet n'est pas rectiligne, comment calculer ce travail ? L'idée est de considérer que le résultat ne doit pas être très différent de ce qu'on obtiendrait si on considère que le trajet est droit entre M_{i-1} et M_i , et que ces deux points sont suffisamment proches pour qu'on puisse considérer que la force n'a pas changé le long du trajet entre ces deux points ; comme on a un champ de forces, cette force est $\vec{F}(M_i)$ en M_i . Le travail le long du trajet entre A et B ne doit donc pas être très différent de la somme des n travaux W_i de la force $\vec{F}(M_{i-1})$ sur le trajet rectiligne de M_{i-1} à M_i .

$$W \simeq \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_{i-1}) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}.$$

Quelle signification mathématique donner à cette approximation, et comment remplacer ce \simeq par une égalité ?

C'est en fait par ce deuxième problème que nous allons commencer, en définissant l'intégrale curviligne. Auparavant, nous allons « régler son compte » à une notion en fait très simple, et cependant nouvelle : l'intégration d'une fonction continue de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , ce qui ne présente aucune difficulté en passant par les fonctions coordonnées.

Nous aurons besoin ensuite de préciser la notion d'arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 .

4.2 Intégrale d'une fonction vectorielle

Définition 4.1 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , dont les fonctions composantes sont (f_1, \dots, f_n) .

Alors f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ inclus dans l'ensemble de définition de f si et seulement si toutes ses fonctions composantes le sont.

L'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est un vecteur de \mathbb{R}^n , dont les composantes sont les intégrales sur $[a, b]$ des fonctions composantes de f . On note

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

L'intégrale d'une fonction vectorielle possède presque toutes les propriétés de l'intégrale des fonctions scalaires, par exemple, la propriété de linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles, et on a en particulier

Proposition 4.2 Soit f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , dont les fonctions composantes sont (f_1, \dots, f_n) . Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ inclus dans son ensemble de définition, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et si F est une primitive quelconque de f (c'est-à-dire une fonction telle que $F' = f$: on passe par les composantes !), on a

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Si f est continue sur un intervalle I , si $a \in I$, alors la fonction vectorielle qui associe à tout $t \in I$ le vecteur $\int_a^t f(\tau) d\tau$ est une primitive de f ; c'est l'unique primitive F de f qui est telle que $F(a) = 0$.

En revanche, la positivité de l'intégrale (propriété qui s'écrit, pour $a < b$, si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$) n'a pas de sens pour une fonction vectorielle.

Il existe cependant une propriété analogue à un des corollaires de la positivité qui était l'inégalité $\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt$, valable pour une fonction g à valeurs dans \mathbb{R} .

Proposition 4.3 Soit f une fonction continue de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^n , dont les fonctions composantes sont (f_1, \dots, f_n) . Si $a < b$ sont deux réels dans un même intervalle inclus dans le domaine de définition de f , si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n , alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad ^1$$

Preuve Nous ne donnerons de cette propriété qu'une démonstration partielle, dans le cas où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne, et lorsqu'on est en dimension 3. Nous admettrons le résultat dans les autres cas.

Soit $\vec{V} = \int_a^b f(t) dt$. Si \vec{V} est le vecteur nul 0, le résultat est clairement acquis, puisque le membre de droite est positif par positivité de l'intégrale d'une fonction scalaire.

Supposons que $\vec{V} \neq 0$. Soit $\vec{i} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$; \vec{i} est un vecteur de norme 1 et il est possible de trouver une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dont le premier vecteur est justement ce vecteur \vec{i} .

Nous avons vu que tous les calculs de limites, donc de dérivation, donc de primitive, donc d'intégration, ne dépendaient pas de la base dans laquelle on se plaçait. De plus un calcul de norme euclidienne peut se faire dans n'importe quelle base orthonormée. On se placera donc dans la base \mathcal{B} pour la suite des calculs et des raisonnements, et nous appellerons $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ les fonctions coordonnées de f dans la base \mathcal{B} .

On doit montrer l'inégalité $A \leq B$ avec $A = \|\vec{V}\| = \left\| \int_a^b f(t) dt \right\|$ et $B = \left\| \int_a^b \|f(t)\| dt \right\|$.

Intéressons-nous d'abord à A . En calculant avec les fonctions coordonnées, on a :

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \int_a^b f(t) dt \\ &= \int_a^b (\tilde{f}_1(t)\vec{i} + \tilde{f}_2(t)\vec{j} + \tilde{f}_3(t)\vec{k}) dt \\ &= \left(\int_a^b \tilde{f}_1(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b \tilde{f}_2(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b \tilde{f}_3(t) dt \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Mais \vec{i} a justement été choisi pour que les coordonnées de \vec{V} dans la base \mathcal{B} soient $(\|\vec{V}\|, 0, 0)$. Donc

$$\vec{V} = \|\vec{V}\| \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

¹ Remarquons que dans cette formule, l'intégrale intervenant dans le membre de gauche est l'intégrale d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , puisque $\forall t$, on a $\|f(t)\| \in \mathbb{R}$

En comparant avec le calcul précédent, on obtient que

$$\left(\int_a^b \tilde{f}_2(t) dt \right) = \left(\int_a^b \tilde{f}_3(t) dt \right) = 0,$$

donc on a

$$\vec{V} = \left(\int_a^b \tilde{f}_1(t) dt \right) \vec{i},$$

et

$$(4.2) \quad A = \|\vec{V}\| = \left\| \left(\int_a^b \tilde{f}_1(t) dt \right) \vec{i} \right\| = \left| \int_a^b \tilde{f}_1(t) dt \right| \leq \int_a^b |\tilde{f}_1(t)| dt.$$

(on a appliqué ici le corollaire de la positivité de l'intégrale d'une fonction scalaire signalé plus haut.)

Maintenant il est clair que pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$|\tilde{f}_1(t)| = \sqrt{\left(\tilde{f}_1(t)\right)^2} \leq \sqrt{\left(\tilde{f}_1(t)\right)^2 + \left(\tilde{f}_2(t)\right)^2 + \left(\tilde{f}_3(t)\right)^2} = \|f(t)\|.$$

Toujours par positivité de l'intégrale des fonctions scalaires, on en déduit, puisque $a < b$, que

$$(4.3) \quad \int_a^b |\tilde{f}_1(t)| dt \leq \int_a^b \|f(t)\| dt = B;$$

et mettant bout à bout les inégalités (4.2) et (4.3), on obtient bien $A \leq B$. \square

Cas des fonctions complexes

Nous avons vu au chapitre 2 que ce cas n'est qu'un point de vue particulier pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^2 . L'écriture dans ce point de vue des définitions et propriétés ci-dessus est cependant intéressante.

Si f est une fonction à valeurs complexes, si x est la partie réelle de f et y sa partie imaginaire, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt \right) + i \left(\int_a^b y(t) dt \right).$$

De même, le corollaire de la positivité s'écrit

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

ce qui est exactement la même formule que pour une fonction réelle, sauf qu'ici $|\cdot|$ désigne le module d'un nombre complexe ($|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$) qui coïncide avec la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 .

4.3 Arcs paramétrés orientés

Avant de nous lancer dans la définition d'une intégrale curviligne, c'est-à-dire le long d'une courbe, il est intéressant de commencer par préciser ce qu'on entend par arc paramétré orienté, et comment on peut changer de paramétrisation.

Dans tout ce §, nous ne parlons que de courbes planes, mais on pourrait étendre sans grande difficulté tout cela à des dimensions supérieures.

L'idée sous-jacente est qu'un arc paramétré orienté est un morceau de courbe associé à plusieurs paramétrisations ayant des points communs. D'un point de vue cinématique, on impose les points suivants :

- le sens de parcours doit être le même ;
- les arrêts, s'il y en a doivent se faire au même endroit (on préfère d'ailleurs qu'il n'y ait pas d'arrêt, c'est-à-dire pas de point stationnaire) ;
- il ne doit pas y avoir de retour en arrière (ou alors on doit toujours faire les mêmes retours en arrière au mêmes endroits) ;
- on souhaite qu'il y ait une certaine régularité.

Une courbe est, elle, éventuellement associée à plusieurs arcs paramétrés orientés. On peut en effet changer le sens de parcours, varier les arrêts, faire des allers-retours...

Mathématiquement, c'est assez difficile à définir, car un arc paramétré est en toute rigueur une classe d'équivalence de paramétrisations pour une certaine relation d'équivalence.

Définition 4.4 On appelle paramétrisation de classe \mathcal{C}^1 toute application de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle $[a, b]$ vers \mathbb{R}^2 .

Une paramétrisation est donc en toute rigueur un couple $P = (I, f)$ formé d'un intervalle I fermé borné et d'une application vectorielle f dont l'ensemble de définition contient I et qui est de classe \mathcal{C}^1 .

On dit que deux paramétrisations de classe \mathcal{C}^1 : $P_1 = ([a, b], f)$ et $P_2 = ([\alpha, \beta], g)$ sont équivalentes (on note $P_1 \equiv P_2$) lorsqu'il existe une bijection croissante ϕ de $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- ϕ est de classe \mathcal{C}^1 ainsi que ϕ^{-1} .
- $g \circ \phi = f$ (et donc $f \circ \phi^{-1} = g$).

Énonçons tout d'abord une propriété permettant de vérifier simplement que deux paramétrisations sont équivalentes.

Proposition 4.5 Soient $([a, b], f)$ et $([\alpha, \beta], g)$ deux paramétrisations de classe \mathcal{C}^1 . Ces deux paramétrisations sont équivalentes si et seulement si il existe une fonction réelle ϕ de classe \mathcal{C}^1 , telle que

- $[a, b]$ est inclus dans le domaine de définition de ϕ .
- $\phi(a) = \alpha \quad \phi(b) = \beta$.
- $\forall t \in [a, b] \quad \phi'(t) > 0$.

- $\forall t \in [a, b] \quad \text{si } \phi(t) = s, \text{ on a } g(s) = f(t).$

La démonstration de cette propriété est technique, et n'est pas très difficile, mais n'utilise que des notions d'analyse élémentaire : nous ne la ferons pas. Elle utilise de façon essentielle les propriétés de la dérivation d'une application réciproque.

Exemple classique :

On considère la paramétrisation $P_1 = ([0, \frac{\pi}{2}], f)$ avec $f(t) = (\cos t, \sin t)$; on considère aussi la paramétrisation $P_2 = ([0, 1], g)$ avec $g(s) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right)$.

Montrons que ces deux paramétrisations sont équivalentes (que $P_1 \equiv P_2$).

La fonction ϕ adéquate dans cet exemple est la fonction $\phi(t) = \tan \frac{t}{2}$; en effet, il n'y a aucun problème de définition pour ϕ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, il est clair que cette fonction ϕ est de classe C^1 , elle admet comme dérivée

$$\phi'(t) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{t}{2}) > 0.$$

On a bien $\phi(0) = \tan \frac{0}{2} = 0$ et $\phi(\frac{\pi}{2}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$, et pour finir, appelant (f_1, f_2) et (g_1, g_2) les fonctions composantes respectives de f et g , on a si $s = \tan \frac{t}{2}$, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{1-s^2}{1+s^2} = \frac{1-\tan^2 \frac{t}{2}}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = \cos t = f_1(t); \\ g_2(s) &= \frac{2s}{1+s^2} = \frac{2\tan \frac{t}{2}}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = \sin t = f_2(t); \end{aligned}$$

donc $f(t) = g(s)$

□

Théorème 4.6

La relation \equiv entre paramétrisations de classe C^1 est une relation d'équivalence.

Preuve Il est absolument clair que \equiv est réflexive : il suffit de prendre comme fonction ϕ la fonction identité $t \mapsto t$ de $[a, b]$.

Montrons la symétrie de \equiv .

Soient $P_1 = ([a, b], f)$ et $P_2 = ([\alpha, \beta], g)$ deux paramétrisations de classe C^1 . On suppose que $P_1 \equiv P_2$. Il existe donc une bijection croissante ϕ de classe C^1 de $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta]$, telle que $g \circ \phi = f$ et telle que ϕ^{-1} est aussi de classe C^1 .

Il est clair que ϕ^{-1} est une bijection croissante de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, et on a clairement toutes les propriétés permettant d'affirmer que $P_2 \equiv P_1$.

Établissons maintenant la transitivité de \equiv .

Soient $P_1 = ([a, b], f)$, $P_2 = ([\alpha, \beta], g)$ et $P_3 = ([c, d], h)$ trois paramétrisations de classe C^1 . On suppose que $P_1 \equiv P_2$ et que $P_2 \equiv P_3$. Il existe donc deux fonctions ϕ et ψ de classe C^1 telles que :

- $[a, b] \subset \mathcal{D}(\phi)$ et $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{D}(\psi)$.
- $\phi(a) = \alpha$ $\phi(b) = \beta$ et $\psi(\alpha) = c$ $\psi(\beta) = d$.
- $\forall t \in [a, b]$ $\phi'(t) > 0$ et $\forall s \in [\alpha, \beta]$ $\psi'(s) > 0$.
- $\forall t \in [a, b]$ si $\phi(t) = s$, on a $g(s) = f(t)$ et $\forall s \in [\alpha, \beta]$ si $\psi(s) = u$, on a $h(u) = g(s)$.

Il suffit alors de considérer la fonction $\psi \circ \phi$. Elle est clairement de classe \mathcal{C}^1 .

On a $\forall t \in [a, b]$, $\phi(t) = s$ existe et appartient à $[\alpha, \beta]$ puisqu'on est sûr que ϕ réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta]$, donc $\psi(s) = \psi(\phi(t))$ existe, ce qui signifie que $t \in \mathcal{D}(\psi \circ \phi)$: on a établi que $[a, b] \subset \mathcal{D}(\psi \circ \phi)$.

On a $\psi \circ \phi(a) = \psi(\phi(a)) = \psi(\alpha) = c$ et $\psi \circ \phi(b) = \psi(\phi(b)) = \psi(\beta) = d$.

Pour tout $t \in [a, b]$, si $\phi(t) = s$, on a d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $(\psi \circ \phi)'(t) = \psi'(\phi(t)).\phi'(t) = \psi'(s).\phi'(t) > 0$.

Et finalement, pour tout $t \in [a, b]$, posant $u = \psi \circ \phi(t) = \psi(s)$ avec $\phi(t) = s$, on a $h(u) = g(s) = f(t)$.

En utilisant la proposition 4.5, on a établi que $P_1 \equiv P_3$. □

Définition 4.7 On appelle arc paramétré (orienté) de classe \mathcal{C}^1 une classe d'équivalence de paramétrisations pour la relation \equiv .

Cette définition est assez compliquée à manier, mais il faut bien comprendre ce qu'elle signifie. En fait, on ne peut pas parler d'arc paramétré sans donner une paramétrisation qui est un représentant de cette classe d'équivalence. Géométriquement, un arc paramétré est un morceau d'une courbe, pour lequel on peut choisir une paramétrisation.

Ce qui est important, c'est la possibilité de changer de paramétrisation, et toutes les définitions concernant les arcs paramétrés (essentiellement, la notion d'intégrale curviligne et celle de longueur d'une courbe) devront être suivies d'une propriété d'invariance si on change la paramétrisation.

Remarquons que si γ est un arc paramétré, si $P_1 = ([a, b], f)$ est une paramétrisation de γ , les points $A = f(a)$ et $B = f(b)$ ne dépendent pas de la paramétrisation choisie, et on note $\gamma = \widehat{AB}$. Cette notation est très dangereuse, car elle ne précise rien du tout. Il faut qu'on sache sur quelle courbe paramétrée on se place, dans quel sens de parcours, etc. En particulier, elle est couramment utilisée pour les arcs de cercle, mais elle n'est pas réservée à cet usage. A est appelé l'origine de l'arc, B est son extrémité.

Remarque : On rencontre dans les livres beaucoup d'autres définitions analogues et parfois contradictoires avec celles que j'ai énoncées (arcs paramétrés, paramétrisations, courbes paramétrées, chemins...). Faites preuve de souplesse, et essayez surtout de comprendre les idées sous-jacentes à toutes ces notions.

4.3.1 Support d'un arc paramétré

Définition 4.8 Soit γ un arc paramétré de classe C^1 . Soit $([a, b], f)$ une paramétrisation de γ . Le support de γ est l'ensemble des points X du plan pour lesquels il existe $t \in [a, b]$ tel que $X = f(t)$. Le support de γ est donc l'ensemble $f([a, b])$.

Nous admettrons le résultat suivant, pas très difficile à établir, et facile à comprendre :

Proposition 4.9 Le support d'un arc paramétré ne dépend pas de la paramétrisation utilisée.

Il ne faudrait en théorie pas confondre un arc paramétré et son support. Son support est (avec nos définitions) un morceau de courbe, alors qu'un arc, c'est en plus le choix d'un sens de parcours, et éventuellement de quelques arrêts et points où on fait demi-tour... En pratique, on fait souvent la confusion. Cette confusion est encore plus justifiée avec la notion d'arc simple, qui interdit les arrêts et les demi-tours.

Définition 4.10 Un arc paramétré γ de classe C^1 est un arc simple lorsqu'il existe une paramétrisation $P_1 = ([a, b], f)$ de γ telle que :

- (i) Pour tout $t \in [a, b]$, on a $f'(t) \neq 0$.
- (ii) f réalise une bijection de $[a, b]$ vers le support de γ .

Nous admettrons le résultat suivant, qui est très logique :

Proposition 4.11 Si γ est un arc simple, alors toute paramétrisation $P_1 = ([a, b], f)$ de γ est telle que les assertions (i) et (ii) sont vérifiées.

La notion d'arc simple est ce qu'il y a de plus naturel en matière d'arc : un morceau de courbe qui d'un point de vue cinématique est parcouru une seule fois sans arrêt, (sans point stationnaire) est un arc simple. Le morceau de courbe est le support de cet arc simple, et toute paramétrisation de cet arc simple fournit une bijection entre un intervalle fermé borné et son support.

4.3.2 Arcs paramétrés de classe C^1 par morceaux

Cette notion est très importante en pratique, car on procède souvent par raccords. Si $\gamma_1 = \widehat{AB}$ et $\gamma_2 = \widehat{BC}$ sont deux arcs paramétrés de classe C^1 , on peut considérer l'arc $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ correspondant à la mise bout à bout des arcs \widehat{AB} et \widehat{BC} . γ est encore appelé « arc paramétré », mais on comprend bien qu'en B , qui est l'extrémité de γ_1 et l'origine de γ_2 , il y a éventuellement moins de régularité, il y a par exemple un angle. On dit que γ est un arc paramétré de classe C^1 par morceaux. On peut bien sûr itérer le procédé, et on a la définition :

Définition 4.12 On appelle arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 par morceaux un objet mathématique γ formé par la mise bout à bout de n arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^1 . Plus précisément, si $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont n arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^1 tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, l'extrémité de γ_i est égale à l'origine de γ_{i+1} , on dit que $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$ est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

De façon assez évidente, on définit le support d'un arc paramétré par morceaux $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$ comme étant la réunion des supports des arcs γ_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

On définit aussi les arcs simples de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Une définition rigoureuse n'est pas facile à énoncer mais décrivons cette notion. Tous les « morceaux » (d'un arc simple de classe \mathcal{C}^1 par morceaux) doivent être simples, et de plus, à part les points de raccord qui appartiennent à deux arcs, chaque point du support ne doit appartenir qu'à un seul morceau : l'arc ne doit pas se « recouper ».

4.3.3 Changement d'orientation

Paramétrisations inverses

Définition 4.13 On dit que deux paramétrisations $P_1 = ([a, b], f)$ et $P_2 = ([\alpha, \beta], g)$, de classe \mathcal{C}^1 , sont inverses (on note $P_1 \leftrightarrow P_2$) lorsqu'il existe une bijection décroissante ϕ de $[a, b]$ sur $[\alpha, \beta]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- ϕ est de classe \mathcal{C}^1 ainsi que ϕ^{-1} ;
- $g \circ \phi = f$ (et donc $f \circ \phi^{-1} = g$).

La seule différence entre des paramétrisations équivalentes et des paramétrisations inverses, c'est le sens de variation de l'application changement de variable ϕ .

Énonçons (sans démonstration) comme pour la définition de l'équivalence, une propriété caractérisant que deux paramétrisations sont inverses.

Proposition 4.14 Soient $([a, b], f)$ et $([\alpha, \beta], g)$ deux paramétrisations de classe \mathcal{C}^1 . Ces deux paramétrisations sont inverses si et seulement si il existe une fonction réelle ϕ de classe \mathcal{C}^1 , telle que

- $[a, b]$ est inclus dans le domaine de définition de ϕ ;
- $\phi(a) = \beta$ $\phi(b) = \alpha$;
- $\forall t \in [a, b] \quad \phi'(t) < 0$;
- $\forall t \in [a, b] \quad$ si $\phi(t) = s$, on a $g(s) = f(t)$.

On établirait facilement (et nous admettrons) que la relation \leftrightarrow est symétrique ; que si $P_1 \leftrightarrow P_2$ et $P_2 \leftrightarrow P_3$, alors on a $P_1 \equiv P_3$; que si $P_1 \equiv P_2$ et $P_2 \leftrightarrow P_3$, alors on a $P_1 \leftrightarrow P_3$.

Arcs inverses

Définition 4.15 Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs paramétrés dont les paramétrisations respectives sont $P_1 = ([a, b], f)$ et $P_2 = ([\alpha, \beta], g)$, si on a $P_1 \leftrightarrow P_2$, alors on dit que les arcs γ_1 et γ_2 sont inverses, ou parcourus en sens inverse.

Si $A = f(a)$ et $B = f(b)$, on a vu qu'on note $\gamma_1 = \widehat{AB}$. Dans ce cas, puisque $f = g \circ \phi$, et que $\phi(a) = \beta$, on a $A = f(a) = g(\phi(a)) = g(\beta)$. De même, on a $g(\alpha) = g(\phi(b)) = f(b) = B$, donc il est logique de noter $\gamma_2 = \widehat{BA}$.

Inverser une paramétrisation revient donc à *changer le sens de parcours*.

Proposition 4.16 Deux arcs inverses ont même support.

C'est un résultat assez évident dont nous ne formaliserons pas la démonstration.

Proposition 4.17 Si γ est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 et si γ' est son arc inverse, si $P = ([a, b], f)$ est une paramétrisation de γ , alors les paramétrisations suivantes sont deux paramétrisations de γ' .

- $\tilde{P} = ([a, b], \tilde{f})$ avec pour tout $t \in [a, b]$, $\tilde{f}(t) = f(a + b - t)$
- $\tilde{P} = (-[b, a], \tilde{f})$ avec pour tout $t \in [-b, -a]$, $\tilde{f}(t) = f(-t)$

La démonstration de cet énoncé est très simple (voir exercice 4.1)

Pour un arc paramétré construit par morceaux, on définit aussi fort logiquement un changement d'orientation :

Définition 4.18 Si $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$ et $\gamma' = \gamma'_1 \vee \cdots \vee \gamma'_n$ sont deux arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, on dit que ces arcs sont inverses l'un de l'autre lorsque

- γ_1 et γ'_n sont inverses ;
- γ_2 et γ'_{n-1} sont inverses ;
- \vdots
- γ_n et γ'_1 sont inverses.

4.3.4 Arcs fermés

Définition 4.19 Un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 (ou de classe \mathcal{C}^1 par morceaux) est dit fermé lorsque son origine est confondue avec son extrémité.

Définition 4.20 Un arc fermé simple est un arc fermé γ de classe \mathcal{C}^1 pour lequel il existe une paramétrisation $P_1 = ([a, b], f)$ telle que

- (i) — quel que soit $t \in [a, b]$, on a $f'(t) \neq 0$
- (ii) — f réalise une bijection de $[a, b]$ vers le support de γ .

Remarquons la petite subtilité : un arc fermé simple n'est pas un arc simple, puisque l'extrémité et l'origine sont confondues. Mais à part ce point qui est « double », tous les autres points ont un seul antécédent par f (quelle que soit la paramétrisation, d'ailleurs).

Attention, il y a aussi un sens de parcours pour un arc fermé, et on peut changer son orientation !

Avec un peu de bon sens, vous comprendrez facilement ce qu'est un arc fermé simple de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

4.3.5 Exemples classiques d'arcs paramétrés

Segment de droite

Il est extrêmement important de savoir paramétriser un segment de droite. Pour être rigoureux, on va en fait donner des paramétrisations pour un arc dont le support est un segment $[AB]$. On privilégiera les solutions pour lesquelles A est l'origine et B est l'extrémité.

Première solution : (cas général)

Un point M est élément du segment $[AB]$ si et seulement si il est barycentre de A et de B affectés de coefficients positifs. Comme on peut s'arranger pour que la somme des coefficients soit toujours égale à 1, on prendra t et $1 - t$ comme coefficients, avec t et $1 - t$ positifs, donc $t \in [0, 1]$. Mais pour $t = 0$, on doit être en A , donc on choisira M barycentre de $A(1 - t)$ et $B(t)$. Puisqu'alors, on sait que $\overrightarrow{OM} = (1 - t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, on peut en déduire en passant aux coordonnées que si $M = M(t) = f(t)$ a pour coordonnées $(x(t), y(t))$, on a

$$\begin{cases} x(t) = (1 - t)x_A + t x_B \\ y(t) = (1 - t)y_A + t y_B \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

qui nous donne une paramétrisation du segment $[AB]$ de A vers B .

Deuxième solution (segment horizontal ou vertical) :

Si $[AB]$ est un segment horizontal, c'est que $y_A = y_B = y_0$. Posons pour simplifier $A = (a, y_0)$ et $B = (b, y_0)$. Supposons dans un premier temps que $a < b$. Dans ce cas, une paramétrisation très simple de l'arc simple dont le support est $[AB]$ est

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y_0 \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

Si on a $a > b$, il est plus compliqué de paramétriser $[AB]$ de A vers B , et on a intérêt à utiliser la paramétrisation inverse du segment $[BA]$ (de B vers A)

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = y_0 \end{cases} \quad t \in [b, a].$$

Nous verrons que ce n'est pas bien gênant pour calculer une intégrale curviligne. De même, pour un segment $[CD]$ vertical, si $C = (x_0, c)$ et $D = (x_0, d)$, si $c < d$, une paramétrisation simple de l'arc simple dont le support est $[CD]$, orienté de C vers D est

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [c, d].$$

et si $c > d$, c'est le segment $[DC]$, orienté de D vers C qui est facile à paramétriser par

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [d, c].$$

Troisième solution (cas d'un segment d'une droite connue par son équation cartésienne réduite) :

Soit Δ une droite dont on connaît l'équation cartésienne réduite $y = mx + p$ (ce qui suppose que Δ n'est pas verticale).

Soit A le point de Δ qui a a pour abscisse et B celui qui a b pour abscisse. On suppose $a < b$.

Alors une paramétrisation simple et naturelle de l'arc simple dont le support est le segment $[AB]$ orienté de A vers B est

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = mt + p \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

Arc de cercle

Classiquement, on a vu qu'une paramétrisation de l'arc fermé simple dont le support est le cercle Γ de centre Ω , de rayon ρ , et dont l'origine et l'extrémité est le point $A = (x_\Omega + \rho, y_\Omega)$ (le plus à droite de Γ) est

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + \rho \cos t \\ y(t) = y_\Omega + \rho \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

En jouant sur les bornes de l'intervalle, on modifiera les bornes de l'arc, mais il sera toujours parcouru dans le sens trigonométrique. Si on rencontre un arc parcouru dans le sens indirect (le sens des aiguilles d'une montre), on a deux solutions : la première et la plus sage consiste à considérer l'arc inverse, qui lui est parcouru dans le « bon » sens ; la deuxième (plus dangereuse) consiste à utiliser une paramétrisation du type

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + \rho \cos(-t) = x_\Omega + \rho \cos t \\ y(t) = y_\Omega + \rho \sin(-t) = y_\Omega - \rho \sin t \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

en réfléchissant bien au choix des bornes a et b pour bien partir et arriver où on le souhaite.

4.4 Intégrale curviligne

4.4.1 Avertissement

L'intégrale curviligne que l'on va définir est une intégrale très spéciale : il ne s'agit pas ici d'intégrer une fonction, mais on va intégrer soit une forme différentielle, soit un champ vectoriel.

Le domaine d'intégration sera toujours un arc paramétré, notion que l'on vient de définir.

Rappelons qu'une forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ est une application définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 à valeurs dans le dual $(\mathbb{R}^2)^*$ de \mathbb{R}^2 (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^2 , qui sont les applications linéaires de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}), qui associe à tout élément $X = (x, y) \in \mathcal{U}$ la forme linéaire $\omega(X)$ sur \mathbb{R}^2 dont la matrice est $\begin{pmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \end{pmatrix}$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\omega(X)(h, k) = \begin{pmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = P(x, y) h + Q(x, y) k.$$

Un champ vectoriel \vec{F} est lui une fonction définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R}^2 . L'équivalence entre les deux points de vue vient de ce que si (P, Q) sont les composantes de \vec{F} . On notera d'ailleurs plutôt en colonne : $\vec{F} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Pour tout $X = (x, y) \in \mathcal{U}$, $\vec{F}(X)$ est un vecteur et pour tout vecteur $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$, on peut faire le produit scalaire de $\vec{F}(X)$ par $\vec{V} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

$$\vec{F}(X) \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = P(x, y) h + Q(x, y) k.$$

Donc, à partir d'un champ vectoriel \vec{F} ou d'une forme différentielle ω de mêmes composantes P et Q (rappelons que ces fonctions composantes sont des fonctions scalaires de deux variables), on obtient finalement le même résultat lorsqu'on calcule $\omega(X)(\vec{V})$ et $\vec{F}(X) \cdot \vec{V}$, ceci quel que soit $X \in \mathcal{U}$ et quel que soit $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$.

Nous utiliserons ces deux points de vue lors des calculs d'intégrale curviligne.

Une dernière précaution : nous ne considérerons que des formes différentielles et des champs vectoriels *continus* (en fait, on aime mieux, d'ailleurs, qu'ils soient de classe C^1), c'est-à-dire que les fonctions de deux variables P et Q doivent être des fonctions continues (ou mieux : de classe C^1).

4.4.2 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Définition 4.21 Soit γ un arc paramétré de classe C^1 , dont le support est inclus dans un ouvert \mathcal{U} . Soit $P_1 = ([a, b], f)$ une paramétrisation de γ ; soient x et y les fonctions composantes de f . Soit $\omega = P \, dx + Q \, dy$ une forme différentielle définie sur \mathcal{U} .

On appelle intégrale curviligne de ω le long de γ et on note $\int_{\gamma} \omega$ le nombre réel

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \int_a^b \omega(f(t))(f'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) \, dt.\end{aligned}$$

Essayons de bien comprendre la signification de $\omega(f(t))(f'(t))$:

$f(t) = (x(t), y(t))$ est un élément de \mathcal{U} , puisque le support de γ est inclus dans \mathcal{U} . Puisque ω est une forme différentielle sur \mathcal{U} , pour $f(t) \in \mathcal{U}$, $\omega(f(t))$ est donc un élément de $(\mathbb{R}^2)^*$, c'est-à-dire une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 . La matrice de cette forme linéaire (1 ligne, 2 colonnes) est

$$\begin{pmatrix} P(f(t)) & Q(f(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x(t), y(t)) & Q(x(t), y(t)) \end{pmatrix}.$$

or, $f'(t)$ est bien sûr un vecteur de \mathbb{R}^2 , que l'on peut noter en colonne $f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Donc $\omega(f(t))(f'(t))$ est l'image du vecteur $f'(t)$ par la forme linéaire $\omega(f(t))$. C'est donc un réel qui vaut

$$\omega(f(t))(f'(t)) = \begin{pmatrix} P(f(t)) & Q(f(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t).$$

Ce calcul est valable pour tout t dans $[a, b]$. On définit donc une application

$$\begin{aligned}[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t).\end{aligned}$$

Cette application est continue, car fabriquée à partir de fonctions continues (x' et y' sont continues parce que γ est de classe C^1). Il est classique qu'on peut toujours calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle, et cette définition a donc un sens.

Il reste un point essentiel à vérifier, c'est que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation de γ que l'on choisit.

Proposition 4.22 Avec les notations de la définition 4.21, la valeur de l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \omega$ ne dépend pas de la paramétrisation de γ .

Preuve Il suffit d'établir que si $P_2 = ([\alpha, \beta], g)$ est une autre paramétrisation de γ , la valeur de $\int_{\gamma} \omega$ calculée avec P_2 est la même que celle calculée plus haut. N'oublions pas que le fait que P_2 soit une autre paramétrisation de γ signifie que $P_1 \equiv P_2$.

Il existe donc une application ϕ de classe C^1 telle que

- $[a, b] \subset D(\phi)$
- $\alpha = \phi(a)$ et $\beta = \phi(b)$
- $\phi'(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$
- pour tout $t \in [a, b]$, si $s = \phi(t)$, on a $g(s) = f(t)$.

Rappelons une formule classique : la formule de changement de variable dans une intégrale :

Si F est une fonction définie sur l'intervalle I ; si φ est une application de classe C^1 sur $[a, b]$, et si $\varphi(a) \in I$ et $\varphi(b) \in I$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F(x) dx = \int_a^b F(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Nous devons comparer la valeur de $\int_{\gamma} \omega$ calculée avec P_1 :

$$A = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt,$$

avec sa valeur calculée avec P_2 : (si X et Y sont les fonctions composantes de g)

$$B = \int_{\alpha}^{\beta} (P(X(s), Y(s))X'(s) + Q(X(s), Y(s))Y'(s)) ds.$$

Posons $F(s) = P(X(s), Y(s))X'(s) + Q(X(s), Y(s))Y'(s)$. On a donc

$$B = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} F(s) ds.$$

D'autre part, puisque pour tout $t \in [a, b]$, on a en posant $s = \phi(t)$, $g(s) = f(t)$, en comparant les fonctions composantes, on obtient

$$\begin{aligned} X(s) &= x(t) = X(\phi(t)) & \text{donc} & \quad x'(t) = X'(\phi(t))\phi'(t) \\ \text{et} \quad Y(s) &= y(t) = Y(\phi(t)) & \text{donc} & \quad y'(t) = Y'(\phi(t))\phi'(t). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b (P(X(\phi(t)), Y(\phi(t)))X'(\phi(t))\phi'(t) + Q(X(\phi(t)), Y(\phi(t)))Y'(\phi(t))\phi'(t)) dt \\ &= \int_a^b (P(X(\phi(t)), Y(\phi(t)))X'(\phi(t)) + Q(X(\phi(t)), Y(\phi(t)))Y'(\phi(t)))\phi'(t) dt \\ &= \int_a^b F(\phi(t))\phi'(t) dt. \end{aligned}$$

Le formule de changement de variable permet de conclure que $A = B$. □

Cas d'un arc de classe \mathcal{C}^1 par morceaux

(« Relation de Chasles » pour les intégrales curvilignes.)

Définition 4.23 Si $\gamma = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_n$ est un arc de classe \mathcal{C}^1 par morceaux dont le support est inclus dans un ouvert \mathcal{U} sur lequel est définie une forme différentielle ω , alors l'intégrale curviligne de ω le long de γ est

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \omega.$$

4.4.3 Circulation d'un champ vectoriel

Mathématiquement, il n'y a rien de nouveau dans ce § par rapport au précédent : seul le point de vue et les notations changent.

Définition 4.24 Soit \vec{V} un champ vectoriel de composantes P et Q , défini sur un ouvert \mathcal{U} et γ un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 dont le support est inclus dans \mathcal{U} , et dont une paramétrisation est $P_1 = ([a, b], f)$.

L'intégrale curviligne du champ vectoriel \vec{V} le long de γ , aussi appelée circulation du champ vectoriel \vec{V} le long de γ est égale à

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM} &= \int_a^b \vec{V}(f(t)) \cdot \overrightarrow{f'(t)} dt \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \end{aligned}$$

(x et y désignent les fonctions composantes de f).

Remarquons tout d'abord que l'intégrale curviligne (ou la circulation) de $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ le long de γ a la même valeur que l'intégrale curviligne le long de γ de la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$.

Essayons ici aussi de bien comprendre les notations utilisées dans cette définition : Tout d'abord, dans le terme le plus à gauche comprenons qu'on n'a qu'une notation formelle. Elle tente de répondre à la situation de l'introduction : l'intégrale signifie physiquement qu'on additionne un grand nombre (une infinité) de termes $\vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$, produits scalaires du vecteur $\vec{V}(M)$, (image du point M décrivant au support de l'arc par le champ \vec{V}), par le vecteur \overrightarrow{dM} , « petit déplacement » du point M .

Ensuite dans le deuxième terme, « \cdot » désigne bien sûr ici aussi le produit scalaire. Il s'agit de faire le produit scalaire du vecteur $\vec{V}(f(t))$ par le vecteur $\overrightarrow{f'(t)}$.

L'application $t \mapsto \overrightarrow{V}(f(t)) \cdot \overrightarrow{f'(t)} = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)$ va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et elle est continue sur $[a, b]$ en particulier parce que la paramétrisation est de classe C^1 , donc les fonctions composantes de f' qui sont x' et y' sont continues. On peut donc légitimement l'intégrer entre a et b .

Proposition 4.25 L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel le long d'un arc paramétré ne dépend pas de sa paramétrisation.

La démonstration est exactement calquée sur ce qu'on a fait pour les formes différentielles ; il n'y a d'ailleurs pas lieu de refaire ici une démonstration, puisqu'en fait on n'a fait que changer de point de vue.

4.5 Propriétés de l'intégrale curviligne

Ces propriétés sont assez proche de celles de l'intégrale d'une fonction : il y a, comme pour cette intégrale, la linéarité, la relation de Chasles, l'effet d'un changement d'orientation et un lien avec les primitives. On peut énoncer toutes ces propriétés pour l'intégrale curviligne de formes différentielles ou pour l'intégrale curviligne de champs vectoriels. Nous choisirons à chaque fois un des deux points de vue, mais il peut être intéressant pour le lecteur d'essayer d'énoncer à chaque fois la traduction dans l'autre point de vue de cette propriété.

Nous supposerons dans une première lecture que tous les arcs paramétrés sont de classe C^1 , puis nous remarquerons que toutes les propriétés restent valables pour des arcs de classe C^1 par morceaux.

Proposition 4.26 (Linéarité)

Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles sur un même ouvert \mathcal{U} .

Soit γ un arc paramétré dont le support est inclus dans \mathcal{U} .

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\gamma} (\lambda \omega_1 + \mu \omega_2) = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \mu \int_{\gamma} \omega_2.$$

La démonstration serait très facile à faire, en utilisant la linéarité de l'intégrale des fonctions réelles, après avoir traduit ces intégrales curvilignes en utilisant la définition.

Proposition 4.27 (Relation de Chasles) Soient $\gamma_1 = \widehat{AB}$ et $\gamma_2 = \widehat{BC}$ deux arcs paramétrés ; mettant bout à bout ces deux arcs on pose $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$. Alors pour toute forme différentielle ω définie sur un ouvert contenant le support de γ , on a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

De même, si $\gamma = \widehat{AC}$ est un arc paramétré, si B est un point du support de l'arc paramétré γ , il existe deux arcs paramétrés $\gamma_1 = \widehat{AB}$ et $\gamma_2 = \widehat{BC}$ tels que $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ et on a donc le même résultat

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega.$$

Comprendons bien la différence entre les deux points de vue : dans le premier énoncé, on part de deux arcs paramétrés que l'on peut mettre bout à bout ; dans le deuxième, on part d'un seul arc et d'un point de cet arc, et on le coupe en deux. Le résultat est bien sûr le même dans les deux cas.

Preuve C'est uniquement dans le cas des arcs paramétrés de classe C^1 par morceaux que la première partie de cet énoncé apporte quelque chose de nouveau, car sinon, si γ_1 et γ_2 sont des arcs de classe C^1 , on ne fait que retrouver la définition de l'intégrale curviligne de la forme différentielle ω le long de l'arc de classe C^1 par morceaux $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$.

Nous n'entrerons pas dans les détails mais c'est une espèce d'associativité de \vee qui permet de conclure pour γ_1 et γ_2 de classe C^1 par morceaux.

L'intérêt de la deuxième partie est d'autoriser à couper un arc régulier. Nous supposons que γ est de classe C^1 . Il existe donc une paramétrisation $P = ([a, c], f)$ de γ , et puisque par hypothèse $\gamma = \widehat{AC}$, on a $f(a) = A$ et $f(c) = C$.

Mais puisque B est un point du support de γ , il existe $b \in [a, c]$ tel que $f(b) = B$. Considérons les deux paramétrisations $P_1 = ([a, b], f)$ et $P_2 = ([b, c], f)$. Elles définissent évidemment des arcs paramétrés respectivement γ_1 et γ_2 , et il est clair que l'extrémité de γ_1 et l'origine de γ_2 coïncident : c'est le point B .

On peut donc considérer l'arc C^1 par morceaux $\gamma' = \gamma_1 \vee \gamma_2$, et il n'est pas choquant de considérer que $\gamma' = \gamma$. De toutes façons, on peut appliquer la relation de Chasles pour les intégrales de fonctions réelles :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^c \omega(f(t))(f'(t)) dt = \int_a^b \omega(f(t))(f'(t)) dt + \int_b^c \omega(f(t))(f'(t)) dt \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega. \end{aligned}$$

Nous n'étudierons pas le cas où γ est de classe C^1 par morceaux, mais tout fonctionne de la même façon, à quelques précautions près. \square

Une conséquence très importante est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 4.28 Si γ et γ' sont deux arcs fermés simples de même support et de même orientation, si ω est une forme différentielle définie sur un ouvert contenant le support commun de ces deux arcs, alors

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma'} \omega.$$

En d'autres termes, pour calculer l'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un arc fermé simple, on peut choisir librement l'origine.

Preuve simplifiée Le seul cas intéressant est quand l'origine de γ' diffère de l'origine de γ , sinon comme ce sont des arcs simples, ils sont confondus. Soit A l'origine de γ et B l'origine de γ' . Un petit dessin vous convaincra facilement qu'il existe deux arcs simples γ_1 et γ_2 tels que

- $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$;
- $\gamma' = \gamma_2 \vee \gamma_1$;
- $\gamma_1 = \widehat{AB}$ et $\gamma_2 = \widehat{BA}$.

Par relation de Chasles et par commutativité de l'addition, on obtient alors très facilement

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma'} \omega.$$

□

Proposition 4.29 (Changement d'orientation) Si γ et γ' sont deux arcs paramétrés inverses, alors pour toute forme différentielle ω définie sur un ouvert contenant le support commun de γ et de γ' , on a

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma'} \omega.$$

Un changement d'orientation change donc le signe d'une intégrale curviligne.

Preuve Soit $P = ([a, b], f)$ une paramétrisation respectivement de γ , on sait que $\tilde{P} = ([-b, -a], \tilde{f})$ est une paramétrisation de γ' , avec $\tilde{f}(t) = f(-t)$. Posons $\phi(s) = -s = t$ et donc $\phi'(s) = -1$. On a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(f(t))(f'(t)) dt = \int_{\phi(-a)}^{\phi(-b)} \omega(f(t))(f'(t)) dt.$$

On peut appliquer la formule de changement de variable dans une intégrale de fonction réelle :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{-a}^{-b} \omega(f(\phi(s)))(f'(\phi(s)))\phi'(s) ds = - \int_{-b}^{-a} \omega(f(-s))(f'(-s))(-1) ds.$$

Mais si $\tilde{f}(s) = f(-s)$, on a $\tilde{f}'(s) = -f'(-s)$, donc $f'(-s) = -\tilde{f}'(s)$. D'où

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{-b}^{-a} \omega(\tilde{f}(s))(-\tilde{f}'(s)) ds.$$

Or, n'oublions pas ce qu'est $\omega(\tilde{f}(s))$: c'est une forme linéaire sur \mathbb{R}^2 , donc pour tout élément X de \mathbb{R}^2 , on a $\omega(\tilde{f}(s))(-X) = -\omega(\tilde{f}(s))(X)$. En particulier pour $X = f'(s)$, on a donc $\omega(\tilde{f}(s))(-\tilde{f}'(s)) = -\omega(\tilde{f}(s))(\tilde{f}'(s))$

Finalement on obtient donc :

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{-b}^{-a} \omega(\tilde{f}(s))(\tilde{f}'(s)) \, ds = - \int_{\gamma'} \omega.$$

□

Proposition 4.30 (Cas d'un champ de gradients) Soit F un champ scalaire de classe C^1 sur l'ouvert \mathcal{U} . Posant $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad } F}$, on a pour tout arc paramétré $\gamma = \widehat{AB}$ dont le support est inclus dans \mathcal{U} ,

$$\int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM} = F(B) - F(A).$$

En d'autres termes, si \vec{V} est un champ de gradients, appelant « potentiel » (comme le font les physiciens) une fonction F telle que $\overrightarrow{\text{grad } F} = \vec{V}$, alors l'intégrale curviline de \vec{V} est égale à la différence entre le potentiel en son extrémité et le potentiel en son origine.

Preuve D'après les hypothèses, si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, on a $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. Soit

$P_1 = ([a, b], f)$ une paramétrisation d'un arc $\gamma = \widehat{AB}$. x et y étant les fonctions composantes de f , considérons la fonction (définie sur $[a, b]$)

$$\psi : t \mapsto \vec{V}(f(t)) \cdot \overrightarrow{f'(t)} = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t).$$

D'après l'hypothèse, on a donc

$$\psi(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

On reconnaît alors que ψ est la dérivée de la fonction $\Psi : t \mapsto F(x(t), y(t)) = F(f(t))$ (voir le théorème 3.40 p. 97).

Appliquons tout cela à la valeur de l'intégrale curviline le long de γ du champ \vec{V} :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM} &= \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b \psi(t) \, dt = [\Psi(t)]_a^b = F(f(b)) - F(f(a)) = F(B) - F(A). \end{aligned}$$

□

Cet énoncé est à rapprocher de la formule qu'on utilise pour calculer l'intégrale d'une fonction g sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ connaissant une primitive G de g sur cet intervalle :

$$\int_a^b g(\tau) \, d\tau = [G(\tau)]_a^b = G(b) - G(a).$$

La différence essentielle est que cette méthode consistant à prendre une primitive est universelle pour les fonctions réelles d'une variable, (on a vu qu'elle marche aussi pour les fonctions vectorielles d'une seule variable), mais qu'en revanche, pour une intégrale curviligne, elle ne marche que pour certains champs vectoriels, comme on l'a vu avec le théorème 3.85 (p. 153) ; en effet, la plupart des champs vectoriels n'ont pas de primitive.

Corollaire 4.31 L'intégrale curviligne d'un champ de gradients le long d'un arc fermé est nulle.

Preuve Si A est l'origine (et donc aussi l'extrémité) de cet arc fermé γ , si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} F$ sur un ouvert \mathcal{U} contenant le support de γ , alors on a

$$\int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM} = F(A) - F(A) = 0.$$

Remarquons qu'ici il est tout à fait évident que le choix de l'origine de l'arc n'a aucune incidence sur le résultat. \square

Traduisons ces résultats pour l'intégrale curviligne d'une forme différentielle.

Tout d'abord deux définitions.

Définition 4.32 Une forme différentielle ω définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n est dite *exacte* lorsqu'il existe une fonction (de n variables) F telle que $\omega = dF$. Dans ce cas on dit que F est une primitive de ω .

Définition 4.33 Une forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 est dite *fermée* lorsqu'on a $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Une forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$ définie sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 est dite *fermée* lorsqu'on a

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Remarquons qu'une forme différentielle est fermée si et seulement si le champ vectoriel ayant les mêmes fonctions composantes a son rotationnel qui est nul.

La traduction du théorème 3.85 et du lemme 3.87 qui suit permettent d'énoncer

Proposition 4.34 Si une forme différentielle ω est exacte sur un ouvert \mathcal{U} , alors elle est fermée sur cet ouvert.

Si l'ouvert \mathcal{U} est étoilé, alors ω est exacte si et seulement si elle est fermée.

Lorsqu'une forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ est fermée (ou ce qui revient au même lorsque le rotationnel du champ vectoriel $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est nul), il est donc très intéressant de savoir déterminer une fonction F primitive de ω (et de \vec{V}), c'est-à-dire telle que $\omega = dF$ (et $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad } F}$ d'après la traduction en termes « forme différentielle » de la proposition 4.30) :

Proposition 4.35 Si ω est une forme différentielle admettant une primitive F sur un ouvert \mathcal{U} , si $\gamma = \widehat{AB}$ est un arc dont le support est inclus dans \mathcal{U} , alors

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dF = F(B) - F(A).$$

Si de plus γ est un arc fermé, alors $\int_{\gamma} \omega = 0$.

Pour déterminer les primitives d'une forme différentielle ω fermée sur un ouvert \mathcal{U} étoilé, et qui est donc exacte, remarquons d'abord qu'une telle primitive est forcément définie à une constante près (à cause de la linéarité de la différentielle et parce que la différentielle d'une constante est forcément nulle).

Pour déterminer F , on procède ainsi :

Puisqu'on cherche F telle que $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, on considère d'abord y comme une constante et on primitive P en x ; notons que le résultat obtenu est une fonction définie à une « constante » près, mais y étant considéré comme une constante, cette constante peut dépendre de y .

Ensuite, on dérive par rapport à y ce qu'on vient d'obtenir, et on compare à Q : cela permet d'obtenir une équation qui ne doit plus dépendre que de y et qui permet de trouver la valeur de la « constante » obtenue précédemment.

4.6 Étude d'exemples

Exemple 1 : Soit à calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\gamma} \omega$ de la forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ le long de l'arc γ , lorsque $P(x, y) = 2(x + y)$, $Q(x, y) = 2(x + 2y)$ et lorsque γ est un arc joignant le point $A = (1, 0)$ au point $B = (0, 1)$ en suivant le quart du cercle « trigonométrique ».

Une méthode normale de calcul consiste à choisir une paramétrisation de γ , puis d'appliquer la définition.

La fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ définit une paramétrisation de γ . On aura besoin dans le calcul des valeurs de $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = \cos t$.

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2((x(t) + 2y(t))x'(t) + (x(t) + 2y(t))y'(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t + 2\sin t)\cos t) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\sin t \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin 2t + 2 \cos 2t) dt \\ &= \left[-\frac{\cos 2t}{2} + \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{-1}{2} + 0 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) = 1. \end{aligned}$$

Mais une méthode « astucieuse » aurait consisté à remarquer que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

ω est donc une forme différentielle fermée, ce calcul étant valable sur \mathbb{R}^2 tout entier qui est bien sûr étoilé. ω est donc une forme différentielle exacte.

Cherchons une fonction F telle que $\omega = dF$.

On doit avoir $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = 2x + 2y$. Donc

$$F(x, y) = \int (2x + 2y) dx = x^2 + 2xy + C_1.$$

Cette constante C_1 est en fait éventuellement une fonction de y , donc nous écrirons (c'est beaucoup plus sage)

$$F(x, y) = \int (2x + 2y) dx = x^2 + 2xy + g(y).$$

Mais on doit avoir aussi $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = 2x + 4y$. Reportant dans cette équation l'expression de F que l'on vient d'obtenir, on a

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy + g(y)) = 2x + 4y \iff 2x + g'(y) = 2x + 4y \iff g'(y) = 4y.$$

Remarquons que comme prévu, x a disparu de cette équation.

g est donc telle que

$$g(y) = \int 4y dy = 2y^2 + C_2.$$

C_2 est ici une « vraie » constante.

Faisant une synthèse de tout cela on a obtenu que les primitives de ω , c'est-à-dire les fonctions F telles que $\omega = dF$ sont de la forme

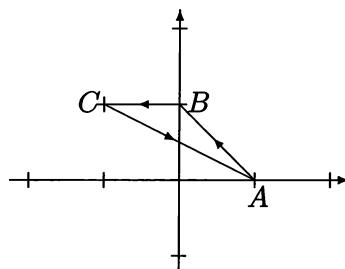
$$F(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + C_2.$$

On peut très bien choisir la constante C_2 nulle, car on a juste besoin d'une primitive de ω (pas de toutes). On obtient alors

$$I = \int_{\gamma} \omega = \int_{\widehat{AB}} dF = [F]_A^B = F(B) - F(A) = F(0, 1) - F(1, 0) = 2 - 1 = 1.$$

On retrouve évidemment le même résultat.

Exemple 2 : Soit à calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M}$ du champ vectoriel $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ avec $P(x, y) = y^2 + 4xy + 1$ et $Q(x, y) = 2x^2 + 2xy + x$, le long de l'arc γ , qui est l'arc joignant par des segments de droite, dans cet ordre les points $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 1)$ et retour en A .



(4.4)

γ est donc un arc fermé simple de classe C^1 par morceaux.

Est-ce que nous avons la chance d'être en présence d'un champ de gradients ?

On a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2y + 4x \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y + 1$$

Hélas, le rotationnel de \vec{V} n'est pas nul, donc ce n'est pas un champ de gradients. Mais on peut quand même être un peu astucieux : on peut remarquer qu'il y a beaucoup de ressemblances entre $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$; juste 1 de différence ! Et d'où vient ce 1 ? Du terme x dans Q . Il est donc pertinent de « couper » en deux le champ vectoriel \vec{V} et d'utiliser la linéarité :

$$\text{Posons } \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2, \text{ avec } \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 4xy + 1 \\ 2x^2 + 2xy \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } I = \int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\gamma} \vec{V}_1(M) \cdot d\vec{M} + \int_{\gamma} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} = I_1 + I_2.$$

Il est clair, maintenant, que $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$.

\vec{V}_1 est donc un champ de gradients (l'ouvert sur lequel tous ces champs sont définis est bien sûr \mathbb{R}^2).

Par conséquent $I_1 = 0$ et $I = I_2$.

Cette deuxième intégrale curviligne est bien plus facile à calculer.

On coupe en trois parties l'arc $\gamma : \gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ avec

γ_1 est l'arc simple de support le segment $[AB]$ orienté de A vers B ,

γ_2 est l'arc simple de support le segment $[BC]$ orienté de B vers C ,

γ_3 est l'arc simple de support le segment $[CA]$ orienté de C vers A .

On a donc

$$\begin{aligned} I = I_2 &= \int_{\gamma} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\gamma_1} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} + \int_{\gamma_2} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} + \int_{\gamma_3} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} \\ &= J + K + L. \end{aligned}$$

Calcul du premier terme

Une paramétrisation de γ_1 est

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_A + t x_B = 1 - t \\ y(t) = (1-t)y_A + t y_B = t \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

On a aussi $x'(t) = -1$ et $y'(t) = 1$. D'où

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (P_2(x(t), y(t))x'(t) + Q_2(x(t), y(t))y'(t)) dt = \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \left[-\frac{(1-t)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Calcul du deuxième terme

Puisque γ_2 a comme support un segment horizontal, on applique la deuxième méthode de paramétrisation. Mais l'abscisse de l'origine est supérieure à l'abscisse de l'extrémité : on a intérêt à utiliser l'arc inverse, qui est $\widehat{\gamma}_2$, l'arc simple de support $[CB]$ orienté de C vers B .

Une paramétrisation de $\widehat{\gamma}_2$ est

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases} \quad t \in [-1, 0].$$

Ici, $x'(t) = 1$ et $y'(t) = 0$, donc

$$K = - \int_{\widehat{\gamma}_2} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} = - \int_{-1}^0 [0 \times 1 + t \times 0] dt = 0.$$

Remarquons que d'un point de vue physique, ce résultat est très logique : avec l'interprétation du début du chapitre, comme calcul d'un travail, ici la « force » \vec{V}_2 est verticale, et le segment est horizontal et il est classique que le travail d'une force perpendiculaire au sens du déplacement soit nul.

Calcul du troisième terme

Nous allons essayer ici la troisième méthode : le segment $[CA]$ est une partie de la droite Δ dont le coefficient directeur est $-\frac{1}{2}$ et l'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2}$. L'équation cartésienne réduite de Δ est donc $y = \frac{1}{2}(1 - t)$. On ne garde de cette droite que la partie entre son point d'abscisse -1 et son point d'abscisse 1 (et on va dans le « bon » sens).

Une paramétrisation de γ_3 est donc

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2}(1 - t) \end{cases} \quad t \in [-1, 1].$$

On a $x'(t) = 1$ et $y'(t) = -\frac{1}{2}$, donc

$$K = \int_{-1}^1 \left(0.1 + t \left(-\frac{1}{2} \right) \right) dt = 0.$$

(l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est nulle).

Donc finalement

$$I = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2}.$$

Remarquons que I est égale à l'aire du triangle ABC , qui est la partie du plan limitée par l'arc fermé γ . Nous verrons dans le prochain paragraphe que ce n'est pas un hasard.

Exemple 3 : Soit à calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{\gamma} \omega$ de la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ le long de l'arc γ , avec les hypothèses suivantes.

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad ; \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

γ est un arc simple fermé dont le support est le cercle trigonométrique, orienté dans le sens direct.

On a vu que le choix de l'origine de γ est sans importance. Nous prendrons son origine en $A = (1, 0)$.

Est-ce que ω est une forme différentielle exacte ? On a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Donc ω est fermée. Mais ici ω est définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui n'est pas étoilé. (Il n'est d'ailleurs pas possible de trouver un ouvert étoilé qui contienne le support de γ et qui soit inclus dans l'ensemble de définition de ω).

Il est donc impossible d'affirmer que ω est exacte.

Remarquons qu'il est pour l'instant tout aussi impossible d'affirmer que ω n'est pas exacte : la proposition 4.34 (p.185) ne fonctionne que dans un sens.

Nous allons calculer « à la main » l'intégrale curviligne I .

Une paramétrisation de γ est

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

On a $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = \cos t$. En pratique, on écrira

$$\begin{cases} x = \cos t & dx = -\sin t \, dt \\ y = \sin t & dy = \cos t \, dt \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

puis

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) \, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Puisque cette intégrale curviligne sur un arc fermé n'est pas nulle, cette fois on est sûr que ω n'est pas une forme différentielle exacte, bien qu'étant fermée.

Vous reverrez peut-être cet exemple très important lors des calculs de résidus, si vous êtes amenés à travailler avec la « variable complexe » au niveau du master de mathématiques.

4.7 Utilisation des intégrales curvilignes pour des calculs d'aires

4.7.1 Énoncé de la formule

Nous allons admettre provisoirement, en attendant le prochain chapitre, le résultat suivant qui est une conséquence de la formule de Green-Riemann (théorème 5.11, p. 228). En effet, elle nous permettra de calculer des aires de parties de plan limitées par des arcs simples fermés, ce qui est à peu près le cas général de ce qu'on peut rencontrer en fait de calcul d'aire.

Théorème 4.36

Soit γ un arc simple fermé dont le support est parcouru dans le sens trigonométrique ; alors l'aire de la partie de plan limitée par cet arc simple fermé est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \int_{\gamma} x \, dy = - \int_{\gamma} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx).$$

Remarque : Ce résultat admet en fait une propriété intuitivement évidente, mais qui est très difficile à établir de façon rigoureuse : toute arc simple fermé de classe C^1 (ou de classe C^1 par morceaux) sépare les points du plan en deux zones : l'une bornée est l'intérieur de la boucle, l'autre, non bornée, en est l'extérieur.

Ici « intérieur » n'est pas à prendre au sens topologique, mais au sens commun : partie du plan limitée par la boucle.

De même, lorsqu'on parle d'arc fermé, ce n'est pas au sens topologique que « fermé » doit être compris. (On montre que le support de tout arc paramétré de classe C^1 (ou de classe C^1 par morceaux) est fermé au sens topologique, mais un arc n'est fermé que si il forme une boucle, et ce n'est un arc simple fermé que s'il ne se recoupe pas : un « huit » n'est pas un arc simple fermé.)

Justification : nous ne pouvons pas encore démontrer cette formule, mais nous allons au moins établir que les trois intégrales curvilignes intervenant dans cette formule sont égales.

Si $A = \int_{\gamma} x \, dy$, $B = - \int_{\gamma} y \, dx$ et $C = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx)$, on remarque que $C = \frac{1}{2}(A + B)$, donc il suffit d'établir que $A = B$. or,

$$A - B = \int_{\gamma} (x \, dy + y \, dx) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} (P \, dx + Q \, dy).$$

Avec $P(x, y) = y$ et $Q(x, y) = x$. Il est clair que $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, donc ω est une forme différentielle fermée, qui est définie sur l'ouvert \mathbb{R}^2 qui est bien sûr étoilé : ω est donc exacte, et l'intégrale d'une forme différentielle exacte le long d'un arc fermé est nulle. On a $A - B = 0$ donc $A = B = C$. \square

4.7.2 Un exemple important

Considérons une fonction f d'une variable réelle, à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que f est de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$, et pour simplifier, nous supposerons que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

Chacun sait calculer l'aire de la partie de plan limitée par la courbe de f , (d'équation $y = f(x)$), l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$.

On sait que cette aire vaut $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \, dx$.

Nous allons essayer d'appliquer la formule précédente, et bien sûr de retrouver le même résultat.

On appelle γ un arc fermé simple dont le support entoure la partie de plan dont on cherche l'aire, et qui est orienté dans le sens trigonométrique.

On considère les points $A = (a, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (b, f(b))$ et $D = (a, f(a))$. Ces quatre points sont tous sur le support de γ qui est un arc de classe C^1 par morceaux. Choisissons A comme origine (et extrémité) de γ

On peut facilement décomposer $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \gamma_4$, avec

- $\gamma_1 = \widehat{AB}$ a comme support un segment horizontal parcouru de gauche à droite (dans le « bon sens »)
- $\gamma_2 = \widehat{BC}$ a comme support un segment vertical parcouru de bas en haut (dans le « bon sens »)
- $\gamma_3 = \widehat{CD}$ a comme support un morceau de la courbe de f , parcouru de droite à gauche (nous verrons que c'est plutôt le « mauvais sens »)
- $\gamma_4 = \widehat{DA}$ a comme support un segment vertical parcouru de haut en bas.

Nous utiliserons les arcs $\widehat{\gamma_3}$ et $\widehat{\gamma_4}$ inverses respectivement des arcs γ_3 et γ_4 , pour faciliter les calculs en se remettant dans le « bon sens ».

On a donc (choisisant la deuxième expression dans la formule du théorème 4.36) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\gamma} (-y \, dx) = \int_{\gamma_1} (-y \, dx) + \int_{\gamma_2} (-y \, dx) + \int_{\gamma_3} (-y \, dx) + \int_{\gamma_4} (-y \, dx) \\ &= \int_{\gamma_1} (-y \, dx) + \int_{\gamma_2} (-y \, dx) - \int_{\widehat{\gamma_3}} (-y \, dx) - \int_{\widehat{\gamma_4}} (-y \, dx) \\ &= \int_{\gamma_1} (-y \, dx) + \int_{\gamma_2} (-y \, dx) + \int_{\widehat{\gamma_3}} (y \, dx) + \int_{\widehat{\gamma_4}} (y \, dx) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Calcul de $I_1 = \int_{\gamma_1} (-y \, dx)$.

Une paramétrisation de γ_1 est

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

On a $dx = 1 \, dt$, donc

$$I_1 = \int_{\gamma_1} (-y \, dx) = \int_a^b (-0 \times 1) \, dt = 0.$$

Calcul de $I_2 = \int_{\gamma_2} (-y \, dx)$.

Une paramétrisation de γ_2 est

$$\begin{cases} x(t) = b \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, f(b)].$$

On a $dx = 0 \, dt$, donc

Calcul de $I_3 = \int_{\widehat{\gamma}_3} (y \, dx)$.

Une paramétrisation de $\widehat{\gamma}_3$ est clairement

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b].$$

On a $dx = 1 \, dt$, donc

$$I_3 = \int_{\widehat{\gamma}_3} (y \, dx) = \int_a^b (f(t) \times 1) \, dt = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Calcul de $I_4 = \int_{\widehat{\gamma}_4} (y \, dx)$.

Une paramétrisation de $\widehat{\gamma}_4$ est

$$\begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, f(a)].$$

On a $dx = 0 \, dt$, donc

$$I_4 = \int_{\widehat{\gamma}_4} (y \, dx) = \int_0^{f(b)} (t \times 0) \, dt = 0.$$

Finalement, on obtient

$$\mathcal{A} = 0 + 0 + \int_a^b f(x) \, dx + 0 = \int_a^b f(x) \, dx.$$

On a retrouvé le même résultat.

4.7.3 Méthode de calcul

Nous verrons que l'aire d'une partie de plan peut aussi se calculer à l'aide d'une intégrale double. Avec la triple formule que nous avons ici cela fait au moins quatre méthodes pour calculer une aire. Sans compter qu'en fait, on a

Corollaire 4.37 Soit $\omega = P \, dx + Q \, dy$ une forme différentielle telle que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, alors pour tout arc fermé simple γ orienté dans le sens trigonométrique, l'aire de la partie de plan limitée par le support de γ est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_{\gamma} \omega.$$

Alors, devant toutes ces méthodes, laquelle choisir ?

Lorsque l'intégrale double est facile à calculer, c'est la méthode qu'on choisira. Mais pour une boucle de courbe paramétrée, c'est bien évidemment une des trois formules du théorème 4.36 qu'on utilisera. Laquelle ?

Paradoxalement, c'est assez souvent la troisième qui, bien qu'elle semble plus compliquée, amène en fait le résultat avec le moins de calculs (il y a des exceptions, comme pour ce qu'on vient de faire). Bien entendu, il n'y a aucune obligation d'utiliser telle ou telle méthode, laissez-vous guider par votre intuition.

Voyons quelques exemples classiques :

Aire d'un disque

On considère un disque de centre Ω , de rayon ρ . Une paramétrisation d'un arc fermé γ dont le support est la circonférence parcourue dans le sens direct est

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + \rho \cos t \\ y(t) = y_\Omega + \rho \sin t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

On a $dx = -\rho \sin t \, dt$ et $dy = \rho \cos t \, dt$ de sorte que l'aire cherchée est

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((x_\Omega + \rho \cos t)(\rho \cos t) - (y_\Omega + \rho \sin t)(-\rho \sin t)) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} ((x_\Omega \rho \cos t + y_\Omega \rho \sin t) + \rho^2) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[(x_\Omega \rho \sin t - y_\Omega \rho \cos t) + \rho^2 t \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \rho^2. \end{aligned}$$

On retrouve (heureusement !) le résultat classique.

Notons que si on avait utilisé la première ou la deuxième expression du théorème 4.36, le calcul aurait nécessité la linéarisation de $\cos^2 t$ ou de $\sin^2 t$, qu'on a pu éviter ici grâce à cette formule « mixte ».

Aire sous une arche de cycloïde

Une arche de cycloïde est la partie de la courbe

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$$

comprise entre deux points de rebroussement (voir exercice 2.1, p. 60 et son corrigé p. 304).

La partie du plan dont on cherche l'aire est limitée par le support de l'arc $\widehat{\gamma_2}$

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

et l'axe des abscisses entre l'origine O et le point d'abscisse 2π , $A = (2\pi; 0)$. Le contour de cette zone est l'arc $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, avec γ_1 l'arc ayant comme support le segment $[OA]$, orienté de gauche à droite, et $\gamma_2 = \widehat{AO}$, qui est l'arc inverse de $\widehat{\gamma}_2$.

L'aire cherchée est donc donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} (x \, dy - y \, dx) + \frac{1}{2} \int_{\gamma_2} (x \, dy - y \, dx) \\ &= 0 - \frac{1}{2} \int_{\widehat{\gamma}_2} (x \, dy - y \, dx).\end{aligned}$$

La première intégrale curviligne, (le long de γ_1) est nulle car sur l'axe des abscisses, on a y et dy qui sont nuls.

Sur $\widehat{\gamma}_2$ on a $dx = (1 - \cos t) \, dt$ et $dy = \sin t \, dt$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((t - \sin t) \sin t - (1 - \cos t)(1 - \cos t)) \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t \sin t - 2 + 2 \cos t) \, dt = -\frac{1}{2} [\sin t - t \cos t - 2t + 2 \sin t]_0^{2\pi} \\ \mathcal{A} &= -\frac{1}{2}(-2\pi - 4\pi) = 3\pi.\end{aligned}$$

Remarquons qu'on trouve (heureusement) un résultat positif. Si lors d'un calcul d'aire, votre résultat est négatif, c'est que vous avez fait une erreur quelque part, sans doute lors de l'orientation des arcs.

4.8 Quelques propriétés métriques des arcs

4.8.1 Longueur d'un arc de courbe

Dans la situation du § 4.1.3, on peut remarquer que l'approximation proposée pour la longueur d'un arc de courbe \widehat{AB} , somme des n longueurs de segments $[M_{i-1}M_i]$ est toujours une approximation par défaut, à cause du principe couramment admis que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. En effet, intuitivement, il est clair que la longueur totale $\mathcal{L}(\widehat{AB})$ est égale à la somme des longueurs des n « sous-arcs » $\widehat{M_{i-1}M_i}$.

$$\mathcal{L}(\widehat{AB}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\widehat{M_{i-1}M_i}) \geq \sum_{i=1}^n M_{i-1}M_i$$

Avec ce qu'on a appris sur les arcs, il est logique de considérer une paramétrisation $P_1 = ([a, b], f)$ de l'arc que l'on considère, et pour couper en n cet arc, il sera plus simple de considérer une subdivision σ du segment $[a, b]$.

Rappelons qu'une subdivision de $[a, b]$ est la donnée d'un entier n et d'une suite finie $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. On notera \mathcal{S} l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

On pose alors logiquement :

Définition 4.38 Soit $\gamma = \widehat{AB}$ un arc simple paramétré de classe C^1 , et $P_1 = ([a, b], f)$ une paramétrisation de γ .

Pour toute subdivision $\sigma : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$, on pose

$$\mathcal{L}_\sigma(\widehat{AB}) = \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n M_{i-1}M_i$$

(en posant $M_i = f(t_i)$) : $\mathcal{L}_\sigma(\widehat{AB})$ est la longueur de la ligne brisée joignant A à B en passant par tous les points correspondant à la subdivision σ .

Alors la longueur de γ est

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\widehat{AB}) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathcal{L}_\sigma(\widehat{AB})$$

(sous réserve que ce sup existe ; il peut être infini et dans ce cas, on dit que l'arc \widehat{AB} a une longueur infinie). Les arcs qui n'ont pas une longueur infinie sont des arcs métrisables.

Il faudrait bien sûr montrer tout d'abord que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie. Nous ne le ferons pas en détail, en nous contentant de remarquer que si on change de paramétrisation, l'application ϕ strictement croissante qui doit intervenir transformera toute subdivision σ de l'intervalle $[a, b]$ initial en une subdivision du nouvel intervalle. En fait seuls comptent les points M_i formant une subdivision de l'arc géométrique, la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ n'étant qu'un artifice de calcul pour la suite.

Nous admettrons aussi que l'arc inverse $\widehat{\gamma} = \widehat{BA}$ a évidemment la même longueur que γ .

De même, nous admettrons la « relation de Chasles » : si $\gamma_1 = \widehat{AB}$, $\gamma_2 = \widehat{BC}$ sont deux arcs paramétrés de classe C^1 , et si $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, alors

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2).$$

Cette relation de Chasles permet, en itérant le procédé, de définir la longueur d'un arc paramétré de classe C^1 par morceaux.

En fait le théorème important pour cette notion de longueur d'un arc est le suivant qui permet de calculer cette longueur dans un certain nombre de cas.

Théorème 4.39 Soit $\gamma = \widehat{AB}$ un arc paramétré simple de classe C^1 et $P_1 = ([a, b], f)$ une paramétrisation de γ . Alors la longueur de γ est

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b \|f'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau.$$

Preuve Tout d'abord, notons que pour toute subdivision $\sigma : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a, b]$, pour tout i , on a

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\tau) d\tau.$$

(cette formule est classique pour les fonctions réelles et pour les fonctions vectorielles, il suffit de passer aux fonctions composantes ; voir la proposition 4.2 p. 165)

On en déduit que

$$M_{i-1}M_i = \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(\tau) d\tau \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(\tau)\| d\tau.$$

(on a utilisé la proposition 4.3 p. 166).

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma(\widehat{AB}) &= \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n M_{i-1}M_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \|f'(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

$L = \int_a^b \|f'(\tau)\| d\tau$ est donc un majorant de l'ensemble des $\mathcal{L}_\sigma(\widehat{AB})$ pour toutes les subdivisions $\sigma \in \mathcal{S}$, et comme la borne supérieure (le sup) de cet ensemble est le plus petit de ses majorants, c'est donc un nombre plus petit que L :

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\widehat{AB}) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathcal{L}_\sigma(\widehat{AB}) \leq L = \int_a^b \|f'(\tau)\| d\tau$$

La deuxième partie de cette démonstration ressemble beaucoup à celle qu'on fait lorsqu'on montre comment une intégrale peut se calculer à l'aide des primitives. On considère la fonction ϕ définie sur $[a, b]$, qui associe à tout t la longueur de l'arc (sous-arc de γ) joignant A à $M_t = f(t)$.

$$\phi(t) = \mathcal{L}(AM_t).$$

On va montrer que ϕ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et on calculera sa dérivée par la même occasion. Comme il est clair que $\phi(a) = 0$ (c'est si « clair » qu'on

est obligé de l'admettre : la longueur de l'*« arc-point »* $\widehat{AM_a} = \widehat{AA}$ est nulle), on pourra calculer ϕ comme primitive de sa dérivée.

Pour montrer la dérivable de cette fonction ϕ , on peut (par définition) montrer que pour tout t_0 , le quotient $T = \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}$ a une limite finie et cette limite finie sera justement $\phi'(t_0)$.

Or, $\phi(t) - \phi(t_0)$ représente exactement la longueur de l'arc compris entre les points $M_{t_0} = f(t_0)$ et $M_t = f(t)$. En fait, pas exactement, : cela dépend de l'ordre entre t et t_0 ; en effet, il est clair que ϕ est une fonction croissante, donc

- si $t > t_0$, alors $\phi(t) - \phi(t_0) = \mathcal{L}(M_{t_0} \widehat{M_t})$
- si $t < t_0$, alors $\phi(t) - \phi(t_0) = -\mathcal{L}(M_t \widehat{M_{t_0}})$.

Dans le **premier cas** ($t > t_0$), on a

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \mathcal{L}(M_{t_0} \widehat{M_t}) \geq M_{t_0} M_t = \|f(t) - f(t_0)\|.$$

D'autre part, on peut appliquer la première partie de la démonstration entre t_0 et t , et on a donc

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \mathcal{L}(M_{t_0} \widehat{M_t}) \leq \int_{t_0}^t \|f'(\tau)\| \, d\tau = \int_a^t \|f'(\tau)\| \, d\tau - \int_a^{t_0} \|f'(\tau)\| \, d\tau.$$

Posant $g(t) = \int_a^t \|f'(\tau)\| \, d\tau$, on a donc l'encadrement

$$\|f(t) - f(t_0)\| \leq \phi(t) - \phi(t_0) \leq g(t) - g(t_0).$$

Divisant par le nombre positif $(t - t_0)$ (*positif dans ce premier cas, il sera négatif dans le deuxième*) on obtient

$$(4.5) \quad \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\| = \frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{t - t_0} \leq \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}.$$

Mais lorsque $t \rightarrow t_0^+$ ($t > t_0$), le membre de droite tend vers $g'(t_0)$. En effet, la fonction g (*c'est une fonction réelle de la variable réelle*) est dérivable et sa dérivée est $g'(t) = \|f'(t)\|$, car par définition g est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \|f'(t)\|$.

On a donc $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \|f'(t_0)\|$.

Quant au membre de gauche, le quotient dans la norme tend vers $f'(t_0)$, par définition de la dérivable d'une fonction vectorielle. La norme étant une fonction continue, on peut affirmer qu'on a aussi $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\| = \|f'(t_0)\|$.

Finalement, dans (4.5), les membres extrêmes ayant la même limite, on peut appliquer le théorème des gendarmes, et on obtient que le membre du milieu a aussi pour limite $\|f'(t_0)\|$.

On a obtenu $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \|f'(t_0)\|.$

Dans le **deuxième cas** ($t < t_0$), on a

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\mathcal{L}(\widehat{M_t M_{t_0}}).$$

Or, $\mathcal{L}(\widehat{M_t M_{t_0}}) \geq M_t M_{t_0} = \|f(t) - f(t_0)\|$.

Donc $\phi(t) - \phi(t_0) \leq -\|f(t) - f(t_0)\|$.

D'autre part, en appliquant encore la première partie de la démonstration à la longueur de l'arc $\widehat{M_t M_{t_0}}$, on a

$$\mathcal{L}(\widehat{M_t M_{t_0}}) \leq \int_t^{t_0} \|f'(\tau)\| d\tau = g(t_0) - g(t).$$

On a donc

$$\phi(t) - \phi(t_0) = -\mathcal{L}(\widehat{M_t M_{t_0}}) \geq -(g(t_0) - g(t)) = g(t) - g(t_0).$$

Donc on en déduit l'encadrement (similaire à ce qu'on avait précédemment)

$$g(t) - g(t_0) \leq \phi(t) - \phi(t_0) \leq -\|f(t) - f(t_0)\|.$$

On va encore diviser ceci par $(t - t_0)$ qui est ici un nombre *négatif* : on change donc le sens des inégalités.

On obtient

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \geq -\frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{t - t_0}.$$

Mais on a

$$-\frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{t - t_0} = \frac{\|f(t) - f(t_0)\|}{t_0 - t} = \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t_0 - t} \right\| = \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\|.$$

On obtient finalement

$$(4.6) \quad \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \geq \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} \geq \left\| \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right\|.$$

Le même raisonnement que dans le premier cas s'applique aux termes extrêmes, qui ont aussi, pour les mêmes raisons $\|f'(t_0)\|$ comme limite pour $t \rightarrow t_0^-$ ($t < t_0$), et finalement, on obtient grâce au théorème des gendarmes

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \|f'(t_0)\|.$$

Ayant obtenu que la limite à droite de t_0 et la limite à gauche de t_0 de $\frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0}$ sont égales et valent $\|f'(t_0)\|$, on peut affirmer que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(t) - \phi(t_0)}{t - t_0} = \|f'(t_0)\|.$$

Donc ϕ est dérivable en tout $t_0 \in [a, b]$, et $\phi'(t) = \|f'(t)\|$.
On a donc pour tout t , puisque $\phi(a) = 0$,

$$\phi(t) = \int_a^t \|f'(\tau)\| \, d\tau.$$

En particulier pour $t = b$, on obtient

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\widehat{AB}) = \phi(b) = \int_a^b \|f'(\tau)\| \, d\tau.$$

□

Remarque : Cette formule a l'air très intéressante et permet en théorie de calculer n'importe quelle longueur d'arc de courbe. En théorie seulement. En pratique, c'est souvent très compliqué à cause de l'expression qu'on doit intégrer. Il est en effet la plupart du temps difficile et même impossible de trouver une primitive d'une expression sous la forme d'un radical.

Il y a assez peu d'exemples où on peut trouver une valeur explicite, et très souvent, on doit se contenter d'une valeur approchée calculée avec une méthode d'intégration numérique.

Voyons un exemple où les calculs se simplifient « miraculeusement ».

Exemple : longueur d'une arche de cycloïde

Une paramétrisation d'une arche de cycloïde est (voir exercice 2.1, p. 60 et son corrigé p. 304).

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

On a $x'(t) = 1 - \cos t$ et $y'(t) = \sin t$.

La longueur de cet arc est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \frac{1 - \cos(2 \frac{t}{2})}{2}} \, dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} \, dt \end{aligned}$$

Notons ici le petit piège : il faut dans ce type de calcul éviter de remplacer $\sqrt{X^2}$ par X sans prendre des précautions. Ici, ça n'aurait pas de conséquence néfaste, puisque lorsque $t \in [0, 2\pi]$, on a $\frac{t}{2} \in [0, \pi]$ et donc $\sin \frac{t}{2} \geq 0$, mais il y a pas mal de cas où on peut faire une erreur si on n'est pas attentif (voir exercices).

On peut donc ici terminer ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 2 \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2 \left[\frac{-\cos \frac{t}{2}}{1/2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 4(-\cos \frac{2\pi}{2} - (-\cos 0)) = 4(1 + 1) = 8.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu obtenir ce résultat en utilisant la symétrie de l'arche par rapport à la droite verticale $x = \pi$, et donc dire que la longueur était égale à 2 fois la longueur d'une demi-arche, pour laquelle le paramètre t reste entre 0 et π , et donc on a aussi $\sin \frac{t}{2} \geq 0$.

4.8.2 Paramétrisation normale

Lorsqu'un arc $\gamma = \widehat{AB}$ est métrisable, il est possible de privilégier parmi toutes les paramétrisations possibles de cet arc une certaine paramétrisation : c'est celle qui mesure la distance parcourue sur la courbe depuis l'origine A . Une telle paramétrisation est dite la paramétrisation normale de cet arc.

Précisons les choses. Si $P_1 = ([a, b], f)$ est une paramétrisation de γ , à tout point $M_t = f(t)$ du support de γ , on peut faire correspondre le réel $\phi(t) = \mathcal{L}(AM_t)$, longueur sur cet arc entre l'origine et le point M_t . On définit ainsi une application ϕ de $[a, b]$ vers l'intervalle $[0, \beta]$, avec $\beta = \phi(b) = \mathcal{L}(AB) = \mathcal{L}(\gamma)$. On a vu que ϕ est une fonction dérivable, et sa dérivée est $\|f'(t)\| > 0$ (l'inégalité est stricte car on a supposé que l'arc était simple). ϕ réalise donc une bijection croissante, de classe C^1 entre $[a, b]$ et $[0, \beta]$. La bijection réciproque ϕ^{-1} est bien sûr aussi de classe C^1 , et si on pose pour tout $s \in [0, \beta]$, $g(s) = f(\phi^{-1}(s))$, on a $g = f \circ \phi^{-1}$ et les quatre assertions suivantes sont vraies :

- $[a, b]$ est inclus dans le domaine de définition de ϕ .
- $\phi(a) = 0$ $\phi(b) = \beta$.
- $\forall t \in [a, b] \quad \phi'(t) > 0$.
- $\forall t \in [a, b] \quad$ si $\phi(t) = s$, on a $g(s) = f(t)$.

La paramétrisation $\mathcal{P} = ([0, \beta], g)$ est donc une paramétrisation équivalente à P_1 : c'est donc aussi une paramétrisation de γ et c'est elle que l'on appelle la *paramétrisation normale* de γ . Il est d'usage de noter s le paramètre de cette paramétrisation.

La possibilité de choisir une paramétrisation normale pour un arc est bien souvent très théorique, car expliciter cette paramétrisation normale implique de connaître la longueur de cet arc, et on a vu que c'est souvent « mission impossible ».

Néanmoins l'existence de cette paramétrisation normale rend de grands services pour un certain nombre de situations, par exemple pour définir la notion de courbure, et aussi pour l'intégration d'une fonction scalaire sur un arc.

4.8.3 Courbure

D'un point de vue cinématique, un point mobile qui parcourrait un arc en suivant une paramétrisation normale aurait à tout instant une vitesse instantanée absolue constante et égale à 1.

En effet, la vitesse instantanée est $V(s) = \|g'(s)\|$. Mais puisque $g = f \circ \phi^{-1}$, on a $g' = (\phi^{-1})'.(f' \circ \phi^{-1})$. En posant pour tout $s \in [0, \beta]$, $\phi^{-1}(s) = t$, on a donc

$$g'(s) = (\phi^{-1})'(s)f'(t) = \frac{1}{\phi'(t)}f'(t) = \frac{1}{\|f'(t)\|}f'(t).$$

de sorte que $\|g'(s)\| = 1$, ceci pour tout s .

Le vecteur $\vec{V}(s) = g'(s)$ est donc unitaire ; on l'appelle le *vecteur unitaire tangent* et on le note $\vec{\tau}_s$ ou plus simplement $\vec{\tau}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Il existe un unique vecteur $\vec{\nu}$ (on lit « nu ») qui est tel que $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ forme une base orthonormée directe. Ce vecteur est le vecteur normal principal $\vec{\nu}$.

L'intérêt de ce parcours à vitesse constante vient d'une remarque de bon sens : à vitesse constante, plus un virage est serré, et plus on est « secoué ». Mathématiquement, être secoué signifie qu'on est soumis à une force, forcément centripète pour pouvoir prendre le virage, proportionnelle à l'accélération. C'est ce raisonnement qui est à l'origine de la notion de courbure, qui mesure comment un virage est serré. Notons (voir proposition 2.10 p. 35) que puisque le mouvement n'est ni retardé, ni accéléré, on a $\vec{V}(s) \cdot \vec{A}(s) = 0$ (notant $\vec{A}(s) = g''(s)$ l'accélération). L'accélération est donc à tout instant orthogonale à $\vec{V}(s) = g'(s) = \vec{\tau}$, et donc proportionnelle à $\vec{\nu}$. C'est ce coefficient de proportionnalité qui est la courbure.

Définition 4.40 Soit $\gamma = \widehat{AB}$ un arc simple paramétré de classe C^1 et $\mathcal{P} = ([0, \beta], g)$ sa paramétrisation normale.

Alors la courbure de γ en son point $g(s)$ est égale au réel c tel que $g''(s) = c\vec{\nu}$.

Cette définition semble sans grand intérêt ; en effet, si on ne connaît pas la paramétrisation normale, comment calculer sa dérivée, et *a fortiori* sa dérivée seconde ?

En fait, comme nous allons le voir, il n'est pas nécessaire de connaître la paramétrisation normale d'un arc pour déterminer sa courbure en un de ses points, comme le montre ce théorème. (On suppose que l'arc est de classe C^2 , ce qui signifie que ses paramétrisations sont aussi de classe C^2 , n'entrons pas dans les détails).

Théorème 4.41 Soit γ un arc simple paramétré de classe C^2 et $P_1 = ([a, b], f)$ une de ses paramétrisations. Alors la courbure de cet arc en son point $M_t = f(t)$ est donnée par la formule (x et y désignant les fonctions composantes de f)

$$c = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3} = \frac{\det(\vec{V}(t), \vec{A}(t))}{V^3(t)}.$$

\det désigne le déterminant des deux vecteurs (ou produit mixte), qui peut être calculé dans n'importe quelle base orthonormée directe.

Preuve On va utiliser pour cette démonstration, sans la calculer, la paramétrisation normale $\mathcal{P} = ([0, \beta], g)$ de γ , et les notations du § précédent, pour ϕ et $s = \phi(t)$.

On va calculer $\det(f'(t), f''(t))$ en utilisant que $f = g \circ \phi$.

Tout d'abord, on a $f'(t) = \phi'(t)(g' \circ \phi)(t)$, et donc en utilisant la dérivation d'un produit coordonnée par coordonnée, on en déduit que

$$f''(t) = \phi''(t)(g' \circ \phi)(t) + \phi'(t)(\phi'(t)(g'' \circ \phi)(t)).$$

En utilisant maintenant que $\phi(t) = s$, et que $g'(s) = \vec{\tau}$ et $g''(s) = c \vec{\nu}$, on obtient d'une part :

$$f'(t) = \phi'(t)g'(s) = \phi'(t)\vec{\tau},$$

et d'autre part

$$f''(t) = \phi''(t)g'(s) + (\phi'(t))^2g''(s) = \phi''(t)\vec{\tau} + (\phi'(t))^2c\vec{\nu}.$$

Un déterminant peut se calculer dans n'importe quelle base orthonormée directe, on va faire le calcul avec les coordonnées de $f'(t)$ et $f''(t)$ dans la base $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$. On a donc

$$\det(f'(t), f''(t)) = \begin{vmatrix} \phi'(t) & \phi''(t) \\ 0 & (\phi'(t))^2 c \end{vmatrix} = c(\phi'(t))^3$$

Mais souvenons-nous que $\phi'(t) = \|f'(t)\|$ (nous n'avons pas voulu utiliser ce résultat plus tôt, car le terme $\phi''(t)$ aurait été difficile à calculer; nous avons attendu sa disparition qui tombe à pic) On a donc $\det(f'(t), f''(t)) = c\|f'(t)\|^3$ d'où le résultat annoncé. \square

Remarque : Cette formule permet de retrouver un résultat qu'on avait juste expliqué, mais pas démontré lors du chapitre 2 : la présence d'un point d'inflexion sur une courbe paramétrée. D'après ce qu'on vient de voir, un point où il y a un virage à gauche est tel que sa courbure est positive, et un virage à droite correspond à une courbure négative.

En effet, pour que la base $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ soit directe, $\vec{\tau}$ étant dans le sens de la marche, il faut que $\vec{\nu}$ « regarde à gauche » ; l'accélération est du côté de l'intérieur du virage,

et pour un trajet à vitesse constante (paramétrisation normale), elle vaut $\vec{A} = c\vec{\nu}$, donc elle est du côté de $\vec{\nu}$, à gauche lorsque $c > 0$.

On peut donc dire qu'un point où c s'annule en changeant de signe est un point où le virage passe de droite à gauche où de gauche à droite : c'est un point d'inflexion. Or, le signe de c est celui de $x'y'' - x''y'$: on retrouve bien le résultat annoncé p. 50.

4.8.4 Rayon de courbure, centre de courbure, cercle osculateur

L'intérêt de la courbure comme caractérisant combien un virage est serré peut ne pas paraître évident, surtout sans interprétation concrète de cette notion.

C'est la notion de cercle osculateur, de rayon de courbure et de centre de courbure qui permet de donner cette interprétation concrète.

Le cercle osculateur à un arc simple de classe C^2 dont une paramétrisation est $([a, b], f)$ en son point $M_t = f(t)$ est un cercle qui est presque confondu à la courbe au voisinage de ce point. Non seulement il a la même tangente en M_t , mais également il a la même courbure. Son centre est le centre de courbure, son rayon est le rayon de courbure.

Or, la courbure d'un cercle semble être constante. Calculons-la :

Soit C le cercle de centre Ω , de rayon ρ , considéré comme une arc paramétré fermé dont une paramétrisation est

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + \rho \cos t \\ y(t) = y_\Omega + \rho \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calculons la courbure en un point quelconque, correspondant au paramètre t .

On a $x' = x'(t) = -\rho \sin t$, $y' = y'(t) = \rho \cos t$;

$x'' = x''(t) = -\rho \cos t$, $y'' = y''(t) = -\rho \sin t$, donc

$$c = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho^2[(-\sin t)(-\sin t) - (-\cos t)\cos t]}{[\rho^2(\sin^2 t + \cos^2 t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho}.$$

(Remarquons au passage que la courbure est positive, ce qui est logique puisque cette paramétrisation correspond à décrire le cercle dans le sens trigonométrique, et cela correspond à un virage à gauche.)

Le rayon d'un cercle ayant la même courbure c qu'une courbe en son point M_t doit donc avoir comme rayon $R = \frac{1}{c}$.

On veut aussi que le cercle osculateur ait la même tangente que la courbe en M_t . Cette tangente est la droite \mathcal{T} passant par M_t et dirigée par $\vec{\tau}$. Pour que \mathcal{T} soit aussi une tangente au cercle osculateur, il est nécessaire que son centre soit situé sur la perpendiculaire à \mathcal{T} passant par M_t , donc soit sur la droite \mathcal{N} passant par

M_t , dirigée par $\vec{\nu}$. Compte tenu du signe de la courbure, le centre Ω_t du cercle osculateur en M_t est donc le point $\Omega_t = M_t + R\vec{\nu} = M_t + \frac{1}{c}\vec{\nu}$.

Une dernière définition : le lieu des centres des cercles osculateurs, (ou lieu des centres de courbure) d'une courbe s'appelle sa *développée*.

Exemple développée de la cycloïde :

On considère toujours une arche de la cycloïde, dont une paramétrisation est

$$\begin{cases} x = x(t) = t - \sin t \\ y = y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(On pourra ensuite étendre ce qu'on trouvera à toute la cycloïde en utilisant l'invariance par translation qu'on a mise en évidence p. 40).

On a $x' = x'(t) = 1 - \cos t$; $y' = y'(t) = \sin t$; $x'' = x''(t) = \sin t$; $y'' = y''(t) = \cos t$.

En son point M_t de coordonnées $(x(t), y(t))$, la tangente est dirigée par $f'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1 - \cos t, \sin t)$ lorsqu'on n'est pas en un point singulier, c'est-à-dire pour $t \neq k2\pi$.

Notons que $\|f'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2|\sin \frac{t}{2}| = 2 \sin \frac{t}{2}$ (voir § précédent).

Le vecteur unitaire tangent $\vec{\tau}$ est tel que $f'(t) = \|f'(t)\|\vec{\tau}$. Donc

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ 2 \sin \frac{t}{2} \\ \sin t \\ 2 \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \\ \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{2} \\ \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{\nu}$ directement orthogonal à $\vec{\tau}$ et unitaire est donc (vérification immédiate)

$$\vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

La courbure en M_t vaut

$$\begin{aligned} c &= \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\|f'(t)\|^3} = \frac{(1 - \cos t) \cos t - \sin t \sin t}{8 \sin^3 \frac{t}{2}} \\ &= \frac{\cos t - 1}{8 \sin^3 \frac{t}{2}} = \frac{-2 \sin^2 \frac{t}{2}}{8 \sin^3 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4 \sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Remarquons que la courbure est négative, ce que l'on pouvait deviner en regardant la courbe de la cycloïde (p. 305) : sur ce dessin, on constate qu'en suivant le sens de parcours, (de gauche à droite), le virage est toujours à droite.

Le rayon de courbure est donc $R = -4 \sin \frac{t}{2}$ (valeur négative : en fait c'est un rayon « algébrique », le cercle osculateur aura, lui, géométriquement $|R| = 4 \sin \frac{t}{2}$ comme rayon).

Le centre de courbure, Ω_t (centre du cercle osculateur) pour le paramètre t est donc tel que

$$\Omega_t = f(t) + R\vec{\nu}.$$

il a donc pour coordonnées

$$\begin{aligned} x_{\Omega_t} &= x(t) + (-4 \sin \frac{t}{2})(-\cos \frac{t}{2}) = t - \sin t + 2 \sin t = t + \sin t \\ y_{\Omega_t} &= y(t) + (-4 \sin \frac{t}{2})(\sin \frac{t}{2}) = 1 - \cos t - 2(1 - \cos t) = -1 + \cos t. \end{aligned}$$

La développée de la cycloïde $\begin{cases} x = x(t) = t - \sin t \\ y = y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$ est donc la courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x_{\Omega_t} = t + \sin t \\ y = y_{\Omega_t} = -1 + \cos t. \end{cases}$

On peut montrer assez facilement que cette développée est elle-même une cycloïde isométrique à la cycloïde initiale. (Par exemple, il est aisément de voir que $x_{\Omega_t} = x(t - \pi) + \pi$ et $y_{\Omega_t} = y(t - \pi) - 2$).

On déduit donc la développée de la cycloïde initiale par une translation de vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} \pi \\ -2 \end{pmatrix}$.

4.8.5 Complément : intégrale curviligne d'une fonction scalaire

Dans tout ce §, Γ est un arc métrisable. $P_1 = ([a, b], \gamma)$ est une paramétrisation de Γ ; x et y sont les fonctions composantes de la fonction γ . On note t le paramètre de la paramétrisation P_1 , et s le paramètre d'une paramétrisation normale $\mathcal{P} = ([0, \beta], \varphi)$ de Γ . (β est donc la longueur de Γ). On note aussi $M = M(t) = M(s)$ un point quelconque de Γ (identifié abusivement à son support); les coordonnées de $M(t)$ sont donc $(x(t), y(t))$.

Définition 4.42 Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) dans \mathbb{R} , dont l'ensemble de définition contient le support d'un arc paramétré Γ . (f peut d'ailleurs très bien ne pas être défini en dehors de Γ). Alors l'intégrale curviligne de la fonction scalaire f sur l'arc Γ est :

$$(4.7) \quad I = \int_{\Gamma} f(M) \, ds = \int_0^{\beta} f(\varphi(s)) \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

Comme $\varphi'(s) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \gamma'(t)$ (voir § 4.8.3), la formule de changement de variable permet de vérifier aisément que les deux expressions de I dans (4.7) sont égales.

Nous admettrons que l'intégrale de surface d'une fonction scalaire possède toutes les propriétés habituelles des intégrales :

- la linéarité :

$$\int_{\Gamma} [\lambda f(M) + \mu g(M)] \, ds = \lambda \int_{\Gamma} f(M) \, ds + \mu \int_{\Gamma} g(M) \, ds;$$

- la positivité : si $f \geq 0$, alors $\int_{\Gamma} f(M) \, ds \geq 0$;

- l'additivité : si $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ négligeable, alors

$$\int_{\Gamma} f(M) \, ds = \iint_{\Gamma_1} f(M) \, ds + \iint_{\Gamma_2} f(M) \, ds;$$

- le fait que la valeur d'une intégrale de surface est indépendante de la paramétrisation.

Exemple 1 : Calcul de la masse d'un objet linéaire dont la masse linéique n'est pas homogène.

Soit Γ un « morceau de courbe » dont la masse linéique λ (c'est-à-dire la masse par unité de longueur : l'unité physique d'une masse linéique est le kg/m) n'est pas constante. La fonction λ n'est donc ici pas définie en dehors de Γ .

Alors la masse totale du morceau de courbe Γ est :

$$m(\Gamma) = \int_{\Gamma} \lambda(M) \, ds = \int_0^{\mathcal{L}(\Gamma)} \lambda(\varphi(s)) \, ds.$$

Remarquons que si la masse linéique est constante, c'est-à-dire si λ est une constante, on obtient :

$$m(\Gamma) = \lambda \int_{\Gamma} \, ds = \lambda \cdot \mathcal{L}(\Gamma),$$

ce qui est logique.

Exemple 2 : Moment d'inertie d'un cercle homogène par rapport à un diamètre. On considère un cercle C , de rayon R ; on suppose que son centre est O , l'origine du repère. Soit M la masse de ce cercle. La masse linéique de ce cercle est donc la constante $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$, puisque la longueur du cercle est $2\pi R$.

Nous cherchons son moment d'inertie par rapport à un diamètre ; nous prendrons l'axe Oy , ce qui ne nuit évidemment pas à la généralité.

Nous utilisons la paramétrisation du cercle : $\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$

L'élément de longueur vaut ici $ds = \sqrt{(-R \sin \theta)^2 + (R \cos \theta)^2} \, d\theta = R \, d\theta$.

On sait que le moment d'inertie d'un point massique de masse m , situé à la distance r de l'axe est $j = mr^2$. Le moment d'inertie d'un élément de longueur

ds par rapport à l'axe Oy est donc

$$dj = (\lambda ds)x^2 = \lambda x^2 ds,$$

et le moment d'inertie total est donc l'intégrale sur ce morceau de courbe de la fonction λx^2 :

$$\begin{aligned} J &= \int_C \lambda x^2 ds = \frac{M}{2\pi R} \int_0^{2\pi} (R \cos \theta)^2 R d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{MR^2}{4\pi} \left[t + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ J &= \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

4.9 Exercices

Exercice 4.1. Démontrer la proposition 4.17 p. 173 qui affirme que :

Si γ est un arc paramétré de classe C^1 et si γ' est son arc inverse, si $P = ([a, b], f)$ est une paramétrisation de γ , alors les paramétrisations suivantes sont deux paramétrisations de γ' .

1. $\widehat{P} = ([a, b], \widehat{f})$ avec pour tout $t \in [a, b]$, $\widehat{f}(t) = f(a + b - t)$.
2. $\widetilde{P} = (-b, -a], \widetilde{f})$ avec pour tout $t \in [-b, -a]$, $\widetilde{f}(t) = f(-t)$.

Exercice 4.2. Soit ω la forme différentielle définie par $\omega = P dx + Q dy$, avec $P(x, y) = x + y$ et $Q(x, y) = x - y$. Calculer $\int_{\gamma} \omega$ lorsque :

1. γ est l'arc du cercle trigonométrique joignant le point $A = (1, 0)$ et le point $B = (0, 1)$ dans le sens direct ;
2. γ est le segment de droite $[AB]$ (parcouru de A vers B).

Exercice 4.3. Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ le champ vectoriel de \mathbb{R}^2 défini par $P(x, y) = xy$ et $Q(x, y) = x + y$. Calculer la circulation de ce champ \vec{V} le long de l'arc γ lorsque :

1. γ est l'arc de la parabole $y = x^2$ parcouru de gauche à droite entre son point A d'abscisse -1 et son point B d'abscisse 2 ;
2. γ est le segment de droite $[AB]$ (parcouru de A vers B) ;
3. γ est l'arc du cercle de diamètre $[AB]$ parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 4.4. Calculer $I = \int_{\gamma} y \, dx - z \, dy + x \, dz$

γ désignant l'arc de la courbe de l'espace dont une paramétrisation est $([0, 2\pi], f)$, avec $f(t) = (R \cos t, R \sin t, At)$ (le support de γ est une spire d'une hélice).

Exercice 4.5. On considère le champ de vecteurs \vec{V} défini sur \mathbb{R}^2 par :

$(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ avec $P(x, y) = y^3 - 6xy$ et $Q(x, y) = 3xy^2 - 3x^2 + x + 2y$.

Calculez l'intégrale curviligne de \vec{V} sur les arcs γ_i , pour $1 \leq i \leq 3$, lorsque γ_i est défini ainsi :

1. γ_1 est le segment qui va de $A(1, 2)$ vers $B(3, 4)$.
2. et 3. γ_2 et γ_3 sont les deux demi-cercles dont $[AB]$ est un diamètre, orientés de A vers B .
4. Pourquoi est-ce que l'aire du disque de diamètre $[AB]$ est égale à la différence $\left| \int_{\gamma_2} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} - \int_{\gamma_3} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} \right|$?

Peut-on trouver une relation du même type concernant les intégrales de \vec{V} sur γ_1 et γ_2 ? sur γ_1 et γ_3 ?

Exercice 4.6. Soit \vec{V} le champ vectoriel défini sur l'ensemble des points $M = (x, y)$ de \mathbb{R}^2 par : $\vec{V}(M) = (P(x, y), Q(x, y))$ avec $P(x, y) = 4x + y$ et $Q(x, y) = x + 2y$.

Soit γ l'arc du cercle trigonométrique (de centre O , de rayon 1), orienté dans le sens direct, joignant $A(1, 0)$ à $B(0, 1)$.

Calculer de deux façons l'intégrale curviligne le long du chemin γ du champ vectoriel \vec{V} .

Exercice 4.7. Soit ω la forme différentielle définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\omega = P \, dx + Q \, dy \quad \text{avec} \quad P(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad Q(x, y) = 2xy$$

Soit γ l'arc fermé dont le support est le cercle de centre $\Omega(1, 2)$, de rayon 1, orienté dans le sens direct, parcouru une seule fois et dont le point de départ et d'arrivée est $A(0, 2)$.

Calculer l'intégrale curviligne le long du chemin γ de ω .

Exercice 4.8.

1. Déterminer la longueur de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$ (étudiée à l'exercice 2.4).
2. Déterminer l'aire de la partie de plan limitée par cette courbe.

Exercice 4.9. Déterminer la longueur d'un arc de parabole.

Exercice 4.10. Déterminer l'aire de la partie du plan caractérisée, dans un repère orthonormé par l'inéquation $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1$, ainsi que la longueur de la courbe frontière.

CHAPITRE 5

Calculs d'intégrales doubles, triples et de surface

5.1 Introduction

5.1.1 Notions abordées

Nous ne ferons pas dans ce cours de théorie de l'intégrale multiple, double ou triple, comme on a introduit l'intégrale de Riemann pour les fonctions d'une seule variable. Ce n'est pas impossible, mais c'est assez vain, car un peu plus tard, on introduit une notion plus générale, bien plus intéressante, qui englobe toutes ces situations, et qui est l'intégrale de Lebesgue : ce serait un gaspillage d'énergie de vouloir être trop rigoureux à notre niveau. En revanche, il est essentiel de savoir calculer ces intégrales doubles et triples et de savoir à quoi elles correspondent. Il en est de même pour les intégrales de surface.

Dans un premier temps, nous expliquerons comment comprendre l'intégrale double d'une fonction de deux variables sur un certain domaine du plan, en restant dans des situations simples : le domaine est « suffisamment régulier », et la fonction est continue. Nous pousserons au maximum l'analogie avec l'intégrale simple, puis nous expliquerons une formule de calcul en privilégiant une des deux variables.

Ensuite, nous donnerons toutes les règles élémentaires de calcul sur cette intégrale, qui sont les mêmes que pour tous les calculs d'intégrales : linéarité, positivité, relation de Chasles... Nous admettrons toutes ces propriétés « élémentaires », et aussi deux propriétés beaucoup plus compliquées : le théorème de Fubini, qui est très logique, puisqu'il dit simplement que le fait d'avoir privilégié une variable plutôt que l'autre ne modifie pas le résultat, et surtout la formule de changement de variables, qui nous donnera l'occasion d'appliquer ce qu'on a vu sur le Jacobien d'un changement de variable.

Nous verrons ensuite le Théorème de Green-Riemann dont nous avons utilisé un aspect au chapitre IV. Sa démonstration, assez difficile (mais on peut la sauter en première lecture), dont nous donnons un aperçu permet de reprendre les définitions vues jusque là.

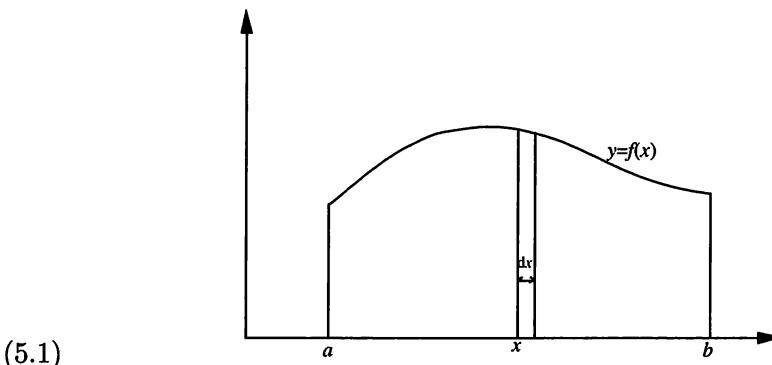
Nous étendrons ensuite rapidement toutes ces notions aux intégrales triples.

Pour terminer, nous parlerons des intégrales de surface et de la notion de flux, qui jouent en dimension 3 le même rôle que les intégrales curvilignes dans le plan. Nous terminerons par les Théorèmes de Stokes-Ampère et d'Ostrogradski, les deux possibilités de version 3D de Green-Riemann avec des démonstrations partielles de ces théorèmes très difficiles.

5.1.2 Introduction géométrique

Commençons par essayer de nous rappeler comment fonctionne une intégrale simple (de Riemann).

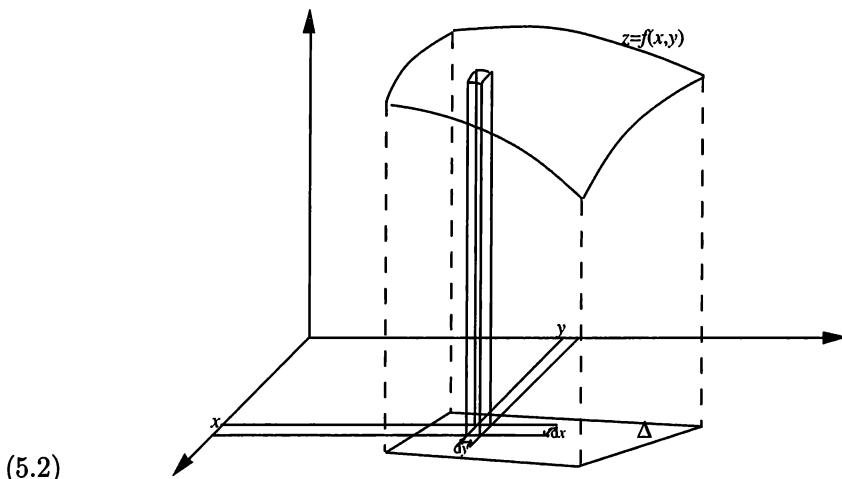
Lorsqu'on cherche à comprendre la symbolique utilisée dans l'intégrale $I = \int_a^b f(x) dx$ d'une fonction f régulière (au moins continue) sur une intervalle $[a, b]$, on peut l'interpréter ainsi, lorsque la fonction f est positive sur cet intervalle, c'est-à-dire lorsque pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq 0$:



Sachant que I mesure l'aire de la partie de plan située entre la courbe et l'axe des abscisses d'une part, et entre les droites verticales $x = a$ et $x = b$ d'autre part, c'est-à-dire au-dessus du domaine d'intégration qui est l'intervalle $[a, b]$, pour calculer cette aire, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en « intervalles élémentaires » $[x, x + dx]$, de largeur dx , et on considère alors le découpage correspondant de la surface dont on cherche l'aire. Elle se trouve donc découpée en fines tranches d'épaisseur dx , et on assimile chaque tranche à un rectangle de largeur dx , et de hauteur $f(x)$, donc d'aire $dA = f(x) dx$. L'aire totale est donc égale à la somme des aires de ces « rectangles élémentaires », et les dx étant infiniment petits, cette somme contient une infinité de termes, c'est pourquoi on la note avec le symbole d'intégration \int , qui désigne une somme infinie.

Soit maintenant une fonction de deux variables $f(x, y)$. Par analogie avec la courbe représentative d'une fonction d'une seule variable, une représentation graphique de cette fonction f est ce qu'on appelle la nappe d'équation $z = f(x, y)$. On dit aussi une surface : c'est l'ensemble des points (x, y, z) de l'espace tels que $z = f(x, y)$.

Supposons que f soit une fonction continue sur un domaine Δ (cela s'interprète graphiquement par le fait que la nappe n'a « pas d'accroc »), et de plus nous supposerons que f est positive sur Δ : cela signifie que la nappe représentative est « au-dessus » du plan $z = 0$ qui contient les axes de coordonnées Ox et Oy . Le calcul d'une intégrale de la fonction f sur ce domaine se comprend alors géométriquement comme le calcul du volume de la partie de l'espace situé « au-dessus » du domaine Δ , entre le plan $z = 0$ et la nappe représentative de f , d'équation $z = f(x, y)$.

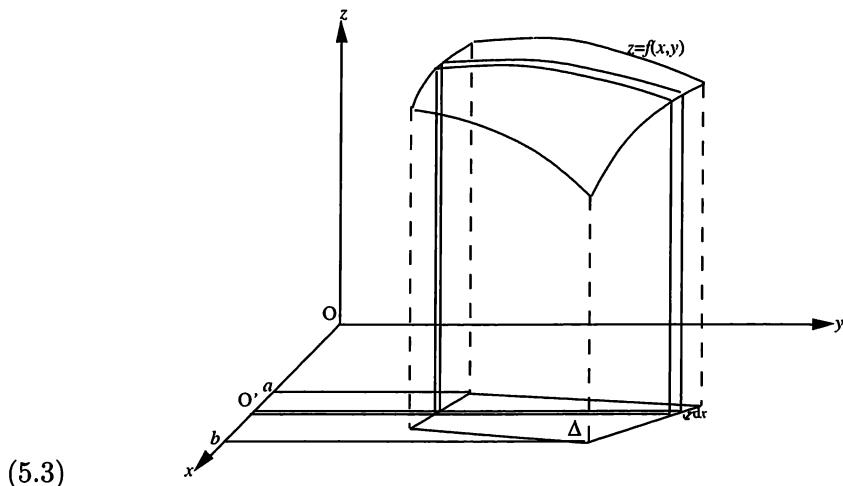


Pour calculer ce volume, une démarche analogue à la situation précédente consiste à découper le domaine Δ en petits rectangles élémentaires de longueur et largeur dx et dy , à partir de chaque point (x, y) (on fait abstraction de ce qui se passe au bord). On considère alors le découpage correspondant du volume à calculer en petites « allumettes », qu'on assimile à des parallélépipèdes rectangles de base $dx dy$ et de hauteur $f(x, y)$, donc de volume $dV = f(x, y) dx dy$. Le volume total est la somme (infinie) de tous ces volumes élémentaires, et on note cette somme à l'aide du symbole \iint , pour signifier que le découpage est « doublement infini » en x et en y (bien sûr, mathématiquement, tout ceci n'est pas parfaitement rigoureux). Lorsqu'on abordera le calcul de ces intégrales, on comprendra mieux pourquoi il est logique de doubler ce symbole somme. On note donc

$$V = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy.$$

5.1.3 Méthode de calcul d'une intégrale double

Attention : le raisonnement qui suit n'a pas la prétention d'être rigoureux. Il veut simplement donner quelques explications « physiques » pour aider à comprendre la notion d'intégrale double.



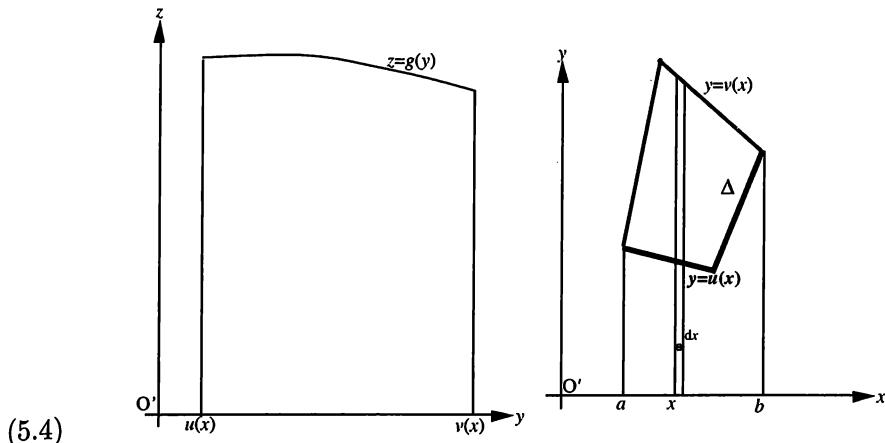
Pour calculer le volume introduit dans le § précédent, une autre méthode (que le découpage en « allumettes ») consiste à faire un découpage en tranches : pour chaque x compris entre les deux valeurs extrêmes correspondant aux « bords » de Δ (a et b sur notre figure), on considère la tranche d'épaisseur dx du volume à déterminer, comprise entre deux plans frontaux (parallèles au plan Oyz). Soit $dV(x)$ le volume de cette tranche.

On assimile cette tranche à un « cylindre » (ou prisme si vous préférez), de base une surface formée de l'intersection du volume à calculer avec le plan frontal correspondant à x , et d'épaisseur dx . Si $A(x)$ est l'aire de la base de cette « tranche élémentaire », on peut dire que

$$dV(x) = A(x) dx, \quad \text{donc} \quad V = \int dV(x) = \int_a^b A(x) dx.$$

Calculons maintenant la valeur de $A(x)$. Pour cela examinons la forme de cette « base ». Elle est située dans un plan parallèle à Oyz (frontal) ; les axes de coordonnées naturels, dans ce plan, sont $O'y$ et $O'z$ (O' est un point de Ox : il a pour coordonnées $(x, 0, 0)$).

La surface dont on cherche l'aire est comprise entre l'axe des abscisses (Oy), une courbe de fonction positive $z = g(y)$, et deux droites verticales. On sait qu'une telle aire peut se calculer à l'aide d'une intégrale (simple !), mais on doit préciser quelques éléments : quelle sont ces droites verticales, et quelle est cette fonction g ?



Les droites verticales : elles correspondent aux frontières verticales de la section frontale correspondant à la valeur x du volume à calculer. Représentons le domaine Δ dans le plan Oxy . Nous supposons qu'il existe deux fonctions $y = u(x)$

et $y = v(x)$ qui sont telles que Δ peut être caractérisé par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ u(x) \leq y \leq v(x). \end{cases}$

En d'autres termes, dans le plan Oxy (qui est *a priori* horizontal), le domaine Δ est limité par « en bas » par la courbe de la fonction u , et par « en haut » par la fonction v , (et en plus par la gauche par la droite $x = a$ et par la droite par la droite $x = b$).

Les droites verticales du plan $O'yz$ de la section frontale que l'on étudie ont donc comme équation $y = u(x)$ et $y = v(x)$.

La fonction g : elle correspond à la frontière supérieure du volume étudié, pour x fixé, avec y qui varie. C'est donc la deuxième fonction partielle de la fonction f en (x, y) . On a donc $g(y) = f(x, y)$.

Récapitulation.

On trouve donc $A(x)$ comme intégrale entre $u(x)$ et $v(x)$ de la fonction g :

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} g(y) dy = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy.$$

Finalement, on a « établi » (ou plutôt illustré) que

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = V = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Nous allons maintenant être un peu plus rigoureux. Pour cela, nous prendrons cette dernière formule comme définition de l'intégrale double.

5.2 Intégrale double

5.2.1 Une définition de l'intégrale double

Nous formalisons maintenant la définition qui a été justifiée dans l'introduction dans le cas d'une fonction positive. Mais maintenant nous l'appliquons à une fonction f qui n'est plus supposée positive : elle peut être positive, négative ou changer de signe sur le domaine Δ .

Définition 5.1 Soit f une fonction continue sur un domaine Δ de \mathbb{R}^2 . On suppose que ce domaine Δ peut être défini par

$$(x, y) \in \Delta \iff \begin{cases} a \leq x \leq b \\ u(x) \leq y \leq v(x), \end{cases}$$

a et b étant des réels et u et v des fonctions d'une variable réelle tels que $a < b$ et $\forall x \in [a, b], u(x) \leq v(x)$.

Alors l'intégrale double de la fonction f sur le domaine Δ est le nombre réel

$$(5.5) \quad \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

Quelques précisions concernant cette définition.

- Tout d'abord, nous supposons la fonction f continue : ce n'est pas une obligation théorique, mais en pratique on n'étudie guère que des intégrales doubles de telles fonctions, et ça simplifie les énoncés.
- Ensuite, nous supposons que Δ peut être défini par ce système de deux inégalités : cela suppose que le domaine Δ n'est pas trop biscornu, et n'a pas de trou. En fait, on peut calculer des intégrales doubles sur des domaines plus compliqués, à condition de couper ces domaines en morceaux « simples », et d'appliquer une espèce de relation de Chasles que nous verrons plus loin à la proposition 5.6 (p. 219).
- Dans le système définissant Δ , nous avons écrit des inégalités larges : cela suppose que le domaine Δ est fermé. En fait, ce n'est pas une obligation, et pour un domaine qui serait ouvert (inégalités strictes dans le système), ou ni ouvert ni fermé (il y a par exemple à la fois des inégalités larges et des inégalités strictes), mais quand même suffisamment régulier (disons pour qu'on puisse le représenter par un dessin : définir rigoureusement cette régularité est une mission impossible à notre niveau), on pourrait néanmoins calculer l'intégrale double de f sur ce domaine : elle aurait la même valeur que l'intégrale double sur l'adhérence du domaine (voir § 1.6.1 p. 23), ceci grâce à deux résultats que nous verrons un peu plus loin.
- Une dernière chose : on écrit souvent $\int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy$; cette expression a exactement la même signification que le deuxième membre de l'égalité (5.5).

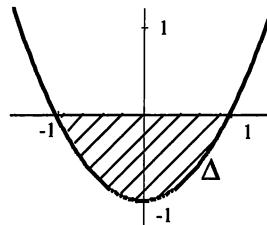
L'avantage d'écrire dx dès le début est qu'on voit bien ainsi à quelle variable se rapportent les bornes d'intégration a et b , et aussi cela évite l'usage de ces grandes parenthèses.

Premier exemple :

On cherche à calculer l'intégrale double de la fonction

$f : (x, y) \mapsto 1 + x - y$ sur le domaine Δ représenté sur la figure ci-contre : la partie de plan comprise entre la parabole $y = x^2 - 1$ et l'axe des abscisses.

Pratiquement, la seule difficulté, dans ce type de calcul consiste à écrire une caractérisation du domaine Δ sous la forme d'un système d'inégalités comme dans la définition.



Ici il est clair que les abscisses des points de Δ sont comprises entre -1 et 1 , les ordonnées étant elles entre $x^2 - 1$ et 0 , donc un système d'inéquations caractérisant Δ est

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

On applique donc la définition et on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} (1 + x - y) \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^0 (1 + x - y) \, dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \left[y + xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2-1}^{y=0} \\ &= \int_{-1}^1 - \left[(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) - \frac{(x^2 - 1)^2}{2} \right] \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^4}{2} - x^3 - 2x^2 + x + \frac{3}{2} \right) \, dx \\ &= \left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{4}{3} + 3 = \frac{28}{15}. \end{aligned}$$

Quelques remarques concernant ce calcul.

- Avec cette définition, dès qu'on a défini correctement le domaine d'intégration, le calcul d'une intégrale double se ramène immédiatement au calcul de deux intégrales simples successives.

- Il subsiste quand même une difficulté : c'est que la variable d'intégration dans ces calculs d'intégrales simples n'est pas toujours la même (c'est une fois y puis une fois x). Pour éviter des erreurs, il est conseillé d'écrire quelle est la variable concernée aux bornes des crochets. D'autre part il faut auparavant faire très attention quand on primitive : la primitive de 1, ce n'est pas forcément x : à la deuxième ligne, comme c'est y qui est la variable d'intégration, c'est y qui est la primitive de 1, xy la primitive de x etc.

5.2.2 Propriétés de l'intégrale double

Nous ne démontrerons aucune de ces propriétés. Certaines démonstrations seraient simplement techniques et pas très difficiles, mais un certain nombre de théorèmes sont de démonstration extrêmement délicate et inaccessible à notre niveau.

Il faut retenir que l'intégrale double est une technique d'intégration, et à ce titre, elle a à peu près les mêmes propriétés que les autres techniques d'intégration, donc par exemple que l'intégration des fonctions d'une variable.

Dans tous les énoncés qui suivent, les fonctions considérées sont toujours des fonctions de deux variables continues. D'autre part Δ est un domaine sur lequel on peut calculer une intégrale double.

Positivité

Proposition 5.2 (positivité)

Si f est une fonction telle que pour tout $(x, y) \in \Delta$ on a $f(x, y) \geq 0$,

$$\text{Alors on a } \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy \geq 0.$$

Remarquons que l'introduction de ce chapitre rend ce résultat complètement évident, puisque l'intégrale double ci-dessus peut lorsque f est positive être interprétée comme le volume d'une partie de l'espace, et qu'un volume est toujours positif.

Un corollaire évident de ce résultat est le suivant :

Corollaire 5.3 Si f et g sont deux fonctions telles que pour tout $(x, y) \in \Delta$ on a $f(x, y) \leq g(x, y)$,

$$\text{Alors on a } \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{\Delta} g(x, y) \, dx \, dy.$$

(Pour être honnête, il faut signaler que la démonstration du corollaire demande d'utiliser la linéarité du § suivant.)

Linéarité

Proposition 5.4 (linéarité)

Quelles que soient les fonctions f et g , et quelles que soient les constantes réelles λ, μ on a :

$$\iint_{\Delta} (\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)) \, dx \, dy = \lambda \iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy + \mu \iint_{\Delta} g(x, y) \, dx \, dy.$$

Domaines négligeables

Proposition 5.5 Si Δ est un domaine d'aire nulle¹, alors pour toute fonction f , on a

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

C'est ce résultat qui permettra d'affirmer que le fait que les inégalités soient larges ou strictes dans la définition du domaine Δ est sans importance. Grâce au résultat suivant, la différence entre l'intégrale double sur l'adhérence et sur l'intérieur (au sens topologique) d'un domaine régulier, dont la frontière est une courbe, c'est simplement l'intégrale double sur cette frontière qui est donc nulle.

Nous retiendrons que pour un domaine régulier, dont la frontière a une aire nulle, on a (avec les notations de la p. 23)

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\overline{\Delta}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\overset{\circ}{\Delta}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Additivité

Nous énonçons ici une propriété qui généralise la relation de Chasles pour les intégrales simples :

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx \text{ qu'on peut écrire, lorsque } a < b < c : \\ \int_{[a,c]} f(x) \, dx &= \int_{[a,b]} f(x) \, dx + \int_{[b,c]} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Proposition 5.6 (additivité)

Si $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ sont des domaines tels que $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, avec $\Delta_1 \cap \Delta_2$ d'aire nulle, alors

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\Delta_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

¹ Nous comprendrons cette notion d'aire nulle dans le sens le plus intuitif : un domaine formé d'un segment, d'une courbe, d'un point, ou d'une réunion d'un nombre fini de tels domaines est d'aire nulle

C'est cette propriété qui permet de définir l'intégrale double d'une fonction sur un domaine « biscornu », en plusieurs morceaux, ou à trous : on le découpe en morceaux simples, on applique la définition sur chaque morceau, et on additionne les résultats.

Changement de l'ordre des variables

Nous formalisons ici une idée très simple : dans l'introduction, nous avons découpé le volume en coupant en tranches perpendiculaires à l'axe des x . Nous aurions aussi bien pu découper en tranches en suivant une direction perpendiculaire à l'axe des y , et intuitivement le résultat ne devrait pas être différent. Il faut avoir conscience que la démonstration du théorème qui va suivre traduisant cette idée simple est en fait extrêmement difficile.

Théorème 5.7 (Fubini) *On suppose que le domaine Δ : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ u(x) \leq y \leq v(x) \end{cases}$ peut aussi être caractérisé par le système $\begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta \\ w_1(y) \leq x \leq w_2(y). \end{cases}$*

Alors on a

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{w_1(y)}^{w_2(y)} f(x, y) \, dx.$$

Nous allons appliquer ce résultat pour recalculer l'intégrale double vue juste après la définition p. 217 : $I = \iint_{\Delta} (1 + x - y) \, dx \, dy$.

Le domaine Δ pouvait être caractérisé par $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 \leq y \leq 0. \end{cases}$

En cherchant les bornes du domaine de variation des x , puis en cherchant, pour chaque x fixé comment varie y , ce domaine admet aussi une caractérisation dans laquelle l'ordre des variables est inverse.

Il est clair que y reste toujours entre -1 et 0 lorsque (x, y) est dans le domaine Δ (voir la figure p. 217). Ensuite, pour chaque y fixé (cela revient à se placer sur une droite horizontale), x varie entre deux valeurs opposées qui sont les abscisses des intersections de la parabole avec cette droite horizontale.

Puisque la parabole est caractérisée par $y = x^2 - 1 \iff x^2 = y + 1 \iff x = \pm\sqrt{y + 1}$, on peut affirmer que le domaine Δ est aussi caractérisé par

$$(x, y) \in \Delta \iff \begin{cases} -1 \leq y \leq 0 \\ \sqrt{y + 1} \leq x \leq \sqrt{y + 1}. \end{cases}$$

En appliquant le résultat, on obtient donc

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} (1+x-y) dx \\
 &= \int_{-1}^0 dy \left[x + \frac{x^2}{2} - yx \right]_{x=-\sqrt{y+1}}^{x=\sqrt{y+1}} \quad (\text{On intègre ici par rapport à } x) \\
 &= \int_{-1}^0 \left(2\sqrt{y+1} - 2y\sqrt{y+1} \right) dy = \int_{-1}^0 \left(4\sqrt{y+1} - 2(y+1)^{\frac{3}{2}} \right) dy \\
 &= \left[\frac{4(y+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2(y+1)^{5/2}}{5/2} \right]_{-1}^0 = \frac{8}{3} - \frac{4}{5} = \frac{28}{15}.
 \end{aligned}$$

On a bien trouvé le même résultat.

Variables séparables

La proposition qui va suivre est, elle, extrêmement simple à établir, et même si elle n'était pas énoncée, on la découvrirait rapidement lors de calculs pratiques. Elle concerne les cas fréquents, où d'une part le domaine est un rectangle (sous la forme $[a, b] \times [c, d]$), et d'autre part f peut se décomposer comme produit d'une fonction de x par une fonction de y (on a $f(x, y) = g(x) h(y)$).

Proposition 5.8 (variables séparables) Soit f est une fonction telle que pour tout (x, y) on a $f(x, y) = g(x) h(y)$. Soit $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ (Δ est un « rectangle »). Alors on peut « séparer les variables », et l'intégrale double sur Δ de f s'écrit comme le produit de deux intégrales simples :

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right].$$

Nous utiliserons souvent cette proposition dans les calculs d'intégrales doubles et on fera souvent des changements de variables pour se ramener à cette situation.

Calculs d'aire

Un résultat important et assez facile à comprendre est celui-ci qui permet d'utiliser les intégrales doubles pour calculer l'aire d'un domaine Δ .

Proposition 5.9 (aires) L'aire d'un domaine Δ régulier est donnée par la formule

$$\text{aire}(\Delta) = \iint_{\Delta} 1 dx dy = \iint_{\Delta} dx dy.$$

Une façon simple de comprendre cet énoncé est de considérer $dx dy$ comme l'aire d'un rectangle élémentaire, et la somme de l'aire de tous les rectangles élémentaires, pour (x, y) qui décrit Δ , donne logiquement l'aire totale de Δ et se calcule par double intégration.

Une autre interprétation consiste à reprendre ce qu'on a vu dans l'introduction avec cette fois la fonction f qui vaut constamment 1. La nappe représentative de f est alors le plan horizontal d'équation $z = 1$, et le volume V représentant l'intégrale double est le volume d'un cylindre de base Δ ; il est égal à l'aire de la base (qui est l'aire de Δ) multipliée par la hauteur qui vaut 1. On obtient donc bien

$$\mathcal{A}(\Delta) = V = \iint_{\Delta} 1 \, dx \, dy.$$

Il est intéressant et important de vérifier que pour une surface dont on sait déjà calculer l'aire grâce à une intégrale simple, le calcul de l'aire avec une intégrale double donne le même résultat.

Soit Δ la partie de plan limitée par la courbe $y = g(x)$ d'une fonction g continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$. On sait que l'aire de ce domaine Δ est donnée par l'intégrale de la fonction g entre a et b :

$$\text{aire}(\Delta) = \int_a^b g(x) \, dx.$$

Maintenant, on peut aussi dire que Δ est caractérisé par

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} 1 \, dx \, dy &= \int_a^b dx \int_0^{g(x)} 1 \, dy = \int_a^b [y]_{y=0}^{y=g(x)} \, dx \\ &= \int_a^b g(x) \, dx = \text{aire}(\Delta) \end{aligned}$$

On a bien retrouvé le même résultat avec les deux méthodes.

Nous disposons maintenant de 3 méthodes pour calculer les aires, avec la méthode des intégrales curvilignes (p. 190).

5.2.3 Changement de variables

Rappel pour intégrales simples

Vous avez certainement rencontré, dans un cours d'analyse élémentaire, la formule suivante de changement de variable dans une intégrale (simple)

$$(5.6) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt.$$

Les hypothèses pour pouvoir appliquer cette formule est que f soit régulière (continue), et que le changement de variable $\varphi : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & [a, b] = I \\ t & \longmapsto & \varphi(t) \end{array}$ soit de classe C^1 . L'intervalle J est l'intervalle d'extrémités α et β .

Pourquoi n'écrivit-on pas $J = [\alpha, \beta]$? Parce qu'on n'est pas sûr de l'ordre des bornes de cet intervalle. Nous supposons assez logiquement que $I = [a, b]$ est l'écriture correcte de l'intervalle sur lequel on calcule l'intégrale de f c'est-à-dire que $a < b$, mais on ne sait rien de la variation de φ .

En fait, si φ est croissante, ce qui correspond à $\varphi'(t) \geq 0$ pour tous les t , on est sûr que $\alpha < \beta$, et l'écriture de la formule est satisfaisante.

Mais si φ est décroissante (avec $\varphi'(t) \leq 0$ pour tout t), alors on a $\alpha > \beta$ et il serait plus satisfaisant d'intervertir les bornes dans la dernière intégrale de la formule (5.6)

Et si φ n'est ni croissante, ni décroissante? (c'est-à-dire si $\varphi'(t)$ ne garde pas un signe constant). Ce cas n'est pas très intéressant, car dans ce cas φ n'est plus bijective : ce n'est plus un bon changement de variable, et nous éliminons donc logiquement cette possibilité.

En procédant comme ce qu'on avait fait lors des explications précédant la proposition sur l'additivité (proposition 5.6 p. 219), on va introduire l'intégrale (simple) d'une fonction sur un intervalle : on pose, si $I = [a, b]$,

$$\int_I f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Voyons ce que devient la formule de changement de variable (5.6) en utilisant ce formalisme selon la variation de φ .

Tout d'abord, si φ est croissante, aucun problème, on écrira tout simplement

$$\int_I f(x) dx = \int_{\varphi(J)} f(x) dx = \int_J (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$$

Maintenant, si φ est décroissante, on écrira donc

$$\begin{aligned} \int_I f(x) dx &= \int_{\varphi(J)} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt \\ &= \int_J (f \circ \varphi)(t) (-\varphi'(t)) dt && \text{ici } J = [\beta, \alpha] \\ &= \int_J (f \circ \varphi)(t) |\varphi'(t)| dt && \text{car } \varphi'(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Mais dans le premier cas, on aurait pu aussi introduire des valeurs absolues autour de $\varphi'(t)$, car on avait $\varphi'(t) \geq 0$ donc $\varphi'(t) = |\varphi'(t)|$.

Dans les deux cas on obtient donc

$$(5.7) \quad \int_I f(x) dx = \int_{\varphi(J)} f(x) dx = \int_J (f \circ \varphi)(t) |\varphi'(t)| dt.$$

C'est cette formule (5.7) qui se généralise bien aux intégrales doubles (ou triples).

Le théorème de changement de variable dans les intégrales doubles

Théorème 5.10 (Changement de variables)

Soit f une fonction continue des deux variables (x, y) , définie sur un domaine Δ . On suppose qu'il existe un changement de variable bijectif, de classe C^1 $\varphi : (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ entre un domaine \mathcal{D} et Δ . (on a donc $\varphi(\mathcal{D}) = \Delta$).

Alors on a la formule de changement de variable pour les intégrales doubles

(5.8)

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} f \circ \varphi(u, v) |\det J(\varphi)_{(u,v)}| du dv.$$

Sans prétendre faire une démonstration, nous donnerons une illustration formelle de cette propriété. Notons tout d'abord l'analogie avec la formule pour les intégrales simples, le Jacobien de φ jouant ici le même rôle que la valeur absolue de $\varphi'(t)$ pour les intégrales simples.

Rappelons tout d'abord la façon dont on raisonne le plus souvent pour faire un changement de variable dans une intégrale simple $\int f(x) dx$:

on écrit qu'on pose $x = \varphi(t)$, donc $dx = \varphi'(t) dt$ et en faisant attention aux bornes on obtient l'intégrale cherchée $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

Nous allons faire un raisonnement du même type, mais pour cela nous allons commencer par une convention : nous écrirons

$$dx dy = \|dx \wedge dy\|.$$

Vous pouvez vous contenter d'admettre cette notation formellement, sans vous poser de question. Cependant si vous tenez à savoir de quoi il s'agit, sachez que le symbole \wedge est ici *a priori* ce qu'on appelle un produit extérieur de deux formes différentielles dont le résultat est une 2-forme différentielle. Bien sûr, je pense que ça ne vous renseigne toujours pas beaucoup. Alors pour continuer à essayer d'illustrer, reprenons l'interprétation « élément de surface » de $dx dy$; si on considère que dx et dy sont de petits vecteurs construits à partir du point (x, y) , on sait (si on a un peu de culture mathématique) que la norme (euclidienne) du vecteur $dx \wedge dy$ obtenu comme produit vectoriel de ces deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Ce parallélogramme est ici le rectangle élément de surface élémentaire.

Ce qui est important, c'est d'admettre les propriétés d'antisymétrie et de bilinéarité de ce symbole \wedge , que ce soit comme produit extérieur ou comme produit vectoriel : on a toujours $a \wedge b = -b \wedge a$ et $a \wedge a = 0$, ainsi que $(a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c$ et $\lambda(a \wedge b) = (\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b)$ (en d'autres termes, \wedge est un produit).

Avec cette interprétation, sachant que $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ pour $(x, y) = \varphi(u, v)$, nous avons

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} dx dy &= \|dx \wedge dy\| = \left\| \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du \wedge dv - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} du \wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} dv \wedge du - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} dv \wedge du \right\|; \end{aligned}$$

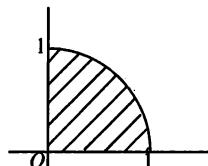
On vient d'utiliser alors la bilinéarité de \wedge ; on utilise maintenant son antisymétrie :

$$dx dy = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| \|du \wedge dv\| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv = |\det J(\varphi)| du dv.$$

Bien sûr, ceci n'a absolument rien démontré rigoureusement, mais peut-être comprenez-vous un peu plus d'où sort ce Jacobien...

Exemple classique du passage en polaires

On veut calculer l'intégrale double $I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto 1+x-y$ sur le domaine Δ représenté sur la figure ci-contre : C'est le premier quart du disque limité par le cercle trigonométrique.



Il n'est pas très difficile d'écrire un système caractérisant Δ pour pouvoir appliquer la définition de l'intégrale double, mais les calculs qui en résultent sont franchement compliqués. Aussi utilisera-t-on ensuite le passage en polaires qui simplifie beaucoup les calculs.

Premier calcul (directement)

Δ est caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ (en effet, la courbe qui limite supérieurement Δ est le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1 \iff y = \pm\sqrt{1-x^2}$).

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1+x-y) dy = \int_0^1 \left[y + xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2} - \frac{1-x^2}{2} \right) dx. \end{aligned}$$

La complication de ces calculs d'intégrale ne nous déçoit pas !

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{-3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \quad (\text{en effet cette intégrale représente l'aire de } \Delta). \end{aligned}$$

Deuxième calcul (passage en polaires).

Le domaine Δ (ou plutôt $\Delta \setminus \{(0,0)\}$) est l'image par l'application :

$$\psi : (r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ de l'ensemble } \mathcal{D} \text{ des } (r, \theta) \text{ tels que } \begin{cases} 0 < r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et ψ est bijective entre ces deux domaines.

Le jacobien de ψ est $r > 0$. On peut donc sans problème appliquer la formule (5.8).

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} (1+x-y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} (1+r \cos \theta - r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \iint_{\mathcal{D}} r dr d\theta + \iint_{\mathcal{D}} r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr d\theta. \end{aligned}$$

Remarquons que ces deux intégrales sont à variables séparables, \mathcal{D} étant un rectangle², donc en appliquant la proposition 5.8 (p. 221), on obtient facilement

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^1 r dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right) + \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \left[\sin \theta + \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} (1 + 0 - 0 - 1) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

² En fait, ici \mathcal{D} n'est pas comme d'habitude un domaine fermé puisqu'une des inégalités qui le caractérisent est stricte. ça n'a aucune importance, comme nous l'avons signalé au début, et le fait que les inégalités soient strictes ou larges ne change jamais rien à la valeur des intégrales multiples que l'on calcule.

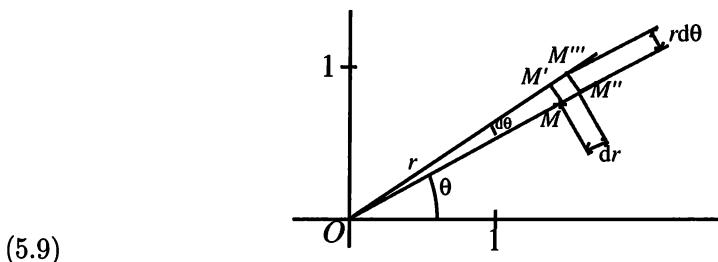
Le calcul a été bien plus simple en utilisant cette formule de changement de variables. Il est important de savoir utiliser cette technique chaque fois que l'on sent que ça peut simplifier les calculs. Comment peut-on prévoir que les calculs seront plus simples ? C'est la forme du domaine qui donne en général l'indice : lorsque Δ est facile à caractériser en utilisant les coordonnées polaires, il sera probablement intéressant de faire ce changement de variables.

Calculs d'aire en polaires

Lorsqu'un domaine peut facilement être caractérisé à l'aide des coordonnées polaires (comme dans l'exemple précédent, $\Delta = \psi(\mathcal{D})$), pour calculer son aire, il est possible de procéder au changement de variable passage en polaires. On obtient

$$\text{aire}(\Delta) = \iint_{\Delta} 1 \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} r \, dr \, d\theta.$$

Il est intéressant de comprendre que $r \, dr \, d\theta$ est en fait un élément de surface au sens suivant. Soit $M = (x, y) = \psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ un point intérieur à Δ (ce qui suppose que (r, θ) est intérieur au domaine \mathcal{D}). Si on augmente très légèrement les deux coordonnées polaires de ce point, respectivement de dr et de $d\theta$, alors la partie du plan décrite par cette augmentation (pour être précis, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées polaires sont comprises entre r et $r + dr$ d'une part et entre θ et $\theta + d\theta$ d'autre part) est l'intersection d'une couronne et d'un secteur angulaire.



Supposons dr et $d\theta$ très petits, nous assimilerons cet élément de surface à un rectangle $MM''M'''M'$ dont les côtés ont respectivement comme longueur $MM' = dr$ et $MM'' = r \, d\theta$ comme vous le montrera un raisonnement de géométrie élémentaire. Il est donc logique qu'à l'élément de surface $dx \, dy$ en coordonnées rectangulaires corresponde l'élément de surface $r \, dr \, d\theta$ en coordonnées polaires.

5.2.4 Le théorème de Green-Riemann

Ce théorème très important permet de lier les intégrales doubles et les intégrales curvilignes. C'est la version plane d'un théorème plus général valable dans un espace de dimension quelconque, la formule de Green, qui généralise le calcul

d'une intégrale simple à l'aide d'une primitive, et affirme que l'intégrale d'une fonction sur un domaine est égale à l'intégrale d'une primitive de cette fonction sur la frontière de ce domaine. évidemment, tout le problème est de donner un sens à cette notion de primitive et à celles d'intégrales sur le domaine et sur la frontière. En dimension 2, l'intégrale sur le domaine, c'est l'intégrale double, et l'intégrale sur le bord, c'est l'intégrale curviligne.

Théorème 5.11 (Green-Riemann)

Soit Δ un domaine régulier dont la frontière, décrite dans le sens trigonométrique est un arc fermé simple γ .

Alors, pour toute forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ de classe C^1 , on a

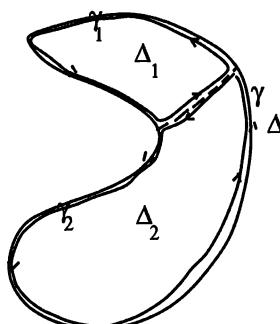
$$\int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

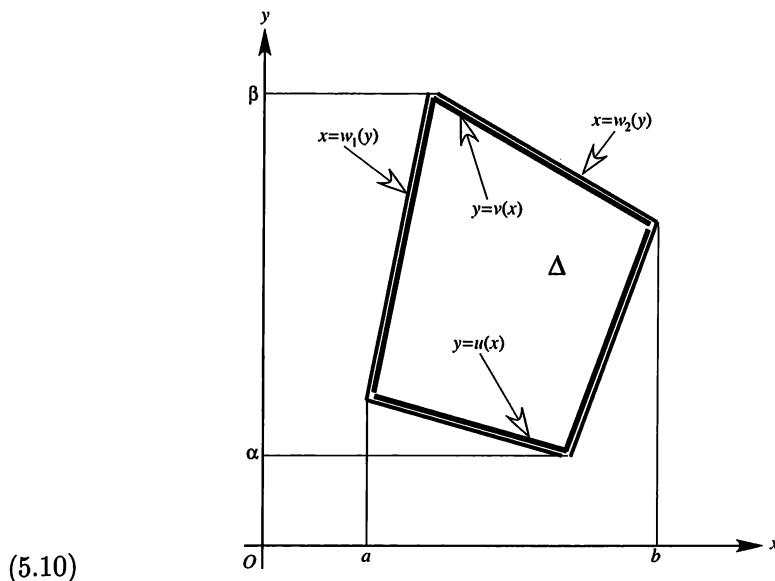
Remarquons tout d'abord que ce théorème permet de faire la liaison entre nos deux énoncés permettant de calculer l'aire d'un domaine plan : la proposition 5.9 (p. 221) et le théorème 4.36 (p. 190). En effet, Il suffit de trouver une forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ telle que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ pour faire ce lien. Cette équation aux dérivées partielles admet beaucoup de solutions, mais il est clair que les trois formes différentielles $\omega_1 = x \, dy$, $\omega_2 = -y \, dx$ et $\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2}(x \, dy - y \, dx)$ en sont des solutions.

Preuve Nous ne ferons une démonstration que dans un cas bien particulier : lorsque Δ est suffisamment régulier pour pouvoir être caractérisé à la fois en privilégiant x et en privilégiant y : on suppose qu'on a

$$(x, y) \in \Delta \iff \begin{cases} a \leq x \leq b \\ u(x) \leq y \leq v(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta \\ w_1(y) \leq x \leq w_2(y) \end{cases}$$

Dans un cas plus général, il suffit de découper le domaine Δ en morceaux ayant cette propriété et d'appliquer l'additivité pour l'intégrale double (proposition 5.6 p. 219) ; pour les intégrales curvilignes, il faut se rendre compte que les trajets rajoutés sur les contours par ce découpage sont parcourus une fois dans chaque sens, ce qui fait qu'ils ne comptent pas en vertu de la proposition 4.29 (p. 182).





On cherche donc à comparer l'intégrale double

$$I = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = I_1 - I_2$$

et l'intégrale curviligne

$$J = \int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} P dx + \int_{\gamma} Q dy = J_1 + J_2.$$

On a coupé en deux ces deux intégrales par linéarité.

En utilisant le théorème de Fubini (5.7 p. 220), on obtient pour I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{w_1(y)}^{w_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[Q(x, y) \right]_{x=w_1(y)}^{x=w_2(y)} dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (Q(w_2(y), y) - Q(w_1(y), y)) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(w_2(t), t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} Q(w_1(t), t) dt. \end{aligned}$$

C'est bien sûr à J_2 que ce résultat ressemble. Calculons cette intégrale curviligne. Pour cela, on va paramétriser γ en le coupant en deux grâce aux fonctions w_1 et w_2 . Le support de γ est la réunion des deux courbes $x = w_1(y)$ et $x = w_2(y)$; pour y

décrivant $[\alpha, \beta]$, la courbe de w_2 est décrite dans le même sens que γ , alors que celle de w_1 est décrite dans le mauvais sens. En écrivant $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, on prendra γ_2 paramétré par $\begin{cases} x = w_2(t) \\ y = t \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$, alors que γ_1 est l'arc inverse de l'arc $\widehat{\gamma}_1$ qui est lui paramétré par $\begin{cases} x = w_1(t) \\ y = t \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$.

On a donc dans les deux cas $dy = dt$ et

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\gamma} Q \, dy = \int_{\gamma_1} Q \, dy + \int_{\gamma_2} Q \, dy = - \int_{\widehat{\gamma}_1} Q(x, y) \, dy + \int_{\gamma_2} Q(x, y) \, dy \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} Q(w_1(t), t) \, dt + \int_{\alpha}^{\beta} Q(w_2(t), t) \, dt = I_1 \end{aligned}$$

La même démarche permet sans difficulté de montrer que $J_1 = -I_2$, ce qui permet d'achever la démonstration. \square

5.3 Intégrales triples

5.3.1 Présentation

Cette notion sera traitée à l'imitation de ce qu'on a fait pour les intégrales doubles, et le lecteur est invité à deviner comment on pourrait traiter des intégrales multiples d'ordre supérieur.

Évidemment, pour cette notion, on se place dans \mathbb{R}^3 et les fonctions considérées sont des fonctions des trois variables (x, y, z) .

Définition 5.12 Si Δ est un domaine de l'espace à trois dimensions caractérisé par

$$(x, y, z) \in \Delta \iff \begin{cases} a \leq x \leq b \\ (y, z) \in \Delta_x, \end{cases}$$

(Δ_x est la trace (ou la coupe) du domaine Δ dans le plan des points d'abscisse x) alors pour toute fonction f continue sur Δ , l'intégrale triple de f sur Δ est le nombre réel

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b \left(\iint_{\Delta_x} f(x, y, z) \, dy \, dz \right) \, dx \\ &= \int_a^b dx \iint_{\Delta_x} f(x, y, z) \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Dans cette définition l'intégrale double utilisée peut se calculer en privilégiant y ou en privilégiant z . D'une façon générale, on peut, pourvu que la forme du domaine s'y prête, commencer par n'importe quelle variable, et on a le théorème suivant.

Théorème 5.13 (Fubini pour les intégrales triples)

Dans un calcul d'intégrale triple, on peut changer l'ordre des variables.

Par exemple, si Δ est aussi caractérisé par $\begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta \\ (x, z) \in \widehat{\Delta}_y \end{cases}$ ($\widehat{\Delta}_y$ étant la trace (ou la coupe) du domaine Δ dans le plan des points d'ordonnée y), alors on a

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} dy \iint_{\widehat{\Delta}_y} f(x, y, z) dx dz.$$

De même, si Δ peut être caractérisé par $\begin{cases} (x, y) \in \mathcal{D} \\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), \end{cases}$ alors on a

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} dx dy \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

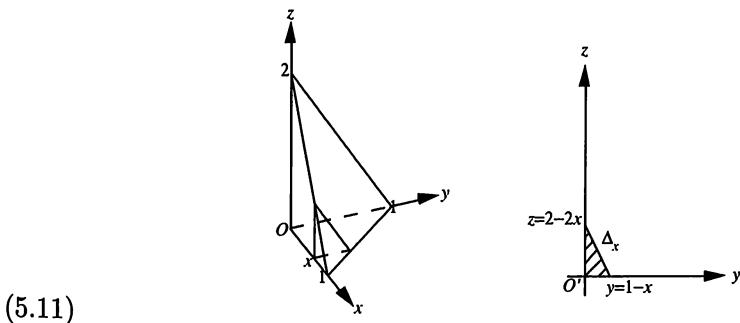
Si on peut caractériser Δ par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ v_1(x) \leq y \leq v_2(x) \\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y), \end{cases}$ alors on a

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{v_1(x)}^{v_2(x)} dy \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Il y a bien sûr beaucoup d'autres énoncés analogues.

Un exemple de calcul

On demande de calculer $I = \iiint_{\Delta} xyz dx dy dz$ pour Δ qui est le tétraèdre dont les sommets sont $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 2)$.



Ici aussi, tout le problème consiste à caractériser correctement le domaine Δ . Pour chaque x fixé (entre 0 et 1), le plan des points d'abscisse x coupe le domaine Δ selon un triangle, et un calcul élémentaire montre que y peut varier entre 0 et $1 - x$, et pour chaque y entre ces valeurs, z peut varier entre 0 et $2 - 2x - 2y$. (Il peut être

utile de déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x + 2y + z = 2$) On peut donc affirmer que le domaine Δ est caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 2 - 2x - 2y \end{cases}$ et par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\Delta} xyz \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-2x-2y} xyz \, dz \\
 &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2-2x-2y} = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} 2y(1-x-y)^2 \, dy \\
 &= \int_0^1 2x \, dx \left(\left[\frac{y(1-x-y)^3}{-3} \right]_{y=0}^{y=1-x} - \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^3}{-3} \, dy \right) \quad (\text{l'intégration par parties simplifie beaucoup les calculs}) \\
 &= \int_0^1 \frac{2x}{3} \left[\frac{(1-x-y)^4}{-4} \right]_{y=0}^{y=1-x} \, dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{6} \, dx \\
 &= \left[\frac{x(1-x)^5}{30} \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{(1-x)^5}{30} \, dx = \left[\frac{(1-x)^6}{-180} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{180}.
 \end{aligned}$$

5.3.2 Propriétés des intégrales triples

Le principe est que toutes les propriétés des intégrales doubles s'étendent aux intégrales triples. Il y a bien sûr quelques précisions à apporter dans certains cas. Les propriétés de positivité et de linéarité (5.2 à 5.4) s'étendent sans aucun changement.

Pour la propriété 5.5 concernant les domaines négligeables, il faut remplacer la notion d'aire nulle par la notion de volume nul : par exemple, l'intégrale triple d'une fonction sur une surface (sans épaisseur) est nulle.

La propriété 5.6 d'additivité s'étend sans changement.

On a déjà vu la version « intégrales triples » du théorème 5.7 de Fubini.

La proposition 5.8 concernant les variables séparables s'étend, mais elle existe en plusieurs versions :

- D'abord on peut tout séparer (en un produit de trois intégrales simples) lorsque la fonction f peut s'écrire $f(x, y, z) = g(x) h(y) i(z)$ et quand le domaine est un pavé $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [\alpha, \beta]$: on a alors

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right) \left(\int_{\alpha}^{\beta} i(z) \, dz \right).$$

- Ensuite, on peut séparer en deux morceaux, en un produit d'une intégrale simple par une intégrale double lorsque f est le produit d'une fonction d'une

des variables par une fonction des deux autres et que Δ est un cylindre (au sens mathématique). Par exemple, si on a $f(x, y, z) = g(x, y) h(z)$ et $\Delta = \mathcal{D} \times [c, d]$, \mathcal{D} étant un domaine de \mathbb{R}^2 que décrivent les variables (x, y) , alors on a

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \left(\iint_{\mathcal{D}} g(x, y) dx dy \right) \left(\int_c^d h(z) dz \right).$$

Les calculs d'aires avec les intégrales doubles (proposition 5.9) se transforment en calculs de volumes avec les intégrales triples : le volume de Δ vaut $\iiint_{\Delta} 1 dx dy dz$.

Le théorème de changement de variable s'étend pratiquement sans changement aux intégrales triples, même s'il est ici beaucoup plus délicat d'essayer d'expliquer l'intervention du Jacobien (écrire $dx dy dz = \|dx \wedge dy \wedge dz\|$ est plus difficile à interpréter). Nous allons simplement montrer deux exemples de calculs qui se simplifient beaucoup si on utilise les changements de variables classiques du passage en coordonnées cylindriques ou en coordonnées sphériques.

Exemple 1 : Calculer $I = \iiint_{\Delta} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ pour Δ caractérisé par

$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$. (Δ est le domaine compris entre les sphères centrées à l'origine de rayons respectifs 1 et 2).

Essayer d'appliquer la définition ou la propriété de Fubini pour les intégrales triples relèverait de la mission impossible : il faudrait déjà couper Δ en plusieurs morceaux, et ça resterait très difficile. Il y a d'ailleurs peu de chances pour que les calculs d'intégrales simples auxquels on se ramènerait soient faciles.

En revanche, le passage en coordonnées sphériques est très simple à effectuer.

On commence par retirer quelques morceaux négligeables de Δ pour que l'application ϕ réalise bien une bijection entre un domaine \mathcal{D} et Δ' qui est égal à Δ à quelques détails de volume nul près. Il suffit de retirer à Δ les points de l'axe Oz . Il est alors clair que $\Delta' = \phi(\mathcal{D})$ avec \mathcal{D} ensemble des (ρ, θ, φ) tels que

$$\begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

On a déjà vu que le fait qu'il y ait quelques inégalités strictes dans la caractérisation de \mathcal{D} n'a absolument aucune importance : on fera les calculs comme si les inégalités étaient larges.

On a ici $\mathcal{D} = [1, 2] \times]0, \pi[\times [0, 2\pi[$ et on fera tous les calculs comme si on avait $\overline{\mathcal{D}} = [1, 2] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Le Jacobien de ϕ est comme on l'a vu égal à $\rho^2 \sin \theta$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Delta} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_{\phi(\mathcal{D})} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{\rho} |\rho^2 \sin \theta| d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{\mathcal{D}} \rho \sin \theta d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_1^2 \rho d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \quad (\text{variables séparables}) \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = 6\pi. \end{aligned}$$

Exemple 2 : Calculer $J = \iiint_{\Delta} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ lorsque Δ est le domaine caractérisé par $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq z \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$ (Δ est un paraboloïde de révolution, une espèce de bol engendré par la révolution autour de l'axe des z d'un morceau de la parabole $z = y^2$ pour $0 \leq y \leq 1$).

On caractérise Δ en coordonnées cylindriques par $\Delta = \psi(\mathcal{D})$ avec $\mathcal{D} : \begin{cases} 0 < r \leq \sqrt{z} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$

(encore une fois, inutile de s'inquiéter pour des points oubliés ou comptés deux fois : dans les calculs d'intégration, les domaines négligeables sont faits pour être négligés).

Appliquant la formule de changement de variable, puisque le jacobien de ψ est ici $J(\psi) = r$, on obtient

$$J = \iiint_{\mathcal{D}} (r^2 + z^2) r dr d\theta dz = \left(\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{z}} (r^3 + rz^2) dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)$$

On remarque que la variable θ est séparable des autres, on a donc :

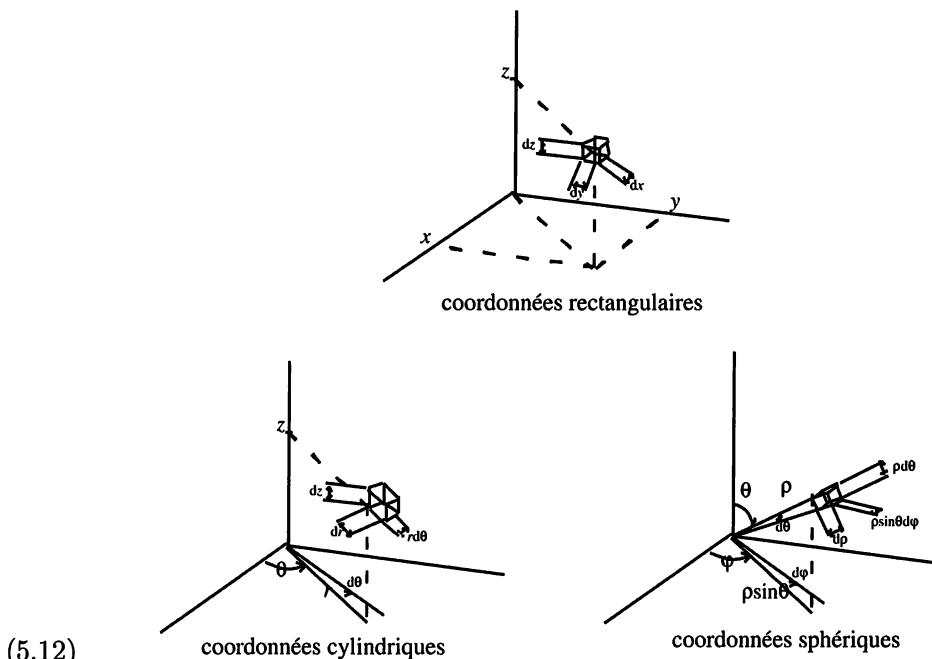
$$\begin{aligned} J &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 z^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{2} \right) dz = 2\pi \left[\frac{z^3}{12} + \frac{z^4}{8} \right]_0^1 = \frac{2\pi(2+3)}{24} = \frac{5\pi}{12}. \end{aligned}$$

Remarque : Comme pour les coordonnées polaires dans le plan, il est intéressant d'interpréter géométriquement l'élément de volume lors de l'utilisation des coordonnées sphériques et cylindriques. Rappelons tout d'abord que l'élément de volume, en coordonnées rectangulaires est $dx dy dz$. De plus, si Δ est caractérisé

par le domaine \mathcal{D}_1 en coordonnées cylindriques ($\Delta = \psi(\mathcal{D}_1)$) et par le domaine \mathcal{D}_2 en coordonnées sphériques ($\Delta = \phi(\mathcal{D}_2)$), on peut écrire

$$\text{volume}(\Delta) = \iiint_{\Delta} dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}_1} r dr d\theta dz = \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi.$$

Un élément de volume doit se comprendre comme étant le volume obtenu en partant d'un point et en augmentant chacune des coordonnées d'une toute petite quantité destinée à tendre vers 0 (voir p. 227).



En coordonnées rectangulaires, il est clair que l'élément de volume est un pavé droit (parallélépipède rectangle) de côtés dx , dy et dz : il n'y a pas de problème.

En coordonnées cylindriques, à partir d'un point $M = (x, y, z) = \psi(r, \theta, z)$, si on augmente très légèrement les trois coordonnées cylindriques de ce point, respectivement de dr , de $d\theta$ et de dz , la partie de l'espace décrite par cette augmentation est représentée sur la figure ; on peut pour de très petites augmentations, l'assimiler à un pavé droit pour calculer son volume et on s'aperçoit facilement que ce volume vaut $dr (r d\theta) dz$. L'élément de volume en coordonnées cylindriques est donc $r dr d\theta dz$.

En coordonnées sphériques, de la même façon, à partir d'un point $M = (x, y, z) = \phi(\rho, \theta, \varphi)$, on augmente très légèrement les trois coordonnées sphériques de ce point, respectivement de $d\rho$, de $d\theta$ et de $d\varphi$, et cette augmentation décrit

dans l'espace un volume assimilable à un pavé droit, dont les trois dimensions sont (voir figure) $d\rho$, $\rho d\theta$ et $\rho \sin \theta d\varphi$. L'élément de volume en coordonnées sphériques est donc $\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$.

5.4 Intégrales de surface

5.4.1 Introduction

Cette notion est à rapprocher, bien évidemment, de la notion d'intégrale curviligne. De même qu'une intégrale curviligne se calculait sur un arc paramétré, ce qui nous a obligé à préciser cette notion, de même une intégrale de surface se calcule sur une nappe paramétrée, (ou surface paramétrée), et nous commencerons par définir (sommairement) cette notion.

Les intégrales de surface sont des intégrales doubles dans l'espace, comme les intégrales curvilignes sont des intégrales simples dans le plan (ou dans l'espace). Elles sont de trois natures : les calculs d'aire (correspondant aux calculs de longueur d'une courbe), les intégrales de fonctions scalaires sur une surface (correspondant aux intégrales curvilignes d'une fonction scalaire) et la notion de flux d'un champ vectoriel à travers une surface (correspondant à la circulation d'un champ de vecteurs sur un arc).

Nous terminerons par les deux théorèmes faisant le lien entre ces intégrales de surface (ou plutôt le flux) et d'une part les intégrales curvilignes (Formule de Stokes-Ampère) et d'autre part les intégrales triples (Formule d'Ostrogradski). Ce sont les deux versions tridimensionnelles du théorème de Green-Riemann ; il existe une généralisation de ces théorèmes en dimension quelconque appelée formule de Green.

5.4.2 Nappes paramétrées

Définition 5.14 Soient x, y, z trois fonctions des *deux* variables (u, v) , définies et au moins de classe C^1 sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 (supposé régulier). Alors la donnée du domaine \mathcal{D} et de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{g} : (u, v) &\longmapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = M(u, v) = \vec{g}(u, v) \end{aligned}$$

est une paramétrisation d'une nappe paramétrée (ou surface paramétrée) Σ ; le support de Σ est l'ensemble des points $M(u, v)$ lorsque (u, v) décrit \mathcal{D} .

Remarque : Pour être précis, une nappe paramétrée est en fait une classe d'équivalence de paramétrisations de nappes équivalentes en un certains sens : une paramétrisation de nappe étant un couple formé d'un domaine \mathcal{D} et d'une application \vec{g} de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^3 , l'équivalence de deux paramétrisations de nappes $(\mathcal{D}_1, \vec{g}_1)$ et $(\mathcal{D}_2, \vec{g}_2)$ est définie un peu comme l'équivalence des paramétrisations d'arcs, à l'aide d'une bijection φ entre le domaine \mathcal{D}_1 et le domaine \mathcal{D}_2 telle que $\vec{g}_1 = \vec{g}_2 \circ \varphi$; φ doit être dérivable ainsi que φ^{-1} .

D'autre part, en pratique, on confond (abusivement) une nappe paramétrée Σ et son support. C'est abusif, mais c'est bien utile pour se la représenter, et c'est indispensable pour alléger les notations : cela permet de parler du point $M_0 = M(u, v)$ de la nappe Σ comme appartenant à Σ , et c'est bien pratique.

Enfin, on admettra que les changements de paramétrisations ne changent rien aux notions que l'on va définir, et on acceptera toujours de privilégier une des paramétrisations.

Remarque : Nous supposerons que toutes les applications rencontrées sont régulières, aussi souvent continûment dérivables que nécessaire (même si c'est éventuellement par morceaux : nous n'entrerons pas dans ces détails). De même, le domaine \mathcal{D} de toute paramétrisation est supposé régulier, au sens que sa frontière doit toujours pouvoir être considérée comme le support d'un arc paramétré γ de classe \mathcal{C}^1 (éventuellement par morceaux).

Exemple de la sphère : La sphère unité (de centre $O = (0, 0, 0)$, de rayon 1) peut être considérée comme une nappe paramétrée, en utilisant les coordonnées sphériques, ainsi :

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

Avec cette paramétrisation, certains points de la sphère apparaissent plusieurs fois ; cela peut poser des problèmes, mais pas pour des calculs d'intégrales de surface : en effet, l'ensemble des points « litigieux » est toujours négligeable, (c'est-à-dire d'aire nulle).

En diminuant le domaine dans lequel (θ, φ) varie, on peut paramétriser de plus petites zones de la sphère : par exemple, si on restreint $\theta \in [\alpha, \beta]$, en laissant φ faire un tour complet (varier entre 0 et 2π), les mêmes formules servent à paramétriser une couronne sphérique, ou une calotte sphérique si α vaut 0.

En revanche, si θ varie de 0 à π , mais que φ reste entre deux valeurs γ et δ , on décrira ainsi un « fuseau » de la sphère.

Un cas particulier important : les nappes de fonctions

Soit f une fonction continue de deux variables (x, y) et \mathcal{D} un domaine inclus dans $\mathcal{D}(f)$. On sait que l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = f(x, y)$ est la nappe représentative de f . Elle peut être considérée comme nappe paramétrée en considérant la paramétrisation

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \mathcal{D}.$$

En fait, en pratique, on ne prend pas la peine de changer le nom des variables, et on utilise simplement x et y comme paramètres, avec $(x, y) \in \mathcal{D}$.

Bord d'une nappe

Définition 5.15 Soit Σ une nappe paramétrée par (\mathcal{D}, \vec{g}) . On suppose que cette paramétrisation réalise une bijection entre \mathcal{D} et (le support de) Σ .

On suppose que le bord (la frontière) de \mathcal{D} est $\partial\mathcal{D}$.

Alors le bord (ou la frontière) de Σ est l'ensemble $\partial\Sigma$ des points de Σ dont l'antécédent est dans $\partial\mathcal{D}$.

La frontière $\partial\Sigma$ de Σ peut être considérée comme un arc paramétré fermé, puisque c'est le cas pour $\partial\mathcal{D}$: si $([a, b], \varphi)$ est une paramétrisation de l'arc fermé dont le support est $\partial\mathcal{D}$, alors $([a, b], \vec{g} \circ \varphi)$ est une paramétrisation de l'arc fermé (de \mathbb{R}^3) dont le support est le bord $\partial\Sigma$ de Σ .

Lignes de coordonnées sur une nappe paramétrée

Définition 5.16 Soit $M_0 = M(u_0, v_0) = \vec{g}(u_0, v_0)$ un point d'une nappe paramétrée Σ paramétrée par (\mathcal{D}, \vec{g}) . Alors les deux fonctions partielles de la fonction \vec{g} :

$$\vec{g}_1 : u \mapsto \vec{g}(u, v_0) \quad ; \quad \vec{g}_2 : v \mapsto \vec{g}(u_0, v)$$

sont des fonctions vectorielles d'une variable (elles vont de \mathbb{R} vers \mathbb{R}^3). à ce titre, elles définissent des courbes paramétrées, qui passent par M_0 , et qui sont incluses dans Σ : ce sont les lignes de coordonnées de la nappe Σ qui passent par M_0 pour la paramétrisation (\mathcal{D}, \vec{g}) .

Remarquons que cette notion de lignes de coordonnées est étroitement liée au choix de la paramétrisation ; c'est un handicap certain, et c'est la raison pour laquelle on n'utilise pas beaucoup cette notion. En revanche, les notions qu'on va maintenant introduire sont indépendantes de la paramétrisation, et sont attachées à la nappe.

Plan tangent à une nappe

Soit $M = \vec{g}(u, v) = M(u, v)$ un point d'une nappe paramétrée Σ paramétrée par (\mathcal{D}, \vec{g}) . On suppose que M est un point ordinaire pour les deux lignes de coordonnées qui passent par M (c'est-à-dire un point qui n'est pas un point stationnaire pour ces deux courbes paramétrées). Ces lignes de coordonnées admettent donc des tangentes qui sont dirigées respectivement par $\vec{g}'_1(u)$ et $\vec{g}'_2(v)$. En se rappelant que les dérivées des fonctions partielles sont des dérivées partielles (même si nous n'avons utilisé ce vocabulaire, jusqu'à présent que pour des fonctions scalaires, il n'est pas difficile de comprendre que ça s'étend sans problème pour les fonctions vectorielles en utilisant les fonctions composantes), on notera $\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}(u, v)$ ces vecteurs directeurs. En fait on utilise plutôt la notation $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$. Il faut bien comprendre qu'on a

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ ne sont pas colinéaires, ils déterminent un plan passant par M , qui est par définition le *plan tangent* à la nappe Σ en son point M . Nous admettrons le résultat fondamental suivant :

Proposition 5.17 La notion de plan tangent à une nappe ne dépend pas du choix de la paramétrisation qu'on a choisie.

Régularité d'un point d'une nappe

Un point M d'une nappe paramétrée Σ est régulier lorsque la définition précédente du plan tangent a un sens (d'après la proposition précédente, il suffit que ça marche pour une paramétrisation, et ça marchera pour toutes les autres).

Cette régularité signifie donc que $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ sont tous deux non nuls et qu'en plus ils sont non colinéaires.

Une façon simple de vérifier d'un seul coup ces trois conditions est de calculer le produit vectoriel de ces deux vecteurs et de vérifier que ce produit est non nul. On introduit les notations suivantes :

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$A = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}; \quad B = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}; \quad C = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

On pose $H^2 = A^2 + B^2 + C^2$ et donc $H = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \|\vec{N}\|$.

On a donc le résultat suivant : M est un point régulier de la nappe Σ si et seulement si $H \neq 0$.

Normale à la nappe

Si M est un point régulier de la nappe Σ (on garde toutes les notations introduites

aux paragraphes précédents), le vecteur $\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ est (c'est un résultat classique sur les produits vectoriels) orthogonal à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$ et à $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$, donc c'est un vecteur orthogonal au plan tangent à la nappe en M . Il est pratique de normer ce vecteur \vec{N} , c'est-à-dire de le diviser par sa norme : on pose

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\vec{N}}{H}.$$

$\vec{\nu}$ (« nu ») est le vecteur normal réduit à la nappe Σ .

Il est important de se rendre compte que $\vec{\nu}$ est en fait fonction de (u, v) ; même si depuis un certain temps nous n'écrivons plus ces variables, elles sont toujours sous-jacentes. $\vec{\nu}$ est même une fonction continue de (u, v) , car les différentes étapes de la fabrication de ce vecteur n'utilisent que des fonctions continues et des opérations usuelles (les fonctions x, y, z composantes de \vec{g} sont supposées de classe C^1). On comprend donc que ce vecteur $\vec{\nu}$ qui est toujours de norme 1, est toujours du même côté de Σ , lorsque (u, v) décrit \mathcal{D} . Nous allons en tirer une conséquence importante.

Orientation d'une nappe

Il est logique, à ce stade de se poser à nouveau une question : cette notion de vecteur normal à la nappe est-elle toujours indépendante de la paramétrisation, ou dépend-elle de cette paramétrisation ?

La réponse est dans l'énoncé suivant :

Proposition 5.18

La direction du vecteur $\vec{\nu}$ est indépendante de la paramétrisation utilisée pour caractériser Σ .

Preuve Ce résultat est en fait une conséquence immédiate de la proposition 5.17 (p. 239) : puisque nous avons admis que le plan tangent ne dépend pas de la paramétrisation, il est logique que $\vec{\nu}$ qui est un vecteur orthogonal à ce plan ait une direction fixe. \square

Puisque la norme du vecteur $\vec{\nu}$ est fixée (à 1), et que sa direction ne peut pas changer, la seule chose qui peut varier chez $\vec{\nu}$ selon la paramétrisation de Σ que l'on utilise est *le sens*.

Une paramétrisation (\mathcal{D}, \vec{g}) étant choisie pour Σ , il y a donc deux sortes de paramétrisations équivalentes de Σ : celles qui conservent le sens de $\vec{\nu}$ (et par continuité de $\vec{\nu}$, cette conservation est acquise pour tous les points de la nappe dès qu'on l'a en un point), et celles qui changent son sens.

Choisir une paramétrisation de Σ permet donc d'orienter Σ . On choisit donc ainsi en tout point une notion de « haut » (du côté de $\vec{\nu}$) et un bas. Notons que cela oriente aussi tout les plans tangents, et nous admettrons que le bord de Σ se trouve ipso facto orienté (c'est facile à concevoir : dès qu'il y a une notion de haut, on sait ce que veut dire le sens direct et le sens des aiguilles d'une montre).

Exemple de la sphère :

Pour la sphère unité paramétrée par $\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi],$

on fait les calculs suivants, en un point $M = M(\theta, \varphi)$.

$$A = \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \cos \theta \sin \varphi \cdot 0 - (-\sin \theta) \sin \theta \cos \varphi = \sin^2 \theta \cos \varphi ;$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = (-\sin \theta) (-\sin \theta \sin \varphi) - \cos \theta \cos \varphi \cdot 0 = \sin^2 \theta \sin \varphi ;$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \theta (-\sin \varphi) \\ &= \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} H^2 &= \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta (\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta) = \sin^2 \theta \\ H &= \sin \theta \text{ (puisque } \theta \in [0, \pi]). \end{aligned}$$

Finalement, à part aux « pôles », tous les points de la sphère sont des points réguliers pour cette paramétrisation. La normale est dirigée par

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \sin \theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = H \overrightarrow{OM}.$$

De sorte que $\vec{\nu} = \overrightarrow{OM}$. Ce résultat était prévisible, et il est intuitivement évident. Cette paramétrisation correspond à une orientation de la sphère vers l'extérieur ($\vec{\nu}$ est dirigé vers l'extérieur de la sphère).

Remarque :

Si on change l'ordre des variables (u, v) , puisque $\frac{\partial M}{\partial v} \wedge \frac{\partial M}{\partial u} = - \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$, il est clair que le vecteur normal $\vec{\nu}$ change de sens, et donc l'orientation de Σ est changée.

Par conséquent, si on n'est pas satisfait de l'orientation fournie par une paramétrisation, il suffit d'échanger l'ordre des variables pour y remédier.

Cas d'une nappe de fonction

La paramétrisation naturelle d'une nappe de fonction

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathcal{D}$$

amène les calculs suivants

$$A = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} = 0 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 = -\frac{\partial f}{\partial x};$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 0 - 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y};$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1;$$

$$H^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1;$$

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1} \neq 0 \quad \forall (x, y).$$

Tous les points d'une nappe de fonction sont donc des points réguliers, et de plus, comme la troisième coordonnée C de \vec{N} est toujours positive ($C = 1$), on voit que l'orientation naturelle d'une nappe de fonction est vers le haut.

Autre calcul de H

Avec les notations usuelles, en un point $M = M(u, v)$ d'une nappe Σ , il est d'usage de poser $E = \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)^2$ (il s'agit d'un carré scalaire), $F = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v}$ (\cdot est le produit scalaire), et $G = \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2$.

On a le résultat suivant :

Proposition 5.19

$$H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Preuve Remarquons tout d'abord que la quantité sous le radical : $EG - F^2$ est positive en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir p. 5) : posons pour simplifier $\vec{w}_1 = \frac{\partial M}{\partial u}$ et $\vec{w}_2 = \frac{\partial M}{\partial v}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que $|\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2| \leq \|\vec{w}_1\| \cdot \|\vec{w}_2\|$

En élevant au carré, on obtient

$$F^2 = (\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2)^2 \leq \|\vec{w}_1\|^2 \cdot \|\vec{w}_2\|^2 = \vec{w}_1^2 \cdot \vec{w}_2^2 = EG.$$

Ensuite, remarquons que l'égalité à démontrer s'écrit $H^2 = EG - F^2$. Or, on a

$$H^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right)^2 = (\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2)^2 = \|\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2\|^2.$$

Mais un résultat classique concernant la norme du produit vectoriel dit que

$$\|\vec{w}_1 \wedge \vec{w}_2\| = \|\vec{w}_1\| \|\vec{w}_2\| |\sin(\widehat{\vec{w}_1, \vec{w}_2})|.$$

Posant $\alpha = (\widehat{\vec{w}_1, \vec{w}_2})$, on en déduit que

$$\begin{aligned} H^2 &= \|\vec{w}_1\|^2 \|\vec{w}_2\|^2 \sin^2 \alpha = \vec{w}_1^2 \vec{w}_2^2 \sin^2 \alpha \\ &= EG(1 - \cos^2 \alpha) = EG - \|\vec{w}_1\|^2 \|\vec{w}_2\|^2 \cos^2 \alpha \\ &= EG - |\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2|^2 = EG - F^2. \end{aligned}$$

(On a utilisé le résultat classique $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$). □

5.4.3 Aire d'une nappe

Nous utiliserons une notion intuitive de la notion d'élément de surface.

Lorsque, à partir d'un point $M_0 = M(u, v)$, on augmente légèrement u de du , sans toucher à v , on obtient le point $M_1 = M(u + du, v)$ de Σ . Pour du infiniment petit, on admet que $M_1 \simeq M_0 + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} du$ (à vérifier pour chaque fonction composante). De même, l'augmentation légère de v à $v + dv$ fait passer de M_0 à $M_2 = M(u, v + dv)$ et on admet que $M_2 \simeq M_0 + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} dv$. L'élément de surface sur la nappe Σ est donc l'aire du parallélogramme élémentaire $M_0M_1M_3M_2$ (avec $M_3 = M(u + du, v + dv) \simeq M_0 + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} du + \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} dv$). On le note $d\sigma$ et il vaut

$$d\sigma = \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \wedge \overrightarrow{M_0M_2} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} \right\| du dv = \|\vec{N}\| du dv = H du dv.$$

Ayons conscience que ce qu'on vient de faire n'est en aucun cas une démonstration, mais une aide pour comprendre la définition qui va suivre.

Définition 5.20

Si Σ est une nappe paramétrée par $M(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}$, alors l'aire de Σ est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\Sigma) &= \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \left\| \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{\mathcal{D}} H(u, v) du dv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} du dv. \end{aligned}$$

Nous admettons évidemment la propriété suivante.

Proposition 5.21

L'aire d'une nappe paramétrée ne dépend pas de la paramétrisation utilisée pour son calcul.

Aire d'une nappe de fonction

Il est intéressant d'appliquer ce qui précède dans le cas d'une nappe représentative d'une fonction Σ : $z = f(x, y)$ pour $(x, y) \in \mathcal{D}$.

En posant (comme p. 115) $p = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, et en utilisant le calcul fait plus haut (p. 242), puisqu'on a vu que $H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, on a

$$\text{aire}(\Sigma) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Nous allons retrouver ce résultat rapidement en utilisant la proposition 5.19 (p. 243), ce qui illustrera son intérêt.

On a ici

$$\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad E = 1 + p^2,$$

$$\overrightarrow{\frac{\partial M}{\partial y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad G = 1 + q^2,$$

et finalement

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = pq.$$

Ces calculs (qui évitent d'avoir à calculer un produit vectoriel) permettent de retrouver facilement $H^2 = EG - F^2 = (1 + p^2)(1 + q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2$, d'où la formule

$$\text{aire}(\Sigma) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy.$$

Exemple de l'aire d'une sphère :

Nous allons faire de deux façons différentes le calcul de l'aire de la sphère unité Σ .

D'abord en considérant la paramétrisation $\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, on a déjà vu que $H = \sin \theta$, donc très facilement (les variables sont séparables) :

$$\text{aire}(\Sigma) = \iint_{[0,\pi] \times [0,2\pi]} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = 2 \times 2\pi = 4\pi.$$

D'autre part, pour utiliser ce qui précède sur l'aire d'une nappe de fonction et pour illustrer qu'on peut changer de paramétrisation sans changer le résultat, nous allons considérer la demi-sphère supérieure Σ' comme la nappe représentative de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, sur le domaine \mathcal{D} formé dans le plan Oxy par le disque unité caractérisé par $x^2 + y^2 \leq 1$. L'aire de Σ est évidemment le double de l'aire de Σ' . (On ne doit jamais hésiter à faire ce genre de considérations géométriques.)

Ici, on a $p = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ de sorte que :

$$H = \sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{\frac{1-x^2-y^2+x^2+y^2}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Finalement, l'aire de Σ' s'obtient grâce au calcul suivant (qui utilise le passage en polaires) :

$$\begin{aligned}\text{aire}(\Sigma') &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= 2\pi \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi.\end{aligned}$$

On retrouve évidemment le même résultat : $\text{aire}(\Sigma) = 2\text{aire}(\Sigma') = 4\pi$.

Au fait, et si la sphère n'a pas 1 comme rayon ?

Dans ce cas, en reprenant la première méthode, on a dans la paramétrisation de Σ un R (rayon de la sphère) : elle devient

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$

Le calcul de A, B, C est le même, sauf qu'il y a à chaque fois R devant les vecteurs dérivés, donc

$$\begin{aligned}A &= R^2 \sin^2 \theta \cos \varphi = R \sin \theta \, x, \\ B &= R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi = R \sin \theta \, y, \\ C &= R^2 \sin \theta \cos \theta = R \sin \theta \, z.\end{aligned}$$

On obtient donc $H = R^2 \sin \theta$ et le résultat final est multiplié par R^2 : on retrouve la formule classique, à savoir que l'aire d'une sphère de rayon R est $\mathcal{A} = 4\pi R^2$.

5.4.4 Intégrale de surface d'une fonction scalaire

Définition 5.22 Soit f une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , dont l'ensemble de définition contient la nappe Σ (f peut d'ailleurs très bien ne pas être définie en dehors de Σ).

Alors l'intégrale de f sur la surface Σ est :

$$I = \iint_{\Sigma} f(M) d\sigma = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) H(u, v) du dv.$$

Nous admettrons que l'intégrale de surface d'une fonction scalaire possède toutes les propriétés habituelles des intégrales :

- la linéarité : $\iint_{\Sigma} [\lambda f(M) + \mu g(M)] d\sigma = \lambda \iint_{\Sigma} f(M) d\sigma + \mu \iint_{\Sigma} g(M) d\sigma ;$
- la positivité : si $f \geq 0$, alors $\iint_{\Sigma} f(M) d\sigma \geq 0$;
- l'additivité : si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ négligeable, alors $\iint_{\Sigma} f(M) d\sigma = \iint_{\Sigma_1} f(M) d\sigma + \iint_{\Sigma_2} f(M) d\sigma$;
- le fait que la valeur d'une intégrale de surface est indépendante de la paramétrisation.

Exemple 1 : Calcul de la masse d'une surface non homogène.

En tout point $M = M(u, v)$ d'une nappe paramétrée Σ , on suppose qu'il y a une masse surfacique (locale) $\sigma(M) = \sigma(u, v)$ (l'unité physique de cette grandeur serait le kg/m^2 ; cette fonction n'est pas définie en dehors de Σ).

Alors la masse totale de la surface Σ vaut

$$m(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \sigma(M) d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(u, v) H(u, v) du dv.$$

Remarquons que si la masse surfacique est constante, c'est-à-dire si $\sigma(u, v) = k$, alors on a

$$m(\Sigma) = \iint_{\mathcal{D}} k H(u, v) du dv = k \iint_{\mathcal{D}} H(u, v) du dv = k \cdot \text{aire}(\Sigma).$$

C'est un résultat très logique.

Exemple 2 : Moment d'inertie d'une sphère homogène par rapport à son axe.

On considère une sphère Σ , de rayon R (on suppose que son centre est à l'origine du repère). Soit M sa masse. La masse surfacique de la sphère est donc la constante $k = M/4\pi R^2$. Nous cherchons son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz . Nous utiliserons la paramétrisation de la sphère que nous connaissons, obtenue à partir des coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] = \mathcal{D}.$$

On a vu que l'élément de surface vaut $d\sigma = H d\theta d\varphi = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$.

On sait que le moment d'inertie d'un point massique de masse m , situé à la distance r de cet axe est $j = mr^2$. Le moment d'inertie d'un élément de surface $d\sigma$ par rapport à cet axe est donc

$$dj = (k d\sigma) r^2 = k(x^2 + y^2) d\sigma.$$

et le moment d'inertie total est donc l'intégrale sur cette surface de la fonction $k(x^2 + y^2)$. On trouve

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\Sigma} k(x^2 + y^2) \, d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} kR^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= kR^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = 2\pi kR^4 \int_0^\pi \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} \, d\theta \\ &= 2\pi R^4 \frac{M}{4\pi R^2} \frac{1}{4} \left[-3 \cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{MR^2}{8} \left[3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \right] \frac{MR^2}{8} \frac{16}{3} = \frac{2}{3} MR^2. \end{aligned}$$

5.4.5 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface orientée

Définition 5.23 Soit Σ^+ une nappe orientée, et (\mathcal{D}, \vec{g}) une paramétrisation correspondant à cette orientation (tout point de Σ^+ s'écrit $M = M(u, v) = \vec{g}(u, v)$ avec $(u, v) \in \mathcal{D}$). Soit $\vec{\nu} = \frac{\vec{N}}{H}$ le vecteur normal réduit en tout point.

Alors, pour tout champ vectoriel \vec{V} (dont l'ensemble de définition contient au moins le support de Σ^+), le flux de \vec{V} à travers Σ^+ est :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) &= \iint_{\Sigma^+} (\vec{V}(M) \cdot \vec{\nu}) \, d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}(M(u, v)) \cdot \frac{\vec{N}}{H} H \, du \, dv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}(M(u, v)) \cdot \vec{N} \, du \, dv \\ \Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}(M(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right) \, du \, dv. \end{aligned}$$

Si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$, A, B, C étant les composantes de \vec{N} , on a donc :

$$\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) = \iint_{\mathcal{D}} (AP + BQ + CR) \, du \, dv.$$

Exemple : On veut calculer le flux du champ vectoriel \vec{V} défini par

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM},$$

à travers la surface Σ^+ , qui est le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2 - 1 = f(x, y)$ pour $z \leq 0$, orienté vers le haut.

Σ^+ est ici la nappe représentative de la fonction f , et la paramétrisation naturelle fournit la bonne orientation, nous pouvons donc l'utiliser sans problème. Précisons

tout de même le domaine \mathcal{D} dans lequel on travail : puisqu'on veut que $z \leq 0$ pour $z = x^2 + y^2 - 1$, on choisira (x, y) tels que $x^2 + y^2 \leq 1$, c'est-à-dire que \mathcal{D} est le disque unité.

Avec cette paramétrisation naturelle, on a vu que $A = -\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $B = -\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ et $C = 1$.

On a donc

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) &= \iint_{\mathcal{D}} ((-2x).x + (-2y).y + 1.z) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (-2x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2 - 1) \, dx \, dy \\ &= - \iint_{\mathcal{D}} (1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad (\text{un passage en polaires s'impose}) \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r^2) r \, dr = -2\pi \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} = -2\pi \frac{3}{4} = -\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Il n'est pas très étonnant que le résultat soit négatif, car le vecteur \vec{V} est toujours tourné vers le bas quand on est sur Σ^+ , alors que la normale à la surface est toujours tournée vers le haut : si on fait une figure, on se convainc facilement que le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{\nu}$ est toujours négatif, et l'intégrale (même de surface) d'une fonction négative est toujours négative.

Les propriétés du flux sont tout à fait naturelles.

Proposition 5.24

- **Linéarité** : $\Phi_{\Sigma^+}(\lambda \vec{V} + \mu \vec{W}) = \lambda \Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) + \mu \Phi_{\Sigma^+}(\vec{W})$
- **Additivité** : Si $\Sigma^+ = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^+$, les orientations de Σ_1^+ et de Σ_2^+ étant compatibles entre elles et avec celles de Σ^+ , avec $\Sigma_1^+ \cap \Sigma_2^+$ négligeable (d'aire nulle), alors on a $\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) = \Phi_{\Sigma_1^+}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V})$.
- **Orientation** : Si on change l'orientation de Σ , le flux change de signe.

$$\Phi_{\Sigma^-}(\vec{V}) = -\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}).$$

- **Paramétrisation indifférente** : Le résultat d'un calcul de flux est indépendant de la paramétrisation qu'on choisit pour la nappe (sous réserve de respecter l'orientation).

Nous voyons que si l'orientation d'une nappe fournie par le choix d'une paramétrisation ne convient pas à un énoncé, il n'est même pas nécessaire d'échanger les variables pour retrouver une bonne orientation : il est bien plus simple de faire le calcul avec cette paramétrisation, et simplement de penser à changer le signe du résultat final.

5.4.6 Formules de Green (Stokes-Ampère, Ostrogradski)

Formule de Stokes-Ampère

Théorème 5.25 (Stokes-Ampère) Soit Σ une nappe paramétrée et Γ l'arc fermé dont le support est le bord de Σ . On choisit une orientation Σ^+ de Σ , et Γ^+ est l'orientation du bord qui en découle.

Alors pour tout champ vectoriel \vec{V} défini sur un domaine contenant Σ , la circulation le long de Γ^+ de \vec{V} est égale au flux à travers la surface orientée Σ^+ du rotationnel de \vec{V} . Cela s'écrit

$$\Phi_{\Sigma^+}(\operatorname{rot} \vec{V}) = \int_{\Gamma^+} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM}$$

ou encore

$$\iint_{\Sigma^+} (\operatorname{rot} \vec{V}) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \int_{\Gamma^+} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM}.$$

La démonstration de ce théorème, un peu technique, n'est pas très difficile et montre que ce théorème est une traduction fidèle du Théorème de Green-Riemann en dimension 3.

Nous pouvons d'abord faire deux remarques :

Remarque : Si $\vec{V}(M)$ est un champ dérivant d'un potentiel, on se rappelle que cela entraîne que $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$, et on retrouve grâce à cette formule que la circulation d'un champ de gradient sur un arc fermé est nulle.

Remarque : Il existe plusieurs surfaces Σ ayant le même bord. Ce théorème montre que le flux d'un champ de rotationnel à travers une surface ne dépend que du bord de cette surface : nous considérerons ce résultat d'un autre point de vue après le théorème suivant d'Ostrogradski.

Preuve de la formule de Stokes-Ampère

On commence par préciser les notations :

Soit (\mathcal{D}, \vec{g}) une paramétrisation de Σ^+ . On note comme d'habitude x, y, z les fonctions composantes de \vec{g} et $M = M(u, v) = \vec{g}(u, v)$ est le point générique de Σ .

Soit γ^+ l'arc paramétré fermé dont le support est le contour de \mathcal{D} , orienté comme Γ^+ , de sorte que $([a, b], \varphi)$ étant une paramétrisation de γ^+ , une paramétrisation de Γ^+ est $([a, b], \vec{g} \circ \varphi)$; on note tout à fait logiquement (u, v) les fonctions composantes de φ (il y en a deux, puisque \mathcal{D} donc le support de γ^+ sont des sous-ensembles de \mathbb{R}^2).

Pour finir, on notera classiquement P, Q, R les composantes du champ \vec{V} .

Tout ceci étant précisé, on va d'abord calculer le second membre de la formule :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma^+} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_a^b \vec{V}(\vec{g} \circ \varphi(t)) \cdot (\vec{g} \circ \varphi)'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(P(\vec{g} \circ \varphi(t))(x \circ \varphi)'(t) + Q(\vec{g} \circ \varphi(t))(y \circ \varphi)'(t) + R(\vec{g} \circ \varphi(t))(z \circ \varphi)'(t) \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\widehat{P}(t) \left(\frac{\partial \widehat{x}}{\partial u}(t) u'(t) + \frac{\partial \widehat{x}}{\partial v}(t) v'(t) \right) + \widehat{Q}(t) \left(\frac{\partial \widehat{y}}{\partial u}(t) u'(t) + \frac{\partial \widehat{y}}{\partial v}(t) v'(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \widehat{R}(t) \left(\frac{\partial \widehat{z}}{\partial u}(t) u'(t) + \frac{\partial \widehat{z}}{\partial v}(t) v'(t) \right) \right) dt. \end{aligned}$$

On a posé $\widehat{P}(t) = P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$, etc. et de la même façon $\frac{\partial \widehat{x}}{\partial u}(t) = \frac{\partial x}{\partial u}(u(t), v(t))$, etc.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\left(\widehat{P} \frac{\partial \widehat{x}}{\partial u} + \widehat{Q} \frac{\partial \widehat{y}}{\partial u} + \widehat{R} \frac{\partial \widehat{z}}{\partial u} \right)(t) u'(t) + \left(\widehat{P} \frac{\partial \widehat{x}}{\partial v} + \widehat{Q} \frac{\partial \widehat{y}}{\partial v} + \widehat{R} \frac{\partial \widehat{z}}{\partial v} \right)(t) v'(t) \right) dt \\ I &= \int_{\gamma^+} \omega, \end{aligned}$$

en considérant la forme différentielle ω du plan \mathbb{R}^2 des couples (u, v) , définie par :

$$\begin{aligned} \omega &= A du + B dv \\ &= \left(\tilde{P} \frac{\partial x}{\partial u} + \tilde{Q} \frac{\partial y}{\partial u} + \tilde{R} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(\tilde{P} \frac{\partial x}{\partial v} + \tilde{Q} \frac{\partial y}{\partial v} + \tilde{R} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv. \end{aligned}$$

(On a posé $\tilde{P} = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ etc.) On peut alors appliquer la formule de Green-Riemann et on obtient

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv \\ &= \iint_D \left(\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \tilde{P} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \tilde{Q} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \tilde{R} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \tilde{P} \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} + \tilde{Q} \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} + \tilde{R} \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \right) \right) du dv \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) du dv. \end{aligned}$$

(On a pu utiliser le théorème de Schwarz, car on a fait l'hypothèse que toutes les fonctions rencontrées sont suffisamment continûment dérivables.)

Maintenant, on utilise la formule de dérivation des fonctions composées, valable aussi pour des dérivées partielles, ce qui nous donne, ici

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial u} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}; \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}; \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}; \text{ etc.}\end{aligned}$$

Donc, en reportant, on trouve

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right. \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &\quad \left. - \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du dv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) du dv.\end{aligned}$$

Calculons maintenant le second membre de la formule de Stokes-Ampère :

$$\begin{aligned}J &= \iint_{\Sigma^+} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\nu}) d\sigma = \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \cdot \vec{N} du dv \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \right] du dv\end{aligned}$$

$$= \iint_D \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Et on trouve que $I = J$ en comparant tous les termes. \square

Formule d'Ostrogradski

Théorème 5.26 (Ostrogradski) Soit Δ un domaine de l'espace \mathbb{R}^3 , dont la frontière est une surface paramétrée $\partial\Delta = \Sigma$; on choisira Σ^+ l'orientation de Σ « vers l'extérieur ». Alors pour tout champ vectoriel \vec{V} , défini sur Δ , le flux de \vec{V} à travers Σ^+ est égal à l'intégrale triple de la divergence de \vec{V} sur Δ . Cela s'écrit :

$$\iiint_{\Delta} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Sigma^+} (\vec{V} \cdot \vec{\nu}) \, d\sigma = \Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}).$$

Preuve La démonstration de ce théorème ressemble beaucoup à celle du théorème de Green-Riemann.

On pose $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et on a donc $\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

D'autre part, on va écrire $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ en posant :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}.$$

Grâce à la linéarité des différentes intégrations, la formule d'Ostrogradski sera établie si on arrive à en montrer les trois parties suivantes

$$(5.13) \quad \iiint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Sigma^+} \vec{V}_1 \cdot \vec{\nu} \, d\sigma ;$$

$$(5.14) \quad \iiint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Sigma^+} \vec{V}_2 \cdot \vec{\nu} \, d\sigma ;$$

$$(5.15) \quad \iiint_{\Delta} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Sigma^+} \vec{V}_3 \cdot \vec{\nu} \, d\sigma.$$

En effet, il suffit alors de tout additionner pour obtenir le résultat attendu.

Nous nous contenterons de démontrer la troisième formule (5.15), en vous demandant d'admettre que les deux autres formules s'établissent de la même façon en changeant l'ordre des variables (vous pouvez aussi en faire la démonstration à titre d'exercice).

Pour cela, on admet que Δ peut être caractérisé par

$$(x, y, z) \in \Delta \iff \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{D} \\ f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y) \end{cases}$$

Remarquons que cela signifie que la frontière Σ de Δ peut être décomposée en deux parties³ : $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, avec Σ_1 est la nappe représentative de la fonction f_1 , naturellement paramétrée par $z = f_1(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$ et Σ_2 est la nappe représentative de la fonction f_2 , naturellement paramétrée par $z = f_2(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$.

Remarquons de plus que l'orientation naturelle de Σ_1 est vers le haut, ce qui est vers l'intérieur de Δ , alors que le haut de Σ_2 est vers l'extérieur de Δ : avec les conventions habituelles, on notera donc $\Sigma^+ = \Sigma_1^- \cup \Sigma_2^+$.

On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_{\Delta} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (R(x, y, z))_{z=f_1(x, y)}^{z=f_2(x, y)} dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, f_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Calculons à présent le deuxième membre de l'égalité (5.15).

$$\begin{aligned} J_3 &= \iint_{\Sigma^+} \vec{V}_3 \cdot \vec{\nu} d\sigma = \iint_{\Sigma_1^- \cup \Sigma_2^+} \vec{V}_3 \cdot \vec{\nu} d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma_2^+} \vec{V}_3 \cdot \vec{\nu} d\sigma - \iint_{\Sigma_1^-} \vec{V}_3 \cdot \vec{\nu} d\sigma \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}_3(x, y, f_2(x, y)) \cdot \vec{N} dx dy - \iint_{\mathcal{D}} \vec{V}_3(x, y, f_1(x, y)) \cdot \vec{N} dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(x, y, f_2(x, y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy \end{aligned}$$

³ En fait, il y a éventuellement une troisième partie, qui est alors la nappe verticale Σ_0 joignant les nappes Σ_1 et Σ_2 . Le fait de l'omettre ne fausse pas le résultat, car \vec{V}_3 étant un champ de vecteurs tous verticaux, ils sont parallèles à Σ_0 et orthogonaux à $\vec{\nu}$ en tout point de Σ_0 , et le flux de ce champ de vecteurs verticaux à travers cette nappe verticale est nul.

$$\begin{aligned}
& - \iint_{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R(x, y, f_1(x, y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} \\ -\frac{\partial f_1}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} dx dy \\
& = \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \iint_{\mathcal{D}} R(x, y, f_1(x, y)) dx dy = I_3.
\end{aligned}$$

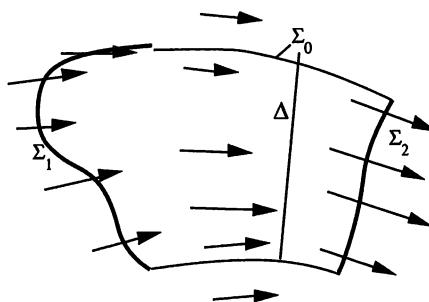
□

Remarque : Lorsque la divergence de \vec{V} est nulle, on dit que \vec{V} est à flux conservatif. Ce vocabulaire provient de la conséquence suivante du théorème 5.26 : le flux de \vec{V} à l'entrée d'un domaine est le même que le flux à la sortie.

Pour comprendre ce que cela signifie, séparons la frontière Σ du domaine Δ en deux morceaux Σ_1 et Σ_2 :

- on définit Σ_1 comme étant la partie de Σ^+ sur laquelle $\vec{V} \cdot \vec{\nu} < 0$ (cela signifie que l'angle de ces deux vecteurs est obtus). Le flux de \vec{V} à travers Σ_1^+ est donc forcément négatif, et on définit le flux d'entrée dans Δ de \vec{V} comme étant $\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V}) = -\Phi_{\Sigma_1^+}(\vec{V})$;
- on définit Σ_2 comme étant la partie de Σ^+ sur laquelle $\vec{V} \cdot \vec{\nu} > 0$ (cela signifie que l'angle de ces deux vecteurs est aigu). Le flux de \vec{V} à travers Σ_2^+ est donc forcément positif, et on définit le flux de sortie de Δ de \vec{V} comme étant $\Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V})$.

Il reste une troisième partie Σ_0 de Σ^+ , celle sur laquelle on a $\vec{V} \cdot \vec{\nu} = 0$. Elle n'est pas forcément négligeable, mais on est sûr que le flux de \vec{V} à travers cette surface Σ_0 est nul.



(5.16)

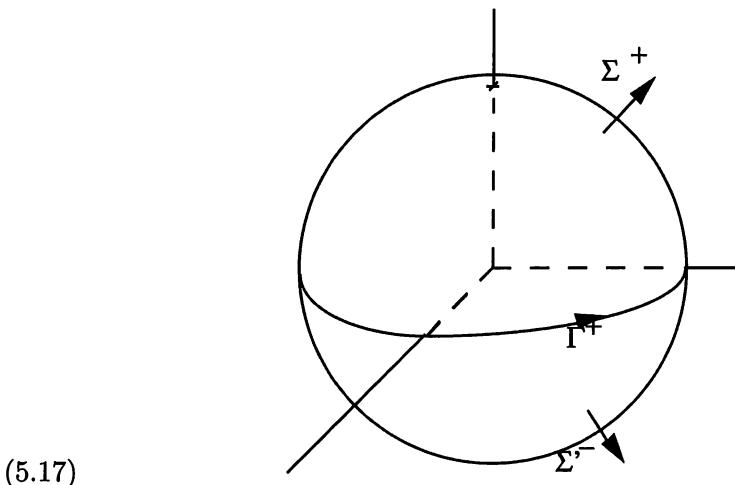
Par additivité, on obtient donc, en utilisant que $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, et le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned}
0 &= \Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) = \Phi_{\Sigma_0^+}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_1^+}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V}) = 0 + \Phi_{\Sigma_1^+}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V}) \\
0 &= -\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V}).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V}) = \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V})$, c'est-à-dire que le flux d'entrée est égal au flux de sortie.

Remarque : On montre qu'un champ de vecteurs défini sur un ouvert étoilé est à flux conservatif, (de divergence nulle), si et seulement si il dérive d'un potentiel vecteur, c'est-à-dire est un champ de rotationnel ; il est conseillé de revoir le théorème 3.85 et la définition 3.86 (p. 153), et bien comprendre l'analogie, et de toutes façons il est facile de montrer (sans hypothèse de domaine étoilé) qu'on a $\overrightarrow{\text{div}}(\text{rot } \vec{V}) = 0$: on peut par exemple utiliser le formalisme $\vec{\nabla}$.

Remarque : On peut retrouver un des aspects de la formule de Stokes-Ampère grâce au théorème d'Ostrogradski.



Si Σ et Σ' sont deux nappes de même bord (on suppose qu'elles ne se rencontrent pas en dehors de leur bord commun Γ), la partie de l'espace comprise entre ces deux nappes est un domaine Δ , dont la frontière est formée par la réunion de Σ et de Σ' .

Réfléchissons un instant à l'orientation de tout cela. à partir d'une orientation Γ^+ de Γ , on oriente « en parallèle » les deux nappes Σ et Σ' . L'orientation de la frontière de Δ vers l'extérieur est forcément inverse avec une des deux orientations (voir figure) : cette frontière, orientée vers l'extérieur est donc formée de la réunion, disons de Σ^+ et de Σ'^- .

Sans utiliser Stokes-Ampère, mais en utilisant Ostrogradski, nous pouvons alors retrouver que

$$\iint_{\Sigma^+} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \, d\sigma = \iint_{\Sigma'^-} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \, d\sigma.$$

En effet, d'après Ostrogradski, en supposant que $\operatorname{rot} \overrightarrow{V}$ est un champ de classe C^1 sur Δ , nous pouvons écrire

$$\iiint_{\Delta} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot} V}) dx dy dz = \iint_{\Sigma^+ \cup \Sigma'^-} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} d\sigma.$$

Mais la divergence d'un rotationnel est nulle (voir la remarque précédente), donc le membre de gauche est nul et on a

$$0 = \iint_{\Sigma^+} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} d\sigma + \iint_{\Sigma'^-} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} d\sigma = \iint_{\Sigma^+} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} d\sigma - \iint_{\Sigma'^+} \overrightarrow{\operatorname{rot} V} d\sigma,$$

d'où le résultat. \square

5.5 Exercices

Pour tous les exercices qui suivent (1 à 17), il s'agit de calculer l'intégrale double I sur le domaine D qui est en général précisé. Il est recommandé de représenter, dans chaque cas le domaine D .

Exercice 5.1. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3}$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1; y \geq 1; x+y \leq 3\}$.

Exercice 5.2. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x+y \leq 2\}$.

Exercice 5.3. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 1\}$.

Exercice 5.4. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3}$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3; y \geq 2; x+y \leq 5\}$.

Exercice 5.5. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$;
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 5.6. $I = \iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} ;$
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq x\}.$

Exercice 5.7. $I = \iint_D a^x b^y dx dy ; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; x+y \leq 1\}.$

Exercice 5.8. $\int_0^3 \left(\int_{\frac{x}{3}}^1 e^{-y^2} dy \right) dx.$

Exercice 5.9. $I = \iint_D \sin \frac{\pi x}{2y} dx dy ;$
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 ; \sqrt{x} \leq y \leq \min\{2,x\}\}.$

Exercice 5.10. $I = \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}(1+x^2+y^2)^2} ;$
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}.$

Exercice 5.11. $I = \iint_D xy\sqrt{x^2 + 4y^2} dx dy ;$
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq 1\}.$

Exercice 5.12. $I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + xy + y^2} ; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$

Exercice 5.13. $I = \iint_D x dx dy ; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0 ; x \geq 1\}.$

Exercice 5.14. $I = \iint_D \sqrt{xy} dx dy ; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq xy\}$

Exercice 5.15. $I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy ;$
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; x^2 + y^2 \geq 1\}$

Exercice 5.16. $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy ;$
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y ; x^2 + y^2 - x \leq 0 ; x^2 + y^2 - y \geq 0\}$

Exercice 5.17. $I = \iint_D xy \, dx \, dy$; $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

Les intégrales I des exercices qui suivent (18 à 20) sont à calculer de deux manières : directement, puis en appliquant Green-Riemann.

Exercice 5.18. $I = \int_{\gamma} x^3 \, dy - y^3 \, dx$

γ est le cercle de centre O , de rayon R , orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice 5.19.

$$I = \int_{\partial K^+} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$$

pour $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 - x \right\}$ et ∂K^+ est le bord de K orienté positivement.

Exercice 5.20.

$$I = \iint_D \frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$$

pour $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 ; x^2 + y^2 \geq 1 \right\}$.

Pour tous les exercices qui suivent (21 à 27), il s'agit de calculer l'intégrale triple I sur le domaine D qui est en général précisé. Il peut être utile d'essayer de représenter dans certains cas le domaine D .

Exercice 5.21.

$$I = \iiint_D \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$

pour $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \text{ et } z \geq 0 \right\}$.

Exercice 5.22.

$$I = \iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(1 + x + y + z)^3}$$

pour $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0 ; x + y + z \leq 1 \right\}$.

Exercice 5.23.

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \iiint_D z^2 \, dx \, dy \, dz \\ I_2 &= \iiint_D x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \right\} \text{ avec } D \text{ qui est la boule de centre } O, \text{ de rayon } a.$$

Exercice 5.24.

$$I = \iiint_D z \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz; D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

Exercice 5.25.

$$I = \iiint_D \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz; D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^3$$

Exercice 5.26.

$$I = \iiint_D xz \, dx \, dy \, dz; D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0; z \geq 0; x + z \leq 1; y^2 \leq x\}$$

Exercice 5.27.

$$I = \iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$$

pour $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$

Exercice 5.28. Déterminer l'aire des parties suivantes d'une sphère de rayon a (caractérisées en coordonnées sphériques). Il est recommandé de représenter la situation dans chaque cas.

1. calotte sphérique : $0 \leq \theta \leq \alpha_1$;
2. fuseau : $\beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2$;
3. couronne sphérique : $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$;
4. « maille sphérique » : $\begin{cases} \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2 \\ \beta_1 \leq \varphi \leq \beta_2. \end{cases}$

Exercice 5.29. Calculer le flux du champ $\vec{V} : M(x, y, z) \mapsto y \vec{i} + x \vec{j} + (y+z) \vec{k}$ à travers la surface définie par : $2x + y + z = 2; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$ orientée vers le haut.

Exercice 5.30. Calculer de deux manières différentes le flux du champ : $M \mapsto \vec{OM}$ à travers la surface (orientée vers l'extérieur) limitant le cône ayant pour base le disque unité du plan $x0y$ et pour sommet le point $(0, 0, 2)$.

Exercice 5.31. Soit $R > 0$ et $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq R^2\}$. On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, u, v) \end{array}$$

φ est une représentation paramétrique d'une surface orientée Σ . Soit Γ^+ son bord orienté.

Calculer $I = \int_{\Gamma^+} y \, dx + z \, dy + x \, dz$

1. directement.

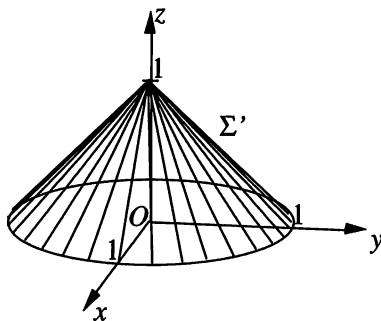
2. en appliquant la formule de Stokes-Ampère.

Exercice 5.32. On considère le champ vectoriel $\vec{V} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

1.a) Calculer le flux Φ de \vec{V} à travers la sphère unité (caractérisée par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) orientée vers l'extérieur.

1.b) Retrouver ce résultat en ramenant le calcul de Φ au calcul d'une intégrale triple.

2.a) Calculer le flux Φ' de $\text{rot } \vec{V}$ à travers la nappe conique Σ'^+ qui peut être caractérisée par $\begin{cases} z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ z > 0 \end{cases}$ et est orientée vers le haut.



2.b) Retrouver ce résultat en ramenant le calcul de Φ' au calcul de la circulation d'un champ vectoriel le long d'un certain contour.

3. Quelle est l'aire de Σ' ?

Quelques formules utiles pour cet exercice :

$$\sin^3 \theta = \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} ;$$

$$\int_A^{A+2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi = \int_A^{A+2\pi} \sin^2 t \, dt ;$$

$$\int_A^{A+2\pi} \sin t \, dt = 0 = \int_A^{A+2\pi} \cos t \, dt = \int_A^{A+2\pi} \sin t \cos t \, dt.$$

Indications pour la résolution des exercices

CHAPITRE 1

Indications pour les exercices sur la topologie dans \mathbb{R}^n

Exercice 1.1 Majorer, par inégalité triangulaire la norme de $X = (X - Y) + Y$, puis échanger le rôle de X et Y . Se souvenir que $|A - B| = \max((A - B), (B - A))$.

Exercice 1.2 Aucune difficulté. Penser à vérifier que N_1 est à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Pour (i)', on utilise le fait qu'une somme de nombres tous positifs ou nuls ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls.

Exercice 1.3 Bien poser les hypothèses à chaque fois : dire qu'une norme N est équivalente à une norme \hat{N} (noter $N \sim \hat{N}$) doit toujours être traduit par : $\exists C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall X$, on a $C_1 N(X) \leq \hat{N}(X) \leq C_2 N(X)$.

Les constantes strictement positives peuvent être multipliées et inversées.

Exercice 1.4 Il y a 5 inégalités à établir pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

- a) $N_\infty(X) \leq N_2(X)$.
- b) $N_2(X) \leq N_1(X)$.
- c) $N_1(X) \leq n N_\infty(X)$.
- d) $N_2(X) \leq \sqrt{n} N_\infty(X)$.
- e) $N_1(X) \leq \sqrt{n} N_2(X)$.

Pour tout ce qui concerne $N_\infty(X)$, on utilise un indice j tel que $N_\infty(X) = |x_j|$.

Pour a), on utilise $|x_j| = \sqrt{x_j^2}$.

Pour b), on compare les carrés.

c) et d) s'obtiennent en majorant tous les $|x_i|$ par $|x_j|$.

Pour e), on élève $N_1(X)$ au carré, puis on majore chaque double produit grâce à la formule $2ab \leq a^2 + b^2$.

Les contre exemples permettant de montrer que ces inégalités ne peuvent être améliorées s'obtiennent avec $e_1 = (1, 0 \dots, 0)$ ou avec $W = (1, \dots, 1)$ selon les cas.

Exercice 1.5 Pour chacune des questions on essaie d'appliquer la proposition 1.2 (p. 3) après avoir vérifié que N est bien une application à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

(i)' se fait toujours en utilisant la propriété d'une somme nulle de nombres positifs.
(ii) ne pose jamais de problème

(iii) peut se faire soit en élevant les deux membres au carré, soit en utilisant l'inégalité triangulaire pour des normes de référence dans \mathbb{R}^2 . Par exemple, grâce à l'inégalité triangulaire de la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 , on a

$$\sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Dans un des trois cas, N n'est pas une norme.

Pour montrer l'équivalence avec les normes usuelles, il faut dans chaque cas faire le choix d'une des trois normes usuelles et raisonner comme pour l'exercice 1.4.

Exercice 1.6 On utilise la première inégalité triangulaire (*d3*) d'abord pour majorer $d(x, y)$ en utilisant z , puis pour majorer $d(y, z)$ en utilisant x . Il faut, dans chaque cas changer un terme de côté, et raisonner comme à chaque fois qu'on doit montrer une deuxième inégalité triangulaire : en utilisant $|A| = \max(A, -A)$.

Exercice 1.7 Caractériser l'appartenance de $X = (x, y)$ à la boule par une inéquation. Pour résoudre l'inéquation obtenue qui contient des valeurs absolues, on « enlève les valeurs absolues » grâce à une étude de cas.

Exercice 1.8 Voir la méthode de l'exercice 1.5. Pour montrer que \hat{N} est une application, puis plus loin pour montrer son équivalence à la norme euclidienne, on peut utiliser l'encadrement $-\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$.

On peut aussi utiliser l'astuce $x^2 + xy + y^2 = \frac{x^2 + (x+y)^2 + y^2}{2}$.

Dans la question 3., le contour de la boule à représenter est une ellipse.

Exercice 1.9 Commencer par deviner la limite logique de la suite (u_p) (si L est la limite de (X^p) .)

Puis écrire d'une part l'hypothèse, d'autre part ce qu'on doit démontrer, en appliquant la définition par ε, η . Le lien entre ces deux énoncés est assuré par la seconde inégalité triangulaire.

Penser à tout réorganiser et ordonner pour la rédaction finale.

Exercice 1.10 1. Sur un dessin, il n'est pas bien difficile de tracer un disque centré en un point X et ne contenant pas l'origine. Le rayon maximum d'un tel disque est $r = d_2(O, X) = \|X\|_2$. N'a-t-on pas ainsi trouvé pour tout point de \mathcal{U} une boule centrée en ce point et incluse dans \mathcal{U} ? Il n'y a plus qu'à rédiger proprement.

2. Une suite d'éléments qui sont tous dans le complémentaire de \mathcal{U} , il est difficile d'en trouver beaucoup! Il n'y en a même qu'une, et sa limite est facile à trouver.

Exercice 1.11 a) La méthode de l'exercice précédent s'applique : sur un dessin, il est facile de trouver une boule ne touchant pas une droite, lorsque le centre de cette boule est fixé en dehors de la droite. On n'est pas obligé, pour 1., d'utiliser la norme euclidienne : la norme du max est peut-être plus simple. Pour le 2., la norme euclidienne s'impose, et on rappelle la formule de géométrie : la distance (euclidienne) d'un point $X = (x, y)$ à la droite D est donnée par (K étant le projeté orthogonal de X sur D)

$$d_2(X, D) = d_2(X, K) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \min_{M \in D} d_2(X, M)$$

b) Pour une suite convergente d'éléments de D , on passera à la limite dans l'équation qui caractérise l'appartenance de chaque terme de la suite à D .

CHAPITRE 2

Indications pour les exercices sur fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Exercice 2.1 Juste un point stationnaire pour $t = 0$.

Exercice 2.2 Branche infinie pour $t \rightarrow 1$. C'est une asymptote oblique, et il faut étudier la position relative de la courbe et de cette droite. On peut poser $t = 1 + h$ pour simplifier les calculs, mais ce n'est pas obligatoire.

Il y a un point double. Déterminer la position des tangentes en ce point double : elles font entre elles un angle remarquable. Pour tous les calculs concernant ce point double, on utilisera que les 2 paramètres t_j de ce point sont solutions de $T^2 = T + 1$, ce qui simplifie bien les calculs ; on utilisera aussi $tt' = 1 = t + t'$, si t et t' désignent les 2 paramètres de ce point double.

Exercice 2.3 Pas de branche infinie, mais un point limite pour $t \rightarrow \infty$. également un point stationnaire, pour l'étude duquel il serait épouvantablement fastidieux de calculer les dérivées seconde et troisième de x et surtout de y . La bonne méthode consiste à faire le changement de variable $t = t_0 + h$ puis d'utiliser le développement limité à l'ordre 3 de x et de y au voisinage de t_0 , qu'on obtient alors par une division selon les puissances croissantes.

Penser comme toujours à étudier les points d'intersection avec les axes et à préciser les points où la tangente est verticale ou horizontale.

Exercice 2.4 2π -périodicité et parité de x et de y permettent de réduire l'intervalle d'étude à $I = [0, \pi]$.

Sur cet intervalle, il y a deux points stationnaires. Pour l'étude de ces points stationnaires, on peut au choix dériver ou utiliser les développements limités, mais ceux-ci en $\frac{2\pi}{3}$ ne sont pas évidents.

Traiter l'intersection avec les axes.

On essaiera de montrer, si on en a le courage, l'invariance de la courbe par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 2.5 Même domaine d'étude qu'à l'exercice précédent.

Une asymptote parallèle à un des axes.

Un point stationnaire à étudier. Si on choisit de dériver 3 fois x , on a intérêt à introduire la fonction \tan dans l'expression de x' pour ne pas trop compliquer : en effet, sa dérivée est $1 + \tan^2$, et les dérivées successives utilisent uniquement ce type d'expression, et pour $t = \pi/4$, on a $\tan \frac{\pi}{4} = 1$.

Les points d'intersection avec les axes ne peuvent se déterminer que numériquement.

Exercice 2.6 À étudier : une branche infinie et un point limite.

Pour montrer la symétrie, observer sur le dessin et déterminer l'axe, puis on réfléchira à une transformation φ simple échangeant les paramètres des deux points où la tangente est horizontale. On montre ensuite que $M(t)$ et $M(\varphi(t))$ sont symétriques.

Il y a aussi un point double à déterminer.

Exercice 2.7 Deux branches infinies à étudier séparément aux infinis.

Un point stationnaire, également.

Exercice 2.8 Étudier les branches infinies et le point stationnaire.

La courbe est très difficile à représenter, pour des questions d'échelle : avec de toutes petites unités, on ne voit plus bien ce qui se passe au voisinage du point stationnaire, mais en agrandissant, on ne voit pas tous les points d'intersection avec les axes, ni même tous les points avec tangente parallèle aux axes. On peut faire deux dessins.

Exercice 2.9 Branches infinies et point stationnaire. Pour le point stationnaire en 0, on a vraiment intérêt à utiliser les développements limités.

CHAPITRE 3

Indications pour les exercices sur les fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n

3.2 Compréhension des définitions

Exercice 3.1 Soit $\varepsilon > 0$. On cherche une condition suffisante de proximité de (x, y) avec $(-3; 1)$ permettant d'obtenir $|f(x, y) - (-2)| \leq \varepsilon$.

On doit partir d'une majoration de la norme de $(x, y) - (-3, 1) = (x + 3, y - 1)$.

On a intérêt à écrire

$$|f(x, y) - (-2)| = |(x - 2y + 3) - (-3 - 2 \cdot 1 + 3)| = |(x - (-3)) - 2(y - 1)|.$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$|f(x, y) - (-2)| \leq |x + 3| + 2|y - 1|.$$

Si on utilise la norme du max, on a $|x + 3| \leq \max(|x + 3|, |y - 1|)$ et $|y - 1| \leq \max(|x + 3|, |y - 1|)$; on a donc

$$|f(x, y) - (-2)| \leq 3\|(x, y) - (-3, 1)\|_{\infty}.$$

On peut alors facilement trouver une valeur de η satisfaisante et il ne reste plus qu'à écrire dans le bon ordre la succession de \forall, \exists

Si on utilise la norme euclidienne, on peut utiliser une des inégalités du théorème 1.9 (p. 7).

Pour la norme somme, on a $|x + 3| + 2|y - 1| \leq 2(|x + 3| + |y - 1|)$.

Exercice 3.2 Quelle que soit la norme considérée, on écrit

$$\begin{aligned} \left\| f(x, y, z) - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} (x - y + 2z) - (1 - (-1) + 2 \cdot 2) \\ (x - 2z) - (1 - 2 \cdot 2) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} (x - 1) - (y + 1) + 2(z - 2) \\ (x - 1) - 2(z - 2) \end{pmatrix} \right\|. \end{aligned}$$

On utilise ensuite au mieux l'inégalité triangulaire pour majorer cette quantité et introduire la norme de $(x, y, z) - (1, -1, 2) = (x - 1, y + 1, z - 2)$.

La façon la plus simple de procéder consiste à utiliser la norme somme dans l'espace d'arrivée et la norme du max dans l'espace de départ.

3.4 Détermination pratique de limites

Exercice 3.3 1. et 2. Essayer différents chemins.

3. Penser à la technique utilisée pour l'exemple p. 88, puisque c'est un dénominateur du même type.

4. Calculer le degré total (voir p. 88) pour séparer les cas. Lorsque ce degré total est positif, utiliser le passage en polaires et le corollaire 3.34 (p. 87) pour montrer que la limite est nulle.

Lorsque le degré total est négatif ou nul essayer différents chemins.

5. Degré total positif, donc passage en polaires.

6. Le degré total n'a pas de sens, mais on essaiera différents chemins.

7. On a envie d'utiliser des équivalents, mais ce n'est pas légitime : il n'y a aucune théorie à ce sujet dans ce cours sur les fonctions de plusieurs variables, et on ne peut pas extrapoler ce qui a été étudié pour les fonctions d'une variable. La solution vient de l'utilisation des développements limités (ici, l'ordre 5 est suffisant). On coupe ensuite en trois l'expression obtenue avec les d.l. : en premier l'expression « régulière », ensuite un morceau avec de l' $\varepsilon(x)$ puis le morceau avec du $\varepsilon(y)$. On montre que les deux derniers termes tendent vers 0 et la limite du premier terme est évidente puisqu'il est constant.

8. Raisonner comme pour 4..

9. Attention à l'ensemble de définition. Ensuite on doit majorer le numérateur en l'écrivant $1 - \cos u$ et en retrouvant une majoration classique de cette expression par un monôme du second degré. On conclut en raisonnant comme dans la démonstration du théorème 3.33 (p. 86).

10. Le degré total n'a pas vraiment de sens, mais comme pour (x, y) proche de $(0, 0)$, on peut considérer que $\cos x$ et $\cos y$ sont proches de 1, on peut se dire que le degré du dénominateur est 1. La solution consiste alors à minorer $\cos x$ et $\cos y$ par $\frac{1}{2}$ si on est suffisamment proche de l'origine, ce qui permet de minorer le dénominateur qui est positif, et de majorer $|f(x, y)|$.

11. Une astuce « sanglante » consiste à soustraire puis rajouter le terme xy entre les deux termes du numérateur. On coupe ensuite en deux le numérateur et chacun des deux morceaux se factorise avec un terme de la forme $\sin u - u$. On peut majorer $|\sin u - u|$ par $\frac{|u|^3}{6}$ (résultat classique, qu'on démontre avec Taylor-Lagrange), et on n'a plus qu'à passer en polaires, par exemple pour conclure que la limite est ...

12. Encore une astuce « sanglante » ! Au numérateur, on soustrait avant de rajouter les termes $\frac{x^2}{2}$ et $\frac{y^2}{2}$, et on coupe le -2 en $-1 - 1$. Sachant que $\sqrt{1+u} \simeq 1 + \frac{u}{2}$, on coupe en 3 la fraction : chaque radical dans un terme du type $\frac{\sqrt{1+u} - (1 + \frac{u}{2})}{D}$, et un dernier terme très simple.

On peut traiter les termes compliqués avec la technique de la quantité conjuguée.

13. Même majoration du dénominateur que dans 9., et minoration du dénominateur comme dans l'exercice 1.8.

14. Même majoration du numérateur que dans 11.

15. Ajouter et soustraire x^2 et y^2 , pour pouvoir utiliser la majoration du k) et n). Le « degré total » peut s'estimer en se disant que $\sin u \sim u$, même si ce n'est pas très rigoureux, ça permet de choisir ce qu'on doit démontrer selon les valeurs de α .

16. Passage en polaires pour montrer qu'il y a une limite nulle, essais de chemins sinon.

Exercice 3.4 1. Une droite passant par l'origine non verticale a une équation du type $y = \lambda x$. Une paramétrisation d'une telle droite est $\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t \end{cases}$. Traiter à part la droite verticale et la droite horizontale, et pour une droite oblique, se rappeler que $\frac{|t|}{t^2} = \frac{1}{|t|}$, poser $u = \frac{|\lambda|}{|t|}$ et se rappeler de la valeur de la limite de référence $\lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u}$.

2. Penser à une parabole passant par l'origine.

3.5 Dérivées partielles

Exercice 3.5 Il n'est pas nécessaire de déterminer à chaque fois l'ensemble le plus grand possible dans lequel il n'y a pas de problème de dérivabilité. Il suffit de trouver un **domaine de régularité**, c'est-à-dire un ensemble ouvert, d'un seul morceau pour ne pas compliquer, dans lequel on est sûr qu'il n'y a aucun problème de définition, dans lequel la quantité sous le radical éventuel est strictement positive, dans lequel la quantité dont on calcule le logarithme est aussi strictement positive, dans lequel les dénominateurs sont non nuls...

Dans chaque cas on considère y comme constante pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis on considère x comme constante pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$; en cas de difficulté, remplacer la lettre désignant la variable considérée comme constante par a ou b , dont il est plus facile d'oublier le caractère variable.

Lorsque x et y jouent des rôles symétriques, inutile de recalculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ lorsqu'on a déjà $\frac{\partial f}{\partial x}$: il suffit d'échanger x et y dans l'expression obtenue; c'est le cas pour les exercices 10., 11., 12., 14. (au signe près), et 21..

Exercice 3.6 Puisque $\arccos u$ n'existe que pour u entre -1 et 1 , on doit résoudre une inéquation double du type $-1 \leq u \leq 1$ qu'on a intérêt à écrire sous la forme $|u| \leq 1$ puis à éléver au carré pour faire disparaître valeur absolue et racine carrée. \arccos est continue sur son ensemble de définition, mais non dérivable en -1 et en 1 .

L'expression que l'on obtient pour les dérivées partielles se simplifie beaucoup (penser à la symétrie pour ne pas refaire deux calculs); cependant, il faut bien penser que $\sqrt{X^2}$ ne vaut pas toujours X mais doit être remplacé par $|X|$.

Exercice 3.7 Procéder comme pour l'exercice 3.5, mais attention, ici, on demande l'ouvert le plus grand possible, on ne se contentera pas d'un domaine qui convient. On pensera, lorsque c'est possible, à utiliser la symétrie en x et y de l'expression de $f(x, y)$ pour ne pas faire de calcul inutile : si $f(x, y) = f(y, x)$, connaissant $\frac{\partial f}{\partial x}$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, on trouve $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en échangeant le rôle de x et y dans ces expressions.

Exercice 3.8 1. Considérer la première fonction partielle en (x, y) : la condition imposée la rend constante : attention, ceci ne signifie pas que f est constante, car la constante dépend de y .

2. Échanger le rôle de x et y .

3. Appliquer ce qui précède à une des dérivées partielles de f , en se rappelant la définition de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. On obtient une condition nécessaire : $f(x, y)$ est la somme de deux fonctions d'une variable ; il faut ensuite vérifier.

Exercice 3.9 On a besoin du calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en un point $(x, y) \neq (0, 0)$ (comme dans l'exercice III.5), puis de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (on peut éviter ce calcul si on est astucieux) ensuite, on calculera $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, mais là on doit revenir à la définition. Ensuite on peut calculer, toujours grâce à la définition les deux dérivées partielles secondes croisées en $(0, 0)$ (inutile de calculer ces dérivées secondes pour $(x, y) \neq (0, 0)$) ; on trouvera des valeurs différentes, mais ça ne veut pas dire que le théorème de Schwarz est faux.

Exercice 3.10 On utilisera simplement le théorème 3.40 (p. 97).

Pour 1., on trouve un résultat particulièrement simple.

Exercice 3.11 La démarche est toujours la même : on commence par utiliser le théorème 3.49 (p. 111), ce qui permet de déterminer les points où il peut y avoir un extremum, en résolvant le système de deux équations à deux inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right.$$

Puis on examine chaque « candidat extremum » : pour chacun d'entre eux, on essaie d'appliquer le théorème 3.52 (p. 114) : on calcule les nombres r, s, t puis le nombre $s^2 - rt$. Lorsque le résultat est négatif ou positif, le théorème permet de conclure facilement. Lorsque le résultat est nul, on doit en général essayer une technique de « bricolage » : des indications sont données plus loin.

1. Pas de problème.

2. Parmi les 3 points critiques, un seul (le plus simple) pose problème. On montre que ce n'est pas un extremum en considérant la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ lorsque $(x(t), y(t))$ est la paramétrisation d'une droite passant par ce point litigieux. Si on choisit un des axes de coordonnées, cette fonction présente un maximum relatif, et si on choisit une des bissectrices du repère, c'est un minimum relatif. Avec un raisonnement précis, cela permet de conclure.
3. Pour résoudre le système, on fait une substitution, et on obtient une équation du troisième degré qui possède une racine « évidente » qui est un nombre entier pas très grand. Il y a trois « candidats extremaums », et aucun ne pose problème, même si les calculs sont un peu ardu pour deux d'entre eux.
4. Pour résoudre le système, substituer dans la deuxième équation la valeur de $2x$ que l'on tire de la première, puis factoriser $(e^y + 1)$, et enfin étudier la fonction de y qui doit s'annuler : on montre facilement qu'elle est strictement monotone et qu'elle n'admet donc qu'une racine, qui est d'ailleurs évidente. Ensuite, il n'y a plus de problème.
5. Les deux axes de coordonnées sont des ensembles d'« extremaums possibles », et il y a un autre point isolé. Ce dernier ne pose aucun problème. Pour les axes, on peut montrer que les points de l'axe des ordonnées sont en général des extremaums relatifs, et que ceux de l'axe des abscisses n'en sont pas, mais c'est très difficile, et vous avez le droit de « laisser tomber ».

3.7 — 3.8 Différentiabilité

Exercice 3.12 Se ramener à la définition de la différentiabilité, après avoir déterminé précisément quelle forme linéaire on étudie (par exemple en fixant sa matrice).

Exercice 3.13 Dans chacun des cas, il y a toute une famille de points pour lesquels il n'y a pas vraiment de problème en vertu du théorème 3.62 (p. 125). Seule l'origine pour le 1., les axes de coordonnées en 2. et les bissectrices du repère pour 3. posent problème. On montrera pour tous ces cas qu'il n'y a pas différentiabilité en utilisant le théorème 3.60 (p. 124) : il suffira de prouver qu'au moins une des dérivées partielles n'existe pas (en revenant à la définition)

Exercice 3.14 Dans les deux cas, il n'y a aucun problème sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en vertu du théorème 3.62 (p. 125). On essaie ensuite de montrer qu'il n'y a pas différentiabilité en $(0,0)$ en espérant que les dérivées partielles n'existent pas. Si elles existent, on regarde si elles sont continues en $(0,0)$: si c'est le cas on peut assurer que f est différentiable en ce point. Si elle ne sont pas continues (c'est le cas au moins dans un des deux cas), on est obligé de revenir à la définition de la différentiabilité : on détermine la seule valeur que peut prendre la fonction $\varepsilon(h, k)$

de la définition, et on étudie sa limite pour $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Si ε n'admet pas de limite ou admet une limite non nulle, alors f n'est pas différentiable en $(0, 0)$; si ε a une limite nulle, c'est gagné : f est différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3.15 Aucune difficulté : on applique les définitions.

Exercice 3.16 Pas de difficulté pour f et g . La deuxième méthode pour les fonctions composées consiste à utiliser le corollaire 3.75 (p. 140) (la première consistait à déterminer l'expression de ces fonctions composées et à calculer la matrice jacobienne directement).

Exercice 3.17 1. Pour montrer qu'une application φ est bijective, on étudie le nombre de solutions, pour tout Y dans l'ensemble d'arrivée, de l'équation $\varphi(X) = Y$: si on arrive à montrer que dans chaque cas il y a une unique solution, c'est gagné. Pour étudier ce nombre de solutions, le plus simple, c'est encore, lorsque c'est possible, de résoudre cette équation (qui est en fait un système d'équations) : l'intérêt de cette résolution est qu'en même temps, si on a une bijection, on a déterminé la bijection réciproque. Attention, si on a prévu un ensemble de départ trop grand pour φ , on peut trouver plusieurs solutions au système dans chaque cas. Le remède, dans ce cas, consiste à rétrécir l'ensemble de départ pour que le système n'ait plus qu'une solution.

2. Voir l'exercice précédent 3.16, car on doit calculer les dérivées partielles d'une fonction composée : la matrice jacobienne répond à cette demande.

3. Résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, ce n'est pas très difficile si on a une technique sûre comme la méthode de Kramer (ou des déterminants).

4. On reporte dans l'équation ce qu'on vient de calculer, on simplifie l'équation obtenue, on doit trouver quelque chose de très simple, du type des problèmes de l'exercice 3.8 ; on conclut comme dans cet exercice pour les variables u, v , puis on revient à x, y .

5. On utilise que f est solution, donc il existe une fonction $g\dots$

On calcule alors la dérivée partielle par rapport à x de cette expression, cela donne une équation qui se simplifie bien si on introduit v , et qui permet de déterminer g à une constante près. On détermine ensuite la constante en utilisant la dernière condition.

Exercice 3.18 Même démarche qu'à l'exercice précédent avec des calculs beaucoup plus simples.

Exercice 3.19 S'inspirer de l'exemple traité p. 128. Attention aux notations, ici on doit remplacer la fonction f et les variables (x, y) respectivement par R et (R_1, R_2) . Quant à ΔR_1 et ΔR_2 , ils représentent h et k .

Exercice 3.20 Le calcul direct des dérivées partielles ne présente pas de difficulté. L'intérêt de cet exercice est d'utiliser les coordonnées polaires, même si ça ne simplifie pas énormément les calculs. Dans chaque cas, on introduit $F = f \circ \psi$ (et $G = g \circ \psi$), on calcule les dérivées partielles de f (par rapport à x et y , et en (x, y)) en fonction de celles de F (par rapport à r et θ , et en (r, θ)), sachant que $(x, y) = \psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. (Même chose pour g et G). Les expressions de F et de G sont toujours très simples.

Un rappel de trigonométrie utile est $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$ et une formule analogue pour $\sin 3\theta$ qu'on peut retrouver à partir de la formule de Moivre $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Exercice 3.21 On applique le corollaire 3.75 (p. 140) : on a ensuite besoin d'inverser la matrice jacobienne du changement de variable qu'on utilise. C'est la difficulté de cet exercice d'inverser ces matrices. Pour les coordonnées cylindriques, ce n'est pas beaucoup plus difficile que pour les coordonnées polaires en dimension 2, mais pour les coordonnées sphériques, cette inversion est plus délicate. Une méthode efficace d'inversion de matrice est la suivante :

« L'inverse d'une matrice M est égale à 1 sur le déterminant multiplié par la transposée de la comatrice de M » :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t (\text{com}(M))$$

La comatrice $\text{com}(M)$ de la matrice M est la matrice que l'on obtient en remplaçant chaque terme m_{ij} de la matrice M par le déterminant des termes qui restent en supprimant la

i -ème ligne et la j -ème colonne, ce déterminant étant affecté du signe – si $i + j$

est impair. Si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a

$$\text{com}(M) = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} e & f \\ h & i \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} d & f \\ g & i \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} d & e \\ g & h \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc} b & c \\ h & i \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a & c \\ g & i \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} a & b \\ g & h \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} b & c \\ e & f \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{cc} a & c \\ d & f \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} a & b \\ d & e \end{array} \right| \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on a réussi à inverser cette matrice jacobienne, on obtient facilement une expression de toutes les dérivées partielles de P, Q, R en fonction des dérivées partielles des fonctions $\hat{P} = P \circ \psi$ ou $\tilde{P} = P \circ \phi$ (idem pour Q et R), ψ et ϕ étant les applications changement de variables cylindriques et sphériques (notations du cours).

Exercice 3.22 On a intérêt à poser $G = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $H = \frac{\partial f}{\partial y}$. On a facilement une expression de $G(x, y)$ et de $H(x, y)$ en fonction des dérivées partielles de $\tilde{F} = F \circ \psi$ en (r, θ) , sachant que $(x, y) = \psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Ces expressions permettent de connaître $\tilde{G}(r, \theta)$ et $\tilde{H}(r, \theta)$ (\tilde{G} et \tilde{H} sont définies de la même façon que \tilde{F}).

Mais ΔF s'exprime facilement en fonction des dérivées partielles de G et H , et ces dérivées partielles se calculent en fonction des dérivées partielles de \tilde{G} et \tilde{H} , que l'on peut calculer en fonction de celles de \tilde{F} , puisqu'on connaît l'expression de ces fonctions.

Exercice 3.23 En 1., 3. et 4., on trouve des résultats remarquables, du type $(fg)' = f'g + fg'$.

En effet, le gradient, la divergence et le rotationnel sont tous trois des espèces de dérivations. On doit bien réfléchir pour les produits qui interviennent dans chaque formule.

Par exemple, pour d), $\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{U})$ est une espèce de dérivation du produit $f \vec{U}$. On trouve donc un résultat du type

$$(\text{dérivée de } f) \vec{U} + f (\text{dérivée de } \vec{U})$$

La dérivée de f qui intervient ne peut être que le gradient de f . Le produit de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ par \vec{U} doit donner un résultat vectoriel, c'est donc un produit vectoriel. Quant au produit de f par la « dérivée » de \vec{U} , il doit donner lui aussi un résultat vectoriel : forcément on prendra le rotationnel de \vec{U} . Finalement, la formule à établir est donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{U}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{U} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U}$$

Les démonstrations des formules sont toujours élémentaires.

Pour 2., on applique simplement le résultat établi en 1. pour chaque morceau de $\vec{U} \cdot \vec{V}$, mais ce qu'on obtient n'a rien de très remarquable.

CHAPITRE 4

Indications pour les exercices sur l'intégrale curviligne et la longueur d'une courbe

Exercice 4.1 Il suffit d'appliquer la proposition 4.14 (p. 172), après avoir défini, dans chaque cas une fonction ϕ .

Exercice 4.2 Bien paramétriser les arcs, c'est la principale difficulté : après, il suffit d'appliquer servilement la définition.

Que remarque-t-on ? N'aurait-on pas pu procéder autrement ?

Exercice 4.3 Ici aussi, la seule difficulté, c'est de paramétriser.

L'arc de cercle parcouru « à l'envers » pose néanmoins un autre problème, mais la façon la plus simple de procéder consiste à utiliser l'arc inverse.

Exercice 4.4 On se contente d'appliquer la définition traduite en dimension 3, puisque la paramétrisation est donnée

Exercice 4.5 pour 1., 2., 3., c'est comme d'habitude. Pour l'arc de cercle qui est dans le mauvais sens, le plus simple consiste à paramétriser l'arc inverse, et de changer le signe du résultat.

pour 4., penser au théorème 4.36 (p. 190), et séparer en deux morceaux le champ vectoriel, avec un morceau qui sera un champ de gradients.

Exercice 4.6 Aucune difficulté

Exercice 4.7 Aucune difficulté

Exercice 4.8 La question est ambiguë, mais il s'agit évidemment de calculer la longueur de la courbe sur un tour.

En appliquant la formule, faire attention que $\sqrt{X^2} = |X|$, et séparer en plusieurs morceaux l'intégrale, pour supprimer les valeurs absolues selon le signe de $\sin \frac{3t}{2}$

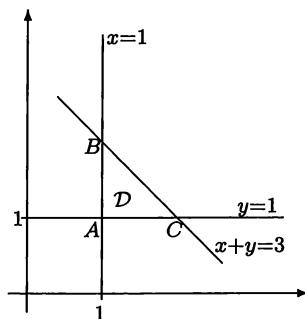
Exercice 4.9 Bien fixer les hypothèses. Pour toute parabole, il existe un repère orthonormé dans lequel l'équation est $y = kx^2$; l'arc est alors caractérisé par les abscisses a et b de ses extrémités. Pour calculer une primitive d'une expression du type $\sqrt{1 + \alpha x^2}$, il faut utiliser un changement de variable utilisant la fonction sh (sinus hyperbolique).

Exercice 4.10 Il faut essayer de déterminer une paramétrisation de la frontière, qui est la courbe d'équation $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. En se rappelant que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, l'idée est de prendre $x = \cos^3 \theta \dots$

CHAPITRE 5

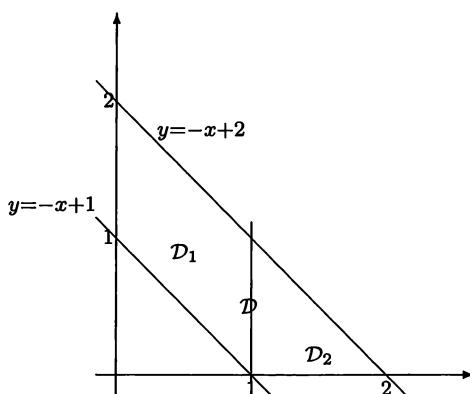
Indications pour les exercices sur intégrales doubles, triples et de surface

Exercice 5.1



D est ici un triangle ABC . On peut choisir de privilégier x ou y . Quelle que soit la variable privilégiée, elle varie entre 1 et 2 ; l'autre variable, elle, variera entre 1 et une valeur qu'on détermine grâce à une équation cartésienne de la droite (BC).

Exercice 5.2

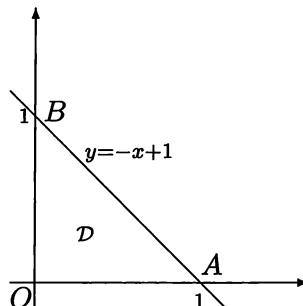


Ici D n'est pas un triangle, mais un trapèze. En privilégiant x , qui varie entre 0 et 2, on s'aperçoit que selon le domaine où se trouve x , il y a 2 possibilités pour y :

- si $x \in [0, 1]$, alors y doit varier de telle façon que le point (x, y) reste entre les deux droites obliques $y = 1 - x$ et $y = 2 - x$; cela correspond à $y \in [1 - x, 2 - x]$;
- si $x \in [1, 2]$, y doit varier de façon à ce que le point (x, y) reste entre l'axe des abscisses ($y = 0$) et la droite $y = 2 - x$; cela correspond à $y \in [0, 2 - x]$.

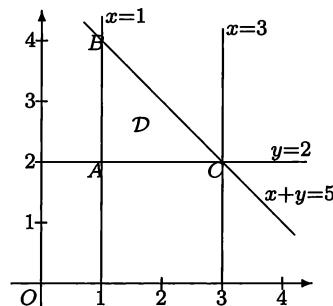
La bonne façon de gérer cette difficulté (une condition sur y pas toujours la même suivant le domaine de x) consiste à utiliser l'additivité de l'intégrale double, en « coupant » \mathcal{D} en deux sous-domaines. On écrira $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et on caractérisera correctement les deux sous-domaines.

Exercice 5.3

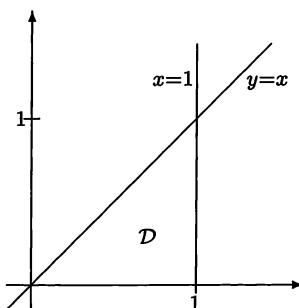


Ici aussi \mathcal{D} est un triangle, et en s'inspirant de ce qui a été fait à l'exercice V.1, il n'y a pas vraiment de difficulté.

Exercice 5.4 \mathcal{D} est encore un triangle ABC , et on procède comme pour les exercices précédents.



Exercice 5.5 \mathcal{D} est ici est le rectangle (qui est même un carré) $[0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2$ (il n'est peut-être pas indispensable de le représenter ?), et de plus les variables sont séparables.

Exercice 5.6

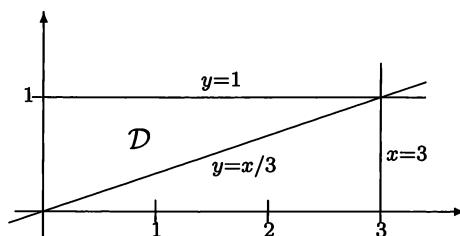
Pour la même fonction à intégrer que dans l'exercice précédent, les calculs sont ici plus difficiles, parce que le domaine n'étant pas un rectangle (mais un triangle), les variables ne peuvent donc pas être séparables. Remarquons que la manière dont est défini ici \mathcal{D} permet de calculer directement cette intégrale double, même si on n'a pas représenté le domaine. \mathcal{D} est ici aussi un triangle.

Exercice 5.7 Ici encore \mathcal{D} est le même triangle qu'à l'exercice 5.3.

Pour pouvoir faire les calculs facilement, il est intéressant de se faire la petite remarque préliminaire suivante (révision d'analyse élémentaire) : pour $c > 0$, une primitive de la fonction $t \mapsto c^t = e^{t \ln c}$ est la fonction $t \mapsto \frac{e^{t \ln c}}{\ln c} = \frac{c^t}{\ln c}$.

Exercice 5.8 On ne connaît pas de primitive classique de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, donc il n'est pas possible de calculer I directement. On va donc se ramener au calcul d'une intégrale double $I = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ qu'on essaiera de calculer dans l'autre sens, c'est-à-dire, grâce à Fubini en privilégiant y .

Le domaine \mathcal{D} n'est pas ici précisé par l'énoncé, et on doit le retrouver. Il est caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{x}{3} \leq y \leq 1 \end{cases}$; on peut donc en déduire que \mathcal{D} est la partie du plan incluse dans la bande verticale entre les droites $x = 0$ et $x = 3$, et qui est limitée en bas par la droite $y = \frac{x}{3}$ et en haut par la droite horizontale $y = 1$. On peut donc représenter \mathcal{D} qui est un triangle.



On terminera en calculant cette intégrale double en privilégiant y .

Exercice 5.9 Une tentative brutale de calcul de cette intégrale n'aboutit pas : bien que le domaine ait une caractérisation permettant d'écrire directement

$$I = \int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{\min\{2,x\}} \sin \frac{\pi x}{2y} dy,$$

on ne connaît pas de primitive classique d'une fonction $t \mapsto \sin \frac{a}{t}$ (ici $a = \frac{\pi x}{2}$), donc on ne peut pas aller plus loin dans cette voie.

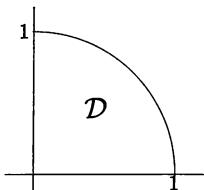
La solution consiste à représenter D et ensuite à caractériser D en privilégiant y . Il est important de bien caractériser les courbes frontières : ici $y = x \iff x = y$ et $y = \sqrt{x} \iff x = y^2$.

Exercice 5.10 Ici la forme du domaine (un disque centré à l'origine de rayon a) (dessin pas vraiment indispensable ?) et la forme de la fonction (beaucoup de $x^2 + y^2 = r^2$) sont des indices forts qu'on a tout intérêt à passer en polaires.

En coordonnées polaires, le domaine D est caractérisé par $r \leq a$, avec θ variant dans un intervalle de largeur 2π pour décrire un tour complet.

Exercice 5.11

Le domaine D est le quart du disque unité situé dans le premier quadrant du repère :

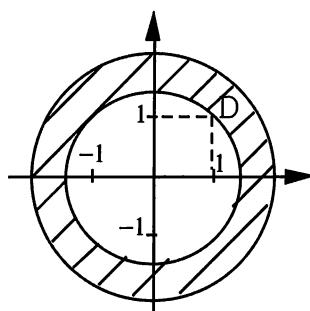


On peut, si on le souhaite, calculer directement cette intégrale double, en privilégiant x et en remarquant que D est caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}. \end{cases}$

Il est également possible de passer en polaires (c'est peut-être plus naturel) ; une caractérisation de D en polaires est $r \leq 1$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Les deux calculs sont compliqués.

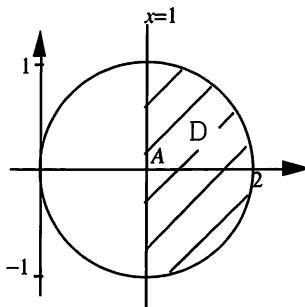
Exercice 5.12



La forme du domaine D (une couronne centrée en l'origine) suggère bien évidemment un passage en polaires. Un calcul direct serait une performance gratuite extrêmement difficile à réaliser. La simple caractérisation de D sous une forme permettant d'intégrer est déjà fort difficile à réaliser.

En polaires, en revanche, D est simplement caractérisé par $2 \leq r^2 \leq 4$, c'est-à-dire $\sqrt{2} \leq r \leq 2$ avec θ dans un intervalle de largeur 2π pour pouvoir faire un tour complet.

Exercice 5.13 En écrivant $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \iff (x-1)^2 + y^2 \leq 1$, on s'aperçoit que D est à l'intérieur du disque de centre $A(1, 0)$ et de rayon 1. La condition supplémentaire $x \geq 1$ signifie qu'on ne prend dans ce disque que les points à droite du diamètre vertical.



La frontière du disque est caractérisée par $x^2 + y^2 - 2x = 0 \iff y = \pm\sqrt{2x - x^2}$.

En procédant ainsi, on risque de buter sur une primitive un peu compliquée à calculer, aussi est-il plus simple de passer en polaires.

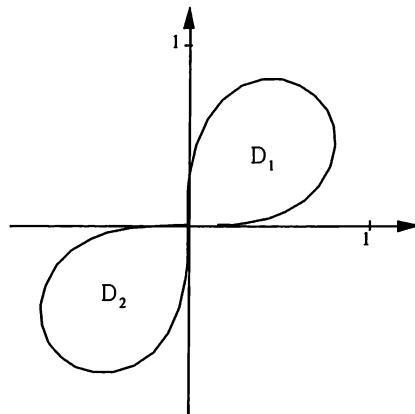
Pour ce calcul, il est indispensable de privilégier θ , et ensuite de caractériser en polaires les frontières de ce domaine : $x = 1 \iff r \cos \theta = 1 \iff r = \frac{1}{\cos \theta}$ et $x^2 + y^2 - 2x = 0 \iff r^2 - 2r \cos \theta = 0 \dots$. On obtient ainsi les bornes de l'intégrale en r .

On a alors besoin de trouver une primitive de $\cos^4 \theta$ qu'on obtient grâce à la linéarisation $\cos^4 \theta = \frac{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8}$.

Exercice 5.14 Il serait très difficile de travailler sans passer en polaires. L'inéquation caractérisant D s'écrit en polaires

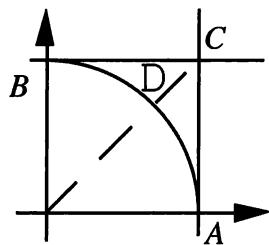
$$r^4 \leq r^2 \sin \theta \cos \theta \iff r \leq \sqrt{\sin \theta \cos \theta}.$$

Pour que cette inéquation corresponde à des points du plan, il est nécessaire que $\sin \theta \cos \theta \geq 0$, donc qu'on soit dans le premier quadrant ($x \geq 0$ et $y \geq 0$) ou dans le quadrant symétrique par rapport à l'origine ($x \leq 0$ et $y \leq 0$). La représentation de D est celle-ci. D est un *lemniscate de Bernoulli*.

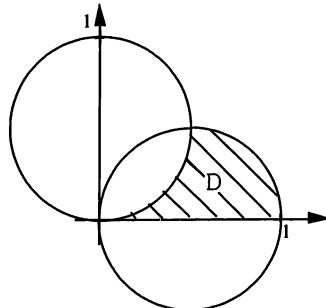


On peut considérer que $D = D_1 \cup D_2$, D_1 étant la boucle en haut à droite (dans le premier quadrant) et D_2 étant la boucle du bas. Le changement de variable $(x, y) = \varphi(u, v) = (-u, -v)$ dont le Jacobien vaut clairement 1 permet de montrer facilement que $\iint_{D_2} \sqrt{xy} \, dx \, dy = \iint_{D_1} \sqrt{xy} \, dx \, dy$ donc on a $I = 2 \iint_{D_1} \sqrt{xy} \, dx \, dy$. D_1 est caractérisé en polaires par $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{\sin \theta \cos \theta}. \end{cases}$

Exercice 5.15



Le domaine D est ici le complémentaire du disque unité dans le carré limité par l'origine, le point $A = (1, 0)$, le point $C = (1, 1)$ et le point $B = (0, 1)$. Malgré la présence de nombreux termes en $x^2 + y^2$ dans cet exercice, le passage en polaires n'est pas la meilleure méthode.

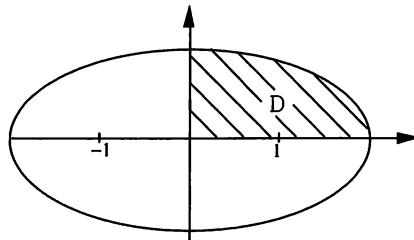
Exercice 5.16

D est ici l'ensemble des points d'ordonnée positive qui appartiennent au disque de centre $(\frac{1}{2}, 0)$, de rayon $\frac{1}{2}$, tout en étant en dehors du disque de centre $(0, \frac{1}{2})$, de rayon $\frac{1}{2}$. Remarquons que ces deux disques ont leur cercle frontière qui passe par l'origine.

Ce n'est pas une évidence, mais il vaut mieux passer en polaires : en observant la figure, on remarque que les points de D sont tous tels que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$; ensuite, on traduit en polaires les équations des deux frontières.

$$x^2 + y^2 - y = 0 \iff r^2 - r \sin \theta = 0 \iff r = \sin \theta ; x^2 + y^2 - x = 0 \iff r = \cos \theta$$

On en déduit facilement la caractérisation de D en polaires.

Exercice 5.17

(figure dans le cas $a = 2, b = 1$).

Cette intégrale peut se calculer directement ; D est un quart de l'intérieur de l'ellipse de demi-axes a et b . On peut le caractériser ainsi

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \end{cases}$$

Il est intéressant d'essayer d'utiliser un changement de variable « presque » polaire : On peut poser $x = a\rho \cos \theta$ et $y = b\rho \sin \theta$, de sorte que le Jacobien de ce changement de coordonnées est facile à calculer.

Exercice 5.18

On intègre ici une forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ avec $P = -y^3$ et $Q = x^3$. Le calcul direct ne pose aucune difficulté, et en utilisant Green-Riemann, il sera bien sûr utile de passer en polaires.

Exercice 5.19

K est le triangle OAB de l'exercice 5.3 : voir la figure p. 277.

Pour paramétriser ∂K^+ , on découpe en trois morceaux, en posant $\partial K^+ = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ avec γ_1 qui est le segment $[OA]$ orienté de gauche à droite, γ_2 qui est le segment $[AB]$ orienté de A vers B , c'est-à-dire de droite à gauche et γ_3 qui est le segment $[BO]$ orienté de haut en bas. On utilisera aussi les arcs $\hat{\gamma}_2$ et $\hat{\gamma}_3$ inverses respectivement de γ_2 et γ_3 et plus faciles à paramétriser.

Avec Green-Riemann, aucune difficulté si on prend le temps de bien préciser la forme différentielle $\omega = P \, dx + Q \, dy$ que l'on intègre le long de ∂K^+ . L'intégrale double sur K est très simple et les bornes d'intégration sont les mêmes que dans l'exercice V.3.

Exercice 5.20

D est le domaine de l'exercice 5.15 (voir figure p. 281).

Directement : on procède comme pour l'exercice 5.15 : on ne se lancera plus dans un passage en polaires.

Avec Green-Riemann :

Il faut déjà réussir à interpréter $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$ sous une forme $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. Il s'agit donc de trouver des fonctions P et Q (des deux variables x, y) solutions de $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y)$. Une solution « évidente » est fournie par le calcul direct que l'on vient de faire : on remarque que

$$P(x, y) = \frac{x}{2(1+x^2+y^2)} \quad \text{est telle que} \quad -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

Il suffit donc de prendre $Q = 0$ et cette fonction P (il y a d'autres solutions).

Le contour de D se décompose en trois sous-arcs classiques. Attention, l'arc de cercle est parcouru dans le sens indirect.

Exercice 5.21

Cet exercice se traite un peu comme l'exemple 1 du cours p. 233.

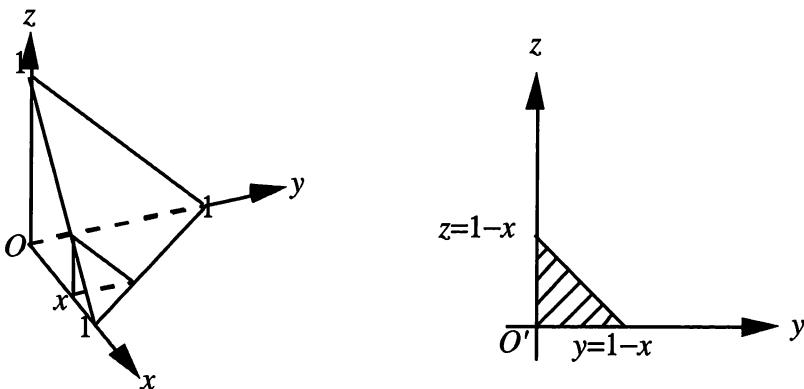
Puisque $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ caractérise la sphère centrée à l'origine de rayon a , D est ici clairement le domaine de l'espace compris entre la sphère de rayon 1 et celle de rayon $\sqrt{2}$ (toutes deux étant centrées à l'origine), la condition $z \geq 0$ précisant qu'on n'en garde que la moitié supérieure.

La forme du domaine impose le choix des coordonnées sphériques : ρ varie entre 1 et $\sqrt{2}$, φ décrit un intervalle de largeur 2π et θ reste entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, pour ne garder que des points de cote positive.

On obtient des variables séparables.

Exercice 5.22

D est un tétraèdre limité par les plans des axes de coordonnées et le plan d'équation $x + y + z = 1$. On procédera comme dans l'exemple du cours p. 231

**Exercice 5.23**

On est tenté d'utiliser les coordonnées sphériques (ce n'est pas impossible), mais en fait les calculs sont plus simples en se contentant des coordonnées cylindriques : La boule de centre O , de rayon a est caractérisée par

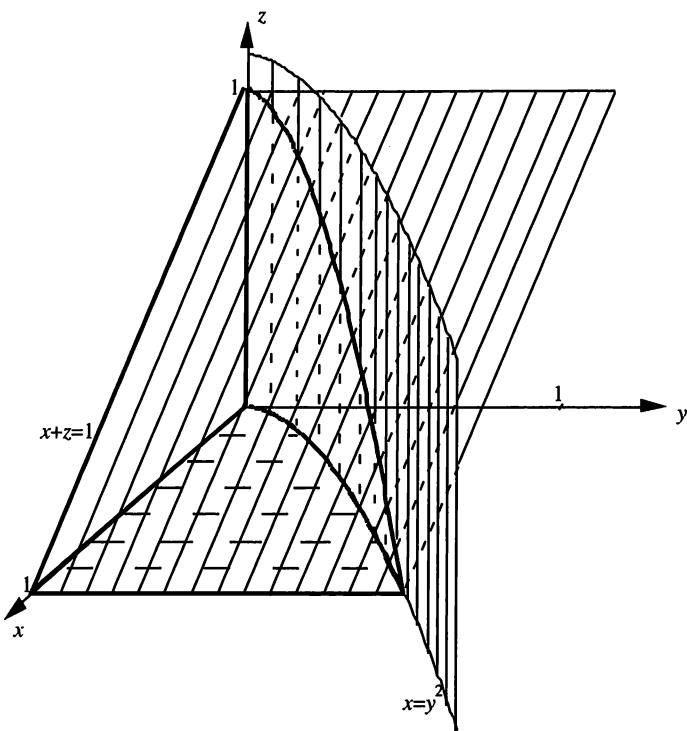
$$\begin{cases} -a \leq z \leq a \\ 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 - z^2}. \end{cases}$$

Exercice 5.24

Même démarche qu'à l'exercice précédent, sauf qu'on ne prend que la demi-boule supérieure.

Exercice 5.25

Pour une fois, dans cet exercice, il n'y a aucune difficulté, ni pour le domaine ni pour les bornes d'intégration. On aura juste besoin des formules de trigonométrie : $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$; $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

Exercice 5.26

Le domaine était ici assez difficile à se représenter. Si les deux conditions $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x + z \leq 1$ sont faciles à interpréter, la condition $y^2 \leq x$ est un peu plus compliquée : dans le plan $x0y$ ($z = 0$), la zone considérée est limitée par la parabole $y^2 = x$, et avec une orientation classique, c'est la partie du plan à droite de cette parabole, l'« intérieur ». Dans l'espace, la frontière $y^2 = x$ caractérise donc l'ensemble des points qui se projettent verticalement sur la parabole $y^2 = x$ dans le plan $z = 0$, c'est ce qu'on appelle une nappe cylindrique de direction l'axe Oz , s'appuyant sur la parabole $y^2 = x$. L'ensemble des points de l'espace tels que $y^2 \leq x$ est donc l'« intérieur » de cette nappe cylindrique.

La démarche la plus naturelle consiste à privilégier (x, y) qui décrit la partie B du plan $x0y$ caractérisée par $\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Pour chaque (x, y) fixé, on a alors z qui varie entre 0 et $1 - x$ et l'intégrale se calcule facilement.

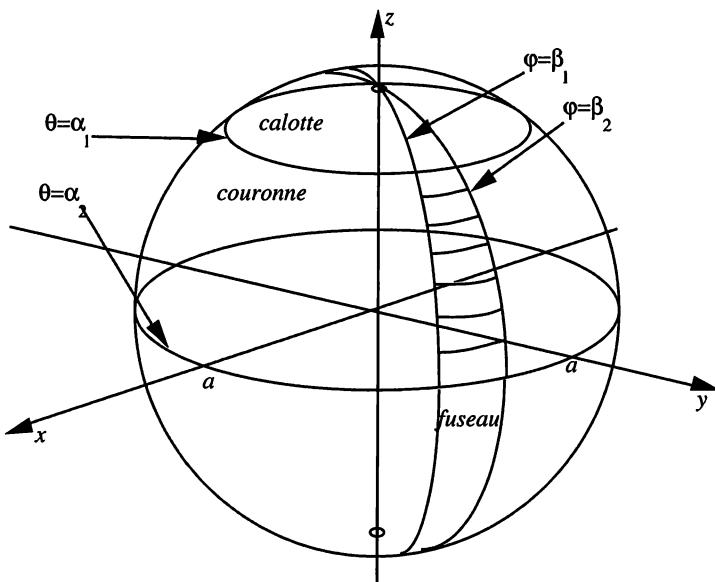
Exercice 5.27 L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ caractérise un ellipsoïde centré à l'origine, a , b et c étant les longueurs des « demi-axes ».

Les sections avec les plans de coordonnées sont des ellipses.

D est donc le huitième de cet ellipsoïde compris dans la partie de l'espace où toutes les coordonnées sont positives

Il serait assez compliqué de calculer directement cette intégrale triple, et il est astucieux de faire un changement de variable pour se ramener à un domaine plus simple, la boule unité. Pour cela, il suffit de poser $X = \frac{x}{a}$; $Y = \frac{y}{b}$; $Z = \frac{z}{c}$. Le changement de variable correspondant est l'application $\phi : (X, Y, Z) \mapsto (x, y, z) = (aX, bY, cZ)$ et on a clairement $D = \phi(B)$, B étant le huitième de la boule unité de \mathbb{R}^3 caractérisé par $X^2 + Y^2 + Z^2 \leq 1$, $X \geq 0$, $Y \geq 0$, $Z \geq 0$. Ensuite, l'intégrale obtenue peut alors facilement se calculer en utilisant les coordonnées sphériques : les variables deviennent séparables.

Exercice 5.28 Voici à quoi ressemblent les différentes zones :



Sur ce dessin, on a choisi, pour ne pas surcharger de prendre $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Une terminologie « géographique » peut aider à comprendre les termes employés :

Les lignes $\theta = \alpha_i$ sont des parallèles ($\theta = \alpha_2$ est l'équateur !)

Les lignes $\varphi = \beta_i$ sont des méridiens.

Un fuseau est une zone comprise entre deux méridiens (cf « fuseau horaire »)

Une calotte est une zone située au-dessus d'un parallèle (cf « calotte polaire »)

Une couronne est une zone située entre deux parallèles.

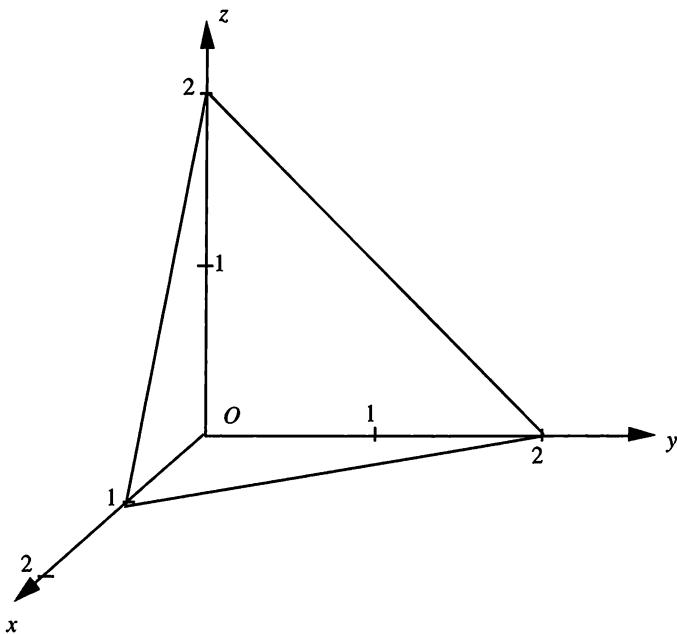
Une maille sphérique est l'intersection d'un fuseau et d'une couronne (zone hachurée sur le dessin).

Les coordonnées sphériques fournissent évidemment la paramétrisation à utiliser. à chaque fois seul le domaine D d'intégration (donné par l'énoncé) change.

On doit calculer $\mathcal{A} = \iint_D H \, d\theta \, d\varphi$, avec H déjà calculé dans le cas d'une sphère de rayon 1 : $H = \sin \theta$ (voir cours p. 241).

Pour une sphère de rayon a , le résultat est assez naturellement multiplié par a^2 , puisqu'il s'agit de l'aire d'un élément de surface, et qu'une aire est proportionnelle au carré des dimensions, mais faites le calcul quand même.

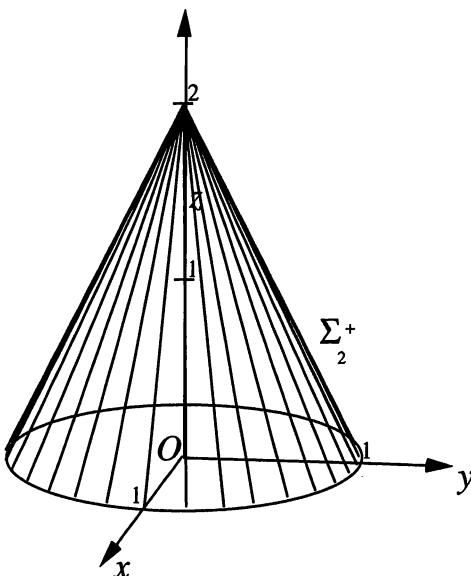
Exercice 5.29 La surface qui nous intéresse est la partie du plan $\Pi : 2x+y+z = 2$ située à l'intérieur du huitième d'espace formé des points dont les trois coordonnées sont positives : c'est un tétraèdre.



Pour pouvoir appliquer la formule du cours, il suffit de paramétriser cette surface. Le plus simple est de prendre (x, y) comme paramètres ; il suffit de réfléchir au domaine D que décrivent (x, y) pour qu'avec $z = 2 - 2x - y$, on obtienne tout le triangle. C'est le triangle du plan xOy délimité par les axes Ox et Oy et la droite passant par $(1, 0)$ et $(0, 2)$.

Exercice 5.30 La surface Σ^+ limitant le cône peut se décomposer en deux morceaux : la base Σ_1^+ (orientée vers le bas) et la nappe conique Σ_2^+ proprement dite qui doit être orientée vers le haut.

Ces deux surfaces peuvent être paramétrées en utilisant (x, y) comme paramètres, qui décrivent le disque unité D du plan xOy .



Mais la paramétrisation $\begin{cases} z = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases}$ paramètre Σ_1^- (orientée vers le haut). On a donc $\Phi_{\Sigma_1^+}(\vec{V}) = -\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V})$.

Ici, on a $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 = z$, donc $(A, B, C) = (0, 0, 1)$ et $(P, Q, R) = (x, y, z) = (x, y, 0)$.

Pour le cône, puisqu'on a clairement $z + 2r = 2$, la paramétrisation de Σ_2^+ est

$$\begin{cases} z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

Les calculs se simplifieront grâce à un passage en polaires assez naturel.

La deuxième manière consiste bien sûr à utiliser la formule d'Ostrogradski. Il faudra alors passer en coordonnées cylindriques pour simplifier les calculs.

Exercice 5.31 Il est intéressant d'essayer d'imaginer à quoi correspond cette surface orientée Σ . Sur les deux plans xOz et yOz (respectivement $y = 0$ et $x = 0$), la projection orthogonale de Σ est le disque unité, puisque elle est formée des points $(x, z) = (u, v)$ (ou $(y, z) = (u, v)$) tels que $u^2 + v^2 \leq 1$. Σ est donc une ellipse de l'espace, incluse dans le plan $x = y$ médiateur de ces deux plans.

En fait, cette représentation n'est pas nécessaire, car on peut se contenter d'appliquer « bêtement » les formules.

Pour l'utilisation de Stokes-Ampère, on considère déjà que I est la circulation d'un champ de vecteurs ; il suffit alors de savoir calculer un rotationnel, et ensuite il n'y a plus de difficulté.

Pour le calcul direct, $\begin{cases} u = \cos \theta \\ v = \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$ nous donne une paramétrisation dans le sens direct du bord γ de D . On en déduit la paramétrisation correspondante de Γ^+ en utilisant que $x = u$, $y = u$ et $z = v$.

Exercice 5.32 Cet exercice ne présente pas de réelle difficulté : il suffit d'appliquer tranquillement et méthodiquement toutes les techniques vues dans ce cours.

Solutions des exercices

CHAPITRE 1

1. Solutions des exercices sur la topologie dans \mathbb{R}^n

Exercice 1.1. On a $X = (X - Y) + Y$ donc $N(X) \leq N(X - Y) + N(Y)$ et $N(X) - N(Y) \leq N(X - Y)$.

De même, en échangeant le rôle de X et Y , on obtient $Y = (Y - X) + X$ donc $N(Y) \leq N(Y - X) + N(X)$ et $N(Y) - N(X) \leq N(Y - X) = N(X - Y)$

On a donc $|N(X) - N(Y)| = \max((N(X) - N(Y), N(Y) - N(X)) \leq N(X - Y)$.

Exercice 1.2. Il est clair que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $N_1(X) = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$, donc N_1 est bien une application de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Si on a $N_1(X) = 0$, alors on a $\sum_{i=1}^n |x_i| = 0$, mais une somme de nombres tous positifs ou nuls ne peut être nulle que si tous ces nombres sont en fait nuls, donc on a $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |x_i| = 0$ donc $x_i = 0$. Cela signifie justement que le vecteur X est nul et on a bien vérifié (i)'.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathbb{R}^n$, alors on a $\lambda X = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, de sorte que

$$N_1(\lambda X) = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\lambda| N_1(X).$$

et (ii) est bien vérifiée.

Pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, on a $X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ de sorte que

$$N_1(X + Y) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = N_1(X) + N_1(Y),$$

et (iii) est bien vérifiée. D'après la proposition 1.2 (p. 3) N_1 est bien une norme.

Exercice 1.3. On notera \sim la relation « est équivalente à » entre normes sur E . Plus précisément, si N et \widehat{N} sont deux normes sur E , écrire qu'on a $N \sim \widehat{N}$ signifie qu'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $X \in E$, on a $C_1N(X) \leq \widehat{N}(X) \leq C_2N(X)$.

Montrons que \sim est réflexive, symétrique et transitive.

Pour toute norme N sur E , il est clair qu'il existe deux constantes $C_1 = C_2 = 1$, strictement positives telles que pour tout $X \in E$, on a $C_1N(X) \leq N(X) \leq C_2N(X)$, puisque cela s'écrit trivialement $N(X) \leq N(X) \leq N(X)$. On a donc bien $N \sim N$ pour toute norme N donc \sim est bien réflexive.

Soient N et \widehat{N} deux normes sur E telles que $N \sim \widehat{N}$.

Il existe donc deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $X \in E$, on a $C_1N(X) \leq \widehat{N}(X) \leq C_2N(X)$.

On a donc $C_1N(X) \leq \widehat{N}(X)$, donc $N(X) \leq \frac{1}{C_1}\widehat{N}(X)$.

De même, on a $\widehat{N}(X) \leq C_2N(X)$, donc $\frac{1}{C_2}\widehat{N}(X) \leq N(X)$.

Donc en mettant bout à bout ces deux inégalités, on obtient qu'il existe deux constantes strictement positives $\alpha = \frac{1}{C_2}$ et $\beta = \frac{1}{C_1}$ telles que pour tout $X \in E$, on a

$\alpha\widehat{N}(X) \leq N(X) \leq \beta\widehat{N}(X)$, ce qui signifie exactement que $\widehat{N} \sim N$.

On a établi que $[N \sim \widehat{N} \implies \widehat{N} \sim N]$, donc \sim est bien une relation symétrique.

Soient N , \widehat{N} et \widetilde{N} trois normes sur E telles que $N \sim \widehat{N}$ et $\widehat{N} \sim \widetilde{N}$. Il existe donc quatre constantes strictement positives C_1 , C_2 , C_3 et C_4 telles que pour tout $X \in E$, on a $C_1N(X) \leq \widehat{N}(X) \leq C_2N(X)$ et on a $C_3\widehat{N}(X) \leq \widetilde{N}(X) \leq C_4\widehat{N}(X)$. $C_1N(X) \leq \widehat{N}(X)$, donc $C_1C_3N(X) \leq C_3\widehat{N}(X)$ et puisque $C_3\widehat{N}(X) \leq \widetilde{N}(X)$, on en déduit que $C_1C_3N(X) \leq \widetilde{N}(X)$.

De même, $\widehat{N}(X) \leq C_2N(X)$, donc $C_4\widehat{N}(X) \leq C_4C_2N(X)$ et puisque $\widetilde{N}(X) \leq C_4\widehat{N}(X)$, on obtient $\widetilde{N}(X) \leq C_4C_2N(X)$.

En mettant bout à bout ces deux inégalités, on obtient qu'il existe deux constantes strictement positives $\alpha = C_1C_3$ et $\beta = C_4C_2$ telles que pour tout $X \in E$, on a $\alpha N(X) \leq \widetilde{N}(X) \leq \beta N(X)$, ce qui signifie exactement que $N \sim \widetilde{N}$.

On a établi que $\left. \begin{array}{l} N \sim \widehat{N} \\ \widehat{N} \sim \widetilde{N} \end{array} \right\} \implies N \sim \widetilde{N}$, donc \sim est bien une relation transitive. \sim est bien une relation d'équivalence.

Exercice 1.4. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit j un des indices entre 1 et n tels que $\|X\|_\infty = |x_j|$.

a) On a $N_\infty(X) = |x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = N_2(X)$, ce qui établit la première inégalité. Elle ne peut pas être améliorée, car pour $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ (voir p. 2), on a clairement $N_\infty(e_1) = 1 = \sqrt{1^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = N_2(e_1)$.

b) Pour comparer $N_2(X)$ et $N_1(X)$, on compare leurs carrés.

Or, $(N_2(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ alors que lorsqu'on développe $(N_1(X))^2$, on obtient non seulement tous les carrés $|x_i|^2$, mais aussi des double produits $2|x_i||x_k|$ qui sont positifs. Plus précisément, on a

$$(N_1(X))^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} |x_i||x_k| \geq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = (N_2(X))^2.$$

On a bien $N_2(X) \leq N_1(X)$. Cette inégalité ne peut pas être améliorée, car on a aussi, pour $X = e_1$, $N_2(e_1) = 1 = N_1(e_1)$.

c) On a pour tout indice i , $|x_i| \leq |x_j|$, puisque $|x_j| = N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$; donc :

$$N_1(X) = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n|x_j| = nN_\infty(X).$$

On a obtenu $N_1(X) \leq nN_\infty(X)$. Cette inégalité ne peut pas être améliorée, car pour $W = (1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n e_i$, on a $N_1(W) = n$ et $N_\infty(W) = 1$, de sorte que $N_1(W) = nN_\infty(W)$.

d) On a $N_2(X) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{x_j^2 + \dots + x_j^2} = \sqrt{n x_j^2} = \sqrt{n} |x_j| = \sqrt{n} N_\infty$. On a montré que $N_2(X) \leq \sqrt{n} N_\infty(X)$ et cette inégalité ne peut pas être améliorée puisque pour $W = (1, \dots, 1)$, on a $N_2(W) = \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot 1 = \sqrt{n} N_\infty(W)$.

e) Pour établir l'inégalité suivante, on utilise le résultat classique

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff (a - b)^2 \geq 0.$$

Lorsqu'on calcule le carré de $N_1(X)$, on peut majorer tous les doubles produits en utilisant ce résultat : on obtient

$$(N_1(X))^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} |x_i||x_k| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} (|x_i|^2 + |x_k|^2).$$

En dénombrant attentivement les termes de la dernière somme, on constate que chaque terme $|x_l|^2$ apparaît exactement $n - 1$ fois et puisqu'il apparaît aussi une fois dans la première somme, on obtient

$$(N_1(X))^2 \leq \sum_{i=1}^n n|x_i|^2 = n \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = n(N_2(X))^2.$$

D'où le résultat $N_1(X) \leq \sqrt{n} N_2(X)$ qui ne peut pas être amélioré, comme on le constate en utilisant encore $W = (1, \dots, 1)$ qui est tel que $N_1(W) = n$ et $N_2(W) = \sqrt{n}$.

Toutes les inégalités du théorème 1.9 ont été établies et on a montré qu'aucune ne pouvait être améliorée.

Exercice 1.5. Pour s'y retrouver, on notera $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ respectivement la norme somme, la norme euclidienne et la norme du max de \mathbb{R}^2 , alors que N_1 , N_2 , N_∞ désigneront les normes correspondantes de \mathbb{R}^3 .

1. Il est clair que N est bien à valeurs dans \mathbb{R}^+ . On va donc chercher à appliquer la proposition 1.2 (p. 3).

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on suppose que $N(X) = 0$. On a donc $\sqrt{x^2 + y^2 + |z|} = 0$ donc $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ et $|z| = 0$ (somme nulle de nombres positifs). On en déduit que $x^2 + y^2 = 0$, donc $x = y = z = 0$ et on a vérifié (i)'.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a clairement :

$$N(\lambda X) = N(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + |\lambda z|} = |\lambda| \left(\sqrt{x^2 + y^2} + |z| \right) = |\lambda| N(X).$$

On a vérifié (ii).

Pour tous $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ de \mathbb{R}^3 , on a :

$$N(X + X') = N(x + x', y + y', z + z') = \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} + |z + z'|.$$

Or, l'inégalité $\|(a, b) + (c, d)\|_2 \leq \|(a, b)\|_2 + \|(c, d)\|_2$ qui est l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 peut s'écrire

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Appliquant ce résultat à l'expression de $N(X + X')$, (et aussi $|z + z'| \leq |z| + |z'|$), on obtient

$$\begin{aligned} N(X + X') &\leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \right) + |z| + |z'| \\ &\leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} + |z| \right) + \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} + |z'| \right) = N(X) + N(X'). \end{aligned}$$

On a établi (iii) et N est bien une norme.

Pour montrer qu'elle est équivalente aux normes usuelles, on applique les résultats du théorème 1.9 (p. 7).

On a, pour tout $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$N(X) = \|(x, y)\|_2 + |z| \leq \|(x, y)\|_1 + |z| = |x| + |y| + |z| = N_1(X)$$

donc $N(X) \leq N_1(X)$.

De même, on a

$$\begin{aligned} N_1(X) &= |x| + |y| + |z| = \|(x, y)\|_1 + |z| \\ &\leq (\sqrt{2}\|(x, y)\|_2) + |z| = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} + |z| \\ &\leq \sqrt{2}(\sqrt{x^2 + y^2} + |z|) = \sqrt{2}N(X) \end{aligned}$$

On a établi $N_1(X) \leq \sqrt{2}N(X)$ donc on a trouvé deux constantes strictement positives $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{2}$ telles que

$$\alpha N(X) \leq N_1(X) \leq \beta N(X).$$

N et N_1 sont donc deux normes équivalentes.

2. Il est clair que N est bien à valeurs dans \mathbb{R}^+ . On cherche donc à appliquer la proposition 1.2 (p. 3).

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on suppose que $N(X) = 0$. On a donc $(N(X))^2 = 0$, d'où $(\max(|x|, |y|))^2 + 2z^2 = 0$ et donc $(\max(|x|, |y|))^2 = 0$ et $2z^2 = 0$ (somme nulle de nombres positifs). On en déduit que $\max(|x|, |y|) = 0$, donc finalement $x = y = z = 0$ et on a vérifié (i)'.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a clairement

$$\begin{aligned} N(\lambda X) &= N(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \sqrt{\left[\max(|\lambda x|, |\lambda y|)\right]^2 + 2(\lambda z)^2} \\ &= \sqrt{\left[|\lambda| \max(|x|, |y|)\right]^2 + 2\lambda^2 z^2} = |\lambda| \sqrt{\left[\max(|x|, |y|)\right]^2 + 2z^2} = |\lambda| N(X). \end{aligned}$$

On a vérifié (ii).

Pour tous $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ de \mathbb{R}^3 , on a :

$$N(X + X') = N(x + x', y + y', z + z') = \sqrt{\left(\max(|x + x'|, |y + y'|)\right)^2 + 2(z + z')^2}$$

On a deux cas à étudier :

a) $\max(|x + x'|, |y + y'|) = |x + x'|$. Dans ce cas, on a

$$N(X + X') = \sqrt{|x + x'|^2 + 2(z + z')^2} = \sqrt{(x + x')^2 + (\sqrt{2}z + \sqrt{2}z')^2}$$

Comme dans 1), on utilise l'inégalité triangulaire de la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 :

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

On l'applique avec ici $a = x$, $c = x'$, $b = \sqrt{2}z$ et $d = \sqrt{2}z'$; nous obtenons :

$$N(X + X') \leq \sqrt{x^2 + 2z^2} + \sqrt{x'^2 + 2z'^2}.$$

On utilise alors que $x^2 = |x|^2 \leq \left(\max(|x|, |y|)\right)^2$ (et idem avec x'^2)

$$\begin{aligned} N(X + X') &\leq \sqrt{\left(\max(|x|, |y|)\right)^2 + 2z^2} + \sqrt{\left(\max(|x'|, |y'|)\right)^2 + 2z'^2} \\ N(X + X') &\leq N(X) + N(X'). \end{aligned}$$

On a établi (iii) dans le cas a).

b) $\max(|x + x'|, |y + y'|) = |y + y'|$; dans ce cas, on raisonne exactement de la même façon en échangeant le rôle de x et y , x' et y' , on obtient le même résultat, et N est bien une norme.

Pour montrer qu'elle est équivalente aux normes usuelles, on applique les résultats du théorème 1.9 (p. 7).

On a, pour tout $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} N(X) &= \sqrt{\|(x, y)\|_\infty^2 + 2z^2} \leq \sqrt{\|(x, y)\|_2^2 + 2z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} \\ &\leq \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2z^2} = \sqrt{2}N_2(X) \end{aligned}$$

donc $N(X) \leq \sqrt{2}N_2(X)$. De même, on a :

$$\begin{aligned} N_2(X) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\|(x, y)\|_2^2 + z^2} \\ &\leq \sqrt{2\|(x, y)\|_\infty + z^2} \quad (\text{car } \|Y\|_2 \leq \sqrt{2}\|Y\|_\infty) \\ &\leq \sqrt{2\|(x, y)\|_\infty + 4z^2} = \sqrt{2}\sqrt{\|(x, y)\|_\infty^2 + 2z^2} = \sqrt{2}N(X) \end{aligned}$$

On a établi $N_2(X) \leq \sqrt{2}N(X)$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}}N_2(X) \leq N(X)$, et on a trouvé deux constantes strictement positives $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{2}$ telles que

$$\alpha N_2(X) \leq N(X) \leq \beta N_2(X)$$

N et N_2 sont donc deux normes équivalentes.

3. N n'est ici pas une norme, car $N(X) = 0 \not\Rightarrow X = 0$ ((i)' n'est pas vérifié). En effet, il suffit de considérer le vecteur $X = (-2, 1, 0)$ qui est bien sûr non nul et qui est tel que $N(X) = 0$.

Exercice 1.6. d étant la distance de l'espace métrique E , on a d'après la première inégalité triangulaire (d3), pour tous $x, y, z \in E$,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z) \quad (\text{d'après (d2)}).$$

On en déduit que $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$.

De même, on obtient grâce à (d3) :

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z) \quad (\text{toujours d'après (d2)}).$$

On en déduit que $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$.

On a donc $\max(d(x, y) - d(y, z), d(y, z) - d(x, y)) \leq d(x, z)$, c'est-à-dire

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

Exercice 1.7. La boule fermée de centre $X_0 = (x_0, y_0)$, de rayon r , dont il faut justifier la représentation de la figure (1.3), est caractérisée par

$$X = (x, y) \in \overline{B}_1(X_0, r) \iff \|X - X_0\|_1 \leq r \iff |x - x_0| + |y - y_0| \leq r.$$

Pour résoudre ce type d'inéquation, une des méthodes consiste à « enlever les valeurs absolues » en étudiant les différents cas possibles.

Les quatre possibilités correspondent aux quatre régions du plan limitées par la droite horizontale et la droite verticale qui passent par X_0 .

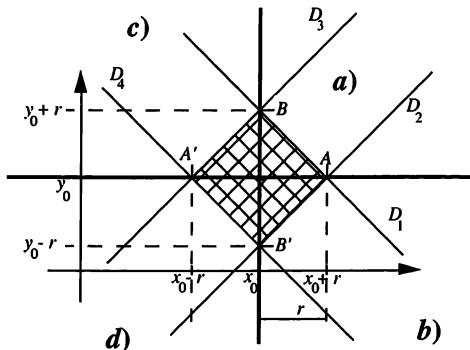
Ce sont les cas suivants :

- a) $x \geq x_0$ et $y \geq y_0$ (en haut à droite); b) $x \geq x_0$ et $y \leq y_0$ (en bas à droite);
- c) $x \leq x_0$ et $y \geq y_0$ (en haut à gauche); d) $x \leq x_0$ et $y \leq y_0$ (en bas à gauche).

Dans chacun de ces cas, on trouvera comme solution de l'inéquation un demi-plan, qui contient (x_0, y_0) (puisque ce couple est solution de l'inéquation, et qu'il appartient aux quatre zones), mais dont on ne gardera que la partie dans la zone concernée par le cas. La droite qui limite le demi-plan solution aura pour équation ce qu'on obtient en remplaçant \leq par $=$. Selon le cas, l'inéquation devient :

- a) $x - x_0 + y - y_0 \leq r$: la frontière du demi-plan est la droite D_1 : $x + y - x_0 - y_0 - r = 0$, elle passe par les points $A = (x_0 + r, y_0)$ et $B = (x_0, y_0 + r)$.
- b) $x - x_0 - y + y_0 \leq r$: la frontière du demi-plan est la droite D_2 : $x - y - x_0 + y_0 - r = 0$, elle passe par les points $A = (x_0 + r, y_0)$ et $B' = (x_0, y_0 - r)$.
- c) $-x + x_0 + y - y_0 \leq r$: la frontière du demi-plan est la droite D_3 : $-x + y + x_0 - y_0 - r = 0$, elle passe par les points $A' = (x_0 - r, y_0)$ et $B = (x_0, y_0 + r)$.
- d) $-x + x_0 - y + y_0 \leq r$: la frontière du demi-plan est la droite D_4 : $x + y - x_0 - y_0 + r = 0$, elle passe par les points $A' = (x_0 - r, y_0)$ et $B' = (x_0, y_0 - r)$.

Reportant toutes ces données sur une figure, (voir page suivante), on trouve le résultat représenté sur la figure (1.3), p. 12.



Exercice 1.8. 1. Tout d'abord, on peut vérifier que \widehat{N} est bien définie pour tout $X \in \mathbb{R}^2$. C'est le cas puisque $x^2 + xy + y^2 = \frac{x^2 + (x+y)^2 + y^2}{2} \geqslant 0$, donc on peut toujours calculer la racine carrée. Il est clair que $\widehat{N}(X) \geqslant 0$ pour tout X . D'autre part le calcul précédent montre que si $\widehat{N}(X) = 0$, alors $x^2 + (x+y)^2 + y^2 = 0$, et une somme de nombres positifs ne peut être nulle que si tous les nombres sont nuls donc $x = y = 0$ et $X = (0, 0)$.

On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\widehat{N}(\lambda X) &= \widehat{N}(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x^2 + xy + y^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x^2 + xy + y^2} = |\lambda| \widehat{N}(X).\end{aligned}$$

C'est l'inégalité triangulaire qui est la plus compliquée.

Soient $X = (x, y)$ et $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

On doit montrer que $\widehat{N}(X + X') \leqslant \widehat{N}(X) + \widehat{N}(X')$.

Cette inégalité est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned}\widehat{N}(x + x', y + y') &\leqslant \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x'^2 + x'y' + y'^2}; \\ (x + x')^2 + (x + x')(y + y') + (y + y')^2 &\leqslant \left(\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x'^2 + x'y' + y'^2} \right)^2; \\ x^2 + 2xx' + x'^2 + xy + xy' + x'y + x'y' + y^2 + 2yy' + y'^2 &\\ &\leqslant x^2 + xy + y^2 + x'^2 + x'y' + y'^2 + 2\sqrt{(x^2 + xy + y^2)(x'^2 + x'y' + y'^2)}; \\ 2xx' + xy' + x'y + 2yy' &\leqslant 2\sqrt{(x^2 + xy + y^2)(x'^2 + x'y' + y'^2)}.\end{aligned}$$

Si le membre de gauche est négatif, c'est toujours vrai, sinon c'est équivalent à :

$$(2xx' + xy' + x'y + 2yy')^2 \leqslant 4(x^2 + xy + y^2)(x'^2 + x'y' + y'^2)$$

Le membre de gauche se développe ainsi :

$$A = 4x^2x'^2 + x^2y'^2 + x'^2y^2 + 4y^2y'^2 + 4x^2x'y' + 4xyx'^2 + 8xx'yy' + 2xx'y'y' + 4xyy'^2 + 4y^2x'y'.$$

Le membre de droite se développe ainsi :

$$B = 4x^2x'^2 + 4x^2x'y' + 4x^2y'^2 + 4xyx'^2 + 4xx'yy' + 4xyy'^2 + 4x'^2y^2 + 4y^2x'y' + 4y^2y'^2.$$

Pour montrer que $A \leq B$, il suffit d'établir que :

$$6xx'yy' \leq 3x^2y'^2 + 3x'^2y^2 \iff 3(xy' - x'y)^2 \geq 0.$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie, l'inégalité triangulaire est établie.

2. On va montrer l'existence de deux constantes α et β strictement positives telles que pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on ait

$$\alpha\widehat{N}(X) \leq \|X\|_2 \leq \beta\widehat{N}(X)$$

Pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ (puisque $(x - y)^2 \geq 0$). Donc

$$\widehat{N}(X) = \sqrt{x^2 + xy + y^2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}(x^2 + y^2)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|X\|_2.$$

On a donc trouvé une valeur de β qui convient : $\beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

D'autre part, en reprenant le calcul fait pour montrer que $\widehat{N}(X)$ existe toujours, on a :

$$\widehat{N}(X) = \sqrt{\frac{x^2 + (x + y)^2 + y^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|X\|_2.$$

et une valeur de α qui convient est $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Il est possible de trouver d'autres valeurs de α, β qui conviennent, mais celles-ci sont les plus « sévères » : en effet, il est possible de trouver des X tels que $\widehat{N}(X) = \alpha\|X\|_2$: il suffit que $x + y$ soit nul ; de même, pour trouver un X tel que $\widehat{N}(X) = \beta\|X\|_2$, il suffit de le choisir tel que $xy = \frac{x^2 + y^2}{2}$, c'est-à-dire tel que $x - y = 0$.)

3. La représentation graphique doit être faite dans un repère orthonormé.

$\widehat{B}(O, 1)$ est l'intérieur de la courbe d'équation $x^2 + xy + y^2 = 1$. Pour s'en convaincre, on résout l'inéquation $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ en considérant x comme paramètre et y comme inconnue. Le discriminant de l'équation associée est $\Delta = x^2 - 4(x^2 - 1) = 4 - 3x^2$ donc

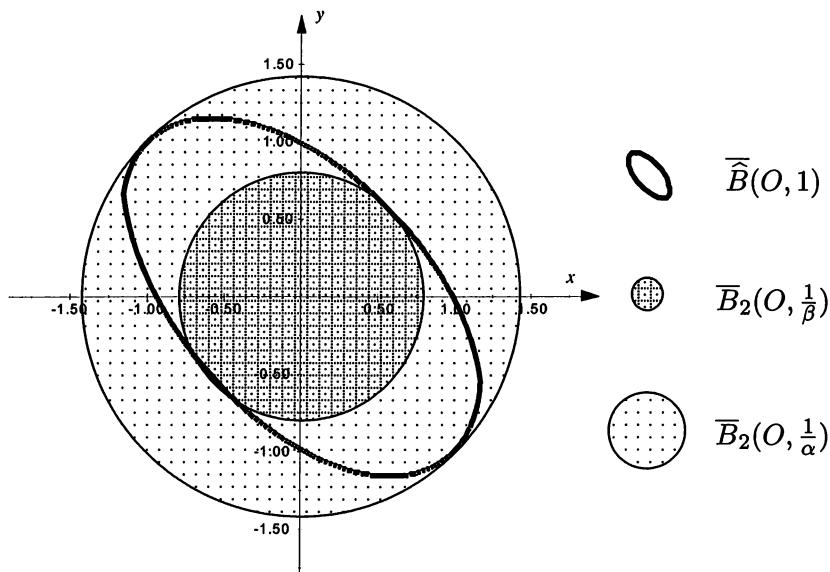
pour $x \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, on doit avoir $y \in \left[\frac{-x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2}, \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}\right]$.

On trace donc point par point ou à la calculatrice les courbes des deux fonctions

$f_1(x) = \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$ et $f_2(x) = \frac{-x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$ et la zone du plan correspondant à $\overline{B}(O, 1)$ est celle située entre ces deux courbes.

On peut montrer, (mais ce n'est pas l'objet de ce cours) que le contour de cette boule est une ellipse dont les axes sont les bissectrices du repère, et qui admet comme demi-grand axe : $a = \sqrt{2}$ et comme demi-petit axe : $b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Sur le même dessin, on dessine les cercles de rayons $\frac{1}{\alpha} = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Pour la norme $\|\cdot\|_2$, les boules fermées $\overline{B}_2(O, \frac{1}{\alpha})$ et $\overline{B}_2(O, \frac{1}{\beta})$ sont les disques fermés limités par ces cercles.



Ce dessin illustre que $\overline{B}_2(O, \frac{1}{\beta}) \subset \overline{B}(O, 1) \subset \overline{B}_2(O, \frac{1}{\alpha})$.

Ce résultat est prévisible, puisque :

$$\alpha \|X\|_2 \leq \hat{N}(X) \leq \beta \|X\|_2$$

$$\text{donc } \|X\|_2 \leq \frac{1}{\beta} \implies \hat{N}(X) \leq 1 \implies \|X\|_2 \leq \frac{1}{\alpha}$$

Exercice 1.9.

Soit L la limite de la suite $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$. Il semble logique de conjecturer que la limite de la suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, si elle existe est égale à $\ell = d_2(Y_0, L)$. Pour montrer cela, il faudra, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver un rang à partir duquel on pourra garantir que $|u_p - \ell| \leq \varepsilon$.

Nous allons essayer de trouver des conditions suffisantes pour obtenir cette inégalité. Elle s'écrit

$$|d_2(Y_0, X^p) - d_2(Y_0, L)| \leq \varepsilon$$

Mais la seconde inégalité triangulaire (propriété (d3)' p. 8) nous donne

$$|d_2(Y_0, X^p) - d_2(Y_0, L)| \leq d_2(X^p, L)$$

Donc il suffit que nous puissions obtenir $d_2(X^p, L) \leq \varepsilon$ pour pouvoir conclure. Or, par hypothèse, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} U^p = L$, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq p_0$, on a $\|X^p - L\|_2 \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $d_2(X^p - L) \leq \varepsilon$. D'après le calcul préliminaire, on peut donc en déduire ce qu'on veut, à savoir que $|u_p - \ell| \leq \varepsilon$.

La suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est donc bien convergente vers ℓ .

Exercice 1.10. 1. On doit montrer que pour tout point X de \mathcal{U} , il existe une boule centrée en X qui est incluse dans \mathcal{U} .

Soit donc $X \in \mathcal{U}$. X n'est donc pas nul, et on a donc $r = \|X\| \neq 0$. ($\|\cdot\|$ désigne n'importe quelle norme). Nous allons établir que la boule ouverte $B(X, r)$, de centre X , de rayon r est entièrement incluse dans \mathcal{U} . Pour cela, il suffit de montrer que tous les éléments Y de $B(X, r)$ sont non nuls.

Soit $Y \in B(X, r)$. La deuxième inégalité triangulaire nous donne

$$\|X\| - \|Y - X\| \leq \|X\| - \|Y - X\| \leq \|X + (Y - X)\| = \|Y\|.$$

On a donc $\|Y\| \geq \|X\| - \|Y - X\| = r - \|Y - X\|$.

Mais, puisque Y est dans la boule ouverte de centre X , de rayon r , on a par définition de cette boule :

$$d(Y, X) = \|Y - X\| < r$$

D'où $r - \|Y - X\| > 0$ et $\|Y\| > 0$, donc $\|Y\| \neq 0$ et on peut conclure que Y n'est pas le vecteur nul et qu'il appartient donc à \mathcal{U} .

Remarquons que cette démonstration est valable sans changement dans \mathbb{R}^n , quel que soit n ; elle est d'ailleurs valable à quelques détails près dans n'importe quel espace métrique : le complémentaire d'un point est toujours un ouvert.

2. Considérons maintenant une suite convergente $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments qui sont tous dans le complémentaire de \mathcal{U} . Le complémentaire de \mathcal{U} est $\{0\}$. Les termes de la suite (X^p) sont donc tous nuls. On a $\forall p \in \mathbb{N}, X^p = 0$, et cette suite constante a donc forcément comme limite 0. La limite de cette suite convergente est bien dans le complémentaire de \mathcal{U} : $\{0\}$ est un fermé et \mathcal{U} est bien un ouvert.

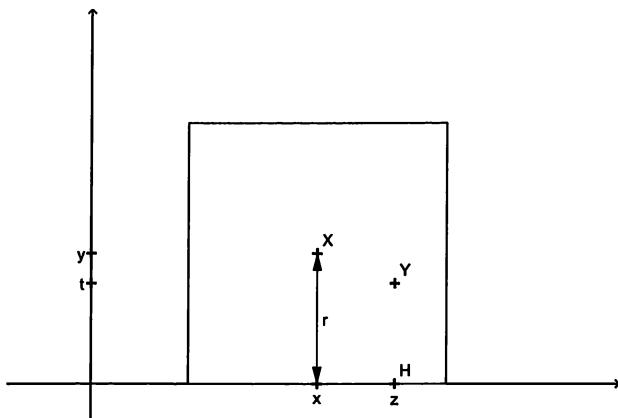
Exercice 1.11.

1. a) Le complémentaire de l'axe des abscisses \mathcal{U} est formé des couples (x, y) avec $y \neq 0$. Montrons que c'est un ouvert. Pour cela, on doit établir que pour tout

$X = (x, y) \in \mathcal{U}$, il existe une boule de centre X incluse dans \mathcal{U} , c'est-à-dire formée exclusivement de points $Y = (z, t)$ avec $t \neq 0$.

Soit $X = (x, y) \in \mathcal{U}$. On a donc $y \neq 0$. On pose $r = |y| > 0$. Montrons que la boule ouverte $B_\infty(X, r)$ est incluse dans \mathcal{U} (bien sûr, on peut aussi utiliser d'autres normes).

Soit $Y = (z, t) \in B(X, r)$. Considérons le point $H = (z, 0)$. On a
 $d_\infty(H, Y) = \|H - Y\|_\infty = \max(|z - z|, |0 - t|) = |t|$.



Or, grâce à la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$\|H - Y\|_\infty \geqslant |\|H - X\|_\infty - \|X - Y\|_\infty| \geqslant \|H - X\|_\infty - \|X - Y\|_\infty$$

Mais on a $\|H - X\|_\infty = \max(|z - x|, |0 - y|) \geqslant |y| = r$.

Donc on peut affirmer que $\|H - Y\|_\infty \geqslant r - \|X - Y\|_\infty$.

Mais Y est un point de $B_\infty(X, r)$, donc par définition $d_\infty(X, Y) = \|X - Y\|_\infty < r$.

On a donc $|t| = \|H - Y\|_\infty \geqslant r - \|X - Y\|_\infty > 0$ et $t \neq 0$, donc $Y \in \mathcal{U}$.

On peut donc affirmer que \mathcal{U} est ouvert, donc l'axe des abscisses (Ox) est bien un fermé.

1.b) Soit $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de (Ox) . Il nous suffit d'établir en toute généralité que la limite $L = (\ell_1, \ell_2)$ de cette suite appartient à (Ox) pour pouvoir affirmer que (Ox) est fermé.

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(x_p, y_p) = X^p$, le fait que $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit une suite convergente vers L signifie que les deux suites numériques (x_p) et (y_p) sont convergentes respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 .

Mais le fait que $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de (Ox) signifie que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $y_p = 0$. La suite (y_p) est donc formée de termes tous nuls, elle converge donc vers 0, et on a $\ell_2 = 0$.

Or, c'est justement la condition dont on a besoin pour pouvoir affirmer que $L \in (Ox)$.

On a établi que (Ox) est un fermé.

2. a) Un résultat classique de géométrie du plan est que la distance (euclidienne) d'un point $X = (x, y)$ à la droite $D : ax + by + c = 0$ est égale à

$$r = d_2(X, D) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

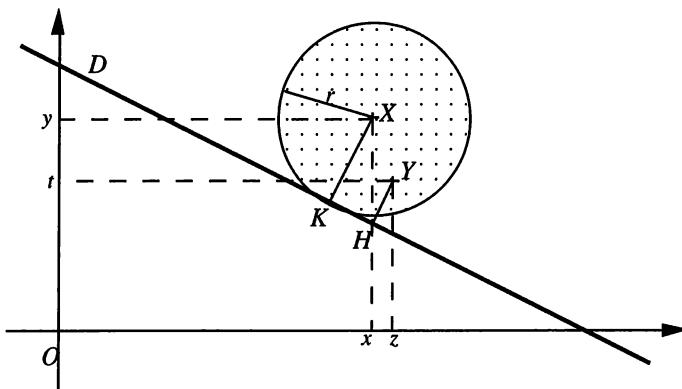
et que cette quantité est le minimum de la distance entre X et un point M de la droite ; on sait de plus que ce minimum est atteint en un unique point qui est le point K , projeté orthogonal de X sur la droite D , donc on a pour tout point $M \in D$,

$$d_2(X, M) \geq d_2(X, K) = r.$$

Soit \mathcal{U} le complémentaire de la droite D ; on va montrer que \mathcal{U} est un ouvert.

Soit $X = (x, y) \in \mathcal{U}$. Puisque $X \notin D$, on est sûr que $ax + by + c \neq 0$, et donc $r \neq 0$.

Montrons que $B_2(X, r)$, boule ouverte de centre X , de rayon $r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ est incluse dans \mathcal{U} .



Soit $Y = (z, t) \in B_2(X, r)$. Pour établir que Y est dans \mathcal{U} , il suffit d'établir que la distance de Y à la droite D est non nulle.

Or, si H est le projeté orthogonal de Y sur D , on a

$$d_2(Y, D) = \frac{|az + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d_2(Y, H) = \|Y - H\|_2$$

Mais grâce à la deuxième inégalité triangulaire, on a

$$\|Y - H\|_2 = \|(X - H) + (Y - X)\|_2 \geq \|X - H\|_2 - \|Y - X\|_2 \geq \|X - H\|_2 - \|Y - X\|_2.$$

Or, $\|X - H\|_2 = d_2(X, H) \geq d_2(X, K) = r$ puisque $H \in D$.

D'autre part, on a $\|Y - X\|_2 < r$ puisque $Y \in B_2(X, r)$.

On a donc $-\|Y - X\|_2 > -r$ et $d_2(Y, D) \geq \|X - H\|_2 - \|Y - X\|_2 > r - r = 0$. On a montré que $d_2(Y, D) \neq 0$, donc $Y \notin D$ et \mathcal{U} est bien ouvert, ce qui achève la démonstration que D est un fermé.

2.b) Soit $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de D . Nous allons établir en toute généralité que la limite $L = (\ell_1, \ell_2)$ de cette suite appartient à D , ce qui nous permettra d'affirmer que (Ox) est fermé.

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(x_p, y_p) = X^p$, le fait que $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit une suite convergente vers L signifie que les deux suites numériques (x_p) et (y_p) sont convergentes respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 .

Mais le fait que $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de D signifie que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $ax_p + by_p + c = 0$. Posons $w_p = ax_p + by_p + c$. Cette suite dont tous les termes sont nuls a forcément pour limite 0. On peut donc écrire

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} ax_p + by_p + c = 0$$

Mais les suites (x_p) et (y_p) étant convergentes, les règles élémentaires d'opérations sur les limites de suites permettent d'affirmer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} ax_p + by_p + c = a \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p \right) + b \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} y_p \right) + c = a\ell_1 + b\ell_2 + c$$

On a donc $a\ell_1 + b\ell_2 + c = 0$ et $L \in D$

On a établi que D est un fermé.

CHAPITRE 2

2. Solutions des exercices sur fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Exercice 2.1.

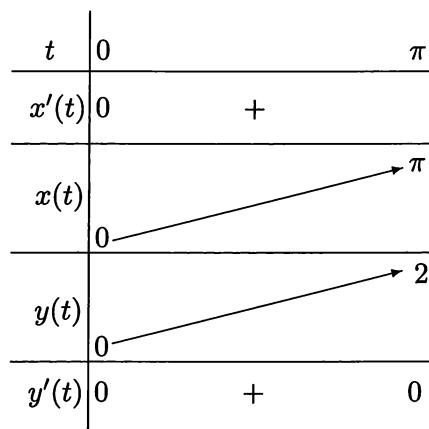
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (\text{voir p. 40})$$

La courbe obtenue s'appelle une cycloïde. C'est la trajectoire d'un point extérieur à une circonférence qui roule sans glisser.

On a vu que le domaine d'étude pertinent est $[0, \pi]$ et qu'ensuite, on pourra compléter par symétrie, puis par translation. (L'ensemble de définition est bien sûr \mathbb{R} .)

$$x'(t) = 1 - \cos t \geq 0 \quad y'(t) = \sin t \geq 0 \quad (\text{pour } t \in [0, \pi])$$

d'où le tableau de variation sur $[0, \pi]$:



On s'aperçoit de la présence d'un point stationnaire en $t = 0$.

Étude du point stationnaire

On doit déterminer les valeurs en 0 des dérivées successives de x et de y en 0. Pour cela il existe deux méthodes également praticables ici : les développements limités ou le calcul des dérivées successives. Nous prendrons cette deuxième méthode car ici c'est très facile :

$$\begin{aligned}x''(t) &= \sin t; x^{(3)}(t) = \cos t; y''(t) = \cos t; y^{(3)}(t) = -\sin t; \\x''(0) &= 0; \quad x^{(3)}(0) = 1; \quad y''(0) = 1; \quad y^{(3)}(0) = 0.\end{aligned}$$

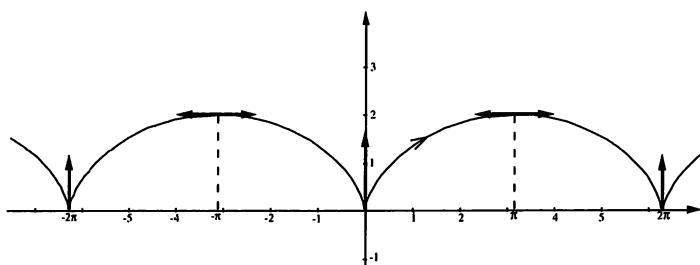
$f''(0) = (0, 1)$ et $f^{(3)}(0) = (1, 0)$ ne sont donc pas colinéaires, donc avec les notations du cours, $p = 2$ et $q = 3$: la courbe présente en son point correspondant à $t = 0$, c'est-à-dire à l'origine, un point de rebroussement de première espèce. La tangente en ce point est dirigée par $f''(0) = (0, 1) = \vec{j}$, et pour $t > 0$, la courbe « repart » du côté de $f^{(3)}(0) = (1, 0) = \vec{i}$.

Autres particularités de la courbe

On peut noter une tangente horizontale en $t = \pi$, au point $(\pi, 2)$.

C'est à peu près la seule chose remarquable de cette courbe dont l'intérêt résidait essentiellement dans le raisonnement lors de la réduction du domaine d'étude.

Voici maintenant l'aspect de cette courbe.



Exercice 2.2. $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t + 1}. \end{cases}$

L'ensemble de définition de la fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 que l'on étudie est l'intersection des deux ensembles de définition de x et de y ; c'est donc $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. y n'a pas de parité ou périodicité particulière, donc bien que x soit une fonction impaire, on ne peut pas réduire l'intervalle d'étude.

$$x'(t) = \frac{t^2 - 1 - t(2t)}{(t^2 - 1)^2} = \frac{-t^2 - 1}{(t^2 - 1)^2} < 0 \quad ; \quad y'(t) = \frac{2t(t+1) - t^2}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$$

$y'(t)$ est du signe de $t(t+2)$, on peut donc faire le tableau de variation.

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	—	—	—	—	—	—
$x(t)$	0	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$y(t)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	—	—	+	+

Les limites de x et de y sont toutes très simples à calculer.

Ce tableau montre que la courbe admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale pour $t \rightarrow \pm\infty$ ($x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow \infty$) et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ comme asymptote horizontale, pour $t \rightarrow 1$ ($x \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow \frac{1}{2}$). D'autre part, on constate qu'il y a une branche infinie à étudier pour $t \rightarrow -1$, puisque x et y tendent simultanément vers l'infini. On remarque des tangentes horizontales pour $t = -2$ et $t = 0$, respectivement au point de coordonnées $(-\frac{2}{3}, -4)$ et au point de coordonnées $(0, 0)$.

Étude de la branche infinie.

On calcule

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{t^2}{t+1}}{\frac{t}{t-1}} = t(t-1) \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} 2.$$

On calcule ensuite

$$y - 2x = \frac{t^2}{t+1} - 2 \frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{t^3 - t^2 - 2t}{(t-1)(t+1)} = \frac{t(t-2)}{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -\frac{3}{2}.$$

On peut donc affirmer que la droite d'équation $y = 2x - \frac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe.

On étudie alors la position relative de la courbe et de l'asymptote oblique et pour cela on étudie le signe de

$$\Delta(t) = y - (2x - \frac{3}{2}) = y - 2x + \frac{3}{2} = \frac{t(t-2)}{t-1} + \frac{3}{2} = \frac{2t^2 - 4t + 3t - 3}{2(t-1)} = \frac{(t+1)(2t-3)}{2(t-1)}.$$

Le signe de $\Delta(t)$ se détermine suivant les valeurs de t avec un simple tableau de signe. Mais au voisinage de $t = -1$, $\frac{2t-3}{2t-2}$ est proche de $\frac{5}{4}$, donc positif, et $\Delta(t)$ a donc le signe de $t+1$, ce qui fait que si $\{t \rightarrow -1\}$, on peut affirmer que la courbe est au-dessus de l'asymptote (et en haut, à droite de la figure, puisque x et y tendent vers $+\infty$), alors que si $\{t \rightarrow -1\}$, la courbe est au-dessous de l'asymptote (et en bas, à gauche de la figure, puisque x et y tendent vers $-\infty$).

Il n'y a pas de point singulier, puisque x' et y' ne s'annulent pas simultanément (en fait x' ne s'annule jamais.)

Mais une première esquisse de la courbe montre la présence d'un point double que nous allons déterminer. Il y a point multiple lorsque pour $t_1 \neq t_2$, on a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1} \\ \frac{t_1^2}{t_1 + 1} = \frac{t_2^2}{t_2 + 1} \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 t_2^2 - t_1 = t_2 t_1^2 - t_2 \\ t_1^2 t_2 + t_1^2 = t_2^2 t_1 + t_2^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 1) = 0 \\ (t_1 - t_2)(t_1 t_2 + t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P = -1 \\ S = -P = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on s'est permis de simplifier par $(t_1 - t_2)$ puisqu'on cherche t_1 et t_2 vérifiant $t_1 \neq t_2$; d'autre part, on a posé $S = t_1 + t_2$ (S comme somme) et $P = t_1 t_2$ (P comme produit).

t_1 et t_2 sont donc les deux solutions réelles de l'équation du second degré :

$$t^2 - t - 1 = 0 \iff t^2 = t + 1 \iff t = t^2 - 1.$$

Pour $t = t_1$ ou $t = t_2$, dans l'expression de $x(t)$ comme dans l'expression de $y(t)$, le numérateur et le dénominateur sont égaux, donc le point double a pour coordonnées $(1, 1)$.

Nous nous sommes ainsi dispensés de calculs fastidieux : les valeurs $\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$ de $\{t_1, t_2\}$ (il s'agit des « nombres d'or ») auraient été compliquées à manier.

On cherche les tangentes aux points particuliers : déterminons en ce point double les *deux* tangentes. On pourrait bien sûr travailler avec des valeurs approchées pour estimer $x'(t_i)$ et $y'(t_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$, mais nous allons exposer ici une méthode exacte relativement simple pour ce calcul.

Tout d'abord, dans la suite, pour alléger les notations, nous poserons $t = t_i$ pour i valant 1 ou 2, et t' désignera l'autre t_j , avec $j \neq i$. Le coefficient directeur de la tangente en t à la courbe est

$$\alpha = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t(t+2)(t-1)^2}{-t^2-1} = -\frac{(t^2+2t)(t^2-2t+1)}{t^2+1}.$$

On utilise alors que $t^2 = t + 1$ autant de fois que nécessaire, puis on multiplie numérateur et dénominateur par $(t' + 2)$.

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{(3t+1)(-t+2)}{t+2} = -\frac{-3t^2+5t+2}{t+2} \\ &= \frac{-2t+1}{t+2} = \frac{(t'+2)(-2t+1)}{tt'+2(t+t')+4} = \frac{-2P-4t+t'+2}{P+2S+4}\end{aligned}$$

Puisque $P = -1$ et $S = 1$ sont connus, on a aussi $t' = 1 - t$ donc

$$\alpha = \frac{2-4t+(1-t)+2}{-1+2+4} = \frac{-5t+5}{5} = 1-t = t'.$$

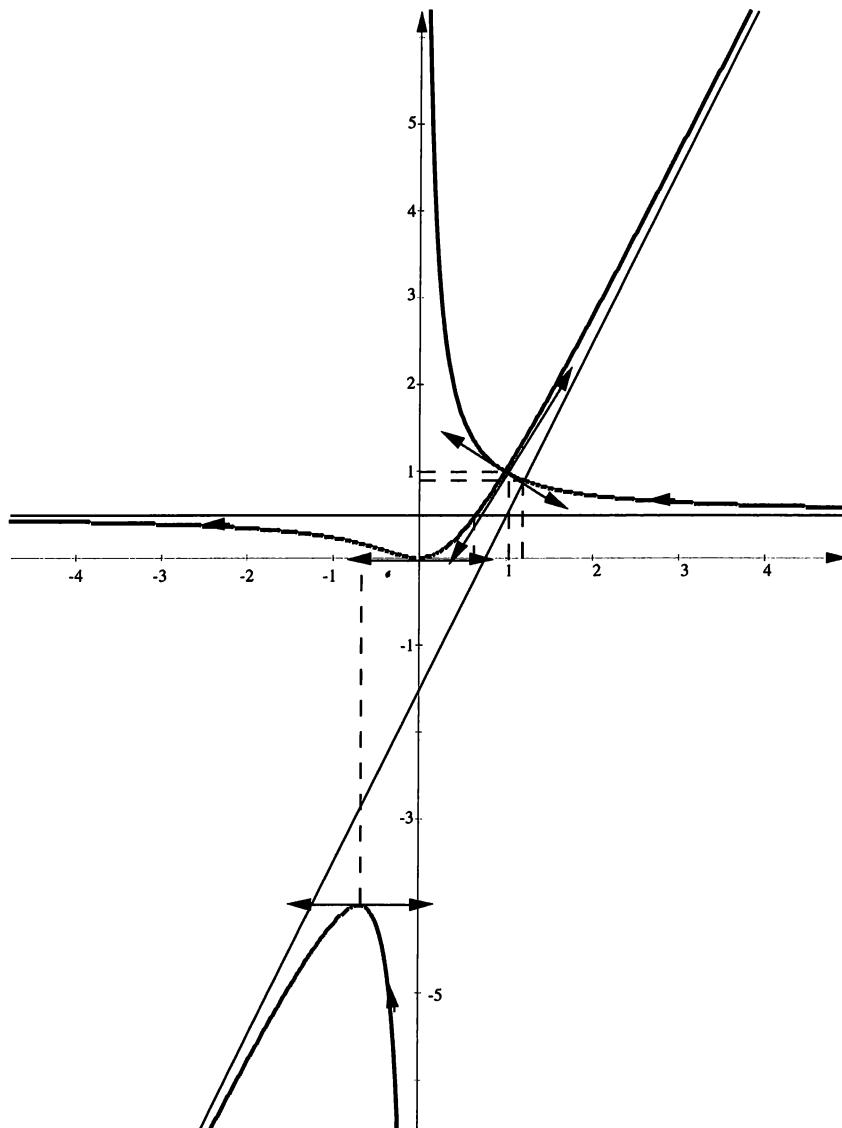
Finalement, une des tangentes est de coefficient directeur $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$, l'autre $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,618$. Remarquons que le produit de ces deux coefficients directeurs est $P = -1$ de sorte que les deux tangentes en ce point double sont perpendiculaires.

On peut aussi chercher à localiser avec précision les points d'intersections de la courbe avec les asymptotes. Pour cela on résout d'une part $y = \frac{1}{2} \iff t = -\frac{1}{2}$; on reporte dans l'expression de x et on trouve $x(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$: la courbe coupe l'asymptote horizontale en $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$.

D'autre part, le calcul qu'on a fait pour déterminer la position relative de la courbe et de l'asymptote oblique permet de déterminer les points d'intersection de la courbe et de cette asymptote sans nouveau calcul (sinon, on résoudrait $y = 2x - \frac{3}{2}$). Puisque $y(t) - (2x - \frac{3}{2}) = \Delta(t) = \frac{(t+1)(2t-3)}{2(t-1)}$, cette quantité

est nulle pour $t = -1$ (mais ce n'est pas une valeur acceptée de l'ensemble de définition) et pour $t = \frac{3}{2}$ de sorte que c'est pour seulement pour cette valeur $t = \frac{3}{2}$ que la courbe rencontre l'asymptote oblique. Le point de rencontre a pour coordonnées $(x(\frac{3}{2}), y(\frac{3}{2})) = (\frac{6}{5}, \frac{9}{10}) = (1,2; 0,9)$; on peut vérifier qu'on a bien $2 \times 1,2 - 1,5 = 2,4 - 1,5 = 0,9$: c'est bien un point de l'asymptote oblique.

Sur la figure, le sens de parcours est indiqué.



Exercice 2.3. $x(t) = \frac{8t}{t^2 + 1}$; $y(t) = \frac{8t - 4}{(t^2 + 1)^2}$.

Ici, x et y sont définies sur \mathbb{R} ; il est impossible de réduire le domaine d'étude, bien que x soit impaire.

$$x'(t) = 8 \frac{(t^2 + 1) - t(2t)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{8(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= 4 \frac{2(t^2 + 1)^2 - (2t - 1)2(t^2 + 1)(2t)}{(t^2 + 1)^4} = 8 \frac{(t^2 + 1) - (2t - 1)(2t)}{(t^2 + 1)^3} \\ &= \frac{8(-3t^2 + 2t + 1)}{(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

x' s'annule pour 1 et -1 et y' s'annule pour 1 (racine « évidente ») et $-\frac{1}{3}$; le coefficient dominant des trinômes du numérateur de ces deux fonctions étant négatif, elles sont négatives à l'extérieur de leurs racines et on a le tableau de variation suivant.

t	$-\infty$	-1	$-1/3$	1	$+\infty$	
$x'(t)$	-	0	+	+	0	-
$x(t)$	0				4	
		-4		-12/5		0
$y(t)$	0				1	
		-3		-27/5		0
$y'(t)$	-	-	0	+	0	-

Ce tableau indique clairement qu'il n'y a pas de branche infinie : même à l'infini, on a un point limite $(0, 0)$, où l'on étudiera la tangente, mais ce n'est pas une branche infinie.

En revanche, il y a un point singulier pour $t = 1$, et nous allons étudier la nature de ce point singulier. D'autre part, il y a une tangente verticale en $(-4, 3)$ et une tangente horizontale en $(-2, 4; -5, 4)$.

Étude du point singulier.

Pour ce type de fonction, les calculs de $x''(t), y''(t), x'''(t), y'''(t), \dots$ seraient épouvantables, et il faut absolument éviter de se lancer dans de tels « travaux forcés ».

En revanche, puisqu'on a seulement besoin des dérivées successives en 1, on va calculer le développement limité de x et de y au voisinage de 1. Pour cela, on pose

$t = 1 + u$ (pour se ramener en 0) et on a :

$$x(t) = x = \frac{8(1+u)}{(1+u)^2 + 1} = \frac{8+8u}{2+2u+u^2}$$

$$y(t) = y = \frac{8(1+u)-4}{((1+u)^2+1)^2} = \frac{4+8u}{(2+2u+u^2)^2} = \frac{4+8u}{4+8u+8u^2+4u^3+u^4}.$$

Pour continuer, on effectue la division selon les puissances croissantes des numérateurs par les dénominateurs, à l'ordre 3 et on obtient

$$8+8u = (2+2u+u^2)(4-2u^2+2u^3) + (-2u^4 - 2u^5)$$

$$4+8u = (4+8u+8u^2+4u^3+u^4)(1-2u^2+3u^3) + (-9u^4 - 16u^5 - 10u^6 - 3u^7);$$

en fait, on n'était pas du tout obligé de conserver les termes de degré 4 et plus dans les restes puisqu'on écrit, maintenant :

$$x(t) = x(1+u) = 4 - 2u^2 + 2u^3 + u^3\varepsilon_1(u)$$

$$y(t) = y(1+u) = 1 - 2u^2 + 3u^3 + u^3\varepsilon_2(u) \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon_i(u) = 0 \text{ pour } i = 1, 2$$

Ceci est le développement limité à l'ordre 3 de x et de y au voisinage de 1, et on a donc $x(1) = 4$; $y(1) = 1$; $x'(1) = y'(1) = 0$ (on savait déjà tout cela), mais surtout, ce qui est plus intéressant :

$$x''(1) = -4 = y''(1) \quad ; \quad x'''(1) = 12, \quad y'''(1) = 18$$

(Taylor-Young dit que $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + h^3\varepsilon(h)$)

Il ne faut pas oublier les dénominateurs).

Puisque $(-4, -4)$ et $(12, 18)$ ne sont pas proportionnels, on sait qu'en 1 la courbe présente un point de rebroussement de première espèce, que la tangente est dirigée par $(x''(1), y''(1))$ et que pour t plus grand que 1, la courbe est le long de cette tangente, bien sûr, mais du côté du vecteur $(x'''(1), y'''(1))$. Sur le dessin, on ne représentera pas forcément ces deux vecteurs s'ils sont trop longs, mais on dessinera des vecteurs proportionnels de même sens qui ont une longueur représentable.

Tangente au point limite $(0, 0)$ (pour $t \rightarrow \pm\infty$)

On étudiera la limite pour $t \rightarrow \infty$ du taux d'accroissement

$$\tau = \frac{y(t) - 0}{x(t) - 0} = \frac{8t - 4}{8t(t^2 + 1)}.$$

Il est clair que cette quantité tend vers 0 pour $t \rightarrow \pm\infty$. On peut conclure que la tangente à la courbe en ce point limite est horizontale (elle a un coefficient directeur égal à 0). On peut remarquer sans aucun calcul, en observant simplement

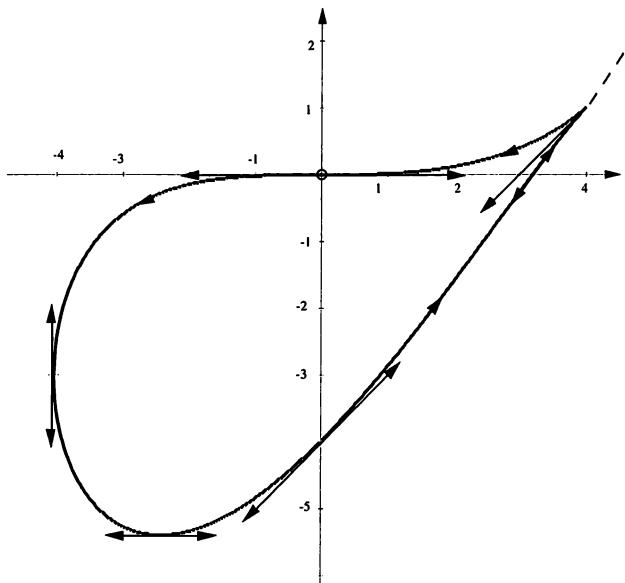
les variations de y et de x , que ce point limite est un point d'inflexion : la courbe « traverse » sa tangente en ce point limite.

Intersection avec les axes : il suffit de résoudre $x = 0$ d'une part pour avoir l'intersection avec l'axe des ordonnées et $y = 0$ d'autre part pour avoir l'intersection avec l'axe des abscisses.

On trouve que la courbe coupe l'axe des ordonnées pour $t = 0$, au point $(0, -4)$, la tangente en ce point étant dirigée par le vecteur $(x'(0), y'(0)) = (8, 8)$.

La courbe coupe l'axe des abscisses pour $t = \frac{1}{2}$ au point $(\frac{16}{5}, 0)$, la tangente en ce point est dirigée par le vecteur $(x'(\frac{1}{2}), y'(\frac{1}{2})) = (\frac{96}{25}, \frac{128}{25})$ qui est colinéaire à $(3, 4)$. N'oublions pas que le point limite, pour $t \rightarrow \infty$ est aussi sur les axes, puisqu'il est à l'origine.

Le sens de parcours est indiqué sur la figure ; au point de rebroussement, le vecteur dessiné en trait plein est proportionnel et de même sens que $(x''(t), y''(t))$, et celui en pointillés est proportionnel à $(x'''(t), y'''(t))$ et de même sens.



$$\text{Exercice 2.4. } x(t) = 2 \cos t + \cos 2t \quad ; \quad y(t) = 2 \sin t - \sin 2t$$

Les fonctions x et y sont définies sur \mathbb{R} ; elles sont également 2π -périodiques, et x est paire alors que y est impaire. On étudiera donc cette courbe pour $t \in [0, \pi]$ puis on complétera par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

On a $x'(t) = -2 \sin t - 2 \sin 2t$ et $y'(t) = 2 \cos t - 2 \cos 2t$. Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t)$ s'annule lorsque

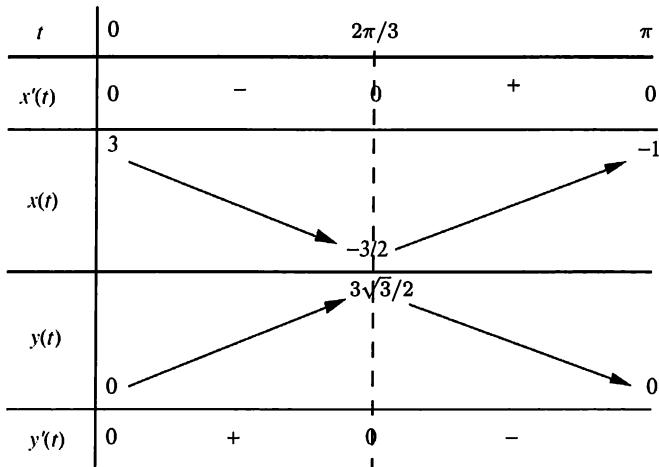
$$\sin t = \sin(-2t) \iff \begin{cases} t = -2t + k2\pi \\ \text{ou} \\ t = \pi + 2t + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Les seules valeurs de t qui conviennent dans l'intervalle d'étude sont 0 , $\frac{2\pi}{3}$ et π . Entre ces valeurs, par continuité, on est sûr que x' garde un signe constant, et en calculant par exemple $x'(\frac{\pi}{2}) = -2 < 0$ et $x'(\frac{3\pi}{4}) = 2 - \sqrt{2} > 0$ on connaît le signe de x' .

$$\text{De même, } y'(t) = 0 \iff \cos t = \cos 2t \iff \begin{cases} t = 2t + k2\pi \\ \text{ou} \\ t = -2t + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Sur l'intervalle d'étude, seules conviennent les valeurs 0 et $\frac{2\pi}{3}$, et puisque $y'(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0$ et $y'(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0$ le signe de y' est déterminé.

On peut donc dresser le tableau de variation.



Ce tableau montre l'existence de deux points singuliers, pour $t = 0$ et pour $t = 2\pi/3$. Il y a aussi une tangente verticale pour $t = \pi$. Il n'y a pas de branche infinie.

Étude des points singuliers

$t = 0$: La méthode des développements limités peut s'appliquer facilement :

Un développement limité à l'ordre 3 de x et de y s'écrit :

$$x(t) = 2\left(1 - \frac{t^2}{2!}\right) + 1 - \frac{(2t)^2}{2!} + t^3 \varepsilon_1(t) = 3 - 3t^2 + t^3 \varepsilon_1(t)$$

$$y(t) = 2\left(t - \frac{t^3}{3!}\right) - \left((2t) - \frac{(2t)^3}{3!}\right) + t^3 \varepsilon_2(t) = t^3 + t^3 \varepsilon_2(t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

Ce développement limité confirme que pour $t = 0$, le point correspondant est en $(3, 0)$, que c'est un point stationnaire, et précise que $(x''(0), y''(0)) = (-6, 0)$ et $(x'''(0), y'''(0)) = (0, 6)$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on est sûr d'avoir affaire à un point de rebroussement de première espèce, dont la tangente est dirigée par $(-6, 0)$, et telle que pour $t > 0$, on est du côté de $(0, 6)$.

En fait, il se trouve que les variations de x et y , ainsi que la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ne laissaient pas beaucoup d'autre choix que celui-ci pour la nature du point singulier en $t = 0$ (la seule autre possibilité était un point « ordinaire » avec tangente verticale).

$$t = \frac{2\pi}{3}$$

On pourrait faire un développement limité de x et de y au voisinage de $\frac{2\pi}{3}$, mais ici ces fonctions sont faciles à dériver plusieurs fois, alors que le changement de variable $t = \frac{2\pi}{3} + u$ semble plus lourd à manier. On a

$$\begin{aligned}x''(t) &= -2 \cos t - 4 \cos 2t & x'''(t) &= 2 \sin t + 8 \sin 2t \\y''(t) &= -2 \sin t + 4 \sin 2t & y'''(t) &= -2 \cos t + 8 \cos 2t\end{aligned}$$

Pour $t = \frac{2\pi}{3}$,

$$\begin{aligned}x''\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -2 \cos \frac{2\pi}{3} - 4 \cos \frac{4\pi}{3} = 1 + 2 = 3 \\x'''\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 8 \sin \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -3\sqrt{3} \\y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -2 \sin \frac{2\pi}{3} + 4 \sin \frac{4\pi}{3} = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3} \\y'''\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -2 \cos \frac{2\pi}{3} + 8 \cos \frac{4\pi}{3} = 1 - 4 = -3\end{aligned}$$

Nous trouvons que $(x''\left(\frac{2\pi}{3}\right), y''\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = (3, -3\sqrt{3})$ et $(x'''\left(\frac{2\pi}{3}\right), y'''\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = (-3\sqrt{3}, -3)$. Comme ces vecteurs ne sont pas colinéaires, la courbe présente au point singulier $(x\left(\frac{2\pi}{3}\right), y\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ un point de rebroussement de première espèce, avec une tangente dirigée par le vecteur $(3, -3\sqrt{3})$.

Remarquons que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, donc la tangente passe par l'origine du repère. De plus pour t légèrement plus grand que $\frac{2\pi}{3}$, la courbe se trouve du côté de $(-3\sqrt{3}, -3)$.

Intersections avec les axes

On a $y(t) = 0 \iff 2 \sin t(1 - \cos t) = 0 \iff (\sin t = 0 \text{ ou } \cos t = 1)$. Pour t dans l'intervalle d'étude, ceci n'a lieu que pour $t = 0$ et $t = \pi$ et on savait déjà que pour ces points, la courbe coupait l'axe des abscisses.

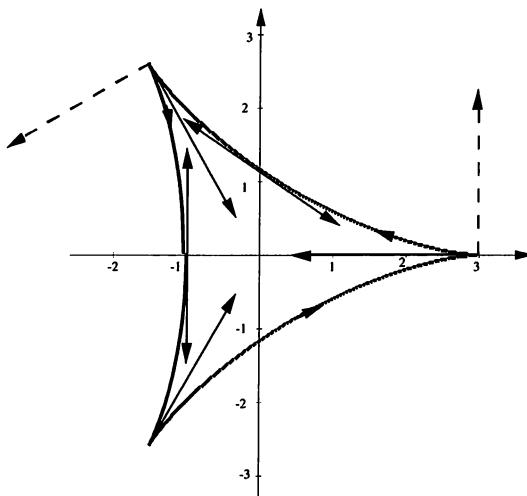
$x(t) = 0 \iff 2 \cos^2 t + 2 \cos t - 1 = 0 \iff \cos t = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; seule la valeur $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est entre -1 et 1 , donc $x(t) = 0 \iff t = \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ pour t dans l'intervalle d'étude. Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour

ordonnée

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin \arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = (3-\sqrt{3}) \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} \\ &= (3-\sqrt{3}) \sqrt{\frac{4-1-3+2\sqrt{3}}{4}} = (3-\sqrt{3}) \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \simeq 1,17995968. \end{aligned}$$

La tangente en ce point pourrait être déterminée exactement, mais ce type d'exercice est assez vain, et nous nous contenterons des valeurs approchées qui peuvent être obtenues à la calculatrice. $x'(\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}) \simeq -3,2237$, $y'(\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}) \simeq 2,1962$.

Pour le tracé, ne pas oublier de compléter par symétrie. Le sens de parcours est indiqué sur la figure ; aux points de rebroussement, le vecteur dessiné en trait plein est proportionnel à $(x''(t), y''(t))$ et de même sens, celui en pointillés est proportionnel à $(x'''(t), y'''(t))$ et aussi de même sens.



Remarque : La courbe obtenue semble être invariante par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, de centre O . Il est possible de le démontrer : pour cela, on va établir que l'image par cette rotation d'un point $M(t)$ de la courbe coïncide avec le point $M(t + \frac{2\pi}{3})$ de cette même courbe.

L'image d'un point $M = (x, y)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est le point $\widehat{M} = (X, Y)$ avec

$$\begin{cases} X = \cos \frac{2\pi}{3} x - \sin \frac{2\pi}{3} y = \frac{-x - y\sqrt{3}}{2} \\ Y = \sin \frac{2\pi}{3} x + \cos \frac{2\pi}{3} y = \frac{x\sqrt{3} - y}{2}. \end{cases}$$

Pour $M = M(t)$, on a $x = x(t) = 2 \cos t + \cos 2t$ et $y = y(t) = 2 \sin t - \sin 2t$ de sorte que l'image $\widehat{M}(t)$ a pour coordonnées

$$\begin{cases} X = \frac{-(2 \cos t + \cos 2t) - (2 \sin t - \sin 2t)\sqrt{3}}{2} \\ Y = \frac{(2 \cos t + \cos 2t)\sqrt{3} - (2 \sin t - \sin 2t)}{2}. \end{cases}$$

Or, le point $M(t + \frac{2\pi}{3})$ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} x(t + \frac{2\pi}{3}) &= 2 \cos(t + \frac{2\pi}{3}) + \cos(2t + \frac{4\pi}{3}) \\ &= \frac{-2 \cos t - 2 \sin t \sqrt{3} - \cos 2t + \sin 2t \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t + \frac{2\pi}{3}) &= 2 \sin(t + \frac{2\pi}{3}) - \sin(2t + \frac{4\pi}{3}) \\ &= \frac{-2 \sin t + 2 \cos t \sqrt{3} + \sin 2t + \cos 2t \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

On constate, en comparant les expressions leurs coordonnées, que $M'(t) = M(t + \frac{2\pi}{3})$, ce qui achève cette démonstration.

Exercice 2.5. $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \end{cases}$

Domaine d'étude

La fonction x n'est définie que si $\sin t > 0$, et x et y sont clairement deux fonctions 2π -périodiques, donc on peut déjà se limiter à $]0, \pi[$, mais, on constate que

$$x(\pi - t) = x(t) \quad \text{alors que} \quad y(\pi - t) = -y(t)$$

Les points $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses (voir figure (2.2) p. 39, car la situation est analogue).

On peut donc se contenter d'étudier cette fonction vectorielle sur $]0, \frac{\pi}{2}] = I$, puis compléter la courbe par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Variations

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2 \cos t \sin t + \frac{\cos t}{\sin t} = \cos t \left(-2 \sin t + \frac{1}{\sin t} \right) \\ &= \frac{\cos t(1 - 2 \sin^2 t)}{\sin t} = \frac{\cos t \cos(2t)}{\sin t} \end{aligned}$$

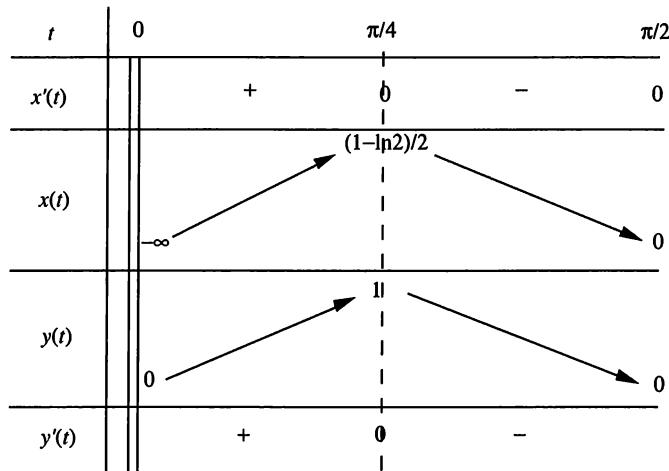
$$y'(t) = 2 \cos 2t.$$

Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on a $x'(t) = 0 \iff \begin{cases} \cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ \cos 2t = 0 \iff t = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

D'autre part on peut écrire $x'(t) = \frac{\cos 2t}{\tan t}$, et, $\tan t$ étant positif dans I , $x'(t)$ est du signe de $\cos 2t$, donc $x'(t) > 0$ pour $t < \frac{\pi}{4}$ (car \cos est décroissante sur $]0, \pi]$, intervalle décrit par $2t$ lorsque t décrit I).

y' a clairement le même signe que x' .

On peut donc dresser le tableau de variations. Toutes les valeurs et les limites sont évidentes à calculer.



La lecture de ce tableau révèle la présence d'un branche infinie en $t \rightarrow 0$, et d'un point stationnaire en $t = \frac{\pi}{4}$.

La branche infinie est évidente, il s'agit d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Étude du point stationnaire ($t = \frac{\pi}{4}$)

Pour éviter de calculer des dérivées successives compliquées, nous allons utiliser des développements limités pour x . Comme c'est en $\frac{\pi}{4}$ que se situe notre étude, il nous faut faire un changement de variable pour nous ramener en 0. On pose $t = \frac{\pi}{4} + h$. On a donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + h\right) + \ln[\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)] \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos h - \sin \frac{\pi}{4} \sin h\right)^2 + \ln\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h\right) \\ x(t) &= \frac{1}{2}(1 - \sin 2h) - \frac{\ln 2}{2} + \ln(\cos h + \sin h). \end{aligned}$$

en utilisant les développements limités au voisinage de 0 de \sin et \cos à l'ordre 3,

puis le d.l. de $\ln u = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on obtient

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1 - \ln 2}{2} - \frac{2h - \frac{(2h)^3}{6} + o(h^3)}{2} + \ln \left(1 - \frac{h^2}{2} + h - \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right) \\&= \frac{1 - \ln 2}{2} - h + \frac{2}{3}h^3 + \left(h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right) - \frac{h^2 - h^3}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \\&= \frac{1 - \ln 2}{2} + h(-1 + 1) + h^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + h^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + o(h^3) \\x(t) &= \frac{1 - \ln 2}{2} - h^2 + \frac{8}{6}h^3 + o(h^3).\end{aligned}$$

Comparant avec la formule de Taylor-Young correspondante, on obtient $x(\frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \ln 2}{2}$; $x'(\frac{\pi}{4}) = 0$ (on savait déjà tout cela); $x''(\frac{\pi}{4}) = -2$; $x'''(\frac{\pi}{4}) = 8$.

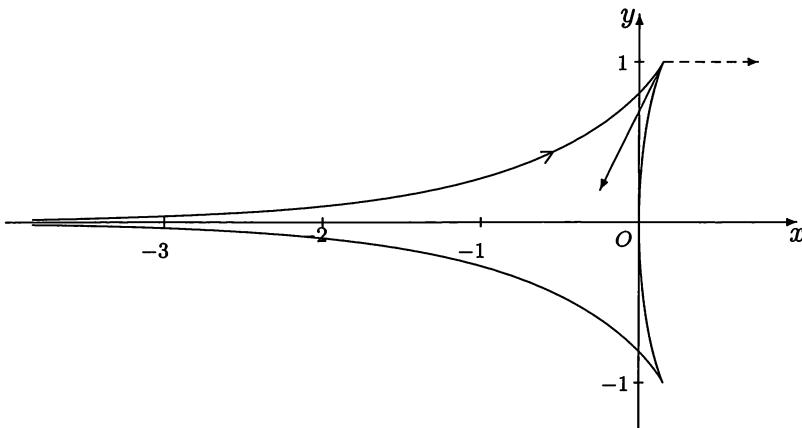
Les calculs de dérivées successives de y sont, eux, très simples, et on trouve $y''(\frac{\pi}{4}) = -4$ et $y'''(\frac{\pi}{4}) = 0$, de sorte que $f''(\frac{\pi}{4})$ et $f'''(\frac{\pi}{4})$ ne sont pas colinéaires, et $p = 2$, $q = 3$. En son point $A = (\frac{1 - \ln 2}{2}; 1) \simeq (0,1534; 1)$ correspondant au paramètre $\frac{\pi}{4}$, la courbe admet un point de rebroussement de première espèce. La tangente à la courbe y est dirigée par (et du côté de) $f''(\frac{\pi}{4}) = (-2, -4)$, et pour $t > \frac{\pi}{4}$, la courbe est du côté de $f''(\frac{\pi}{4}) = (8, 0)$, c'est-à-dire à droite.

Autres points remarquables

Au point $(0, 0)$, correspondant au paramètre $\frac{\pi}{2}$, la tangente est verticale; c'est clairement le seul point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Il y a un point d'intersection avec l'axe des ordonnées, car le théorème des valeurs intermédiaires montre que x s'annule une fois entre 0 et $\frac{\pi}{2}$). L'équation $x'(t) = 0$ n'est pas résoluble algébriquement, mais on peut numériquement trouver que la solution de cette équation est $t_0 \simeq 0,467\,620\,649\,6$, et que $y(t_0) \simeq 0,804\,742\,342\,5$. Le point $B = (0, y(t_0))$ est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. La tangente en ce point est dirigée par $f'(t_0) \simeq (1,175\,548\,958; 1,187\,248\,52)$.

On trace maintenant la courbe en utilisant tous ces éléments. Il ne faut pas oublier de compléter par symétrie. Le sens parcours est indiqué.



Exercice 2.6. $x(t) = \frac{3t}{(1-t)^2}$; $y(t) = \frac{3t-1}{(1-t)^3}$.

L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et il n'y a pas de symétrie évidente, de sorte que l'étude doit être faite sur la totalité de l'ensemble de définition.

Variations.

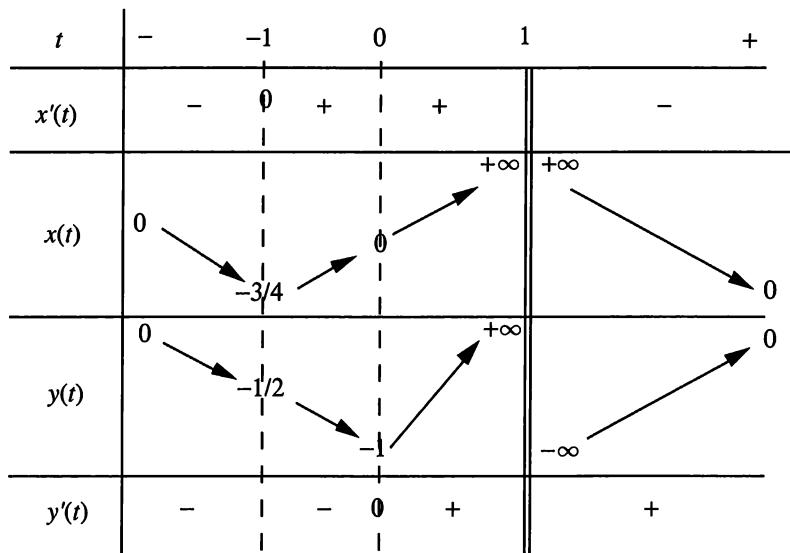
Pour faciliter le calcul des dérivées, il est astucieux de décomposer x et y en éléments simples :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t-3+3}{(1-t)^2} = \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{3}{(t-1)} \\ y(t) = \frac{3t-3+2}{(1-t)^3} = -\frac{2}{(t-1)^3} - \frac{3}{(t-1)^2}. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{6}{(t-1)^3} - \frac{3}{(t-1)^2} = \frac{-6-3t+3}{(t-1)^3} = -3\frac{t+1}{(t-1)^3} \\ y'(t) = \frac{6}{(t-1)^4} + \frac{6}{(t-1)^3} = \frac{6+6t-6}{(t-1)^4} = \frac{6t}{(t-1)^4}. \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variation



Les limites étaient toutes évidentes.

L'examen de ce tableau de variation nous permet de constater qu'il n'y a pas de point stationnaire, mais qu'on étudiera un point limite, et une « vraie » branche infinie.

Étude du point limite ($t \rightarrow \pm\infty$)

On pose naturellement $\begin{cases} x_\infty = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0 \\ y_\infty = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0 \end{cases}$ et on calcule :

$$\frac{y(t) - y_\infty}{x(t) - x_\infty} = \frac{y(t)}{x(t)} \frac{\frac{3t-1}{(1-t)^3}}{\frac{3t}{(1-t)^2}} = \frac{3t-1}{3t(1-t)} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0.$$

Nous pouvons donc affirmer que la courbe admet au point limite $O = (0, 0)$ une tangente horizontale.

Étude de la branche infinie ($t \rightarrow 1\pm$)

On calcule la limite du même rapport $\frac{y}{x}$ (n'oublions pas qu'il vient d'être calculé) :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3t-1}{3t(1-t)} \xrightarrow[t \rightarrow 1\pm]{} \mp\infty$$

Nous pouvons donc affirmer que la courbe admet pour $t \rightarrow 1\pm$, une branche parabolique, dont la direction asymptotique est verticale. En tenant compte des signes et du tableau de variation, on s'aperçoit que pour $t \rightarrow 1-$, la courbe « monte » vers la droite, alors que pour $t \rightarrow 1+$, le point mobile revient d'en bas, sur la droite.

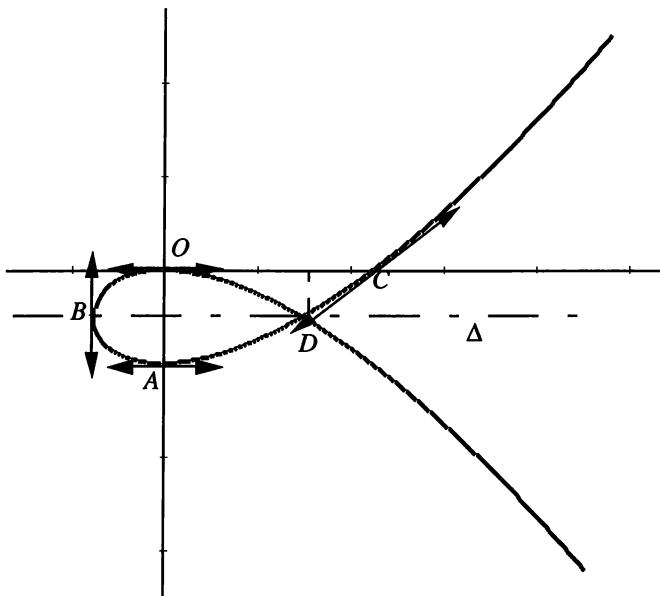
Autres particularités

Le tableau de variation montre une tangente horizontale en $A = (0, -1)$ ($t = 0$) et une tangente verticale en $B = (-0,75; -0,5)$ ($t = -1$).

L'axe des ordonnées est coupé pour $t = 0$ en A , et l'axe des abscisses est coupé pour $t = \frac{1}{3}$ en $C = (x(\frac{1}{3}), y(\frac{1}{3})) = (2,25; 0)$.

La tangente en C est dirigée par le vecteur $f'(\frac{1}{3}) = (13,5; 10,125) = 6,75(2; 1,5)$

Nous pouvons à présent tracer la courbe.



Le dessin suggère deux études supplémentaires : l'une (celle qui était demandée) consiste à montrer que la droite horizontale $\Delta : y = -\frac{1}{2}$ est axe de symétrie ; l'autre étude consiste à déterminer les points doubles, puisque sur la figure, il y en a clairement un.

Étude de la symétrie

Il est très difficile de faire cette étude sans la figure. Nous voyons que le point $O = M_\infty$ et le point $A = M(0)$ sont symétriques. La transformation $0 \leftrightarrow \infty$ naturelle est $t \leftrightarrow \frac{1}{t}$. Montrons que $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$ sont des points symétriques par rapport à la droite Δ , ceci quel que soit t . On a

$$\begin{aligned}x\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{3\frac{1}{t}}{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^2} = \frac{3t^2}{t(t-1)^2} = x(t) \\y\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{\frac{3}{t} - 1}{\left(1 - \frac{1}{t}\right)^3} = \frac{(3-t)t^3}{t(t-1)^3} = \frac{3t^2 - t^3}{(t-1)^3}.\end{aligned}$$

Il est très clair que $x\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$, mais pour les ordonnées c'est un peu plus compliqué. On doit montrer en fait que $y(t) + y\left(\frac{1}{t}\right) = -1$. Donc nous allons faire ce calcul

$$y(t) + y\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{3t-1}{(1-t)^3} + \frac{3t^2-t^3}{(t-1)^3} = \frac{-3t+1+3t^2-t^3}{(t-1)^3} = -\frac{t^3-3t^2+3t-1}{(t-1)^3} = -1$$

La droite Δ est donc bien axe de symétrie de la courbe.

Étude des points multiples

On cherche à résoudre, sous la condition $t \neq t'$, le système

$$\begin{aligned}
 (S) &\iff \begin{cases} \frac{3t}{(1-t)^2} = \frac{3t'}{(1-t')^2} \\ \frac{3t-1}{(1-t)^3} = \frac{3t'-1}{(1-t')^3} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 3t(1-2t'+t'^2) = 3t'(1-2t+t^2) \\ (3t-1)(1-3t'+3t'^2-t'^3) = (3t'-1)(1-3t+3t^2-t^3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 3(t-t') + 3tt'(t'-t) = 0 \\ 3(t-t') + 3(t'-t) + 9tt'(t'-t) - 3(t'^2-t^2) \\ \quad - 3tt'(t'^2-t^2) + (t'^3-t^3) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} tt' = 1 \\ 9(t'-t) - 6(t'-t)(t+t') + (t'-t)(t'^2+t't+t^2) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} tt' = 1 = P \\ 9 - 6S + (S^2 - P) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} tt' = 1 = P \\ S^2 - 6S + 8 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient donc deux systèmes : sachant que $P = 1$ toujours, on peut avoir $S = 2$ ou $S = 4$.

t et t' sont donc les deux racines soit de l'équation (1) $T^2 - 2T + 1 = 0$, soit de l'équation (2) $T^2 - 4T + 1 = 0$.

(1) ne convient pas, en effet, d'une part la seule racine est double (et on cherche $t \neq t'$), et d'autre part cette racine est en dehors de l'ensemble de définition.

Les solutions de (2) sont $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. $M(t_1) = M(t_2) = D$ est donc le seul point double de la courbe.

Pour l'abscisse de D , pensons à utiliser que pour $i \in \{1, 2\}$, on a $t_i^2 = 4t_i - 1$.

$$x(t_i) = \frac{3t_i}{t_i^2 - 2t_i + 1} = \frac{3t_i}{2t_i} = \frac{3}{2} = 1,5$$

L'ordonnée de D est forcément $-\frac{1}{2}$ pour des raisons de symétrie. En effet, on a d'une part $M(t_1) = M(t_2)$, et d'autre part, puisque $t_1 t_2 = P = 1$, $t_2 = \frac{1}{t_1}$, donc $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont symétriques par rapport à Δ . Un point n'est égal à son symétrique que s'il appartient à l'axe de la symétrie, donc $D \in \Delta$ est $y(t_i) = -\frac{1}{2}$.

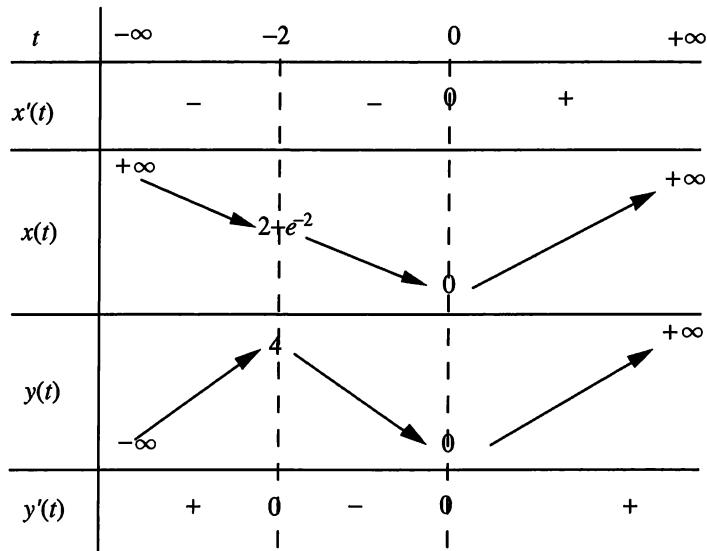
Exercice 2.7. $x(t) = e^t - t$; $y(t) = t^3 + 3t^2$.

L'ensemble de définition est clairement \mathbb{R} et il n'y a pas de symétrie apparente.

Variations

$$x'(t) = e^t - 1 \quad ; \quad y'(t) = 3t^2 + 6t.$$

$x'(t)$ est clairement du signe de t , alors que $y'(t)$ est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 0 , d'où le tableau de variations.



Les limites sont toutes évidentes, sauf peut-être celle de x en $+\infty$, où on utilise la prédominance de l'exponentielle sur un polynôme.

Sur ce tableau, nous voyons qu'il faut étudier un point stationnaire pour $t = 0$, en $A = (1, 0)$ et les branches infinies pour $t \rightarrow \pm\infty$.

Étude des branches infinies

Ici, nous sommes obligés de séparer l'étude en $+\infty$ et celle en $-\infty$, car e^t ne s'y comporte pas de la même façon.

Pour $t \rightarrow -\infty$, on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^3 + 3t^2}{e^t - t} \sim -t^2 \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty.$$

La courbe admet donc une branche parabolique dont la direction asymptotique est verticale, pour $t \rightarrow -\infty$.

Pour $t \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^3 + 3t^2}{e^t - t} \sim \frac{t^3}{e^t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La courbe admet donc une branche parabolique dont la direction asymptotique est horizontale, pour $t \rightarrow +\infty$.

Étude du point stationnaire.

Les dérivées successives sont ici très faciles à calculer.

$$x''(t) = e^t = x'''(t) = x^{(4)}(t) = \dots$$

$$y''(t) = 6t + 6; \quad y'''(t) = 6; \quad y^{(4)}(t) = 0 = \dots$$

On a $f''(0) = (1, 6) \neq (0, 0)$, donc $p = 2$, mais $f'''(0) = (1, 6)$ est colinéaire à $f''(t)$ (il lui est même égal). C'est pour cela qu'on a été obligé de continuer les calculs de dérivées. On a $q > 3$. Comme $f^{(4)}(0) = (1, 0)$ n'est pas colinéaire à $f''(0)$, on a $q = 4$ et la courbe présente en A , pour le paramètre $t = 0$, un point de rebroussement de *seconde espèce*.

La tangente en ce point est dirigée par (et du côté de) $f''(0)$, et se situe du côté de $f^{(4)}(0)$, c'est-à-dire à droite de ce vecteur.

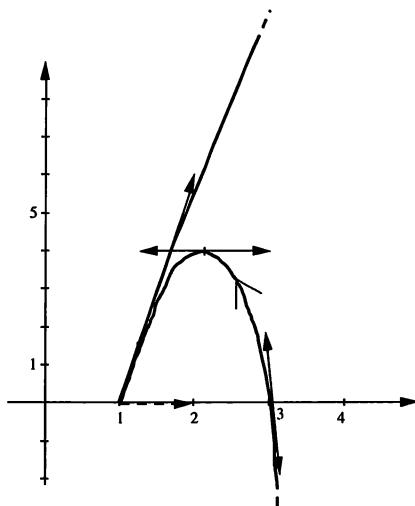
Une question difficile que l'on peut se poser est de positionner l'une par rapport à l'autre au voisinage du point stationnaire la branche « arrivante » ($t < 0$) et la branche « repartante » ($t > 0$). On peut remarquer que pour tout $t > 0$, on a $y(t) > y(-t)$. Le point $M(t)$ est donc au-dessus du point $M(-t)$. C'est un indice très net que la branche « repartante » est au-dessus de la branche « arrivante ». Nous admettrons que c'est le cas, mais soyons conscients que nous ne l'avons pas démontré.

Autres particularités

Il y a une tangente horizontale au point $A = M(-2) = (2 + e^{-2}, 4) \simeq (2,135; 4)$. L'axe des ordonnées est coupé au point correspondant au paramètre $t = -3$, donc en $B = (3 + e^{-3}, 0) \simeq (3,050; 0)$.

La tangente en ce point est dirigée par le vecteur $f'(-3) = (e^{-3} - 1; 9) \simeq (-0,950; 9)$.

On peut maintenant tracer la courbe.



Exercice 2.8. $x(t) = \frac{t^4}{2} + 3t^3 + 6t^2 + 4t$; $y(t) = \frac{t^4}{4} - 6t^2 - 16t$.

L'ensemble de définition et d'étude est \mathbb{R} .

Variations

$$x'(t) = 2t^3 + 9t^2 + 12t + 4 = (t+2)(2t^2 + 5t + 2) = (t+2)^2(2t+1) \quad (-2 \text{ était racine « évidente »})$$

$$y'(t) = t^3 - 12t - 16 = (t+2)(t^2 - 2t - 8) = (t+2)^2(t-4) \quad (\text{idem})$$

D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$	-2	$-1/2$	4	$+\infty$
$x'(t)$	-	0	-	0	+
$x(t)$	$+\infty$	0	$-27/32$	$43/2$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	12	$417/64$	96	$+\infty$
$y'(t)$	-	0	-	-	0

On constate sur ce tableau qu'il faut étudier les branches infinies pour $t \rightarrow \pm\infty$ et un point stationnaire pour $t = -2$ en $A = (0, 12)$.

Étude des branches infinies ($t \rightarrow \pm\infty$)

On a :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{t^4}{4} - 6t^2 - 16t}{\frac{t^4}{2} + 3t^3 + 6t^2 + 4t} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \frac{1}{2}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} y(t) - \frac{1}{2}x(t) &= \frac{t^4}{4} - 6t^2 - 16t - \frac{1}{2} \left(\frac{t^4}{2} + 3t^3 + 6t^2 + 4t \right) \\ &= -\frac{3}{2}t^3 - 9t^2 - 18t = -\frac{3}{2}t^3 + o(t^3) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \mp\infty \end{aligned}$$

La courbe admet donc deux branches paraboliques, de direction asymptotique celle de la droite $y = \frac{1}{2}x$; la branche parabolique correspondant à $t \rightarrow -\infty$ est au-dessus de cette droite, et celle correspondant à $t \rightarrow +\infty$ est au-dessous.

Étude du point stationnaire ($t = -2$)

Il est facile, ici de calculer les dérivées successives.

$$\begin{cases} x''(t) = 6t^2 + 18t + 12 = 6(t+2)(t+1) \\ y''(t) = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2), \end{cases}$$

donc $f''(-2) = (0, 0)$ et $p > 2$.

$$\begin{cases} x'''(t) = 12t + 18 \\ y'''(t) = 6t, \end{cases}$$

donc $f'''(-2) = (-6, -12) \neq (0, 0)$, donc $p = 3$.

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = 12 \\ y^{(4)}(t) = 6 \end{cases}$$

donc $f^{(4)}(-2) = (12, 6)$; ce vecteur n'est pas colinéaire à $f'''(-2)$ donc $q = 4$. Comme p est impair et que q est pair, on est en présence d'un point ordinaire.

Autres particularités

Il y a une tangente horizontale pour $t = 4$ en $B = (432; -96)$.

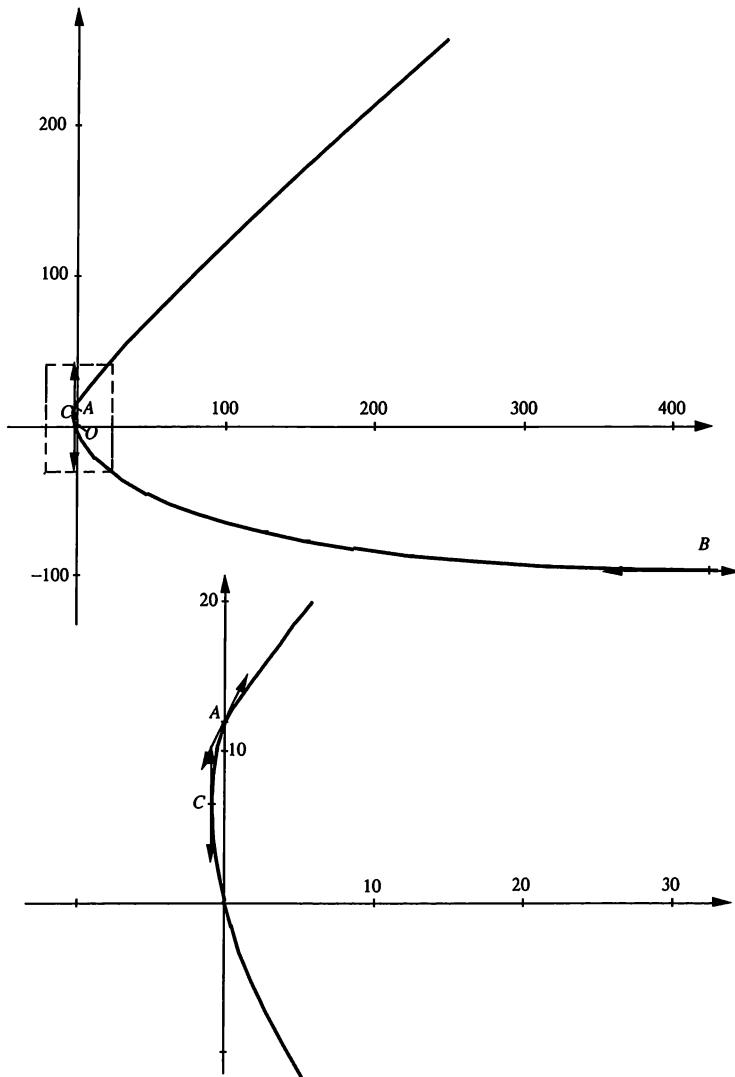
Il y a une tangente verticale pour $t = \frac{1}{2}$ en $C = (-\frac{27}{32}; \frac{417}{64})$.

La courbe passe par l'origine du repère pour $t = 0$; elle franchit aussi l'axe des ordonnées pour $t = -2$, en A ; elle franchit l'axe des abscisses en un autre point D , dont l'abscisse t_D est solution de l'équation $y(t) = 0$. Résolvons cette équation

$$y(t) = 0 \iff (t = 0) \quad \text{ou} \quad (t^3 - 24t - 64 = 0)$$

Une étude rapide de cette dernière fonction du troisième degré montre qu'elle n'admet qu'une racine $t_d \simeq 5,902\,746\,071$ et comme $x(t_D) \simeq 1\,456,659\,977$, D se trouvera beaucoup trop à droite de notre dessin pour pouvoir être représenté.

Voici deux aspects du tracé, sur lesquels on ne se rend pas vraiment compte de l'aspect des branches infinies.

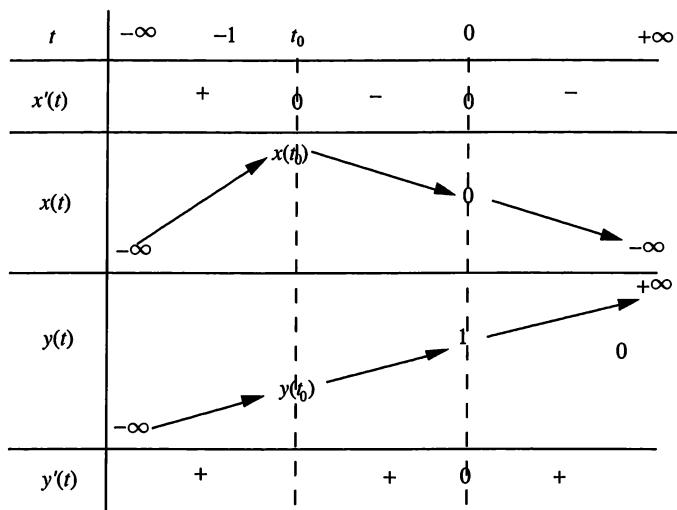


Exercice 2.9. $x(t) = \sin t - t - \frac{t^4}{24}$; $y(t) = e^t - t - \frac{t^2}{2}$.

L'ensemble de définition et d'étude est \mathbb{R} .

On a $x'(t) = \cos t - 1 - \frac{t^3}{6}$ et $y'(t) = e^t - 1 - t$

Avec ce qu'on est censé admettre, on obtient le tableau de variation



On trouve les valeurs approchées de $x(t_0)$ et de $y(t_0)$ à la calculatrice.

$$x(t_0) \simeq 0,427\,020\,688 \quad ; \quad y(t_0) \simeq 0,053\,323\,38$$

Les limites à l'infini ne sont pas vraiment difficiles, en se souvenant de la prédominance de l'exponentielle sur les polynômes. On constate qu'il y a effectivement un point stationnaire pour $t = 0$, et qu'on doit étudier les branches infinies pour $t \rightarrow \pm\infty$.

Étude des branches infinies

Ici aussi, nous sommes obligés de séparer l'étude en $+\infty$ et celle en $-\infty$, car e^t ne s'y comporte pas de la même façon.

$$\text{Pour } t \rightarrow -\infty, \text{ on a : } \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^t - t - \frac{t^2}{2}}{\sin t - t - \frac{t^4}{24}} \underset{t \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{12}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0.$$

La courbe admet donc une branche parabolique dont la direction asymptotique est horizontale, pour $t \rightarrow -\infty$. La courbe est dans le quadrant en bas, à gauche, puisque x et y tendent vers $-\infty$.

$$\text{Pour } t \rightarrow +\infty, \text{ on a } \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{e^t - t - \frac{t^2}{2}}{\sin t - t - \frac{t^4}{24}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-24e^t}{t^4} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

La courbe admet donc une branche parabolique dont la direction asymptotique est verticale, pour $t \rightarrow +\infty$. Remarquons qu'elle est dans le quadrant en haut à gauche, et que la courbe va donc partir vers le haut, même si ce quotient $\frac{y}{x}$ a une limite négative ; c'est normal, puisque $x \rightarrow -\infty$ et $y \rightarrow +\infty$, que la limite de $\frac{y}{x}$ soit négative.

Étude du point stationnaire

Les développements limités classiques de \exp et de \sin permettent de trouver immédiatement les valeurs des dérivées successives de x et de y en 0.

On a

$$x(t) = \sin t - t - \frac{t^4}{24} = \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6) \right) - t - \frac{t^4}{24}$$

$$= -\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + o(t^6);$$

$$y(t) = e^t - t - \frac{t^2}{2}$$

$$= \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} + o(t^6) \right) - t - \frac{t^2}{2}$$

$$= 1 + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{t^6}{720} + o(t^6).$$

En comparant avec la formule de Taylor-Young, on obtient facilement que

$$\begin{aligned} x(0) &= x'(0) = x''(0) = 0, \quad x'''(0) = -1, \quad x^{(4)}(0) = -1, \quad x^{(5)}(0) = 1, \quad x^{(6)}(0) = 0; \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{(4)}(0) = 1, \quad y^{(5)}(0) = 1, \quad y^{(6)}(0) = 1. \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (0, 0)$ (on le savait déjà, puisqu'on étudie un point stationnaire) et $f''(0) = (0, 0)$, donc $p > 2$.

Puisque $f'''(0) = (-1, 1) \neq (0, 0)$, on a $p = 3$, mais on a $f^{(4)}(0) = (-1, 1) = f'''(0)$, donc $q > 4$.

$f^{(5)}(0) = (1, 1)$ n'est pas colinéaire à $f'''(0)$ donc $q = 5$.

Puisque p et q sont tous deux impairs, on est en présence d'un point d'inflexion.

La tangente à la courbe en $A = (0, 1)$ est dirigée par $f'''(0) = (-1, 1)$. Quand $t > 0$, la courbe est le long de ce vecteur, et du côté de $f^{(5)}(0) = (1, 1)$, c'est-à-dire au-dessus.

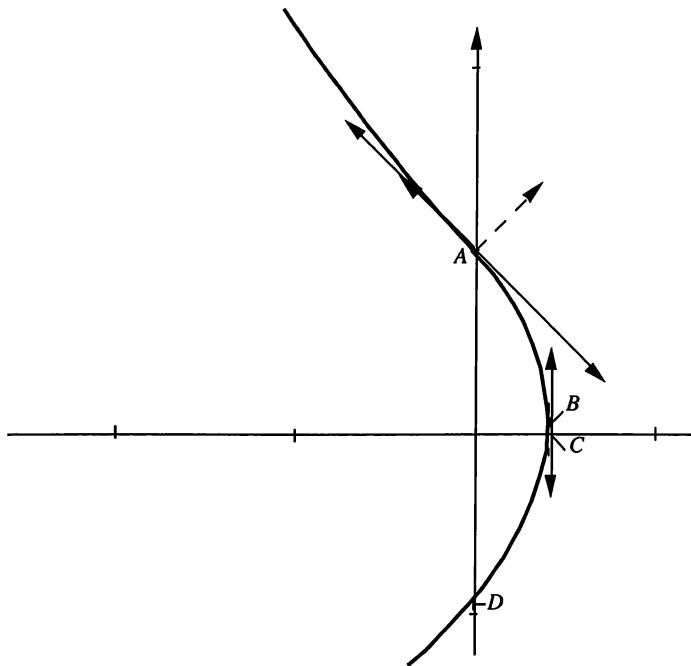
Autres particularités

Pour $t = t_0$, en $B = x(t_0), y(t_0)$, la courbe présente une tangente verticale.

Les variations de la fonction x montrent qu'à part A , il y a un autre point C d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées, et en résolvant numériquement l'équation d'inconnue $t : x(t) = 0$, on calcule à la calculatrice son ordonnée qui vaut, pour $t = t_1 \simeq -2,740\,406\,183$ environ $y_C \simeq -0,949\,962\,717$.

Il y a aussi un unique point D d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, et on trouve à la calculatrice, que pour $t = t_2 \simeq -2,114\,207\,300$, son abscisse est $x_D \simeq 0,425\,767\,299\,3$.

On peut maintenant tracer la courbe.



CHAPITRE 3

3. Solutions des exercices sur les fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n

3.2 Compréhension des définitions

Exercice 3.1.

Pour la norme du max, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ tel que si $\|(x, y) - (-3, 1)\|_\infty \leq \eta$, on en déduit $\max(|x + 3|, |y - 1|) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ donc

$$\begin{aligned} |f(x, y) - (-2)| &= |(x - 2y + 3) - (-3 - 2 \cdot 1 + 3)| = |(x - (-3)) - 2(y - 1)| \\ &\leq |x + 3| + 2|y - 1| \leq 3 \max(|x + 3|, |y - 1|) \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour la norme euclidienne, il suffit d'utiliser la majoration $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2$, et on peut se ramener à ce qu'on vient de faire. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ tel que si $\|(x, y) - (-3, 1)\|_2 \leq \eta$, on en déduit

$$\|(x, y) - (-3, 1)\|_\infty = \max(|x + 3|, |y - 1|) \leq \|(x, y) - (-3, 1)\|_2 \leq \eta = \frac{\varepsilon}{3},$$

donc

$$\begin{aligned}|f(x, y) - (-2)| &= |(x - 2y + 3) - (-3 - 2 \cdot 1 + 3)| = |(x - (-3)) - 2(y - 1)| \\ &\leq |x + 3| + 2|y - 1| \leq 3 \max(|x + 3|, |y - 1|) \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \underline{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Notons que la valeur $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ est loin d'être la meilleure possible. En fait, on peut prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$, mais l'astuce pour le démontrer n'est pas évidente.

On utilise que pour $A > 0, B > 0$, on a $4A^2 - 4AB + B^2 = (2A - B)^2 \geq 0$ donc $5A^2 + 5B^2 \geq A^2 + 4AB + 4B^2$ et donc $A + 2B \leq \sqrt{5}\sqrt{A^2 + B^2}$.

Appliquant ceci avec $A = |x + 3|$ et $B = |y - 1|$, si on a $\|(x, y) - (-3, 1)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{5}}$, on en déduit que

$$|f(x, y) - (-2)| \leq |x + 3| + 2|y - 1| \leq \sqrt{5}\|(x + 3, y - 1)\|_2 \leq \underline{\varepsilon}.$$

Ce type d'optimisation de la valeur de η est un exercice assez vain : du moment qu'on trouve un η qui convient, la démonstration est terminée et correcte.

Pour la norme somme, on peut simplement utiliser la majoration $\|X\|_\infty \leq \|X\|_1$, et se ramener à ce qu'on vient de faire ; mais il est ici particulièrement simple d'améliorer la valeur de η en utilisant que $|x + 3| + 2|y - 1| \leq 2(|x + 3| + |y - 1|) = 2\|(x, y) - (-3, 1)\|_1$. On peut alors écrire $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tel que si $\|(x, y) - (-3, 1)\|_1 \leq \eta = \frac{\varepsilon}{2}$, on en déduit

$$\begin{aligned}|f(x, y) - (-2)| &= |(x - 2y + 3) - (-3 - 2 \cdot 1 + 3)| = |(x - (-3)) - 2(y - 1)| \\ &\leq |x + 3| + 2|y - 1| \leq 2\|(x, y) - (-3, 1)\|_1 \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Exercice 3.2.

On utilise la norme du max dans l'espace de départ \mathbb{R}^2 et la norme somme dans l'espace d'arrivée.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{7} > 0$ tel que si $\|(x, y, z) - (1, -1, 2)\|_\infty \leq \eta$, on en déduit $\max(|x - 1|, |y + 1|, |z - 2|) \leq \frac{\varepsilon}{7}$ donc

$$\begin{aligned}\left\| f(x, y, z) - \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_1 &= \left\| \begin{pmatrix} (x - 1) - (y + 1) + 2(z - 2) \\ (x - 1) - 2(z - 2) \end{pmatrix} \right\|_1 \\ &= |(x - 1) - (y + 1) + 2(z - 2)| + |(x - 1) - 2(z - 2)| \\ &\leq |x - 1| + |y + 1| + 2|z - 2| + |x - 1| + 2|z - 2| \\ &\leq 7 \max(|x - 1|, |y + 1|, |z - 2|) \leq 7 \frac{\varepsilon}{7} = \underline{\varepsilon}\end{aligned}$$

Si on tient à utiliser d'autres normes, le plus simple est de se ramener à ce qu'on vient de faire en utilisant une ou deux inégalités du théorème 1.9 (p. 7).

3.4 Détermination pratique de limites

Exercice 3.3.

$$1. f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}.$$

Pas de limite : pour $x = y = t \rightarrow 0$, on a $f(x(t), y(t)) = \frac{(t+t)^2}{t^2 + t^2} = 2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2$

alors que pour $x = t$ et $y = 0$, avec $t \rightarrow 0$, $f(x(t), y(t)) = 1 \rightarrow 1$.

On a trouvé deux façons de se rapprocher de $(0, 0)$ avec des limites différentes.

$$2. f(x, y) = \frac{x+y^3}{x^2 + y^2}.$$

Pas de limite : pour $x = t$ et $y = 0$, avec $t \rightarrow 0$, $f(x(t), y(t)) = \frac{1}{t} \rightarrow \infty$.

(On note plus simplement cet argument $f(x, 0) = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \infty$, de même que pour décrire ce qui se passe si on se rapproche de $(0, 0)$ en suivant l'axe des ordonnées, on écrit $f(0, y) = y \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 0$.)

$$3. f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^4 + y^2}.$$

Pour tout (x, y) , on a $|f(x, y)| \leq y^2 \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0$ puisque pour $x \neq 0$, on peut inverser l'inégalité $x^4 + y^2 \geq x^4$ et pour $x = 0$, on écrit $0 \leq 0$. On peut donc conclure que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

$$4. f(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, en passant en polaires, on obtient

$$|f(x, y)| = \frac{r^\alpha |\cos \theta|^\alpha \cdot r^\alpha |\sin \theta|^\alpha}{r} \leq r^{2\alpha - 1} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0 \quad (\text{car } 2\alpha - 1 > 0).$$

On applique alors le corollaire 3.34 (p. 87) et on peut conclure que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Pour $\alpha < \frac{1}{2}$, pas de limite car pour $x = y = t \rightarrow 0$, on a

$$f(x(t), y(t)r) = \frac{1}{|t|^{1-2\alpha}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \infty$$

(on peut noter plus brièvement cet argument ainsi : $f(x, x) = \frac{1}{|x|^{1-2\alpha}} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} +\infty$)
(et pour $y = 0$, on a $f(x, 0) = 0$)

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $f(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $f(x, 0) = 0$ donc pas de limite.

5. $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$. En utilisant le passage en polaires,

$$|f(x, y)| = \frac{r^3 |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta|}{r^2} \leq r (|\cos^3 \theta| + |\sin^3 \theta|) \leq 2r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0,$$

et on peut conclure que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

6. $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2 + y^4}$.

En suivant la première diagonale, $x = y = t \rightarrow 0$,

$$f(x(t), y(t)) = \frac{\sin t^2}{t^2 + t^4} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1,$$

alors que $f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$ donc pas de limite.

7. $f(x, y) = \frac{\sin^4 x + (1 - \cos y)^2}{4x^4 + y^4}$.

On va utiliser les développements limités classiques de sin et cos.

$\sin^4 x = x^4 + x^5 \varepsilon_1(x)$ et $(1 - \cos y)^2 = \frac{1}{4}y^4 + y^5 \varepsilon_2(y)$ (avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon_2(y) = 0$), donc

$$f(x, y) = \frac{x^4 + x^5 \varepsilon_1(x) + \frac{1}{4}y^4 + y^5 \varepsilon_2(y)}{4(x^4 + \frac{1}{4}y^4)} = \frac{1}{4} + \frac{x^5 \varepsilon_1(x)}{4x^4 + y^4} + \frac{y^5 \varepsilon_2(y)}{4x^4 + y^4}.$$

D'une part, on a

$$\left| \frac{x^5 \varepsilon_1(x)}{4x^4 + y^4} \right| = \frac{x^4 |x| \varepsilon_1(x)}{4x^4 + y^4} \leq \frac{(x^4 + \frac{1}{4}y^4) |x| \varepsilon_1(x)}{4(x^4 + \frac{1}{4}y^4)} = \frac{|x| |\varepsilon_1(x)|}{4} \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0.$$

De même, on a

$$\left| \frac{y^5 \varepsilon_2(y)}{4x^4 + y^4} \right| = \frac{y^4 |y| |\varepsilon_2(y)|}{4x^4 + y^4} \leq \frac{(4x^4 + y^4) |y| |\varepsilon_2(y)|}{4x^4 + y^4} = |y| |\varepsilon_2(y)| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0.$$

On a donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 \varepsilon_1(x)}{4x^4 + y^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^5 \varepsilon_2(y)}{4x^4 + y^4} = 0$,

donc on peut conclure que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{4}$.

8. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{(x^2 + y^2)^\alpha}$.

Pour $\alpha < 1$, en passant en polaires, on a

donc on a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Pour $\alpha > 1$, $f(x,0) = \frac{1}{(x^2)^{\alpha-1}}$ $\xrightarrow[x \rightarrow 0]{} +\infty$ donc pas de limite.

Pour $\alpha = 1$, $f(x,0) = 1$ et $f(x,x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc pas de limite.

$$9. f(x,y) = \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{y}.$$

Ici f n'est pas définie dans un voisinage de $(0,0)$. Il est plus compliqué de travailler, car on doit à chaque fois préciser que $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$. Cet ensemble de définition est formé du premier quadrant ($x \geq 0$ et $y > 0$) et de son symétrique par rapport à l'origine.

C'est un résultat classique que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $|1 - \cos u| \leq \frac{u^2}{2}$ (*pour le montrer, le plus simple est d'utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de 0 : $g(u) = g(0) + ug'(0) + \frac{u^2}{2}g''(\xi)$ avec ξ entre 0 et u ; ici cette formule s'écrit $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} \cos \xi$, donc on en déduit que $|1 - \cos u| = \left| \frac{u^2}{2} \cos \xi \right| \leq \frac{u^2}{2}$.*).

Pour $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$, on en déduit, en posant $u = \sqrt{xy}$ que :

$$|f(x,y)| = \left| \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{|y|} \right| \leq \frac{xy}{2|y|} = \frac{|xy|}{2|y|} = \frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0.$$

On ne peut pas vraiment appliquer directement le théorème 3.33 (p. 86), à cause de l'ensemble de définition, mais le même raisonnement s'applique : pour ε , on trouve grâce au fait que $\frac{|x|}{2}$ tend vers 0, un voisinage de $(0,0)$ dans lequel on a $\frac{|x|}{2} \leq \varepsilon$ et grâce à la majoration que l'on a obtenue, pour les (x,y) qui sont à la fois dans ce voisinage et dans $\mathcal{D}(f)$, on a $|f(x,y) - 0| \leq \varepsilon$.

On a montré que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

$$10. f(x,y) = \frac{xy}{|x| \cos y + |y| \cos x}.$$

Pour x, y suffisamment petits (on peut prendre (x,y) dans la boule $\overline{B}_\infty(\mathbf{0}, \frac{\pi}{3})$), on a $\cos y \geq \frac{1}{2}$ et $\cos x \geq \frac{1}{2}$, donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{2|xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{2(|x| + |y|)|y|}{|x| + |y|} = 2|y| \xrightarrow[(x,y) \rightarrow (0,0)]{} 0.$$

et on peut conclure que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

$$11. f(x,y) = \frac{y \sin x - x \sin y}{x^2 + y^2}.$$

Il est classique que $|\sin u - u| \leq \frac{|u|^3}{6}$ (pour le montrer, utiliser comme dans 9. la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 au voisinage de 0), et en remarquant que $f(x, y) = \frac{y \sin x - xy + xy - x \sin y}{x^2 + y^2}$, on a

$$|f(x, y)| = \frac{|y(\sin x - x) - x(\sin y - y)|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|y||x|^3 + |x||y|^3}{6(x^2 + y^2)}.$$

On passe alors en polaires et on obtient

$$|f(x, y)| \leq \frac{r^4(|\sin \theta| |\cos^3 \theta| + |\cos \theta| |\sin^3 \theta|)}{6r^2} \leq \frac{r^2}{3} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0.$$

et on peut conclure $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

$$12. f(x, y) = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - 2}{x^2 + y^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\sqrt{1+x^2} - (1 + \frac{x^2}{2}) + \sqrt{1+y^2} - (1 + \frac{y^2}{2}) + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+x^2} - (1 + \frac{x^2}{2})}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{1+y^2} - (1 + \frac{y^2}{2})}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} + g(x, y) + h(x, y). \end{aligned}$$

$$\text{Or, } |\sqrt{1+u} - (1 + \frac{u}{2})| = \left| \frac{-\frac{u^2}{4}}{\sqrt{1+u} + 1 + \frac{u}{2}} \right| \leq \frac{u^2}{8} \text{ pour } u \geq 0.$$

$$\text{Donc } |g(x, y)| \leq \frac{x^4}{8(x^2 + y^2)} \rightarrow 0;$$

$$(\text{c'est évident en passant en polaires : } |g(x, y)| = \frac{r^2 \cos^4 \theta}{8} \leq \frac{r^2}{8});$$

$$\text{de même } h(x, y) \rightarrow 0 \text{ et donc } f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$$13. f(x, y) = \frac{1 - \cos xy}{x^2 + xy + y^2}.$$

$$\text{Puisque } (1 - \cos u) \leq \frac{u^2}{2} \text{ (voir question 9.), et que } x^2 + xy + y^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \text{ on a}$$

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2 y^2}{2(x^2 + y^2)} \rightarrow 0 \text{ (évident en passant en polaires), donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

$$14. f(x, y) = \frac{\sin xy - xy}{x^2 + y^2}.$$

Puisque $|\sin u - u| \leqslant \frac{|u|^3}{6}$, (voir question 11.), on a $|f(x, y)| \leqslant \frac{|x|^3 |y|^3}{6(x^2 + y^2)} \rightarrow 0$ (évident en passant en polaires), donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

$$15. f(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

Pour $\alpha < 1$,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1-\alpha} + \frac{\sin x^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} + \frac{\sin y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} = (x^2 + y^2)^{1-\alpha} + g(x, y) + h(x, y),$$

$$\text{en posant } g(x, y) = \frac{\sin x^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} \text{ et } h(x, y) = \frac{\sin y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

$$\text{On a } |g(x, y)| \leqslant \frac{x^6}{6(x^2 + y^2)^\alpha} \leqslant \frac{r^{6-2\alpha}}{6} \rightarrow 0;$$

$$\text{et de même } |h(x, y)| \leqslant \frac{y^6}{6(x^2 + y^2)^\alpha} \leqslant \frac{r^{6-2\alpha}}{6} \rightarrow 0.$$

Puisqu'il est clair que $(x^2 + y^2)^{1-\alpha} \rightarrow 0$ car $1-\alpha > 0$, on peut conclure $f(x, y) \rightarrow 0$.

Pour $\alpha = 1$, le même calcul montre que

$$f(x, y) = 1 + g(x, y) + h(x, y),$$

avec les mêmes valeurs pour g et h ; puisqu'ici $6 - 2\alpha = 4$, ici aussi g et h tendent vers 0 et on peut conclure que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$

Pour $1 < \alpha < 3$, on a toujours $6 - 2\alpha > 0$, donc les termes $g(x, y)$ et $h(x, y)$ tendent encore vers 0, alors que le terme $(x^2 + y^2)^{1-\alpha} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha-1}}$ a pour limite $+\infty$. La fonction f n'a pas de limite (ou a $+\infty$ comme limite, mais nous n'avons pas formalisé ce type de situation).

Pour $\alpha \geqslant 3$, il est plus compliqué de calculer la limite des termes $g(x, y)$ et $h(x, y)$, mais le plus simple (méthode valable aussi entre 1 et 3) consiste à utiliser le résultat obtenu pour $\alpha = 1$: on écrit

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha-1}}$$

La première fraction admet 1 comme limite (d'après ce qu'on a vu lorsque $\alpha = 1$), et la deuxième fraction tend vers $+\infty$ (ou n'a pas de limite, si on préfère), donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = +\infty \text{ (ou n'existe pas).}$$

$$16. f(x, y) = |x|^\alpha \ln(x^2 + y^2).$$

Lorsque α est positif, la fonction est définie dans un voisinage de $(0, 0)$ et le raisonnement est plus facile; mais si $\alpha < 0$, $\mathcal{D}(f)$ est le plan privé de l'axe des ordonnées $x = 0$.

En utilisant le passage en polaires, on obtient lorsque $\alpha > 0$,

$$|f(x, y)| = r^\alpha |\cos \theta|^\alpha |\ln r^2| \leqslant 2r^\alpha |\ln r| \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$$

(en effet, le terme r^α est prépondérant devant le terme $|\ln r|$).

On conclut, dans ce cas que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Si $\alpha \leqslant 0$, on a $f(x, 0) = |x|^\alpha \ln x^2 \rightarrow -\infty$, donc $f(x, y)$ n'a pas de limite. (En ne se posant pas la question d'une limite éventuellement infinie).

Exercice 3.4. $\begin{cases} f(x, y) = \frac{|y|}{x^2} \exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0, y) = 0. & \end{cases}$

1. La droite verticale passant par l'origine est l'axe des ordonnées paramétré par

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \rightarrow 0.$$

Pour cette paramétrisation, on a $f(x(t), y(t)) = f(0, t) = 0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

De même, la droite horizontale passant par l'origine est l'axe des abscisses paramétré par

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \rightarrow 0.$$

Pour cette paramétrisation, on a

$$f(x(t), y(t)) = f(t, 0) = \frac{|0|}{t^2} \exp\left(-\frac{|0|}{t^2}\right) = 0 \cdot e^0 = 0 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Une droite oblique, de coefficient directeur λ passant par l'origine est paramétrée par

$$\begin{cases} x = t \\ y = \lambda t \end{cases} \quad t \rightarrow 0$$

Pour cette paramétrisation, on a

$$f(x(t), y(t)) = f(t, \lambda t) = \frac{|\lambda t|}{t^2} \exp\left(-\frac{|\lambda t|}{t^2}\right) = \frac{|\lambda|}{|t|} \cdot e^{-\frac{|\lambda|}{|t|}} = u e^{-u},$$

en posant $u = \frac{|\lambda|}{|t|} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty$. Puisque classiquement, $\lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = 0$, on peut conclure, par composition de limite que $\lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = 0$.

On a montré que si (x, y) tend vers $(0, 0)$ en suivant une des droites passant par l'origine, alors $f(x, y)$ tend vers 0. Ça ne suffit pas à montrer que la limite de

$f(x, y)$ est nulle pour $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ (voir la remarque suivant la proposition 3.32 p. 84). On peut simplement affirmer que si f admet une limite en ce point, cette limite est nulle.

2. Considérons la parabole d'équation $y = x^2$, qui passe par l'origine. Une paramétrisation de cette parabole est

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \rightarrow 0.$$

Pour $t \rightarrow 0$, le point (x, y) se rapproche bien de l'origine.

On a

$$f(x(t), y(t)) = f(t, t^2) = \frac{|t^2|}{t^2} \exp\left(-\frac{|t^2|}{t^2}\right) = e^{-1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} e^{-1} \neq 0.$$

On a trouvé une façon $(x(t), y(t))$ de se rapprocher de $(0, 0)$ sans que $f(x(t), y(t))$ n'ait pour limite 0. Comme 0 est la seule limite possible, on peut donc dire que $f(x, y)$ n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

3.5 Dérivées partielles

Exercice 3.5.

Dans chacune des questions, nous proposons ce que nous appellerons un domaine de régularité, c'est-à-dire un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 dans lequel on est sûr qu'il n'y a aucun problème de dérivable.

$$1. f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

$x - y$ doit être non nul, donc on peut prendre comme domaine de régularité un des deux demi-plans ouverts (sans la frontière) limités par la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice du repère).

On dérive en appliquant la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2y}{(x-y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

$$2. f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1+y}}.$$

La quantité sous le radical doit être positive, donc un domaine de régularité est l'intersection du demi-plan ouvert $y > -1$ avec le demi-plan ouvert $x > -1$.

Dans ce domaine, pour pouvoir dériver plus facilement, on a intérêt à écrire $f(x, y) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+y)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$, la dérivée de $y \mapsto C \times (1+y)^{-\frac{1}{2}}$ est $-\frac{1}{2}C \times (1+y)^{-\frac{3}{2}}$, donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\sqrt{1+x}}{2(1+y)\sqrt{1+y}}.$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, la dérivée de $x \mapsto \lambda(1+x)^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{\lambda}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}\sqrt{1+y}}.$$

3. $f(x, y) = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

x doit être non nul, et en plus, $\tan u$ n'existe pas pour $\cos u = 0$ c'est-à-dire pour $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Un domaine de régularité est par exemple l'ensemble des (x, y) tels que $x > 0$ et $-\frac{\pi}{2}x < y < \frac{\pi}{2}x$ (le secteur angulaire limité par les deux demi-droites $y = \frac{\pi}{2}x$ et $y = -\frac{\pi}{2}x$ (dans le demi-plan $x > 0$).

La dérivée de $t \mapsto \tan t$ est $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, donc la dérivée de $\tan u$ (où u est une fonction) est $u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère que $f(x, y) = \tan u$ avec $u(x) = \frac{y}{x} = y \times \frac{1}{x}$ donc $u'(x) = y \times \frac{-1}{x^2}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}\left(1 + \tan^2 \frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2 \cos^2 \frac{y}{x}}$.

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère que $f(x, y) = \tan v$ avec $v(y) = \frac{y}{x} = y \times \frac{1}{x}$

donc $v'(y) = \frac{1}{x}$. On obtient donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}\left(1 + \tan^2 \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x \cos^2 \frac{y}{x}}$.

4. $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

$\frac{y}{x}$ doit exister et être strictement positif, donc un domaine de régularité est le quart de plan limité par les deux demi-axes de coordonnées $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

On peut raisonner comme dans 3., en utilisant que la dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$.

Mais il est infinitement plus simple d'utiliser que, pour $x, y > 0$,

$$f(x, y) = \ln \frac{y}{x} = \ln y - \ln x, \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y}.$$

5. $f(x, y) = x^{xy^2}$.

x doit être positif donc un domaine de régularité est le demi-plan $x > 0$, « à droite » de l'axe des ordonnées.

On écrit $f(x, y) = x^{xy^2} = e^{xy^2 \ln x} = e^u$. La dérivée de e^u est $u'e^u$.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère que $u = u(x) = (x \ln x) y^2$ (avec y constante), donc

$$u'(x) = y^2(\ln x + 1) \text{ et finalement } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2(\ln x + 1)e^{xy^2 \ln x} = y^2(\ln x + 1)x^{xy^2}.$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère que $u = u(y) = (x \ln x) y^2$ avec x constante, donc

$$u'(y) = (x \ln x)2y \text{ et finalement } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx \ln x e^{xy^2 \ln x} = 2yx \ln x x^{xy^2}.$$

$$6. f(x, y) = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Il est tout à fait clair que la quantité dont on calcule le logarithme est strictement positive si on impose $y > 0$, donc le demi-plan au-dessus de l'axe des abscisses est un domaine de régularité (même si c'est loin d'être le plus grand possible).

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on pose $f(x, y) = \ln u$, avec $u(x) = y + \sqrt{x^2 + y^2} = C + \sqrt{v}$ et $v(x) = x^2 + y^2$, donc $v'(x) = 2x$, et $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ (la dérivée de \sqrt{v} est $\frac{v'}{2\sqrt{v}}$). Puisque la dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}(y + \sqrt{x^2 + y^2})}.$$

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}$, c'est le même raisonnement, sauf qu'ici $f(x, y) = \ln u$ avec $u(y) = y + \sqrt{x^2 + y^2} = y + \sqrt{v}$ et ici $v'(y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$ de sorte que

$$u'(y) = 1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et finalement } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$7. f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 - y^2}).$$

Pour que $f(x, y)$ existe, il faut entre autres que la quantité sous le radical soit positive, donc on doit avoir $|x| \geq |y|$. Il faut aussi que la quantité dont on calcule le logarithme soit positive, donc pour être sûr de ne pas avoir de problème, on peut s'imposer $x > 0$. On choisira donc le domaine $\begin{cases} x > 0 \\ -x < y < x \end{cases}$ comme domaine de régularité.

Ensuite les calculs sont en tous points semblables à ceux de 6. et on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}(x + \sqrt{x^2 - y^2})}.$$

$$8. f(x, y) = \sin^2\left(\frac{y}{x}\right).$$

x doit être non nul, donc on prendra comme domaine de régularité l'un des deux demi-plans limités par l'axe des ordonnées.

Ensuite, on raisonne comme dans 3. ; la dérivée de la fonction $\sin^2 u$ est :

$$2u' \sin u \cos u = u' \sin 2u.$$

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, on écrit $\frac{y}{x} = u(x)$, donc $u'(x) = -\frac{y}{x^2}$ et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \sin \frac{2y}{x}$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère $u(y) = \frac{y}{x} = \frac{1}{x} y$, x étant une constante, donc $u'(y) = \frac{1}{x}$ et finalement $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \sin \frac{2y}{x}$.

$$9. f(x, y) = \sqrt{x \cos y}.$$

La quantité sous le radical doit être strictement positive pour qu'il n'y ait pas de problème de dérivable. On peut prendre comme domaine de régularité $\mathbb{R}^{++} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et dans ce domaine x et $\cos y$ sont tous deux positifs, ce qui simplifie les calculs : dans ce domaine, on a $f(x, y) = \sqrt{x} \sqrt{\cos y}$.

On écrit : $f(x, y) = a\sqrt{u}$, on sait que la dérivée de $a\sqrt{u}$ est $\frac{au'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, on obtient facilement $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sqrt{\cos y}}{2\sqrt{x}}$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on prend $a = \sqrt{x}$ et $u = u(y) = \cos y$ donc $u' = u'(y) = -\sin y$ et finalement

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-\sqrt{x} \sin y}{2\sqrt{\cos y}}.$$

$$10. f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Le dénominateur est clairement strictement positif, donc f est clairement dérivable sur \mathbb{R}^2 .

En appliquant la dérivation d'un quotient, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(1 + x^2 + y^2) - xy(2x)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{y + y^3 - x^2y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

et en échangeant le rôle de x et y , on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x + x^3 - yx^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

$$11. f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}.$$

Cette fonction est clairement dérivable sur \mathbb{R}^2 .

En appliquant la dérivation d'un produit, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{-xy} + (x^2 + y^2)y e^{-xy} = (2x + x^2y + y^3)e^{-xy}.$$

et en échangeant le rôle de x et y , on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2y + y^2x + x^3)e^{-xy}.$$

$$12. f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

Pour que $\sin(x^2 + y^2)$ soit strictement positif, on peut prendre des couples (x, y) tels que $0 < x^2 + y^2 < \pi$: un domaine de régularité est donc le disque centré en $(0, 0)$, de rayon $\sqrt{\pi}$, privé de son centre.

La dérivée de \sqrt{u} est $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$; on prend, pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $u = u(x) = \sin(x^2 + y^2)$,

on a $u'(x) = 2x \cos(x^2 + y^2)$ donc on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x \cos(x^2 + y^2)}{2\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}} = \frac{x \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}},$$

et en échangeant le rôle de x et y ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}}.$$

$$13. f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

Le dénominateur, s'il existe, est toujours strictement positif. Le seul problème vient du radical, et pour être sûr qu'il n'y a pas de problème de dérivable, il suffit de prendre comme domaine de régularité $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.

Dans ce domaine, on peut écrire $f(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}} = \frac{1}{u}$ et utiliser que la dérivée

de $\frac{1}{u}$ est $-\frac{u'}{u^2}$.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, on prend $u = u(x) = 1 + \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{y}}$ (avec y constante) donc $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\text{et on obtient } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}}{\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{x})^2}.$$

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on prend $u = u(y) = 1 + \sqrt{xy}^{-\frac{1}{2}}$ (avec x constante) donc $u'(y) =$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{x} y^{-\frac{3}{2}}, \text{ donc on obtient } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y}}}{\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{x})^2}.$$

On aurait aussi pu écrire $f(x, y) = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ et utiliser la dérivation de $\frac{C}{u}$; sous cette forme, on comprend beaucoup mieux l'analogie des deux résultats.

14. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Le dénominateur $x^2 + y^2$ ne peut être nul que pour $(x, y) = (0, 0)$, donc on peut prendre comme domaine de régularité le plan privé de l'origine : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On dérive $f(x, y)$ comme un quotient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(2x)(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(-2y)(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(On aurait pu aussi échanger le rôle de x et y , mais ce faisant on change $f(x, y)$ et $-f(x, y)$, d'où la différence de signe entre les deux expressions.)

15. $f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2}$.

x et y doivent être non nuls, donc on peut prendre comme domaine de régularité un des quatre quadrants limités par les deux axes de coordonnées.

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère que $f(x, y) = ax^2 - bx^{-2}$ (avec $a = \frac{1}{y}$ et $b = y$) donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2ax + 2bx^{-3} = 2\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x^3}.$$

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère que $f(x, y) = \alpha\frac{1}{y} - \beta y$ (avec $\alpha = x^2$ et $\beta = \frac{1}{x^2}$), donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha\frac{-1}{y^2} - \beta = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{x^2}.$$

16. $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Pour que la quantité sous le radical soit strictement positive, on choisira comme domaine de régularité l'ensemble des (x, y) tels que $x > 0$ et $-x < y < x$ (c'est le quadrant situé à droite des deux bissectrices du repère).

On considère que $f(x, y) = e^u$, avec $u = \sqrt{v}$, donc $u' = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$.

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère que y est constante, donc $v = v(x) = x^2 - y^2$, donc $v'(x) = 2x$, et $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}}$, donc finalement $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}$, c'est x qui est constante, donc $v = v(y) = x^2 - y^2$, $v'(y) = -2y$ donc $u'(y) = -\frac{2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

17. $f(x, y) = x^y$.

On doit imposer $x > 0$ pour ne pas avoir de problème de dérivabilité, et écrire

$$f(x, y) = e^{y \ln x} = e^u.$$

Pour $\frac{\partial f}{\partial x}$, $u = u(x) = y \ln x$, donc $u'(x) = \frac{y}{x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x} e^{y \ln x} = y x^{y-1}$.

(Ou, plus simplement, y étant constante, la dérivée de $x \mapsto x^y$ est $x \mapsto y x^{y-1}$.)

Pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, $u = u(y) = y \ln x$, donc $u'(y) = \ln x$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln x e^{y \ln x} = \ln x x^y$.

$$18. f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

On s'assure de la dérivable de $f(x, y)$ en imposant $x > 0$ et $y > 0$, et le problème devient excessivement simple, car on a $f(x, y) = \frac{x}{|x| |y|} = \frac{1}{y}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2}$.

$$19. f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right).$$

On doit imposer que $y \neq 0$ et $-1 < \frac{x}{y} < 1$, donc par exemple $y > |x|$.

Dans ce domaine, on écrit $f(x, y) = \arcsin u$. La dérivée de $\arcsin u$ est $\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on considère $u = u(x) = \frac{1}{y}x$ (y constante), donc $u'(x) = \frac{1}{y}$,

$$\text{donc on obtient } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}$, on prend $u = u(y) = x \frac{1}{y}$, donc $u'(y) = -x \frac{1}{y^2}$ et on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} = -\frac{x}{y \sqrt{y^2 - x^2}}$$

$$20. f(x, y) = \ln \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Le plus simple est de s'imposer $y > 0$ ainsi que $y > |x|$.

On peut alors écrire $f(x, y) = \ln y - \frac{1}{2} \ln(y^2 - x^2) = \ln y - \frac{1}{2} \ln(y-x) - \frac{1}{2} \ln(y+x)$.

Sous cette forme, il n'y a plus aucune difficulté pour dériver.

On trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{y-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{y+x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-x} - \frac{1}{2} \frac{1}{y+x}$.

$$21. f(x, y) = \operatorname{ch}\left(\frac{xy+1}{xy-1}\right).$$

Il suffit de choisir un domaine dans lequel $xy \neq 1$ comme domaine de régularité, par exemple l'ensemble des couples (x, y) tels que $x > 1$ et $y > 1$.

Dans ce domaine, on écrit $f(x, y) = \operatorname{ch} u$; la dérivée de $\operatorname{ch} u$ est $u' \operatorname{sh} u$; pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, on prend $u = u(x) = \frac{xy + 1}{xy - 1}$ avec y constante, donc

$$u'(x) = \frac{y(xy - 1) - (xy + 1)y}{(xy - 1)^2} = \frac{-2y}{(xy - 1)^2}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2y}{(xy - 1)^2} \operatorname{sh}\left(\frac{xy + 1}{xy - 1}\right);$$

en échangeant le rôle de x et y , on trouve $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x}{(xy - 1)^2} \operatorname{sh}\left(\frac{xy + 1}{xy - 1}\right)$.

Exercice 3.6. $f(x, y) = \arccos \frac{1 - xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

$f(x, y)$ existe à condition que la fraction $u(x, y) = \frac{1 - xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$ soit comprise entre -1 et 1 . (La quantité sous le radical est évidemment toujours strictement positive et le dénominateur ne s'annule donc jamais). On est donc amené à résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}} \right| \leqslant 1 &\iff \left(\frac{1 - xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}} \right)^2 \leqslant 1 \\ &\iff (1 - xy)^2 \leqslant (1 + x^2)(1 + y^2) \\ &\iff 1 - 2xy + x^2y^2 \leqslant 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \\ &\iff 0 \leqslant x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2. \end{aligned}$$

Comme un carré est toujours positif, cette dernière inégalité est toujours vraie, et le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

Comme la fonction \arccos est continue sur son ensemble de définition, f n'est fabriquée qu'avec des fonctions continues, et est donc continue, c'est-à-dire que f est continue sur son ensemble de définition qui est \mathbb{R}^2 .

En revanche, la fonction \arccos n'est pas dérivable en -1 ni en 1 , donc la dérивabilité de f n'est sûre que pour les (x, y) qui sont tels que la fraction u est strictement comprise entre -1 et 1 ; on est donc amené à résoudre l'inéquation $|u| < 1$, qui est la même que l'inéquation ci-dessus, à ceci près qu'on a remplacé \leqslant par $<$. La résolution n'est en rien changée, et on trouve que f est dérivable pour les (x, y) qui sont tels que $(x + y)^2 > 0$, ou ce qui revient au même, qui sont tels que $x + y \neq 0$. On enlève donc à l'ensemble de définition et de continuité qui est le plan, la droite $\Delta : y = -x$ pour obtenir un domaine dans lequel f est à coup sûr partiellement dérivable, car fabriquée avec des fonctions dérivables.

Remarquons que pour l'instant, rien ne nous permet d'affirmer que f n'est pas dérivable pour les (x, y) qui sont sur la droite Δ . Nous savons simplement que f est partiellement dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Nous ne pourrions affirmer quelque chose

quant à la dérivabilité partielle de f pour (x_0, y_0) qu'en étudiant les limites en 0 des rapports $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ et $\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$.

Nous ne ferons pas cette étude, car nous découvrirons un peu plus loin une solution beaucoup plus simple de cette question de la dérivabilité partielle de f sur Δ .

Calculons pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

On utilisera que $f(x, y) = \arccos(u(x, y))$ avec $u(x, y) = \frac{1 - xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

$f(x, y)$ s'écrit donc, pour y fixé, $f(x, y) = g(x) = \arccos(v(x))$ avec $v(x) = u(x, y)$ (g est la première fonction partielle de f en (x, y) et v est aussi la première fonction partielle de u en (x, y)).

De sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= g'(x) = \arccos'(v(x)) v'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (v(x))^2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (u(x, y))^2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).\end{aligned}$$

Pour faciliter les calculs, nous écrirons $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \frac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2}}$, la première fraction $\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$ pouvant être considérée comme une constante par rapport à x . On obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{(1 - xy)^2}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \frac{-y\sqrt{1 + x^2} - (1 - xy)\frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}}{1 + x^2} \\ &= \frac{-\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)} (-y - yx^2 - x + x^2y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 - (1 - 2xy + x^2y^2)} \sqrt{1 + y^2} (1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x + y}{\sqrt{(x + y)^2}} \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \frac{x + y}{|x + y|} \frac{1}{1 + x^2} = \operatorname{sgn}(x + y) \frac{1}{1 + x^2} = \pm \frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ car x et y jouant des rôles absolument symétriques, on peut sans craindre affirmer que dans le domaine de dérivabilité $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \operatorname{sgn}(x + y) \frac{1}{1 + y^2} = \pm \frac{1}{1 + y^2}.$$

On remarque que dans le domaine P_1 caractérisé par $x + y > 0$, c'est-à-dire dans le demi-plan ouvert situé au-dessus de la droite Δ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).$$

On peut donc affirmer que pour tout y fixé, la fonction g et la fonction \arctan coïncident à une constante près (cette constante en x pouvant dépendre de y). Il existe donc une fonction h telle que pour tout $(x, y) \in P_1$, on a

$$f(x, y) = g(x) = \arctan x + h(y).$$

Mais $\arctan x$ étant une constante par rapport à y lorsqu'on cherche à dériver f par rapport à y , on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Donc on peut affirmer que $h(y) = \arctan y + C_1$, et finalement, sur P_1 , on a

$$(1) \quad f(x, y) = \arctan x + \arctan y + C_1.$$

Pour déterminer cette constante C_1 , on pourrait utiliser la valeur de $f(x, y)$ pour un couple $(x, y) \in P_1$, par exemple, on pourrait prendre⁴ $(x, y) = (1, 0)$. Mais il est encore plus simple de se placer en $(0, 0)$. Cela peut paraître paradoxal, mais la formule (1), a priori valable uniquement dans le demi-plan ouvert P_1 , est encore valable sur la frontière Δ de P_1 . Pour s'en convaincre, il faut penser à utiliser la continuité de f (valable sur \mathbb{R}^2 tout entier), qui permet d'écrire, pour $(x_0, y_0) \in \Delta$:

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in P_1}} f(x, y) \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in P_1}} \arctan x + \arctan y + C_1 = \arctan x_0 + \arctan y_0 + C_1. \end{aligned}$$

En appliquant ceci à $(0, 0)$, on trouve donc

$$0 = \arccos 1 = \arccos \frac{1 - 0 \cdot 0}{\sqrt{(1+0^2)(1+0^2)}} = f(0, 0) = \arctan 0 + \arctan 0 + C_1 = C_1.$$

Donc $C_1 = 0$.

⁴ On trouverait d'une part $f(1, 0) = \arccos \frac{1 - 1 \cdot 0}{\sqrt{(1+1^2)(1+0^2)}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ et d'autre part $f(1, 0) = \arctan 1 + \arctan 0 + C_1 = \frac{\pi}{4} + 0 + C_1$. D'où $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C_1$ donc $C_1 = 0$

Finalement, on a établi que pour $(x, y) \in P_1$, c'est-à-dire tels que $x + y > 0$, on a

$$f(x, y) = \arctan x + \arctan y \quad (\text{pour } (x, y) \in P_1).$$

Si P_2 est l'autre demi-plan limité par Δ (caractérise par $x + y < 0$), en raisonnant exactement de la même façon, on obtient sans peine que

$$f(x, y) = -(\arctan x + \arctan y) \quad (\text{pour } (x, y) \in P_2).$$

Comme il est clair que $(\arctan x + \arctan y)$ a le même signe que $(x + y)$, on peut écrire plus brièvement que

$$f(x, y) = |\arctan x + \arctan y|.$$

Cette formule permet maintenant de répondre facilement à la question que nous avions laissée en suspens : f est-elle partiellement dérivable sur Δ ?

La réponse est non. En effet, si $(x_0, y_0) \in \Delta$, on a $y_0 = -x_0$, et la première fonction partielle de f en (x_0, y_0) est la fonction g définie par

$$\begin{cases} g(x) = \arctan x - \arctan x_0 & \text{pour } x \geqslant x_0, \\ g(x) = -\arctan x + \arctan x_0 & \text{pour } x \leqslant x_0. \end{cases}$$

La dérivée à droite de g en x_0 est donc $g'_d(x_0) = \frac{1}{1+x_0^2}$ alors que la dérivée à gauche de g en x_0 est $g'_g(x_0) = -\frac{1}{1+x_0^2}$.

Comme la dérivée à droite et la dérivée à gauche de g en x_0 n'ont pas la même valeur, c'est que g n'est pas dérivable en x_0 , et par conséquent, par définition, f n'est pas dérivable partiellement par rapport à x en (x_0, y_0) .

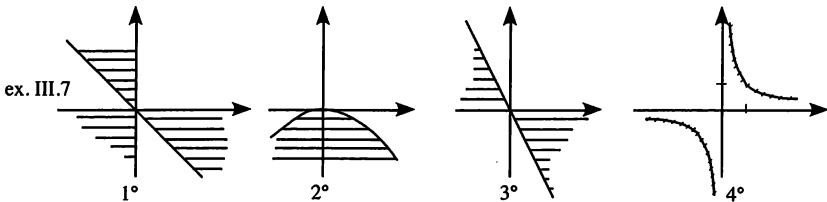
Le même raisonnement montre que f n'est pas non plus dérivable partiellement par rapport à y en ce même point.

Exercice 3.7.

1. $f(x, y) = \ln \sqrt{\frac{xy}{x+y}}$.

Ensemble de dérivabilité : $u = \frac{xy}{x+y}$ doit exister et être strictement positif : le point (x, y) doit donc se trouver dans 3 des 6 zones délimitées par les trois droites $x = 0$ (axe des ordonnées), $y = 0$ (axe des abscisses) et $y = -x$ (deuxième bissectrice du repère). À chaque franchissement de droite, le signe de u change, et dans le premier quadrant on a $u > 0$, ce qui permet de représenter la zone

« favorable » sur une figure (on hachure ce qui ne convient pas).



On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2y} - \frac{1}{2(x+y)} ; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+y)} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{2(x+y)^2} - \frac{1}{2x^2} ; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{1}{2(x+y)^2} - \frac{1}{2y^2} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2(x+y)^2}.\end{aligned}$$

2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

Ensemble de dérivabilité : $x^2 + y$ doit être strictement positif, ce qui correspond à $y > -x^2$. La zone favorable est donc la partie du plan au-dessus de la parabole $y = -x^2$. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x}{x^2 + y} ; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2y - 2x^2}{(x^2 + y)^2} ; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-1}{(x^2 + y)^2} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}.\end{aligned}$$

3. $f(x, y) = \sqrt{2xy + y^2}$.

Ensemble de dérivabilité : $u = 2xy + y^2 = y(2x + y)$ doit être strictement positif, donc deux des quatre zones délimitées par les deux droites $y = 0$ et $y = -2x$ conviennent. Le point $(1, 1)$ convient, ce qui permet de placer correctement les hachures sur ce qui ne convient pas. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{2xy + y^2}} ; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{x + y}{\sqrt{2xy + y^2}} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-y^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} ; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-x^2}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} ; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{xy}{(2xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

4. $f(x, y, z) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$.

Ensemble de dérivabilité : Il suffit que xy soit différent de 1, donc on enlève l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1+x^2}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1+y^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-2y}{(1+y^2)^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0.\end{aligned}$$

5. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ensemble de dérivabilité : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

6. $f(x, y) = \frac{1}{e^x + e^y}$.

Ensemble de dérivabilité : \mathbb{R}^2 . On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-e^x}{(e^x + e^y)^2}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-e^y}{(e^x + e^y)^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{e^{2x} - e^{x+y}}{(e^x + e^y)^3}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{e^{2y} - e^{x+y}}{(e^x + e^y)^3}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{2e^{x+y}}{(e^x + e^y)^3}.\end{aligned}$$

7. $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$.

Ensemble de dérivabilité : $y \neq 0$, on enlève l'axe des abscisses. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}; & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2xy + x^2}{y^4} e^{\frac{x}{y}}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{x+y}{y^3} e^{\frac{x}{y}}.\end{aligned}$$

$$8. f(x, y, z) = \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}.$$

Ensemble de dérivabilité : $xyz \neq 0$, on enlève à l'espace les trois plans du repère.
On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2yz}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{y^2 - x^2 - z^2}{xy^2z}; \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{z^2 - x^2 - z^2}{xyz^2}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{2(y^2 + z^2)}{x^3yz};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{2(x^2 + z^2)}{xy^3z}; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{2(x^2 + y^2)}{xyz^3}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{x^2y^2z}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{y^2 - x^2 - z^2}{x^2yz^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{xy^2z^2}.\end{aligned}$$

Exercice 3.8.

1. Si $\forall(x, y)$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, alors g , la première fonction partielle en (x, y) a par définition sa dérivée nulle. g est donc une fonction constante, ceci quel que soit y . Cette constante est donc une fonction de y , et on peut affirmer qu'il existe une fonction u d'une seule variable telle que pour tout (x, y) , on a

$$f(x, y) = u(y)$$

Remarquons qu'aucune condition de régularité n'est imposée pour la fonction u , qui n'a même pas besoin d'être continue.

Il est tout à fait clair que réciproquement, la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction qui ne dépendrait que de y est nulle, donc les fonctions de la forme $f(x, y) = u(y)$ forment bien la solution générale de l'équation étudiée.

2. En raisonnant de la même façon, on obtient aisément que les fonctions f de deux variables dérivables par rapport à y et vérifiant $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x, y) = v(x)$.

3. Une fonction f vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ pour tout (x, y) est telle que sa dérivée partielle par rapport à y vérifie $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = 0$.

En appliquant le résultat du 1. à cette fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$, on peut affirmer qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = u(y).$$

Pour x fixé, on peut donc dire que la deuxième fonction partielle de f en (x, y) , $h : t \mapsto h(t) = f(x, t)$ a pour dérivée $h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = u(y)$.

h est donc une primitive de la fonction u . Soit U une primitive particulière de la fonction u . Posons $F(x, y) = f(x, y) - U(y)$. Il est clair que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - U'(y) = u(y) - u(y) = 0.$$

La fonction F , d'après 2. est donc une fonction de x : on peut écrire $F(x, y) = v(x)$. On en déduit que $f(x, y) = U(y) + v(x)$. Comme on a supposé que f est deux fois dérivable, il est nécessaire que U et v soient elles aussi des fonctions deux fois dérивables.

Réciproquement, si f peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = a(x) + b(y)$, avec a et b des fonctions d'une variable dérivable, alors on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b'(y)$ et donc

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (b'(y)) = 0$ puisque $b'(y)$ ne dépend pas de x ; donc f est solution de l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$.

Conclusion : les fonctions f deux fois dérivables qui vérifient $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ sont les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme $f(x, y) = a(x) + b(y)$ avec a et b fonctions deux fois dérivables.

Remarque : La fonction f du 4. de l'exercice précédent est telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$, il existe donc deux fonctions a et b telles que $\arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) = a(x) + b(y)$. En comparant avec l'expression des dérivées secondes, on s'aperçoit que l'on peut prendre $a(x) = \arctan x$ et $b(y) = \arctan y$, à une constante $k\pi$ près ($k \in \{-1, 0, 1\}$; on retrouve ainsi une formule classique).

Exercice 3.9.

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Dès à présent, notons que le calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ n'a aucun intérêt par rapport à la question posée.

Commençons par le plus facile : on a $\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Sans aucune difficulté, on obtient aussi que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ puisque

$$\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 - 0}{k} = 0 \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} 0.$$

Maintenant on va calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Ensuite, en échangeant le rôle de x et de y , l'expression de $f(x, y)$ change de signe, de sorte que sans faire de nouveau calcul⁵ on peut affirmer que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

On peut maintenant calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0, 0)$: c'est la limite, pour $h \rightarrow 0$, du quotient

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \frac{\frac{h^5 - h^3 \cdot 0^2 - h \cdot 0^4}{(h^2 + 0^2)^2} - 0}{h} = \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1.$$

On peut donc affirmer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

⁵ Pour se convaincre de ce résultat, il suffit de calculer de deux façons différentes la dérivée partielle par rapport à y de la fonction g définie par $g(x, y) = f(y, x) = -f(x, y)$.

En considérant que $g(x, y) = -f(x, y)$, on trouve bien sûr que $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Mais, en utilisant que $g(x, y) = f(y, x) = f(u_1(x, y), u_2(x, y))$ avec $u_1(x, y) = y$ et $u_2(x, y) = x$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u_1(x, y), u_2(x, y)) \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_1(x, y), u_2(x, y)) \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)\end{aligned}$$

D'où le résultat $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$

De la même façon, on trouve que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = \frac{\frac{0^4 \cdot k + 4 \cdot 0^2 \cdot k^3 - k^5}{(0^2 + k^2)^2} - 0}{k} = \frac{-\frac{k^5}{k^4}}{k} = -1,$$

de sorte que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$.

On trouve sur cet exemple des « dérivées secondes croisées » qui ont des valeurs différentes en $(0, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

Ce résultat n'est pas en contradiction avec le théorème de Schwarz. On peut simplement affirmer qu'ici au moins une des hypothèses de ce théorème n'est pas satisfaite. Puisque les dérivées secondes « croisées » $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent partout, c'est leur continuité en $(0, 0)$ qui est en défaut. Si on avait le courage de calculer ces dérivées secondes croisées pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on s'apercevrait que leur expression est une fraction de deux polynômes homogènes en x et y dont le degré total est 0 : il n'est donc pas étonnant que ces fonctions n'admettent pas de limite en $(0, 0)$, et donc ne soient pas continues en ce point.

Exercice 3.10. 1. Ici, on a $F(t) = \arctan\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}\right)$.

$$\text{Or, } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Comme d'autre part, on a $x'(t) = -(\sin t + \cos t)$ et $y'(t) = \cos t - \sin t$, on obtient

$$\begin{aligned} F'(t) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= -(\sin t + \cos t) \frac{-y(t)}{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} + (\cos t - \sin t) \frac{x(t)}{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} \\ &= \frac{(\sin t + \cos t)(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)(\cos t - \sin t)}{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2} = 1. \end{aligned}$$

On a donc sur chaque intervalle $I_k =]-\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi[$ du domaine de définition de F ,

$$F(t) = t + C_k.$$

Tenant compte de la π -périodicité de F , on a $C_{k+1} = C_k - \pi$, et en utilisant la valeur

$F(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = C_0$, on en déduit une expression très simplifiée de F :

$$F(t) = t - k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ pour tout } t \in I_k =]-\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi[.$$

(Auriez-vous réussi à montrer ce résultat sans dériver ?⁶)

2. Ici, on a $F(t) = \frac{t^2 + 1}{e^{t^2+1}} + \frac{e^{t^2+1}}{t^2 + 1}$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$.

Comme d'autre part, on a $x'(t) = 2t e^{t^2+1}$ et $y'(t) = 2t$, on obtient

$$\begin{aligned} F'(t) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= (2t) e^{t^2+1} \left(-\frac{y(t)}{(x(t))^2} + \frac{1}{y(t)} \right) + (2t) \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{x(t)}{(y(t))^2} \right) \\ &= 2t \left(e^{t^2+1} \left(-\frac{t^2 + 1}{e^{2(t^2+1)}} + \frac{1}{t^2 + 1} \right) + \left(e^{-(t^2+1)} - \frac{e^{t^2+1}}{(t^2 + 1)^2} \right) \right) \\ &= 2t \left(e^{-(t^2+1)}(-(t^2 + 1) + 1) + \frac{e^{t^2+1}}{(t^2 + 1)^2}((t^2 + 1) - 1) \right) \\ F'(t) &= \frac{2t^3}{t^2 + 1} \left(\frac{e^{t^2+1}}{t^2 + 1} - \frac{t^2 + 1}{e^{t^2+1}} \right) \end{aligned}$$

3. Ici, on a $F(t) = (t^2 + 1)(\ln t)(\tan t)$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy$.

Comme d'autre part, on a $x'(t) = 2t$, $y'(t) = \frac{1}{t}$ et $z'(t) = 1 + \tan^2 t$ on obtient

$$\begin{aligned} F'(t) &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) + z'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) \\ &= (2t) \ln t \tan t + (t^2 + 1) \frac{1}{t} \tan t + (t^2 + 1) \ln t (1 + \tan^2 t) \end{aligned}$$

3.6 Extrema

Exercice 3.11.

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y$.

Pour qu'il puisse y avoir un extremum en un point (x, y) il est nécessaire que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

⁶ $F(t) = \arctan \frac{\sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4})} = \arctan \tan(t + \frac{\pi}{4}) \dots$

Ces conditions donnent naissance au système

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Donc le seul endroit où f peut présenter un extremum, c'est en $(1, 2)$.

Calculons les quantités r, s, t en ce point.

$$\text{On a } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

Donc $r = t = 2$ et $s = -1$. Ici, on a $s^2 - rt = -3 < 0$, donc f présente bien un extremum strict en $(1, 2)$ et c'est un minimum puisque $r > 0$.

$$2. f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

On raisonne de la même façon. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x - y).$$

D'où le système à résoudre :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y = x^3 \\ x - y = -y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x - y = x^3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 = y \\ \text{ou } x = \sqrt{2} = -y \\ \text{ou } x = -\sqrt{2} = -y. \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 3 points où f peut présenter un extremum : en $(0, 0)$, en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. On calcule les nombres r, s, t en ces trois points.

$$\text{On a } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4 \text{ par conséquent}$$

en $(0, 0)$:

$$r = -4 = t \text{ et } s = 4 \text{ donc } s^2 - rt = 0 : \text{on ne peut pas conclure directement.}$$

On peut montrer qu'il n'y a ni minimum, ni maximum en ce point en considérant deux chemins passant par $(0, 0)$: d'une part pour $x = y = t$, on a $f(x, y) = 2t^4 > 0 = f(0, 0)$, donc tout voisinage de $(0, 0)$ contient au moins un point $(x, y) = (t, t)$ pour lequel $f(x, y) > f(0, 0)$: il n'y a pas de maximum en $(0, 0)$.

D'autre part, pour $x = t$ et $y = 0$, on a $f(x, y) = t^4 - 2t^2 = t^2(t^2 - 2) < 0 = f(0, 0)$ lorsque $|t| < \sqrt{2}$. Tout voisinage de $(0, 0)$ contient au moins un point $(x, y) = (t, 0)$ avec $|t| < \sqrt{2}$, donc tel que $f(x, y) < f(0, 0)$ et f ne présente donc pas de minimum en $(0, 0)$.

en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (les calculs sont exactement les mêmes en ces deux points) :

$r = 20 = t$ et $s = 4$ donc $s^2 - rt = -384 < 0$ et f présente un extremum relatif strict en ces deux points ; puisque $r > 0$, ce sont des minimums.

$$3. f(x, y) = x^2 - 6xy + y^4 - 20y + 8x + 2.$$

Pour cette fonction, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - 6y + 8 = 2(x - 3y + 4) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -6x + 4y^3 - 20 = 2(-3x + 2y^3 - 10).\end{aligned}$$

Un point (x, y) où il est possible qu'il y ait un extremum est donc solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 4 = 0 \\ -3x + 2y^3 - 10 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3y - 4 \\ -9y + 12 + 2y^3 - 10 = 0. \end{array} \right.$$

La deuxième équation s'écrit $2y^3 - 9y + 2 = 0$; heureusement, elle admet une racine évidente $y = 2$, et on peut donc la factoriser $(y - 2)(2y^2 + 4y - 1) = 0$.

Les trois racines de cette équation sont donc $y_1 = 2$, $y_2 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $y_3 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

On conclut donc, en reportant ces trois valeurs dans la première équation du système, qu'en trois points il peut y avoir extremum :

en $(2, 2)$; en (x_2, y_2) et en (x_3, y_3) (avec $x_2 = -7 + \frac{3\sqrt{6}}{2}$ et $x_3 = -7 - \frac{3\sqrt{6}}{2}$)

Or, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2.$$

Donc en $(2, 2)$, on a $r = 2 > 0$; $s = -6$; $t = 48$ donc $s^2 - rt = -60 < 0$ et f admet un minimum strict en ce point.

En (x_2, y_2) , on a $r = 2 > 0$; $s = -6$; $t = 12(1 - \sqrt{6} + \frac{3}{2})^2 = 30 - 12\sqrt{6}$.

Ici, on a $s^2 - rt = 36 - 2(30 - 12\sqrt{6}) = -24 + 24\sqrt{6} \simeq 34,787\,753\,83 > 0$, donc f ne présente ni maximum, ni minimum en ce point.

En (x_3, y_3) , les calculs sont exactement les mêmes en changeant le signe devant chaque $\sqrt{6}$, de sorte que $s^2 - rt = -24 - 24\sqrt{6} < 0$ et f présente donc un minimum strict en ce point.

$$4. f(x, y) = 2x^2 - 2x(e^y - y + 1) + e^{2y} + (y - 1)^2.$$

Pour cette fonction on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x - 2(e^y - y + 1) = 2(2x - e^y + y - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2x(e^y - 1) + 2e^{2y} + 2(y - 1).\end{aligned}$$

Un point (x, y) où il est possible qu'il y ait un extremum est donc solution du système

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} 2x - e^y + y - 1 = 0 \\ -2x(e^y - 1) + 2e^{2y} + 2(y - 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = e^y - y + 1 \\ -(e^y - y + 1)(e^y - 1) + 2e^{2y} + 2(y - 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = e^y - y + 1 \\ -e^{2y} + e^y + ye^y - y - e^y + 1 + 2e^{2y} + 2y - 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} 2x = e^y - y + 1 \\ e^{2y} - 1 + ye^y + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = e^y - y + 1 \\ (e^y - 1)(e^y + 1) + y(e^y + 1) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = e^y - y + 1 \\ e^y - 1 + y = 0 \end{cases} \quad (\text{en effet, } e^y + 1 > 0). \end{aligned}$$

Soit $\varphi(y) = e^y - 1 + y$; on a $\varphi'(y) = e^y + 1 > 0$, donc φ est strictement croissante, continue sur \mathbb{R} et puisque $\varphi(0) = 0$, 0 est la seule valeur qui annule $\varphi(y)$.

Donc on a

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} 2x = e^y - y + 1 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 1 - 0 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Le seul point où il peut y avoir extremum, c'est en $(1, 0)$.

D'autre part, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2(e^y - 1); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2x e^y + 4e^{2y} + 2.$$

donc en ce point $(1, 0)$, on a

$$r = 4 > 0; \quad s = 0; \quad t = 4; \quad s^2 - rt = -16 < 0$$

donc f présente un minimum relatif⁷ strict en $(1, 0)$.

⁷ C'est en fait un minimum absolu, comme on peut s'en rendre compte en remarquant que

$$f(x, y) = (x - e^y)^2 + (x + y - 1)^2$$

$$5. f(x, y) = x^2y^3 + 3x^3y^3 + 2x^2y^4.$$

Pour cette fonction, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy^3 + 9x^2y^3 + 4xy^4 = xy^3(2 + 9x + 4y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3x^2y^2 + 9x^3y^2 + 8x^2y^3 = x^2y^2(3 + 9x + 8y).\end{aligned}$$

Il y a donc un extremum possible en tout point (x, y) tel que $x = 0$ ou $y = 0$, et aussi en (x, y) solution du système

$$\begin{cases} 9x + 4y + 2 = 0 \\ 9x + 8y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{9} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 2y^3 + 18xy^3 + 4y^4 = 2y^3(1 + 9x + 2y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6xy^2 + 27x^2y^2 + 16xy^3 = xy^2(6 + 27x + 16y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= 6x^2y + 18x^3y + 24x^2y^2 = 6x^2y(1 + 3x + 4y).\end{aligned}$$

En un point (x, y) tel que $x = 0$ ou $y = 0$, on a $r = 2y^3$; $s = t = 0$, donc $s^2 - rt = 0$ et on ne peut pas conclure directement⁸.

Étudions le point intéressant : $(x, y) = (-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$.

En ce point, on a

$$\begin{aligned}r &= -\frac{2}{64}(1 - 1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{64} \\ s &= -\frac{1}{9.16}(6 - 3 - 4) = \frac{1}{144} \\ t &= -\frac{6}{81.4}(1 - \frac{1}{3} - 1) = \frac{1}{162},\end{aligned}$$

$$\text{d'où } s^2 - rt = \frac{1}{144^2} - \frac{1}{64.162} = \frac{1}{34.28} - \frac{1}{27.34} = -\frac{1}{34.28} = -\frac{1}{20736} < 0$$

On peut donc affirmer que f présente en $(-\frac{1}{9}, -\frac{1}{4})$ un extremum strict, qui est un minimum puisque $r > 0$.

⁸ En fait, pour $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$, puisque $f(x, y) = y^3x^2(1 + 3x + 2y)$, on est sûr que $f(x, y)$ est du signe de $y_0^3(1 + 2y_0)$ pour (x, y) proche de $(0, y_0)$. Donc sauf en $(0, -\frac{1}{2})$ et en $(0, 0)$, f présente un extremum en $(0, y_0)$, qui est forcément un extremum non strict, puisque $f(0, y) = 0 = f(0, y_0)$ pour tout $(0, y)$ dans tout voisinage de $(0, y_0)$.

En revanche, pour $y_0 = 0$, puisque y^3 change de signe en 0, on est sûr que f ne présente pas d'extremum en $(x_0, 0)$.

Vous voyez sur cet exemple qu'il est souvent très difficile de conclure lorsqu'on ne peut appliquer les critères du théorème 3.52 (p. 114)

3.7 — 3.8 Différentiabilité

Exercice 3.12.

On peut se dispenser de toute démonstration en utilisant la proposition 3.72 (p. 136). Mais pour bien comprendre cette notion, nous allons reprendre le raisonnement.

Soient $(a \ b)$ les composantes de f dans la base canonique. On a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = ax + by$.

Fixons $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0 + h, y_0 + k) = f((x_0, y_0) + (h, k)) = f(x_0, y_0) + f(h, k) \\ &= f(x_0, y_0) + ah + bk \\ &= f(x_0, y_0) + ah + bk + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k), \end{aligned}$$

en posant $\varepsilon(h, k) = 0$, on a clairement $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$.

Donc f est bien différentiable en (x_0, y_0) , et la forme linéaire $df_{(x_0, y_0)}$ est l'application $(h, k) \mapsto ah + bk$: c'est bien l'application f .

Exercice 3.13. 1. Sachant que $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, on calcule facilement que $\frac{\partial N_2}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\frac{\partial N_2}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Ces dérivées partielles étant clairement continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on en déduit, sans fatigue excessive que N_2 est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

En $(0, 0)$, N_2 n'est pas partiellement dérivable, puisque le quotient

$\frac{N_2(h, 0) - N_2(0, 0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite pour $h \rightarrow 0$ (limites à droite et à gauche différentes), donc N_2 n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

2. De la même façon, puisque $N_1(x, y) = x + y$ ou $N_1(x, y) = x - y$ ou $N_1(x, y) = -x + y$ ou $N_1(x, y) = -x - y$ selon le quadrant dans lequel on se place, N_1 est clairement de classe C^1 sur les quatre domaines ouverts $Q_1 = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ et } y > 0\}$, $Q_2 = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ et } y < 0\}$, $Q_3 = \{(x, y) \mid x < 0 \text{ et } y > 0\}$, $Q_4 = \{(x, y) \mid x < 0 \text{ et } y < 0\}$, donc N_1 est différentiable sur chacun de ces domaines.

Il y a problème à la frontière de ces domaines, c'est-à-dire sur les axes de coordonnées.

Étudions la différentiabilité de N_1 en un point $(x_0, 0)$ de l'axe des abscisses : N_1 n'est pas dérivable partiellement par rapport à y en $(x_0, 0)$ car le quotient

$\frac{N_1(x_0, k) - N_1(x_0, 0)}{k} = \frac{|x_0| + |k| - |x_0|}{k} = \frac{|k|}{k}$ n'a pas de limite pour $k \rightarrow 0$. Si N_1 n'est pas dérivable par rapport à une des variables en $(x_0, 0)$, elle n'y est pas différentiable.

Pour un point de l'axe $(0, y_0)$ de l'axe des ordonnées, on montre sans difficulté et de la même façon que N_1 n'est pas dérivable par rapport à x , donc n'est pas différentiable.

3. On applique le même type de raisonnement : dans chacun des domaines $D_1 = \{(x, y) \mid x > y \text{ et } x > -y\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid y < x \text{ et } y > -x\}$, $D_3 = \{(x, y) \mid x < y \text{ et } x < -y\}$, $D_4 = \{(x, y) \mid y < x \text{ et } y < -x\}$, $N_\infty(x, y)$ vaut respectivement x , y , $-x$ et $-y$, et N_∞ est donc clairement de classe C^1 sur ces quatre domaines, donc différentiable.

C'est sur les frontières de ces quatre domaines qui sont les deux bissectrices du repère, (les droites $y = x$ et $y = -x$) que la différentiabilité pose problème.

étudions la différentiabilité de N_∞ en un point (x_0, x_0) de la première bissectrice avec $x_0 > 0$: Le quotient $\frac{N_1(x_0, x_0 + k) - N_1(x_0, x_0)}{k} = \frac{\max(|x_0|, |x_0 + k|) - |x_0|}{k}$ n'a pas la même valeur selon que k est positif ou négatif (tout en restant suffisamment petit).

Si $k < 0$, on a $x_0 + k = |x_0 + k| < |x_0| = x_0$ donc ce quotient vaut

$$\frac{\max(|x_0|, |x_0 + k|) - |x_0|}{k} = \frac{x_0 - x_0}{k} = 0.$$

Si $k > 0$, on a $x_0 + k = |x_0 + k| > |x_0| = x_0$, donc le quotient vaut

$$\frac{\max(|x_0|, |x_0 + k|) - |x_0|}{k} = \frac{(x_0 + k) - x_0}{k} = \frac{k}{k} = 1.$$

Pour $k \rightarrow 0$, la limite est différente à droite et à gauche, donc N_∞ n'est pas dérivable partiellement par rapport à y en (x_0, x_0) , et n'est donc pas différentiable. On raisonne de la même façon sur chacune des trois autres demi-droites frontières, ou en $(0, 0)$ et on montre à chaque fois la non dérivabilité partielle de N_∞ en ces points, donc la non différentiabilité.

Exercice 3.14.

1. f définie par $f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ est clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc différentiable sur ce domaine. C'est donc uniquement en $(0, 0)$ que se pose un problème.

On étudie la dérivabilité partielle de f en ce point : $\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^3 - 0}{h^2 \cdot h} = 1$ et $\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 - k^3}{k^2 \cdot k} = -1$ admettent des limites finies, respectivement 1 et -1 pour respectivement $h \rightarrow 0$ et $k \rightarrow 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$.

Cependant f n'est pas de classe C^1 en ce point, car on a, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$, et en suivant l'axe des ordonnées, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ ne tend pas vers $1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ pour $y \rightarrow 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. On ne peut rien conclure pour l'instant, et on doit étudier directement la différentiabilité de f en $(0, 0)$.

On cherche à écrire pour $(x, y) = (0 + h, 0 + k)$,

$$f(x, y) = f(0, 0) + Ah + Bk + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

avec $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$. On sait qu'on doit prendre nécessairement $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$, de sorte qu'on doit choisir

$$\begin{aligned} \varepsilon(h, k) &= \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{h^3 - k^3}{h^2 + k^2} - h + k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{h^3 - k^3 - h(h^2 + k^2) + k(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{hk(h - k)}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

On constate que ce quotient ne tend pas vers 0 pour $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, comme on peut le vérifier en utilisant $k = -h$, c'est-à-dire en se rapprochant de $(0, 0)$ en suivant la deuxième bissectrice du repère, puisque $\varepsilon(h, -h) = \frac{2h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{h^3}{\sqrt{2}|h|^3}$ n'a pas de limite pour $h \rightarrow 0$ (limites à droite et à gauche différentes) et ne tend donc pas vers 0.

Conclusion : f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

2. f définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ est clairement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, donc différentiable sur ce domaine. C'est ici aussi en $(0, 0)$ que se pose un problème.

On a pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ &= g(x, y) - h(x, y) \end{aligned}$$

Il est clair que $|g(x, y)| \leqslant 2|x|$ donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0$.

En revanche, $h(x, y)$ n'a pas de limite en $(0, 0)$: en effet, en utilisant $h(0, y) = 0$, on voit que cette limite devrait être nulle, mais en utilisant la suite $(x_n, 0)$ avec $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, on constate que bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, 0) = (0, 0)$, on a

$$h(x_n, 0) = \frac{\frac{1}{2\pi n}}{\sqrt{\frac{1}{4\pi^2 n^2}}} \cos(2\pi n) = 1,$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n, 0) = 1 \neq 0$.

Finalement, on peut donc affirmer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'a pas de limite en $(0, 0)$, donc f n'est certainement pas de classe C^1 en $(0, 0)$.

Cependant, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 0, comme on s'en aperçoit en étudiant le quotient

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h} = h \sin \frac{1}{|h|}.$$

Cette quantité étant clairement majorée en valeur absolue par $|h|$, elle tend vers 0 pour $h \rightarrow 0$.

De même, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ (même type de raisonnement).

Pour étudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$, on doit mettre $f(h, k)$ sous la forme

$$f(h, k) = f(0, 0) + Ah + Bk + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

Mais $f(0, 0) = 0$ et nécessairement, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = B$, donc on doit prendre

$$\varepsilon(h, k) = \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right)$$

On obtient facilement que

$$|\varepsilon(h, k)| \leq \sqrt{h^2 + k^2} = \|(h, k)\| \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0$$

donc on a $\lim_{(h, k) \rightarrow \mathbf{0}} \varepsilon(h, k) = 0$ et f est bien différentiable en $(0, 0)$.

Cette fonction était un exemple de fonction différentiable qui n'est pas de classe C^1 .

Exercice 3.15.

Les fonctions composantes de f sont f_1, f_2, f_3 respectivement définies par

$$f_1(x, y, z) = x + y^2 + z ; \quad f_2(x, y, z) = xy^2z ; \quad f_3(x, y, z) = x^2z + xy.$$

Ces trois fonctions sont clairement de classe \mathcal{C}^∞ , donc sont différentiables sur \mathbb{R}^3 . La différentielle de f est l'application df de \mathbb{R}^3 à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ des applications linéaires de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R}^3 , qui à tout (x, y, z) associe l'application linéaire $df_{(x,y,z)}$ dont la matrice (pour les bases canoniques) est la matrice jacobienne de f en (x, y, z)

$$\begin{aligned} J(f)_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ J(f)_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2y & 1 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \\ 2xz + y & x & x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme la dimension de l'espace de départ et celle de l'espace d'arrivée sont égales, on peut calculer le Jacobien de f ; c'est le déterminant de la matrice $J(f)$, et il vaut donc

$$\begin{aligned} |J(f)_{(x,y,z)}| &= \begin{vmatrix} 1 & 2y & 1 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \\ 2xz + y & x & x^2 \end{vmatrix} \\ &= 2x^3yz + 2xy^3(2xz + y) + xy^2z - 2xyz(2xz + y) - x^2y^2 - 2x^2y^3z. \end{aligned}$$

Exercice 3.16.

Comme pour l'exercice précédent, la différentiabilité de toutes les fonctions de cet énoncé est assurée par le caractère évidemment \mathcal{C}^∞ donc \mathcal{C}^1 de toutes les fonctions composantes.

Pour définir les différentielles de f et g qui sont, pour chaque élément de leur ensemble de départ, des applications linéaires, le plus simple est de donner leur matrice jacobienne.

$$\text{On a } J(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } J(g)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

Pour le calcul des différentielles de $g \circ f$ et $f \circ g$, la première méthode consiste à donner l'expression de ces fonctions et à calculer directement leur différentielle, et la deuxième méthode consiste à utiliser le théorème 3.74 (p. 137) ou plutôt son corollaire 3.75 (p. 140) qui donne la matrice jacobienne d'une application composée.

Première méthode

On a pour tout (x, y, z) , en posant $h = (h_1, h_2, h_3) = g \circ f$,

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= g \circ f(x, y, z) = g(x + y^2, xy^2z) \\ &\quad \vdots \\ &= ((x + y^2)^2 + (xy^2z), (x + y^2)(xy^2z), e^{(xy^2z)}) \\ &= (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z), h_3(x, y, z)). \end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} J(g \circ f)_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h_3}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x + y^2) + y^2z & 4y(x + y^2) + 2yxz & xy^2 \\ xy^2z + (x + y^2)y^2z & 2y(xy^2z) + (x + y^2)2yxz & (x + y^2)xy^2 \\ y^2z e^{(xy^2z)} & 2xyze^{(xy^2z)} & xy^2 e^{(xy^2z)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, posant $w = f \circ g = (w_1, w_2)$, on a pour tout (u, v) :

$$\begin{aligned} w(u, v) &= f \circ g(u, v) = f(u^2 + v, uv, e^v) = ((u^2 + v) + (uv)^2, (u^2 + v)(uv)^2 e^v) \\ &= (u^2 + v + u^2v^2, v^2 e^v (u^4 + u^2v)) = (w_1(u, v), w_2(u, v)). \end{aligned}$$

De sorte que

$$\begin{aligned} J(f \circ g)_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial w_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial w_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial w_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u + 2uv^2 & 1 + 2vu^2 \\ v^2 e^v (4u^3 + 2uv) & 2ve^v(u^4 + u^2v) + v^2 e^v(u^4 + u^2v) + v^2 e^v u^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u + 2uv^2 & 1 + 2u^2v \\ (4u^3v^2 + 2uv^3)e^v & [2u^4v + 3u^2v^2 + u^4v^2 + u^2v^3]e^v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deuxième méthode

D'après le corollaire 3.75 (p. 140), en posant

$(u, v) = f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x + y^2, xy^2z)$, on a

$$\begin{aligned} J(g \circ f)_{(x,y,z)} &= J(g)_{(u,v)} \cdot J(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x + y^2) & 1 \\ xy^2z & (x + y^2) \\ 0 & e^{(xy^2z)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x + y^2) + y^2z & 4y(x + y^2) + 2xyz & xy^2 \\ xy^2z + (x + y^2)y^2z & 2xy^3z + 2xyz(x + y^2) & xy^2(x + y^2) \\ y^2z e^{(xy^2z)} & 2xyz e^{(xy^2z)} & xy^2 e^{(xy^2z)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, en posant cette fois

$(x, y, z) = g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)) = (u^2 + v, uv, e^v)$, on a

$$\begin{aligned} J(f \circ g)_{(u,v)} &= J(f)_{(x,y,z)} \cdot J(g)_{(u,v)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2uv & 0 \\ (uv)^2 e^v & 2(u^2 + v)uv e^v & (u^2 + v)(uv)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u + 2uv^2 & 1 + 2u^2v \\ (2u^3v^2 + 2(u^2 + v)uv^2)e^v & (u^2v^2 + 2(u^2 + v)u^2v + (u^2 + v)u^2v^2)e^v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate qu'à chaque fois on retrouve le même résultat avec les deux méthodes.

Exercice 3.17.

1. L'application $\varphi : (u, v) \mapsto (x, y) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right)$ est définie et évidemment de classe C^∞ sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Le problème est de vérifier qu'elle est bijective, donc de voir si chaque élément de \mathcal{P} possède bien un antécédent et un seul par cette application φ . Pour cela, il suffit d'étudier le système (\mathcal{S}) d'inconnues (u, v) , avec (x, y) considérés comme paramètres.

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) &\iff \begin{cases} \frac{u^2 + v^2}{2} = x \\ \frac{u}{v} = y \end{cases} \iff \begin{cases} u^2 + v^2 = 2x \\ u = vy \end{cases} \iff \begin{cases} v^2(1 + y^2) = 2x \\ u = vy \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} v = \pm \sqrt{\frac{2x}{1 + y^2}} \\ u = \pm \sqrt{\frac{2x}{1 + y^2}} y. \end{cases} \end{aligned}$$

On constate que puisque $x > 0$ par hypothèse, ce système possède toujours deux solutions, et φ est surjective, mais pas injective. Pour obtenir une application bijective, on souhaite que le système (\mathcal{S}) possède une unique solution, il suffit de se restreindre à l'ensemble des (u, v) tels que $v > 0$: on prendra donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*+}$, et la restriction de φ à \mathcal{D} (qu'on continuera, par abus de langage à appeler φ) est cette fois une bijection de \mathcal{D} sur \mathcal{P} .

2. Une méthode simple consiste à utiliser le corollaire 3.75 (p. 140).

Matriciellement, on peut considérer que pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$, tel que

$$(x, y) = (x(u, v), y(u, v)) = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right), \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} J(F)_{(u,v)} &= J(f \circ \varphi)_{(u,v)} = J(f)_{(x,y)} \cdot J(\varphi)_{(u,v)} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right) - \frac{u}{v^2} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{v} \right). \end{cases}$$

3. Une bonne façon d'inverser un système de deux équations à deux inconnues consiste à utiliser la méthode dite des déterminants ou de Cramer⁹. Ici, le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} u & \frac{1}{v} \\ v & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = \det J(\varphi) = -\frac{u^2}{v^2} - 1 = -\frac{u^2 + v^2}{v^2}.$$

Ce déterminant est toujours non nul car on s'est placé dans \mathcal{D} dans lequel on a $v > 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) & \frac{1}{v} \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix}}{-\frac{u^2 + v^2}{v^2}} = -\frac{v^2}{u^2 + v^2} \left(-\frac{u}{v^2} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + v \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\begin{vmatrix} u & \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \\ v & \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}}{-\frac{u^2 + v^2}{v^2}} = -\frac{v^2}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) - v \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) \right) \\ &= \frac{v^2}{u^2 + v^2} \left(v \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right). \end{aligned}$$

On retrouve bien les résultats annoncés.

4. Reportant ces valeurs obtenues dans l'équation (\mathcal{E}) et exprimant x et y en fonction de u et v selon le changement de variable suggéré, on obtient l'équation

⁹ Pour mémoire, lorsque les calculs sont possibles, donc pour $ad - bc \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\alpha d - b\beta}{ad - bc} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a\beta - \alpha c}{ad - bc}. \end{array} \right.$$

(\mathcal{E}') :

$$\begin{aligned} & 2 \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{u}{v} \frac{1}{u^2 + v^2} \left(u \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + v \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right) \\ & \quad + \left(1 + \frac{u^2}{v^2} \right) \frac{v^2}{u^2 + v^2} \left(v \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \right) = 0 \\ \iff & \frac{u^2}{v} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) + v \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) - u \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = 0 \\ \iff & \frac{u^2 + v^2}{v} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0. \end{aligned}$$

Donc une fonction f vérifie (\mathcal{E}) sur \mathcal{P} si et seulement si la fonction $F = f \circ \varphi$ a sa première dérivée partielle nulle sur \mathcal{D} . Une telle fonction F est une fonction ne dépendant pas de u . Il existe donc une fonction g telle que

$$\forall (u, v) \in \mathcal{D}, \quad F(u, v) = g(v).$$

Mais, puisque $F = f \circ \varphi$, on a aussi bien sûr $f = F \circ \varphi^{-1}$, donc pour tout $(x, y) \in \mathcal{P}$, on a $f(x, y) = F(\varphi^{-1}(x, y))$

Mais l'expression de φ^{-1} a été déterminée lors de la première question, lorsqu'on a cherché l'antécédent de x et de y , et on a donc

$$\varphi^{-1}(x, y) = (u, v) = \left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} y, \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \right).$$

On en déduit que pour que f soit solution de (\mathcal{E}) , il faut et il suffit qu'il existe une fonction g telle que $F(u, v) = g(v)$, donc telle que

$$f(x, y) = F(\varphi^{-1}(x, y)) = F\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} y; \sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right).$$

5. Sachant que f est une solution de (\mathcal{E}) , il s'agit donc de déterminer la fonction g telle que $f(x, y) = g\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{P}$.

Dérivant par rapport à x cette égalité, compte tenu de la valeur qu'on impose à $\frac{\partial f}{\partial x}$, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+y^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(g\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right) \right) = g'\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \right) \\ &= g'\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2x(1+y^2)}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$g' \left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \right) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{(1+y^2)}} \iff g'(v) = v \iff g(v) = \frac{v^2}{2} + C.$$

Revenant à la fonction f , on obtient donc que la solution f est telle que

$$f(x, y) = \frac{\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}} \right)^2}{2} + C = \frac{x}{1+y^2} + C.$$

On détermine alors la constante grâce à la condition $f(1, 0) = 2$: on trouve sans peine que $C = 1$ et par conséquent l'unique solution de (\mathcal{E}) vérifiant les conditions imposées ici est la fonction f définie sur \mathcal{P} par

$$f(x, y) = \frac{x}{1+y^2} + 1.$$

Exercice 3.18.

Le changement de variable suggéré ici correspond clairement à une bijection de \mathbb{R}^2 sur lui-même : $\varphi^{-1} : (x, y) \mapsto (u, v) = (x + y, x + 2y)$.

On peut facilement inverser le système $\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2u - v \\ y = -u + v \end{cases}$ ce

qui permet de définir φ .

Posons $F(u, v) = f \circ \varphi(u, v)$. On a donc $f(x, y) = F(u, v) = F \circ \varphi^{-1}(x, y)$

La matrice jacobienne de f peut donc s'exprimer ainsi :

$$\begin{aligned} J(f)_{(x,y)} &= J(F)_{(u,v)} \cdot J(\varphi^{-1})_{(x,y)} \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + 2 \frac{\partial F}{\partial v}(u,v). \end{aligned}$$

Reportant ces valeurs dans l'équation que l'on étudie, on se ramène à l'équation

$$2 \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + 2 \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \right) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0.$$

comme dans l'exercice précédent, f est solution de l'équation initiale si et seulement si F est telle qu'il existe une fonction g d'une seule variable telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = g(v).$$

Puisque $f(x, y) = F(u, v)$ et que $v = x + 2y$, on a prouvé que les solutions de l'équation sont les fonctions f qui peuvent se mettre sous la forme

$$f(x, y) = g(x + 2y).$$

g étant une quelconque fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 3.19. On utilise la formule d'approximation (voir p. 128)

$$f(x, y) \simeq f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

Ici, on étudie la fonction $R = R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, les variables sont R_1 et R_2 et les accroissements de chaque variable sont respectivement ΔR_1 et ΔR_2 (au lieu de h et k).

On a donc

$$R(R_1 + \Delta R_1, R_2 + \Delta R_2) \simeq R(R_1, R_2) + \frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1, R_2)\Delta R_1 + \frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1, R_2)\Delta R_2$$

Or, $\frac{\partial R}{\partial R_1}(R_1, R_2) = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2 \cdot 1}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$ et de même (sans refaire de calcul, R_1 et R_2 jouent des rôles symétriques) $\frac{\partial R}{\partial R_2}(R_1, R_2) = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$
D'où la formule d'approximation :

$$\begin{aligned} R(R_1 + \Delta R_1, R_2 + \Delta R_2) &\simeq R(R_1, R_2) + \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\Delta R_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\Delta R_2 \\ &\simeq \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2^2(\Delta R_1) + R_1^2(\Delta R_2)}{(R_1 + R_2)^2}. \end{aligned}$$

Application numérique :

Avec les valeurs de l'énoncé, on obtient

$$\begin{aligned} R(R_1 + \Delta R_1, R_2 + \Delta R_2) &\simeq \frac{40 \times 63}{40 + 63} + \frac{63^2 \cdot (-0,1) + 40^2 \cdot 0,2}{(40 + 63)^2} = \frac{2520}{103} + \frac{320 - 396,9}{103^2} \\ &\simeq \frac{259\,483,1}{10\,609} \simeq 24,458\,770\,855 \end{aligned}$$

Pour vérifier par un calcul direct, il suffit de poser $R'_1 = R_1 + \Delta R_1$ et $R'_2 = R_2 + \Delta R_2$ et de calculer $R(R'_1, R'_2) = \frac{R'_1 R'_2}{R'_1 + R'_2}$. Ici, $R'_1 = 40 - 0,1 = 39,9$ et $R'_2 = 63 + 0,2 = 63,2$. On obtient donc

$$R(R'_1, R'_2) = \frac{39,9 \times 63,2}{39,9 + 63,2} \simeq 24,458\,583\,899$$

Remarquons qu'on avait $R(R_1, R_2) = 24,466\,019\,417$.

La valeur de $R(R'_1, R'_2)$ obtenue par un calcul direct ($R = 24,45858$) est plus précise que la valeur approchée obtenue en utilisant la différentielle de R , ($\tilde{R} = 24,45877$), mais l'erreur absolue¹⁰ commise ici par cette formule d'approximation est inférieure à $2 \cdot 10^{-4}$ et l'erreur relative est inférieure à 10^{-5} , ce qui n'est pas mauvais du tout, comparée à la valeur relative des accroissements ΔR_i (de l'ordre de 0,5%).

Exercice 3.20.

1.a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$; $g(x, y) = 3x^2y - y^3$.

On a très facilement $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$.

2.a)

Pour utiliser les coordonnées polaires, on pose $F = f \circ \psi$ et $G = g \circ \psi$; on a vu p. 142 que

$$\mathbf{J}(F)_{(r, \theta)} = \mathbf{J}(f \circ \psi)_{(r, \theta)} = \mathbf{J}(f)_{(x, y)} \cdot \mathbf{J}(\psi)_{(r, \theta)},$$

Donc on a

$$\mathbf{J}(f)_{(x, y)} = \mathbf{J}(F)_{(r, \theta)} \cdot \left(\mathbf{J}(\psi^{-1})_{(x, y)} \right) = \mathbf{J}(F)_{(r, \theta)} \cdot \left(\mathbf{J}(\psi)_{(r, \theta)} \right)^{-1}.$$

Or,

$$\mathbf{J}(\psi)_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ donc } \left(\mathbf{J}(\psi)_{(r, \theta)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

d'où

¹⁰L'erreur absolue vaut ici $|\tilde{R} - R|$, tandis que l'erreur relative est $\frac{|\tilde{R} - R|}{R}$. Ce que nous appelons ici « valeur relative des accroissements ΔR_i », c'est le rapport $\frac{|\Delta R_i|}{R_i}$ pour $i = 1$ ou 2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) &= \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit les formules valables pour tout l'exercice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

et de la même façon, en posant $G = g \circ \psi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta). \end{aligned}$$

Ici, on a $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^3(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)$
et $G(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^3(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$

Il est intéressant de se souvenir d'un peu de trigonométrie : la formule de Moivre permet de simplifier considérablement les calculs.

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta).$$

On en déduit que $F(r, \theta) = r^3 \cos 3\theta$ et $G(r, \theta) = r^3 \sin 3\theta$, d'où un calcul très simple des dérivées partielles de ces fonctions.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= 3r^2 \cos 3\theta ; & \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) &= -3r^3 \sin 3\theta \\ \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) &= 3r^2 \sin 3\theta ; & \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) &= 3r^3 \cos 3\theta. \end{aligned}$$

Reportant ces valeurs dans les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta (3r^2 \cos 3\theta) - \frac{\sin \theta}{r} (-3r^3 \sin 3\theta) \\
 &= 3r^2 (\cos \theta \cos 3\theta + \sin \theta \sin 3\theta) = 3r^2 \cos(3\theta - \theta) = 3r^2 \cos 2\theta \\
 &= 3r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 3x^2 - 3y^2 ; \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta (3r^2 \cos 3\theta) + \frac{\cos \theta}{r} (-3r^3 \sin 3\theta) \\
 &= 3r^2 (\sin \theta \cos 3\theta - \cos \theta \sin 3\theta) = 3r^2 \sin(\theta - 3\theta) = -3r^2 \sin 2\theta \\
 &= -3r^2 (2 \sin \theta \cos \theta) = -6xy ; \\
 \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta (3r^2 \sin 3\theta) - \frac{\sin \theta}{r} (3r^3 \cos 3\theta) \\
 &= 3r^2 (\cos \theta \sin 3\theta - \sin \theta \cos 3\theta) = 3r^2 \sin(3\theta - \theta) = 3r^2 \sin 2\theta \\
 &= 3r^2 (2 \sin \theta \cos \theta) = 6xy ; \\
 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta (3r^2 \sin 3\theta) + \frac{\cos \theta}{r} (3r^3 \cos 3\theta) \\
 &= 3r^2 (\sin \theta \sin 3\theta + \cos \theta \cos 3\theta) = 3r^2 \cos(3\theta - \theta) = 3r^2 \cos 2\theta \\
 &= 3r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 3x^2 - 3y^2 .
 \end{aligned}$$

On a retrouvé (bien difficilement, pour cet exemple), les mêmes valeurs que par le calcul direct.

Mais cette technique compliquée permet, dans certains cas, une véritable simplification des calculs.

1.b) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $g(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Ici, le calcul direct des dérivées partielles est un peu plus compliqué.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{par antisymétrie}) ; \\
 \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{2y(x^2 + y^2) - 2x(2xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \\
 \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= -\frac{2x^3 - y^2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{par symétrie}) .
 \end{aligned}$$

2.b) Les fonctions F et G définies comme en 2.a) sont respectivement caractérisées

par

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2} = \cos 2\theta$$

$$G(r, \theta) = g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2(2 \cos \theta \sin \theta)}{r^2} = \sin 2\theta.$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= 0 ; & \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) &= -2 \sin 2\theta ; \\ \frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) &= 0 ; & \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) &= 2 \cos 2\theta.\end{aligned}$$

Reportant ces valeurs dans les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 0 - \frac{\sin \theta}{r}(-2 \sin 2\theta) = 4 \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r} \\ &= \frac{4(r \sin \theta)^2(r \cos \theta)}{r^4} = \frac{4y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0 + \frac{\cos \theta}{r}(-2 \sin 2\theta) = -4 \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r} \\ &= \frac{4(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)}{r^4} = \frac{4y^2 x}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 0 - \frac{\sin \theta}{r}(2 \cos 2\theta) = -2 \frac{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta}{r} \\ &= \frac{2(r \sin \theta)^3 - 2(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)}{r^4} = \frac{2y^3 - 2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= 0 + \frac{\cos \theta}{r}(2 \cos 2\theta) = 2 \frac{\cos^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta}{r} \\ &= \frac{2(r \cos \theta)^3 - 2(r \sin \theta)^2(r \cos \theta)}{r^4} = \frac{2x^3 - 2y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} .\end{aligned}$$

On a, ici aussi, retrouvé les mêmes résultats que par le calcul direct.

Cette méthode du passage en polaires a dû vous paraître encore bien trop compliquée. Voyons le dernier exemple.

1.c) $f(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad g(x, y) = \frac{3x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Ici, le calcul direct des dérivées partielles est nettement plus délicat.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{(3x^2 - 3y^2)\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^3 - 3xy^2)}{x^2 + y^2} \\&= \frac{(3x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - x(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^4 + 3x^2y^2 - 3y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\[10pt]\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{(-6xy)\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^3 - 3xy^2)}{x^2 + y^2} \\&= \frac{(-6xy)(x^2 + y^2) - y(x^3 - 3xy^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-7x^3y - 3xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Compte tenu de l'analogie entre f et g (x et y ont été échangés et on a changé le signe), on trouve directement

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{3x^3y + 7xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\[10pt]\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{3x^4 - 3x^2y^2 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

2.c) Les fonctions F et G définies comme en 2.a) sont respectivement caractérisées par

$$\begin{aligned}F(r, \theta) &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)}{r} = r^2 \cos 3\theta \\G(r, \theta) &= g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}{r} = r^2 \sin 3\theta.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= 2r \cos 3\theta & ; & \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -3r^2 \sin 3\theta \\[10pt]\frac{\partial G}{\partial r}(r, \theta) &= 2r \sin 3\theta & ; & \quad \frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta) = 3r^2 \cos 3\theta.\end{aligned}$$

Reportant ces valeurs dans les expressions de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta(2r \cos 3\theta) - \frac{\sin \theta}{r}(-3r^2 \sin 3\theta) = r(2 \cos \theta \cos 3\theta + 3 \sin \theta \sin 3\theta) \\&= r(2 \cos \theta(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + 3 \sin \theta(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)) \\&= \frac{2(r \cos \theta)^4 - 6(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)^2 + 9(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)^2 - 3(r \sin \theta)^4}{r^3} \\[10pt]\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x^4 + 3x^2y^2 - 3y^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta(2r \cos 3\theta) + \frac{\cos \theta}{r}(-3r^2 \sin 3\theta) = r(2 \sin \theta \cos 3\theta - 3 \cos \theta \sin 3\theta) \\&= r(2 \sin \theta(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) - 3 \cos \theta(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)) \\&= \frac{2(r \sin \theta)(r \cos \theta)^3 - 6(r \sin \theta)^3(r \cos \theta) - 9(r \cos \theta)^3(r \sin \theta) + 3(r \cos \theta)(r \sin \theta)^3}{r^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-7x^3y - 3xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} ; \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta(2r \sin 3\theta) - \frac{\sin \theta}{r}(3r^2 \cos 3\theta) = r(2 \cos \theta \sin 3\theta - 3 \sin \theta \cos 3\theta) \\&= r(2 \cos \theta(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) - 3 \sin \theta(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)) \\&= \frac{6(r \cos \theta)^3(r \sin \theta) - 2(r \cos \theta)(r \sin \theta)^3 - 3(r \sin \theta)(r \cos \theta)^3 + 9(r \cos \theta)^3(r \sin \theta)}{r^3} \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{3x^3y + 7xy^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} ; \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta(2r \sin 3\theta) + \frac{\cos \theta}{r}(3r^2 \cos 3\theta) = r(2 \sin \theta \sin 3\theta + 3 \cos \theta \cos 3\theta) \\&= r(2 \sin \theta(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) + 3 \cos \theta(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)) \\&= \frac{6(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)^2 - 2(r \sin \theta)^4 + 3(r \cos \theta)^4 - 9(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)^2}{r^3} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{3x^4 - 3x^2y^2 - 2y^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

On a bien, ici aussi, retrouvé les mêmes résultats que par le calcul direct.

3.9 Opérateurs différentiels

Exercice 3.21.

1. La divergence de \vec{f} vaut $\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$.

Il suffit donc de connaître l'expression des dérivées partielles de P, Q, R en fonction de r, θ, z . Comme dans le cours, on appelle ψ l'application

$$(r, \theta, z) \mapsto (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

Soit u une fonction de \mathbb{R}^3 vers \mathbb{R} (ce qu'on fait ici s'appliquera ensuite successivement à P, Q, R). On pose $U = u \circ \psi$, donc on a $u = U \circ \psi^{-1}$.

Pour tout $(x, y, z) = \psi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, on a

$$J(u)_{(x, y, z)} = J(U)_{(r, \theta, z)} \cdot J(\psi^{-1})_{(x, y, z)} = J(U)_{(r, \theta, z)} \cdot (J(\psi)_{(r, \theta, z)})^{-1}.$$

Or, en utilisant le résultat de la p. 143, on a

$$\mathbf{J}(\psi)_{(r,\theta,z)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \left(\mathbf{J}(\psi)_{(r,\theta,z)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial U}{\partial \theta}(r,\theta,z) \frac{\partial U}{\partial z}(r,\theta,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial U}{\partial \theta}(r,\theta,z) \frac{\partial U}{\partial z}(r,\theta,z) \end{pmatrix}$$

D'où les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial U}{\partial r}(r,\theta,z) \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}(r,\theta,z) \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial U}{\partial r}(r,\theta,z) \sin \theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}(r,\theta,z) \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial U}{\partial z}(r,\theta,z). \end{aligned}$$

Posons $\hat{P} = P \circ \psi$, $\hat{Q} = Q \circ \psi$ et $\hat{R} = R \circ \psi$.

Appliquant ce qu'on vient d'établir pour u et U , on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{f}) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \\ &= \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r,\theta,z) \cos \theta - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta}(r,\theta,z) \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial r}(r,\theta,z) \sin \theta + \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \theta}(r,\theta,z) \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial \hat{R}}{\partial z}(r,\theta,z). \end{aligned}$$

C'est la formule demandée.

2. La démarche est exactement la même, et avec des notations analogues, on a besoin d'inverser la matrice jacobienne du changement de variable coordonnées sphériques ϕ

$$\mathbf{J}(\phi)_{(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Ce calcul de l'inverse d'une matrice 3×3 n'est pas évident. On va appliquer la méthode « transposée de la comatrice sur déterminant » (voir cours d'algèbre

linéaire). On trouve :

$$\left(J(\phi)_{(\rho, \theta, \varphi)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \\ \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\rho} & \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\rho} & -\frac{\sin \theta}{\rho} \\ -\frac{\sin \varphi}{\rho \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}$$

De $J(u)_{(x,y,z)} = J(U)_{(\rho, \theta, \varphi)} \cdot \left(J(\phi)_{(\rho, \theta, \varphi)} \right)^{-1}$, on tire donc les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) \cos \varphi \sin \theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\sin \varphi}{\rho \sin \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) \sin \varphi \sin \theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial U}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\sin \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

On obtient donc (en posant ici $\tilde{P} = P \circ \phi$, $\tilde{Q} = Q \circ \phi$ et $\tilde{R} = R \circ \phi$)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{f}) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) \\ &= \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) \cos \varphi \sin \theta + \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\cos \varphi \cos \theta}{\rho} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\sin \varphi}{\rho \sin \theta} \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) \sin \varphi \sin \theta + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\sin \varphi \cos \theta}{\rho} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \theta} \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) \cos \theta - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \frac{\sin \theta}{\rho}. \end{aligned}$$

Exercice 3.22.

F étant une fonction de deux variables, on pose logiquement $\tilde{F} = F \circ \psi$, avec l'application $\psi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Pour calculer l'expression de ΔF en fonction des coordonnées polaires, on a besoin de calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$ en polaires. On dispose des formules (vues par exemple à l'exercice 3.20) valables pour toute fonction u , en posant $\tilde{u} = u \circ \psi$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \cos \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

Posons $G = \frac{\partial F}{\partial x}$. En appliquant la première formule à F , on obtient

$$G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \cos \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta).$$

Mais si on pose $\tilde{G} = G \circ \psi$, on a donc

$$\tilde{G}(r, \theta) = G(r \cos \theta, r \sin \theta) = G(x, y) = \cos \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta).$$

On peut appliquer à G la première des formules :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \cos \theta \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta}(r, \theta).$$

Calculons maintenant les dérivées partielles de \tilde{G} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \end{aligned}$$

(On a appliqué la formule de dérivation d'un produit. N'oublions pas que la dérivée par rapport à r de $r \mapsto 1/r$ est $-1/r^2$ et que $\sin \theta$ est une constante lorsque c'est par rapport à r que l'on dérive.)

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \theta}(r, \theta) = -\sin \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(r, \theta) + \cos \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta \partial r}(r, \theta) - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

Reportant ces deux expressions dans la formule donnant $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) &= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \right) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \left(-\sin \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(r, \theta) + \cos \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta \partial r}(r, \theta) - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta) \right) \\ &= \cos^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta) \end{aligned}$$

Calculons maintenant de la même façon $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial H}{\partial y}$, en ayant posé $H = \frac{\partial F}{\partial y}$; on pose bien sûr $\tilde{H} = H \circ \psi$, et on a donc comme pour G

$$\begin{aligned}\tilde{H}(r, \theta) &= H(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r} &= \sin \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} &= \cos \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta \partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta).\end{aligned}$$

On utilise à présent que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \sin \theta \frac{\partial \tilde{H}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta}(r, \theta),$$

et on peut maintenant calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) &= \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \right) \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta \partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta) \right) \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta).\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta F(x, y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{2 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{-2 \cos \theta \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\cos^2 + \sin^2}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos^2 + \sin^2}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta) \\ \Delta F(x, y) &= \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r, \theta).\end{aligned}$$

On a établi la formule demandée.

Exercice 3.23.

- Pour alléger l'écriture, nous nous plaçons en dimension deux, mais le raisonnement est exactement le même en dimension trois.

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(fg) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(fg)}{\partial x} \\ \frac{\partial(fg)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} g + f \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot g + f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g.\end{aligned}$$

D'où la formule¹¹

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot g + f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g.$$

2. On pose $\vec{U} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ et $\vec{V} = \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$ (on se place ici aussi en dimension deux, et ce serait exactement pareil en dimension trois).

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{U} \cdot \vec{V}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(PS + QT) = \overrightarrow{\text{grad}}(PS) + \overrightarrow{\text{grad}}(QT) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{U} \cdot \vec{V}) &= \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot S + P \cdot \overrightarrow{\text{grad}} S + \overrightarrow{\text{grad}} Q \cdot T + Q \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T.\end{aligned}$$

(On a utilisé le résultat du 1. et l'évidente linéarité du gradient).

3. On a

$$\begin{aligned}\text{div}(f\vec{U}) &= \text{div} \begin{pmatrix} fP \\ fQ \end{pmatrix} = \frac{\partial(fP)}{\partial x} + \frac{\partial(fQ)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}P + f\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}Q + f\frac{\partial Q}{\partial y} \\ \text{div}(f\vec{U}) &= (\overrightarrow{\text{grad}} f) \cdot \vec{U} + f \cdot \text{div} \vec{U}\end{aligned}$$

4. On est ici obligé de se placer en dimension trois. On pose $\vec{U} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$; on a :

¹¹ Remarquons qu'avec l'interprétation « forme différentielle », cette formule se traduit :

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\text{rot}(f\vec{U})} &= \overrightarrow{\text{rot}} \begin{pmatrix} fP \\ fQ \\ fR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(fR)}{\partial y} - \frac{\partial(fQ)}{\partial z} \\ \frac{\partial(fP)}{\partial z} - \frac{\partial(fR)}{\partial x} \\ \frac{\partial(fQ)}{\partial x} - \frac{\partial(fP)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \frac{\partial R}{\partial y} - f \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} R - \frac{\partial f}{\partial z} Q \\ f \frac{\partial P}{\partial z} - f \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} P - \frac{\partial f}{\partial x} R \\ f \frac{\partial Q}{\partial x} - f \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} Q - \frac{\partial f}{\partial y} P \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} f \frac{\partial R}{\partial y} - f \frac{\partial Q}{\partial z} \\ f \frac{\partial P}{\partial z} - f \frac{\partial R}{\partial x} \\ f \frac{\partial Q}{\partial x} - f \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} R - \frac{\partial f}{\partial z} Q \\ \frac{\partial f}{\partial z} P - \frac{\partial f}{\partial x} R \\ \frac{\partial f}{\partial x} Q - \frac{\partial f}{\partial y} P \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{\text{rot}(f\vec{U})} &= f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{U}.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

4. Solutions des exercices sur l'intégrale curviligne et la longueur d'une courbe

Exercice 4.1. 1. On peut écrire $\hat{f} = f \circ \varphi$ avec $\varphi(t) = a + b - t$; φ est telle que

- φ est définie sur \mathbb{R} , donc sur $[a, b]$;
- $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$;
- $\forall t$, on a $\varphi'(t) = -1 < 0$
- si $s = \varphi(t)$, on a $f(s) = f(\varphi(t)) = \hat{f}(t)$.

D'après la proposition 4.14 (p. 172), les paramétrisations $\hat{P} = ([a, b], \hat{f})$ et $P = ([a, b], f)$ sont inverses, et \hat{P} est donc une paramétrisation de γ' , l'arc inverse de l'arc γ paramétré par P .

2. On écrit $\tilde{f} = f \circ \psi$ avec $\psi(t) = -t$. ψ est telle que

- ψ est définie sur \mathbb{R} , donc sur $[-b, -a]$;
- $\psi(-b) = b$ et $\psi(-a) = a$;
- $\forall t$, on a $\psi'(t) = -1 < 0$
- si $s = \psi(t)$, on a $f(s) = f(\psi(t)) = \tilde{f}(t)$.

D'après la proposition 4.14 (p. 172), les paramétrisations $\hat{P} = ([a, b], \hat{f})$ et $P = ([a, b], f)$ sont inverses, et \tilde{P} est donc aussi une paramétrisation de γ' , l'arc inverse de l'arc γ paramétré par P .

Comme \tilde{P} et \hat{P} sont deux paramétrisations du même arc γ' , elles sont équivalentes par définition.

Exercice 4.2. 1. Une paramétrisation de l'arc de cercle \widehat{AB} est $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc $dx = -\sin t \, dt$ et $dy = \cos t \, dt$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} (x+y) \, dx + (x-y) \, dy \\ &= \int_0^{\pi/2} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t)\cos t] \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos 2t - \sin 2t) \, dt = \left[\frac{\sin 2t + \cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(0 - 1 - 0 - 1) = -1. \end{aligned}$$

2. Le segment $[AB]$ est paramétré, de A vers B par $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$ avec $dx = -1 \, dt$ et $dy = 1 \, dt$ donc

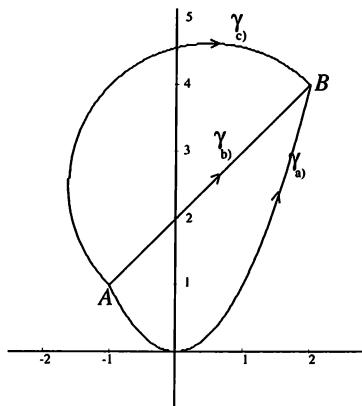
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} (x+y) \, dx + (x-y) \, dy = \int_0^1 [(1-t+t)(-1) + (1-t-t)1] \, dt \\ &= \int_0^1 -2t \, dt = \left[-t^2 \right]_0^1 = -1. \end{aligned}$$

On trouve le même résultat dans les 2 cas ; on aurait pu le prévoir car ω est fermée : $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$; donc ω est *exacte* ; elle est définie sur \mathbb{R}^2 , qui est clairement étoilé ; une primitive de ω est $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$, c'est facile à vérifier. Donc une autre méthode de calcul aurait été (pour les deux cas à la fois) :

$$\int_{\widehat{AB}} \omega = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A) = f(0, 1) - f(1, 0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Exercice 4.3. 1. On a $A = (-1, 1)$ et $B = (2, 4)$; une paramétrisation de l'arc \widehat{AB} de la parabole $y = x^2$ est bien sûr : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 2]$; donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{dM} &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{-1}^2 ((tt^2)1 + (t+t^2)2t) \, dt = \int_{-1}^2 (3t^3 + 2t^2) \, dt \\ &= \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} \right]_{-1}^2 = 12 + \frac{16}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 17,25 = \frac{69}{4} \end{aligned}$$



2. La droite (AB) a pour équation $y = x + 2$, donc une paramétrisation simple de $[AB]$ est $\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \end{cases} \quad t \in [-1, 2] \quad dx = dy = dt$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= \int_{-1}^2 [(t(t+2)) + (t + (t+2))] dt = \int_{-1}^2 (t^2 + 4t + 2) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 2t \right]_{-1}^2 = 15 \end{aligned}$$

3. Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre $\Omega = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ et comme rayon $R = A\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; une paramétrisation de l'arc $\gamma' = \widehat{BA}$ (inverse de γ) est donc

$$\begin{cases} x = \frac{1 + 3\sqrt{2} \cos t}{2} \\ y = \frac{5 + 3\sqrt{2} \sin t}{2} \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad \begin{aligned} dx &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} \sin t \\ dy &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos t \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= -\frac{1}{8} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (-15\sqrt{2} \sin t - 90 \cos t \sin t - 18 \sin^2 t - 54\sqrt{2} \sin^2 t \cos t \\
&\quad + 36\sqrt{2} \cos t + 36 \cos^2 t + 36 \sin t \cos t) dt \\
&= -\frac{3}{8} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left[-5\sqrt{2} \sin t - 9 \sin 2t - 3(1 - \cos 2t) \right. \\
&\quad \left. - 18\sqrt{2} \sin^2 t \cos t + 12\sqrt{2} \cos t + 6(1 + \cos 2t) \right] dt \\
&= -\frac{3}{8} \left[5\sqrt{2} \cos t + \frac{9}{2} \cos 2t + 3t + \frac{9}{2} \sin 2t - 6\sqrt{2} \sin^3 t + 12\sqrt{2} \sin t \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\
&= -\frac{3}{8} \left[\left(-\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{15\pi}{4} + \frac{9}{2} + \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{3\pi}{4} + \frac{9}{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\
\int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M} &= -\frac{3}{8}(-10 + 3\pi + 6 - 24) = \frac{3}{8}(28 - 3\pi) \simeq 6,965\,708\,265.
\end{aligned}$$

Les résultats des trois questions sont différents : c'est normal parce que \vec{V} n'est pas un champ de gradients, puisque $\frac{\partial P}{\partial y} = x \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Exercice 4.4. Puisque la paramétrisation de γ est $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = At \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$,

on a $\begin{cases} dx = -R \sin t dt \\ dy = R \cos t dt \\ dz = A dt \end{cases}$ donc en remplaçant,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\gamma} y dx - z dy + x dz = \int_0^{2\pi} (R \sin t(-R \sin t) - At R \cos t + R \cos t A) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{R^2}{2}(1 - \cos 2t) - AR(t \cos t) + AR \cos t \right] dt \\
&= \left[-\frac{R^2 t}{2} + \frac{R^2 \sin 2t}{4} - AR(t \sin t + \cos t) + AR \sin t \right]_0^{2\pi} \\
&= (-R^2 \pi + 0 - AR(0 + 1) + 0) - 0 + 0 - AR(0 + 1) + 0
\end{aligned}$$

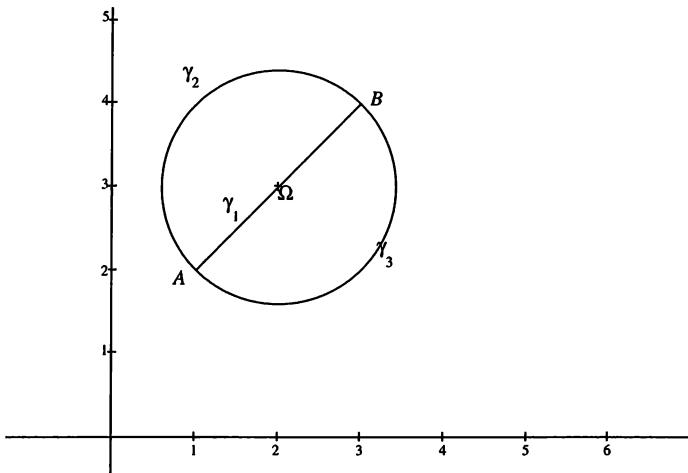
$$I = \int_{\gamma} y dx - z dy + x dz = -R^2 \pi.$$

Exercice 4.5. 1. On doit donner une paramétrisation de γ_1 .

Une paramétrisation qui marche pour tout segment est $\begin{cases} x(t) = (1-t)x_A + tx_B \\ y(t) = (1-t)y_A + ty_B \end{cases}$ pour $t \in [0, 1]$.

Ici cela donne $\begin{cases} x(t) = 1(1-t) + 3t = 1 + 2t \\ y(t) = 2(1-t) + 4t = 2 + 2t \end{cases}$ pour $t \in [0, 1]$.

On peut préférer d'autres paramétrisations liées à une équation cartésienne de la droite (AB) : puisque cette droite a visiblement comme équation $y = x + 1$, et que x varie entre 1 et 3, on peut paramétriser ainsi : $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t + 1 \end{cases}$ pour $t \in [1, 3]$.



On sait que le résultat ne dépend pas de la paramétrisation que l'on choisit pour γ_1 . On choisira donc celle qui semble la plus simple, ici la dernière a l'air à peine plus simple que l'autre.

On obtient

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{\gamma_1} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_1^3 (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \\
 &= \int_1^3 \left(((t+1)^3 - 6t(t+1))1 + (3t(t+1)^2 - 3t^2 + t + 2(t+1))1 \right) dt \\
 &= \int_1^3 (t^3(1+3) + t^2(3-6+6-3) + t(3-6+3+1+2) + (1+2)) dt \\
 &= \int_1^3 (4t^3 + 3t + 3) dt = \left[t^4 + \frac{3t^2}{2} + 3t \right]_1^3 = \left(81 + \frac{27}{2} + 9 \right) - \left(1 + \frac{3}{2} + 3 \right)
 \end{aligned}$$

$$I_1 = 98.$$

Si on avait choisi l'autre paramétrisation, les calculs auraient été :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \left(((2t+2)^3 - 6(2t+1)(2t+2))2 \right. \\
 &\quad \left. + (3(2t+1)(2t+2)^2 - 3(2t+1)^2 + (2t+1) + 2(2t+2))2 \right) dt \\
 &= 2 \int_0^1 (8t^3 + 24t^2 + 24t + 8 - 24t^2 - 36t - 12 \\
 &\quad + 24t^3 + 60t^2 + 48t + 12 - 12t^2 - 12t - 3 + 2t + 1 + 4t + 4) dt \\
 &= 2 \int_0^1 (t^3(8 + 24) + t^2(24 - 24 + 60 - 12) \\
 &\quad + t(24 - 36 + 48 - 12 + 2 + 4) + (8 - 12 + 12 - 3 + 1 + 4)) dt \\
 &= 2 \int_0^1 (32t^3 + 48t^2 + 30t + 10) dt = 2 \left[8t^4 + 16t^3 + 15t^2 + 10t \right]_0^1 \\
 &= 2(8 + 16 + 15 + 10)
 \end{aligned}$$

$$I_1 = 98.$$

Bien entendu, on trouve le même résultat.

2. et 3. On doit paramétriser les deux demi-cercles AB ; une paramétrisation classique qui fonctionne toujours d'un cercle de centre Ω , de rayon R est $\begin{cases} x(t) = x_\Omega + R \cos t \\ y(t) = y_\Omega + R \sin t \end{cases}$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Ce cercle est alors décrit dans le sens trigonométrique à partir du point le plus à l'« est », (le plus à droite).

Ici, pour γ_3 (en respectant le choix suggéré par la figure), on doit décrire le cercle de centre $\Omega(2, 3)$, de rayon $R = \sqrt{2}$ dans le sens trigonométrique depuis le point « sud-ouest » vers le point « nord-est », c'est-à-dire depuis le point correspondant à tous les paramètres $\frac{5\pi}{4} + k2\pi$ vers le point correspondant aux paramètres $\frac{\pi}{4} + k2\pi$. Pour respecter le sens de parcours, on fera donc croître le paramètre t de $-\frac{3\pi}{4}$ jusqu'à $\frac{\pi}{4}$ et une paramétrisation de γ_3 est

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 3 + \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

Pour γ_2 , c'est à peine plus délicat, puisque le sens de parcours est le sens contraire au sens trigonométrique. Il y a deux manières de s'en sortir : la première consiste à poser $u = -t$ dans une paramétrisation habituelle : lorsque u croît, t décroît, donc le sens de parcours est inversé ; on obtient ici

$$\begin{cases} x(u) = 2 + \sqrt{2} \cos u \\ y(u) = 3 - \sqrt{2} \sin u \end{cases} \quad \text{pour } u \in [-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$$

(ne pas oublier que $\cos(-u) = \cos u$ alors que $\sin(-u) = -\sin u$) ; un inconvénient de cette méthode est que les calculs de l'intégrale sur γ_3 sont plus difficiles à

récupérer ; la deuxième méthode consiste à faire le calcul en parcourant ce demi-cercle dans le mauvais sens, mais en ayant conscience que ce que l'on obtiendra est alors l'opposé de la valeur cherchée. On utilise alors

$$\begin{cases} x(t) = 2 + \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = 3 + \sqrt{2} \sin t \end{cases} \quad \text{pour } t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$$

C'est cette méthode qui est conseillée, sous réserve de ne pas oublier de changer le signe, dès le début. On notera (comme dans le cours) $\hat{\gamma}_2$ l'arc opposé de γ_2 .

Avec cette deuxième méthode

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{\hat{\gamma}_2} \overrightarrow{V}(M) \cdot d\overrightarrow{M} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(((3 + \sqrt{2} \sin t)^3 - 6(2 + \sqrt{2} \cos t)(3 + \sqrt{2} \sin t))(-\sqrt{2} \sin t) \right. \\ &\quad \left. + (3(2 + \sqrt{2} \cos t)(3 + \sqrt{2} \sin t)^2 - 3(2 + \sqrt{2} \cos t)^2 \right. \\ &\quad \left. + (2 + \sqrt{2} \cos t) + 2(3 + \sqrt{2} \sin t))\sqrt{2} \cos t \right) dt \\ &= -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} ((-27 + 36) \sin t + (54 - 12 + 2 + 6) \cos t + (-27 + 12)\sqrt{2} \sin^2 t \\ &\quad + (27 - 12 + 1)\sqrt{2} \cos^2 t + (18 + 36 + 2)\sqrt{2} \sin t \cos t \\ &\quad - 18 \sin^3 t + (12 + 12) \sin^2 t \cos t + 36 \sin t \cos^2 t \\ &\quad - 6 \cos^3 t - 2\sqrt{2} \sin^4 t + 6\sqrt{2} \sin^2 t \cos^2 t) dt \\ &= -9\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt - 50\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos t dt + 30 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 t dt - 32 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2 t dt \\ &\quad - 112 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t \cos t dt + 18\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^3 t dt - 24\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 t \cos t dt \\ &\quad - 36\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t \cos^2 t dt + 6\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^3 t dt \\ &\quad + 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^4 t dt - 12 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt \end{aligned}$$

Calculons les différentes intégrales intervenant ici :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = \sqrt{2}; \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos t dt = -\sqrt{2}.$$

En utilisant les linéarisations des carrés $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t$ et $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$ ainsi que $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$ et tenant compte que toute primitive de $\cos 2t$ ou

$\sin 2t$ est π -périodique, on a

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2 t \, dt \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t \cos t \, dt = 0.$$

Puisque $\sin^3 t = \sin t(1 - \cos^2 t)$, le changement de variable $u = \cos t$ permet de calculer

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^3 t \, dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-u^2) \, du = \frac{5\sqrt{2}}{6} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u^2 \, du = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

De même, avec le changement de variable $v = \sin t$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos^3 t \, dt = - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-v^2) \, dv = -\frac{5\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 t \cos t \, dt = - \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} v^2 \, dv = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Pour finir, on a $\sin^4 t = \frac{1}{8}(\cos 4t - 4 \cos 2t + 3)$ et $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t)$ (formules de linéarisation, qu'on peut retrouver avec les formules d'Euler); avec la même remarque concernant la π -périodicité des primitives de $\cos 4t$ et de $\cos 2t$, on trouve facilement

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^4 t \, dt = \frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{\pi}{8}.$$

On obtient donc

$$I_2 = -18 + 100 + 30 \frac{\pi}{2} - 32 \frac{\pi}{2} - 0 + 30 + 8 - 12 - 10 + \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 98 - \pi.$$

À peu près les mêmes calculs permettent d'obtenir

$$I_3 = 98 + \pi.$$

(les intégrales des termes en puissance impaire de sin et cos changent de signe et ceux en puissance paire gardent la même valeur)

4. On constate qu'on a bien $I_3 - I_2 = 2\pi$, ce qui est l'aire d'un disque de rayon $\sqrt{2}$.

Essayons d'expliquer ce phénomène : Tout d'abord, la différence $I_3 - I_2$ est égale à l'intégrale curviligne du champ de vecteurs sur le contour complet du cercle décrit dans le sens trigonométrique. Si ce champ de vecteurs était un champ de gradients, cela simplifierait bien les choses. A-t-on $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$? Calculons

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - 6x \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - 6x + 1.$$

On constate que seul le terme x de Q amène une différence entre ces deux valeurs. Mais l'intégrale curviline est linéaire : si on pose $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, avec \vec{V}_1, \vec{V}_2 de composantes respectives

$P_1 = P$; $Q_1 = Q - x = 3xy^2 - 3x^2 + 2y$; $P_2 = 0$ et $Q_2 = x$, on obtient, en appelant γ le contour du cercle complet, dans le sens direct,

$$I_3 - I_2 = \int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\gamma} \vec{V}_1(M) \cdot d\vec{M} + \int_{\gamma} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M}.$$

or, $\int_{\gamma} \vec{V}_1(M) \cdot d\vec{M}$ est l'intégrale curviline sur un contour fermé d'un champ de gradients, puisque $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$ (c'est étudié pour !) (tous les champs de cet exercice sont définis sur \mathbb{R}^2 tout entier qui est bien sûr un ouvert étoilé).

(En fait, il est aisément de voir que $\vec{V}_1 = \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y)$ lorsque $f(x, y) = xy^3 - 3x^2y + y^2$)

On peut affirmer que $\int_{\gamma} \vec{V}_1(M) \cdot d\vec{M} = 0$ et donc

$$\int_{\gamma} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\gamma} \vec{V}_2(M) \cdot d\vec{M} = \int_{\gamma} x \, dy$$

Or, cette dernière intégrale curviline est égale à l'aire du la boucle délimitée par le contour γ donc à 2π .

On peut raisonner de la même manière pour $I_3 - I_1$, qui est l'intégrale curviline sur le contour du demi-disque « inférieur » de \vec{V}_2 , donc qui est égale à l'aire de ce demi-disque, donc à π et de la même façon, $I_1 - I_2$ vaut aussi π . Toutes ces remarques donnaient une méthode fort économique de calculer sans fatigue I_2 et I_3 , à partir de la valeur de I_1 .

Exercice 4.6.

Première méthode :

Le quart de cercle est paramétré par $\begin{cases} x = \cos t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y = \sin t & \end{cases}$ $dx = -\sin t \, dt$ $dy = \cos t \, dt$

donc

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} &= \int_{AB} (4x + y) \, dx + (x + 2y) \, dy \\ &= \int_0^{\pi/2} ((4 \cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t + 2 \sin t) \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos 2t - \sin 2t) \, dt = \left[\frac{\sin 2t + \cos 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1) - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{AB} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = -1.$$

Deuxième méthode :

On remarque que $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ donc \vec{V} est un champ de gradients ; on trouve facilement que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ avec $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$ et donc

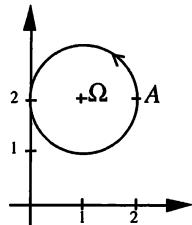
$$\int_{AB} \vec{V}(M) \cdot d\vec{M} = f(B) - f(A) = 1 - 2 = -1.$$

Exercice 4.7.

Une paramétrisation de γ est

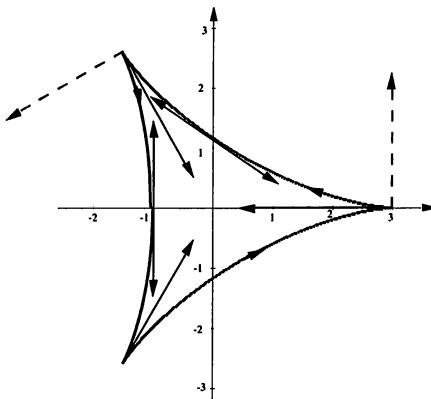
$$\begin{cases} x = 1 + \cos t & t \in [0, 2\pi] \\ y = 2 + \sin t & \end{cases} \quad dx = -\sin t \, dt \quad dy = \cos t \, dt$$

On a donc



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[((1 + \cos t)^2 - (2 + \sin t)^2)(-\sin t) + 2(1 + \cos t)(2 + \sin t) \cos t \right] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t - 2 \sin t \cos t - \cos^2 t \sin t + 4 \sin t + 4 \sin^2 t + \sin^3 t \right. \\ &\quad \left. + 4 \cos t + 2 \sin t \cos t + 4 \cos^2 t + 2 \cos^2 t \sin t \right) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[3 \sin t + 4 \cos t + 4 + \sin t (\cos^2 t + \sin^2 t) \right] \, dt \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + 1) \, dt \\ &= 4 \left[-\cos t + \sin t + t \right]_0^{2\pi} \\ \int_{\gamma} \omega &= 8\pi \end{aligned}$$

Remarque : en vertu du corollaire 4.28 (p. 181), la précision de l'énoncé fixant le point de départ (et d'arrivée) de l'arc fermé γ n'est pas utile : même si on changeait cette donnée, la valeur que l'on trouverait serait inchangée.

Exercice 4.8.

1. Longueur de la courbe : D'après les formules du cours, un tour de la boucle étant obtenu pour t variant dans $[-\pi, \pi]$, la longueur \mathcal{L} de la courbe est donnée (en unités de longueur) par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-2 \sin t - 2 \sin 2t)^2 + (2 \cos t - 2 \cos 2t)^2} dt \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + 1 + 2 \sin t \sin 2t - 2 \cos t \cos 2t} dt = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t + 2t)} dt \\ &= 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(2\frac{3t}{2}))} dt = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{3t}{2}} dt = 4 \int_{-\pi}^{\pi} |\sin \frac{3t}{2}| dt \\ \mathcal{L} &= 8 \int_0^{\pi} |\sin \frac{3t}{2}| dt\end{aligned}$$

Attention ! $\sin \frac{3t}{2}$ est négatif pour $\frac{2\pi}{3} \leq t \leq \pi$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 8 \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin \frac{3t}{2} dt - 8 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\sin}{3t} 2 dt \\ &= 8 \times \frac{2}{3} \left[-\cos \frac{3t}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} - 8 \times \frac{2}{3} \left[-\cos \frac{3t}{2} \right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{16}{3} [(1 + 1) - (0 - 1)]\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = 16.$$

Remarque : en utilisant l'invariance par rotation signalée dans le corrigé de l'exercice 2.4, on voit facilement que $\mathcal{L} = 3\mathcal{L}'$, \mathcal{L}' étant la longueur de la portion de courbe comprise entre le point correspondant au paramètre 0 et celui du paramètre $\frac{2\pi}{3}$. Donc $\mathcal{L} = 3 \int_0^{2\pi/3} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$. Cette astuce évite de « trébucher » sur le changement du signe de $\sin \frac{3t}{2}$.

2. Aire de la « boucle » : D'après les formules du théorème 4.36 p. 190, cette aire, exprimée en unités d'aire, vaut :

$$\mathcal{A} = \int_{\gamma} \frac{x \, dy - y \, dx}{2} = \int_{\gamma} x \, dy = - \int_{\gamma} y \, dx.$$

γ est la courbe paramétrée qui fait la frontière de la boucle ; il faut décrire cette frontière dans le sens trigonométrique. La paramétrisation dans cet exercice fait décrire cette frontière dans le bon sens donc on peut l'utiliser sans changement. Pour faire un tour complet, on doit faire varier t sur une période complète. On utilisera l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Avec cette paramétrisation, en utilisant la première formule, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [(2 \cos t + \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) - (2 \sin t - \sin 2t)(-2 \sin t - 2 \sin 2t)] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [2 \cos^2 t - \cos t \cos 2t - \cos^2 2t + 2 \sin^2 t + \sin t \sin 2t - \sin^2 2t] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [2 - 1 - \cos(t + 2t)] dt = 2\pi - \left[\frac{\sin 3t}{3} \right]_{-\pi}^{\pi}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 2\pi$$

Remarquons que la première formule est à première vue plus compliquée que les deux autres, mais ici comme dans beaucoup d'autres exemples, les calculs qui l'utilisent se trouvent simplifiés. Si on avait voulu utiliser l'une des deux autres formules, on n'aurait pas pu « bénéficier » des simplifications $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et on aurait eu beaucoup plus de mal à calculer l'intégrale obtenue (il est facile de s'en rendre compte, puisque chacune des deux moitiés de l'intégrale qu'on vient de calculer est égale à ce qu'on aurait dû calculer avec les deux autres formules).

Exercice 4.9.

Une parabole peut toujours être caractérisée par une équation du type $y = kx^2$, pour peu qu'on place l'origine du repère orthonormé au sommet, et l'axe des ordonnées dans la direction de l'axe de la parabole ; on peut aussi choisir $k > 0$.

Un arc de parabole admet donc une paramétrisation sous la forme

$$\begin{cases} x = t \\ y = kt^2 \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad \begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= 2kt \, dt. \end{aligned}$$

La longueur d'un arc de la parabole $y = kx^2$, entre son point d'abscisse a et son point d'abscisse b ($a < b$) est donc

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + (2kt)^2} \, dt$$

Pour calculer ce type d'intégrale, si on a un peu de culture mathématique, on sait qu'il est conseillé d'utiliser le changement de variables défini par $2kt = \operatorname{sh} u$; on a

donc $dt = \frac{\operatorname{ch} u}{2k} du$, et $\begin{cases} t = a \leftrightarrow u = \operatorname{argsh}(2ka) \\ t = b \leftrightarrow u = \operatorname{argsh}(2kb) \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_{\operatorname{argsh}(2ka)}^{\operatorname{argsh}(2kb)} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \frac{\operatorname{ch} u}{2k} du = \frac{1}{2k} \int_{\operatorname{argsh}(2ka)}^{\operatorname{argsh}(2kb)} \operatorname{ch}^2 u du \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\operatorname{argsh}(2ka)}^{\operatorname{argsh}(2kb)} \frac{1 + \operatorname{ch} 2u}{2} du = \frac{1}{4k} \left[u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2} \right]_{\operatorname{argsh}(2ka)}^{\operatorname{argsh}(2kb)} \\ &= \frac{1}{4k} \left[\operatorname{argsh}(2kb) - \operatorname{argsh}(2ka) \right] + \frac{1}{4k} \left[\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \right]_{\operatorname{argsh}(2ka)}^{\operatorname{argsh}(2kb)} \\ \mathcal{L} &= \frac{\operatorname{argsh}(2kb) - \operatorname{argsh}(2ka)}{4k} + \frac{b\sqrt{1+4k^2b^2} - a\sqrt{1+4k^2a^2}}{2}\end{aligned}$$

On a utilisé la formule de trigonométrie hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Exercice 4.10.

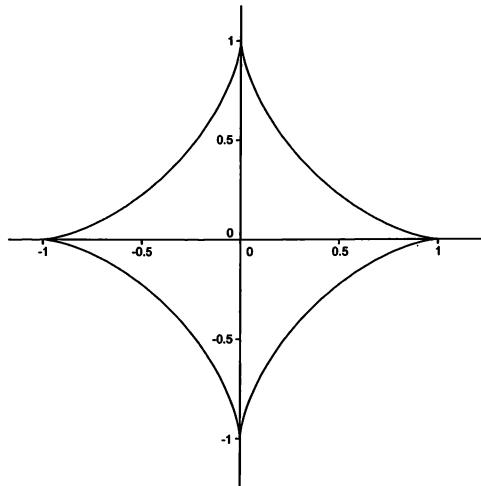
Le support de l'arc paramétré γ , dont une paramétrisation est $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi]$ est inclus dans la frontière du domaine $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1$, puisqu'on a

$$(\cos^3 t)^{2/3} + (\sin^3 t)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Réciproquement, lorsque (x, y) sont tels que $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, on peut toujours trouver un $t \in [-\pi, \pi]$ tel que $x = \cos^3 t$ et $y = \sin^3 t$ (il suffit de prendre $x^{1/3} = \cos t$ et $y^{1/3} = \sin t$).

Le support de l'arc γ est donc bien la frontière du domaine dont on cherche l'aire, et puisque $dx = -3 \sin t \cos^2 t dt$ et $dy = 3 \cos t \sin^2 t dt$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} x \, dx - y \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos^3 t (3 \cos t \sin^2 t) - \sin^3 t (-3 \sin t \cos^2 t) \right] dt \\ &= \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = 3 \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= 3 \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt \\ &= \frac{3}{8} \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$



La longueur de la courbe frontière se calcule de la même façon, avec cette paramétrisation, et sans tenir compte des symétries qui permettraient de couper en quatre (et même en huit !) cette courbe

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_{-\pi}^{\pi} 3\sqrt{\sin^2 t \cos^4 t + \cos^2 t \sin^4 t} dt = 3 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt \\ &= 3 \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t \cos t| dt\end{aligned}$$

Tenant compte du signe de $\sin t \cos t$ selon les quadrants, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 3 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sin t \cos t dt - 3 \int_{-\pi/2}^0 \sin t \cos t dt \\ &\quad + 3 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt - 3 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \cos t dt \\ &= 3 \left[\frac{-\cos 2t}{4} \right]_{-\pi}^{-\pi/2} - 3 \left[\frac{-\cos 2t}{4} \right]_{-\pi/2}^0 + 3 \left[\frac{-\cos 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} - 3 \left[\frac{-\cos 2t}{4} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{3}{4}(1 - (-1)) - \frac{3}{4}((-1) - 1) + \frac{3}{4}(1 - (-1)) - \frac{3}{4}((-1) - 1) \\ \mathcal{L} &= 6.\end{aligned}$$

Évidemment, il aurait été plus simple d'utiliser une ou plusieurs symétries.

CHAPITRE 5

5. Solutions des exercices sur intégrales doubles, triples et de surface

Exercice 5.1.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^3} \text{ pour } \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 ; y \geq 1 ; x+y \leq 3\}$$

Nous allons « privilégier » y : il est clair que les points de \mathcal{D} ont tous une ordonnée comprise entre 1 et 2. Pour chaque $y \in [1, 2]$ fixé, la droite horizontale des points d'ordonnée y rencontre le domaine \mathcal{D} et son intersection avec ce domaine est un segment, limité par le point de cette droite ayant 1 comme abscisse à gauche, et le point d'intersection de cette droite horizontale avec l'hypoténuse (BC) ; cette droite a pour équation $x + y = 3$, donc son point d'ordonnée y a pour abscisse $x = 3 - y$. En conclusion, on peut donc affirmer que \mathcal{D} est caractérisé par

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 1 \leq x \leq 3 - y. \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^3} = \int_1^2 dy \int_1^{3-y} \frac{dx}{(x+y)^3} \\ &= \int_1^2 dy \left[\frac{-1}{2(x+y)^2} \right]_{x=1}^{x=3-y} = \int_1^2 \left[-\frac{1}{2(3-y+y)^2} + \frac{1}{2(1+y)^2} \right] dy \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{2(1+y)^2} \right) dy = \left[-\frac{y}{18} - \frac{1}{2(1+y)} \right]_1^2 \\ &= -\frac{2}{18} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4} = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Les calculs sont exactement les mêmes si on commence à intégrer en y , en « privilégiant » x , à part l'interversion des variables.

Exercice 5.2.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^2} \text{ pour } \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; 1 \leq x+y \leq 2\}$$

Ici $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, avec \mathcal{D}_1 caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x \leq y \leq 2-x \end{cases}$ et \mathcal{D}_2 caractérisé par

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2-x. \end{cases}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \iint_{\mathcal{D}_1} \frac{dx dy}{(x+y)^2} + \iint_{\mathcal{D}_2} \frac{dx dy}{(x+y)^2} \\ &= \int_0^1 dx \left(\int_{1-x}^{2-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) + \int_1^2 dx \left(\int_0^{2-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=1-x}^{y=2-x} dx + \int_1^2 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{x+2-x} - \frac{-1}{x+1-x} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{-1}{x+2-x} - \frac{-1}{x+0} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} + \left[\ln x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$I = \ln 2.$$

Exercice 5.3.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} \text{ pour } \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; x+y \leq 1\}$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x+y)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^3} \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{2(1+x+y)^2} \right]_{y=0}^{y=1-x} = \int_0^1 \left(\frac{-1}{2(1+x+1-x)^2} - \frac{-1}{2(1+x+0)^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{2(1+x)^2} \right) dx = \left[-\frac{x}{8} - \frac{1}{2(1+x)} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} \\ I &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 5.4.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^3} ; \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 ; y \geq 2 ; x+y \leq 5\}$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^3} = \int_1^3 dx \int_2^{5-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = \int_1^3 \left[\frac{-1}{2(x+y)^2} \right]_{y=2}^{y=5-x} \\
 &= \int_1^3 \left(\frac{-1}{2(x+5-x)^2} - \frac{-1}{2(x+2)^2} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{-1}{50} + \frac{1}{2(x+2)^2} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{x}{50} - \frac{1}{2(x+2)} \right]_1^3 = -\frac{3}{50} - \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{6} \\
 I &= \frac{2}{75}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.5.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} ; \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1\}$$

En utilisant que les variables sont séparables, on a

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \right) \\
 &= \left(\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \right)^2 = \left([\arctan u]_0^1 \right)^2 = \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{16}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.6.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)} ; \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq x\}$$

Procédant comme pour les exercices précédents, on obtient

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} [\arctan y]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (\text{on reconnaît une expression de la forme } u u') \\
 &= \left[\frac{(\arctan x)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.
 \end{aligned}$$

On trouve la moitié du résultat de l'exercice précédent. Cela semble logique, puisque le domaine triangulaire de ce calcul est égal à la moitié du domaine carré de l'exercice précédent. Mais ce genre d'affirmation est tout à fait insuffisant pour conclure ! Si on avait coupé le carré selon l'autre diagonale, on n'aurait pas trouvé ce résultat. Ce qui fait marcher ici cette remarque, c'est d'une part la symétrie du domaine par rapport à l'hypoténuse du triangle qui est la droite $y = x$, et aussi et

surtout, en même temps, le caractère symétrique en x et y de la fonction qu'on intègre.

Pour se convaincre de la validité de cette intuition, nous allons en faire une démonstration rigoureuse. Pour cela on va calculer I avec le changement de variable $(x, y) = \varphi(u, v) = (v, u)$. Le Jacobien de φ est évidemment 1 (à vérifier), et \mathcal{D} est par ce changement de variable, l'image du triangle symétrique : $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{D}')$ avec $\mathcal{D}' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq v \leq 1 ; 0 \leq u \leq v\}$. On a donc

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\varphi(\mathcal{D}')} f(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} f(\varphi(u, v)) 1 \, du \, dv = \iint_{\mathcal{D}'} f(v, u) \, du \, dv. \end{aligned}$$

Mais dans tout calcul d'intégration, les variables sont muettes, donc on peut remplacer u et v par x et y , et on obtient

$$I = \iint_{\mathcal{D}'} f(y, x) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x, y) \, dx \, dy.$$

En effet, f est une fonction symétrique de x et y (c'est-à-dire qu'on a $f(x, y) = f(y, x)$ pour tous x, y).

Par additivité, on a donc :

$$\iint_{\mathcal{D}_{5.5.}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}'} f(x, y) \, dx \, dy = 2 \iint_{\mathcal{D}_{5.6.}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

On a prouvé que :

$$I_{5.5.} = 2 I_{5.6..}$$

Exercice 5.7.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} a^x b^y \, dx \, dy ; \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; x + y \leq 1\}$$

On calcule comme dans l'exercice 5.3.

$$I = \int_{\mathcal{D}} a^x b^y \, dx \, dy = \int_0^1 a^x \, dx \int_0^{1-x} b^y \, dy$$

On utilise la primitive de la fonction $t \mapsto c^t$:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 a^x \left[\frac{b^y}{\ln b} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 a^x \left(\frac{b^{1-x} - 1}{\ln b} \right) dx \\
 &= \frac{1}{\ln b} \int_0^1 (a^x b^{1-x} - a^x) dx = \frac{b}{\ln b} \int_0^1 \left(\frac{a}{b} \right)^x dx - \frac{1}{\ln b} \int_0^1 a^x dx \\
 &= \frac{b}{\ln b} \left[\frac{1}{\ln a - \ln b} \left(\frac{a}{b} \right)^x \right]_0^1 - \frac{1}{\ln b} \left[\frac{a^x}{\ln a} \right]_0^1 \\
 I &= \frac{b}{\ln b (\ln a - \ln b)} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) - \frac{a - 1}{\ln a \ln b}.
 \end{aligned}$$

Le résultat sous cette forme n'est pas très satisfaisant, car on ne retrouve pas le rôle apparemment symétrique de a et x par rapport à b et y . En poursuivant un peu les calculs, on peut retrouver cette symétrie :

$$I = \frac{(a-b)\ln a + (a-1)(\ln b - \ln a)}{\ln a \ln b (\ln a - \ln b)} = \frac{\ln a (1-b) - \ln b (1-a)}{\ln a \ln b (\ln a - \ln b)}.$$

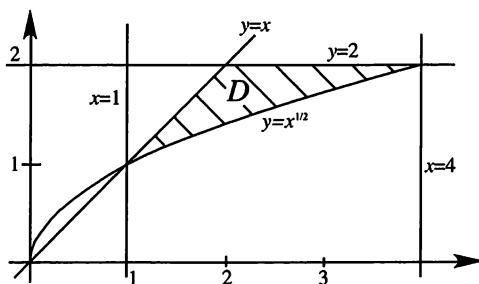
Exercice 5.8. $I = \int_0^3 \left(\int_{\frac{x}{3}}^1 e^{-y^2} dy \right) dx$

On a $I = \iint_{\mathcal{D}} e^{-y^2} dx dy$, avec \mathcal{D} caractérisé par $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{x}{3} \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$

En privilégiant y , la caractérisation correspondante de \mathcal{D} est $\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3y \end{cases}$ (en effet, l'équation de la droite formant l'hypoténuse du triangle \mathcal{D} peut s'écrire $y = \frac{x}{3} \iff x = 3y$). D'où

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dy \int_0^{3y} e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} \left(\int_0^{3y} dx \right) dy = \int_0^1 e^{-y^2} (3y) dy \\
 &= -\frac{3}{2} \int_0^1 (-2y)e^{-y^2} dy = -\frac{3}{2} \left[e^{-y^2} \right]_0^1 = -\frac{3}{2}(e^{-1} - 1) = \frac{3}{2}(1 - e^{-1}).
 \end{aligned}$$

Exercice 5.9.



$$I = \iint_{\mathcal{D}} \sin \frac{\pi x}{2y} dx dy ; \quad \mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 4 ; \sqrt{x} \leq y \leq \min\{2, x\} \right\}$$

La figure permet de se rendre compte qu'on peut caractériser D par $\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ y \leq x \leq y^2 \end{cases}$.
Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx = \int_1^2 \left[-\frac{2y}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2y} \right]_{x=y}^{x=y^2} dy \\ &= \int_1^2 -\frac{2y}{\pi} \left[\cos \frac{\pi y^2}{2y} - \cos \frac{\pi y}{2y} \right] dy = \int_1^2 -\frac{2y}{\pi} (\cos \frac{\pi y}{2} - 0) dy \\ &= \left[-\frac{2y}{\pi} \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{2}{\pi} \right) \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi y}{2} dy \quad (\text{intégration par partie}) \\ &= [0 + \frac{4}{\pi^2}] + \frac{4}{\pi^2} \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi y}{2} \right]_1^2 = \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^3} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Exercice 5.10.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)^2} ; \quad \mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}$$

En utilisant les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (1 + x^2 + y^2)^2} = \iint_{[0, a] \times [0, 2\pi]} \frac{1}{r (1 + r^2)^2} r dr d\theta \\ &= \left(\int_0^a \frac{1}{(1 + r^2)^2} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \quad (\text{variables séparables}) \\ &= 2\pi \int \left[\frac{1}{2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{1 + x^2} \right]_0^a \quad (\text{primitive classique : on peut poser } r = \tan \varphi) \\ I &= \pi \left(\arctan a + \frac{a}{1 + a^2} \right). \end{aligned}$$

Notons que cet exercice est à peu près infaisable sans passer en polaires.

Exercice 5.11.

$$I = \iint_D xy \sqrt{x^2 + 4y^2} dx dy \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Calcul direct

D étant caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\sqrt{x^2+4y^2} dy = \int_0^1 \frac{x}{8} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (8y)(x^2+4y^2)^{1/2} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{8} \left[\frac{2}{3}(x^2+4y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{12} \left((x^2+4-4x^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{12} \left((4-3x^2)^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) dx = -\frac{1}{72} \int_0^1 (-6x)(4-3x^2)^{\frac{3}{2}} dx - \frac{1}{12} \int_0^1 x^4 dx \\ &= -\frac{1}{72} \left[\frac{2}{5}(4-3x^2)^{5/2} \right]_0^1 - \frac{1}{60} = -\frac{1}{180}(1-32) - \frac{1}{60} = \frac{28}{180} = \frac{7}{45}. \end{aligned}$$

Avec les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} (r \cos \theta)(r \sin \theta) \sqrt{r^2(\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta)} r dr d\theta \\ &= \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} r^4 \cos \theta \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} dr d\theta \text{ (les variables sont séparables)} \\ &= \left(\int_0^1 r^4 dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4 \frac{1-\cos 2\theta}{2}} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} (3 \sin 2\theta) \left(\frac{5-3 \cos 2\theta}{2} \right)^{1/2} d\theta \right) = \frac{1}{30} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{5-3 \cos 2\theta}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{45} \left(\left(\frac{5+3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5-3}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{45}(8-1) = \frac{7}{45}. \end{aligned}$$

On retrouve le même résultat (ça n'a pas été spécialement plus simple avec cette deuxième méthode)

Exercice 5.12. $I = \iint_D \frac{dx dy}{x^2 + xy + y^2} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$

Grâce aux coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[\sqrt{2}, 2] \times [a, a+2\pi]} \frac{r dr d\theta}{r^2 \cos^2 \theta + (r \cos \theta)(r \sin \theta) + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \left(\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dr}{r} \right) \left(\int_a^{a+2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta \cos \theta} \right) \quad \text{(variables séparables)} \\ &= \left[\ln r \right]_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_a^{a+2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, grâce aux règles de Bioche, on sait que c'est le changement de variable $\tan \theta = t$ qui va simplifier le calcul. Mais le problème est que t n'est alors pas défini pour toutes les valeurs de θ . On va déjà réduire l'intervalle d'intégration en constatant que la fonction $\theta \mapsto \frac{1}{1 + \sin \theta \cos \theta}$ est π -périodique, donc

$$\int_a^{a+2\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta \cos \theta} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin \theta \cos \theta}.$$

Ensuite, on utilise $dt = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = (1 + \tan^2 \theta) d\theta$ et on obtient

$$\begin{aligned} I &= (\ln 2 - \ln \sqrt{2}) 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} + \tan \theta \right)} = \ln 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2 + t} \\ &= \ln 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \ln 2 \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{2 \ln 2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2\pi \ln 2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercice 5.13.

$$I = \iint_D x \, dx \, dy \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0 ; x \geq 1 \right\}$$

On peut caractériser D par $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$ donc on obtient directement

$$I = \int_1^2 x \, dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy = 2 \int_1^2 x \sqrt{2x-x^2} \, dx$$

Le problème est que le calcul de cette primitive, s'il n'est pas impossible à faire¹² n'est pas très évident. Il est intéressant de voir ce que donne le passage en polaires. Pour un point M de D , les coordonnées polaires (r, θ) sont telles que $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ d'une part, et les deux lignes frontières ont pour équation respectivement $x = 1 \iff r \cos \theta = 1 \iff r = \frac{1}{\cos \theta}$ et $x^2 + y^2 - 2x = 0 \iff r^2 - 2r \cos \theta = 0 \iff$

¹² On peut poser $x - 1 = \sin u$, $dx = \cos u \, du$ et on se ramène à

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin u + 1) \cos^2 u \, du = 2 \left[-\frac{\cos^3 u}{3} + \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{\pi/2} = 2(0 + \frac{\pi}{4} + 0) - 2(-\frac{1}{3} + 0 + 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.$$

$r = 2 \cos \theta$, de sorte qu'en polaires, D est caractérisé par $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\cos \theta} \leq r \leq 2 \cos \theta \end{cases}$.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D'} r \cos \theta r \, dr \, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \, d\theta \int_{1/\cos \theta}^{2 \cos \theta} r^2 \, dr \\
 &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_{1/\cos \theta}^{2 \cos \theta} \, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \left(\frac{8 \cos^3 \theta}{3} - \frac{1}{3 \cos^3 \theta} \right) \, d\theta \\
 &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) \, d\theta - \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \theta} \, d\theta \quad (\text{linéarisation de } \cos^4 \theta) \\
 &= \frac{16}{3} \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) \, d\theta - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \theta} \, d\theta \quad (\text{fonction paire}) \\
 &= \frac{16}{3} \left[\frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 4\theta}{32} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/4} - \frac{2}{3} \left[\tan \theta \right]_0^{\pi/4} \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{4}{3} \right) - 0 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.14.

$$I = \iint_D \sqrt{xy} \, dx \, dy \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq xy\}$$

On peut écrire, avec les notations définies sur la figure (voir les indications, p. 281)

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \iint_{D_1} \sqrt{xy} \, dx \, dy = 2 \int_0^{\pi/2} \, d\theta \int_0^{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \sqrt{r^2 \sin \theta \cos \theta} r \, dr \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \theta \cos \theta} \left(\int_0^{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}} r^2 \, dr \right) \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \theta \cos \theta} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}} \, d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right)^2 \, d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \, d\theta = \frac{1}{12} \left[\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{24}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.15.

Directement : D est caractérisé par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1 \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \, dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{y}{1+x^2+y^2} \, dy = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=1} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x (\ln(2+x^2) - \ln 2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \ln(2+x^2) \, dx - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_2^3 \ln u \, du - \frac{\ln 2}{4} \quad (\text{on a posé } x^2+2=u \text{ donc } x \, dx = \frac{du}{2}) \\ &= \frac{1}{4} \left[u \ln u - u \right]_2^3 - \frac{\ln 2}{4} = \frac{1}{4} (3 \ln 3 - 3) - \frac{1}{4} (2 \ln 2 - 2) - \frac{\ln 2}{4} \\ I &= \frac{3 \ln 3 - 3 \ln 2 - 1}{4}. \end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées polaires : il est pertinent de diviser le domaine en deux selon la diagonale (OC) : $D = D_1 \cup D_2$, avec D_1 sous la diagonale et D_2 au-dessus. L'échange des variables x et y ne modifie pas la fonction, et transforme D_1 en D_2 , donc on a $\iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$.

D_1 est caractérisé en coordonnées polaires par $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \end{cases}$ (puisque la frontière droite de D_1 a pour équation $x = 1 \iff r = \frac{1}{\cos \theta}$) donc

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{D_1} \frac{xy}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy = 2 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos \theta} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{1+r^2} r \, dr \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta \left(\int_1^{1/\cos \theta} \frac{r^3}{1+r^2} \, dr \right) \, d\theta \end{aligned}$$

On pose alors $s = r^2$; $ds = 2r \, dr$:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{2} \left(\int_1^{1/\cos^2 \theta} \frac{s}{1+s} \, dr \right) \right) \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta \left[s - \ln(1+s) \right]_{s=1}^{s=1/\cos^2 \theta} \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \ln \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - 1 + \ln 2 \right) \, d\theta \end{aligned}$$

On pose maintenant $u = \cos^2 \theta$; $du = -2 \sin \theta \cos \theta$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{u} - \ln(u+1) + \ln u - 1 + \ln 2 \right) du \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln u - (u+1)\ln(u+1) + u\ln u + (\ln 2 - 1)u \right]_{1/2}^1 \\
 &= \frac{1}{2}(0 - 2\ln 2 + 0 + \ln 2 - 1) - \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\ln 2 - 1}{2} \right) \\
 I &= \frac{3\ln 3 - 3\ln 2 + 1}{4}.
 \end{aligned}$$

On a fini par trouver le même résultat, mais ça n'a pas été plus facile.

Exercice 5.16.

$$I = \iint_D (x^2+y^2) dx dy ; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y ; x^2+y^2-x \leq 0 ; x^2+y^2-y \geq 0\}$$

D est caractérisé en coordonnées polaires par (voir indications p. 282) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et $\sin \theta \leq r \leq \cos \theta$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} r^2 r dr = \int_0^{\pi/4} \left(\int_{\sin \theta}^{\cos \theta} r^3 dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{\sin \theta}^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.17.

$$I = \iint_D xy dx dy ; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

On a

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} xy dy = \int_0^a x \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y dy \right) dx \\
 &= \int_0^a x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = \frac{1}{2} \int_0^a x \left(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} \right) dx \\
 &= \frac{b^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4a^2} \right]_0^a = \frac{b^2}{2} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{a^2 b^2}{8}.
 \end{aligned}$$

Voyons maintenant comment le changement de variable « presque » polaire :

$x = a\rho \cos \theta$ et $y = b\rho \sin \theta$, de Jacobien $J = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho$ pouvait simplifier les calculs.

La frontière de D correspond à $\rho = 1$ et le premier quadrant à $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ donc

$$\begin{aligned} I &= \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} (a\rho \cos \theta)(b\rho \sin \theta)(ab\rho) \, d\rho \, d\theta \quad (\text{variables séparables}) \\ &= a^2 b^2 \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \right) = a^2 b^2 \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} \\ &= a^2 b^2 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{a^2 b^2}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 5.18.

$$I = \int_{\gamma} x^3 \, dy - y^3 \, dx \quad \begin{array}{l} \gamma \text{ est le cercle de centre } O, \text{ de rayon } R, \text{ orienté} \\ \text{dans le sens trigonométrique} \end{array}$$

Directement :

Une paramétrisation de γ est $\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [-\pi, \pi]$ avec $dx = -R \sin \theta \, d\theta$ et $dy = R \cos \theta \, d\theta$, de sorte que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} ((R^3 \cos^3 \theta)(R \cos \theta) - (R^3 \sin^3 \theta)(-R \sin \theta)) \, d\theta = R^4 \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \, d\theta \\ &= R^4 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}{8} + \frac{\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3}{8} \right) \, d\theta \\ &= R^4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 4\theta + 3}{4} \, d\theta = \frac{R^4}{4} \left[\frac{\sin 4\theta}{4} + 3\theta \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{3\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant Green-Riemann :

Soit $\omega = P \, dx + Q \, dy$ avec $P = -y^3$ et $Q = x^3$; on a donc, D étant le disque dont γ est la frontière

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_D (3x^2 + 3y^2) \, dx \, dy \\ &= 3 \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} r^2 r \, dr \, d\theta \quad (\text{le passage en polaires s'imposait}) \\ &= 6\pi \int_0^R r^3 \, dr = 6\pi \frac{R^4}{4} = \frac{3\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

On a bien retrouvé le même résultat.

Exercice 5.19. $I = \int_{\partial K^+} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$

$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1 - x\}$ et ∂K^+ est le bord de K orienté positivement.

Directement :

On pose $\partial K^+ = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ en partant de O .

En temps que segment horizontal orienté de gauche à droite, il est facile de paramétriser γ_1 ainsi $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} t \in [0, 1]$.

Comme segment de droite définie par une équation réduite $y = 1 - x$ et parcouru de gauche à droite, c'est $\hat{\gamma}_2$ qui est facile à paramétriser ainsi : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases} t \in [0, 1]$.

Le segment vertical parcouru de bas en haut $\hat{\gamma}_3$ est paramétré par $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} t \in [0, 1]$.

Posant $\omega = P dx + Q dy = (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, on obtient

$$I = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\hat{\gamma}_2} \omega - \int_{\hat{\gamma}_3} \omega = I_1 - I_2 - I_3$$

$$I_1 = \int_0^1 ((t^2 + 0)1 + (t^2 - 0)0) dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$I_2 = \int_0^1 ((t^2 + (1-t)^2)1 + (t^2 - (1-t)^2)(-1)) dt = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$I_3 = \int_0^1 ((0+t^2)0 + (0-t^2)1) dt = \int_0^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3}$$

$$I = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

Avec Green-Riemann :

$$\begin{aligned} I &= \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx = \iint_K (2x - 2y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x - 2y) dy = \int_0^1 \left[2xy - y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} \\ &= \int_0^1 (2x(1-x) - (1-x)^2 - 0) dx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x - 1) dx \\ &= \left[-x^3 + 2x^2 - x \right]_0^1 = -1 + 2 - 1 - 0 = 0 \end{aligned}$$

On a retrouvé le même résultat.

Exercice 5.20. $I = \int_D \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Directement :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2} dy = \int_0^1 x \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 x \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2+y^2} \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=1} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{1}{2+x^2} - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\ln(2+x^2)}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} (2 \ln 3 - 1 - 2 \ln 2 + 0) = \frac{2 \ln 2 + 1 - 2 \ln 3}{4}. \end{aligned}$$

Avec Green-Riemann :

Soit γ le contour orienté positivement de D .

En remarquant que

$$P(x, y) = \frac{x}{2(1+x^2+y^2)} \text{ est telle que } -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = f(x, y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

et en prenant $Q = 0$ et $\omega = P dx + Q dy$, on a

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \frac{x dx}{2(1+x^2+y^2)}$$

γ se décompose en trois sous-arcs $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$, avec γ_1 qui est le segment vertical $[AC]$ orienté de bas en haut, γ_2 qui est le segment horizontal $[CB]$ orienté de droite à gauche, et γ_3 qui est l'arc \widehat{BA} du cercle trigonométrique, qui est orienté dans le sens indirect. Pour paramétriser plus facilement, on introduit donc les arcs $\widehat{\gamma}_2$ et $\widehat{\gamma}_3$ inverses respectivement de γ_2 et γ_3 .

En temps que segment vertical orienté de bas en haut, il est facile de paramétriser γ_1 ainsi : $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} t \in [0, 1]$.

Comme segment horizontal orienté de gauche à droite, c'est $\widehat{\gamma}_2$ qui est facile à paramétriser ainsi : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} t \in [0, 1]$.

Comme arc de cercle parcouru dans le sens trigonométrique, $\widehat{\gamma}_3$ admet la paramétrisation $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

On obtient donc, en posant $\omega = P \, dx + Q \, dy = P \, dx$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} P \, dx = \int_{\gamma} \frac{x}{2(1+x^2+y^2)} \, dx \\ &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\widehat{\gamma}_2} \omega - \int_{\widehat{\gamma}_3} \omega = I_1 - I_2 - I_3 \\ I_1 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2(1+1+t^2)} 0 \right) \, dt = 0 \\ I_2 &= \int_0^1 \left(\frac{t}{2(1+t^2+1)} 1 \right) \, dt = \left[\frac{1}{4} \ln(2+t^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 3 - \ln 2}{4} \\ I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos t}{2(1+\cos^2 t + \sin^2 t)} (-\sin t) \right) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin t \cos t}{4} \, dt \\ &= \left[\frac{\cos 2t}{16} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{8} \\ I &= I_1 - I_2 - I_3 = 0 - \frac{\ln 3 - \ln 2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2 \ln 2 + 1 - 2 \ln 3}{8}. \end{aligned}$$

On a bien retrouvé le même résultat.

Exercice 5.21.

$$I = \iiint_D \frac{z \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \text{ et } z \geq 0 \right\}$$

En passant en coordonnées sphériques, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\rho \sin \theta}{\rho^2} (\rho^2 \sin \theta \, d\rho) \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_1^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \right) \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} (2\pi) \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \times 2\pi \times \frac{1}{2} \\ I &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Exercice 5.22. } I = \iiint_D \frac{dx \, dy \, dz}{(1+x+y+z)^3}$$

pour $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0 ; x+y+z \leq 1 \right\}$.

Par un calcul direct, on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{-1}{2 \cdot 2^2} - \frac{-1}{2(1+x+y)^2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-1}{2(1+x+y)} - \frac{y}{8} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-1}{4} - \frac{1-x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2(1+x)} - \frac{3}{8} + \frac{x}{8} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{3x}{8} + \frac{x^2}{16} \right]_0^1 \\
I &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Exercice 5.23.

$$\left. \begin{array}{l} I_1 = \iiint_D z^2 dx dy dz \\ I_2 = \iiint_D x^2 + y^2 dx dy dz \end{array} \right\} \quad D \text{ est la boule de centre } O, \text{ de rayon } a$$

En utilisant les coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_{-a}^a z^2 dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r dr \\
&= 2\pi \int_{-a}^a z^2 dz \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{a^2-z^2}} = 2\pi \int_{-a}^a z^2 \frac{a^2-z^2}{2} dz = \pi \int_{-a}^a (a^2 z^2 - z^4) dz \\
&= 2\pi \int_0^a (a^2 z^2 - z^4) dz \quad (\text{parité}) \\
&= 2\pi \left[\frac{a^2 z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_0^a = 2\pi a^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4\pi a^5}{15}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_{-a}^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r^2 r dr \\
&= 2\pi \int_{-a}^a \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{a^2-z^2}} dz = 2\pi \int_{-a}^a \frac{(a^2-z^2)^2}{4} dz = \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a (a^4 - 2a^2z^2 + z^4) dz \\
&= \pi \int_0^a (a^4 - 2a^2z^2 + z^4) dz \quad (\text{parité}) \\
&= \pi \left[a^4 z - \frac{2a^2 z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right]_0^a = \pi a^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi a^5}{15}
\end{aligned}$$

On trouve $I_2 = 2I_1$. Est-ce un hasard ? Certainement pas ! en effet, on aurait pu raisonner ainsi :

$$\text{Par linéarité, } I_2 = \iiint_D x^2 dx dy dz + \iiint_D y^2 dx dy dz = I_3 + I_4.$$

Or, pour des raisons de symétrie évidentes, x , y et z jouant des rôles analogues, on a tout à fait raison d'affirmer que $I_1 = I_3 = I_4$, donc $I_2 = 2I_1$.

Il est tout à fait correct et pertinent d'utiliser ce type de raisonnement pour simplifier ou recycler des calculs et pour gagner du temps.

Exercice 5.24.

$$I = \iiint_D z \cos(x^2+y^2) dx dy dz \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0 ; x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$

On obtient, en utilisant les coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} z \cos(r^2) r dr \\
&= 2\pi \int_0^R z dz \left[\frac{\sin(r^2)}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} = \pi \int_0^R z \sin(R^2 - z^2) dz \\
&= \pi \left[\frac{\cos(R^2 - z^2)}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} (1 - \cos(R^2)).
\end{aligned}$$

(Remarquons que ce résultat ne peut bien sûr pas s'écrire $\frac{\pi \sin^2 R}{2}$.)

Exercice 5.25.

$$I = \iiint_D \sin(x+y+z) dx dy dz ; \quad D = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]^3$$

Directement

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y+z) dz \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(x+y+z) \right]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x+y) - \cos(x+y+\frac{\pi}{2}) \right) dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y) - \sin(x+y+\frac{\pi}{2})]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin(x+\pi) - \sin x + \sin(x+\frac{\pi}{2}) \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx = 2.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.26. $I = \iiint_D xz \, dx \, dy \, dz$;

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0 ; z \geq 0 ; x+z \leq 1 ; y^2 \leq x\}.$$

B étant l'ensemble des (x, y) tels que $\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 \leq x \leq 1, \end{cases}$ on a :

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_B \left(\int_0^{1-x} xz \, dz \right) \, dx \, dy = \iint_B x \left(\int_0^{1-x} z \, dz \right) \, dx \, dy = \iint_B \frac{x(1-x)^2}{2} \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 \frac{x(1-x)^2}{2} \, dx \right) \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 (x-2x^2+x^3) \, dx \right) \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{x=y^2}^{x=1} \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(1-y^4) - \frac{2}{3}(1-y^6) + \frac{1}{4}(1-y^8) \right) \, dy \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9} \right) \right) = \frac{630 - 126 - 840 + 120 + 315 - 35}{8 \times 5 \times 7 \times 9} \\
 I &= \frac{64}{2520} = \frac{8}{315}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5.27. $I = \iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$;

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 ; y \geq 0 ; z \geq 0 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \right\}.$$

On fait le changement de variable $x = aX$, $y = bY$, $z = bZ$; le Jacobien de ce

changement de variable est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Remarque : Formellement, il était possible et correct d'écrire $dx = a dX$; $dy = b dY$; $dz = c dZ$ de sorte que $dx dy dz = abc dX dY dZ$.

On peut donc écrire (B étant la partie de la boule unité de \mathbb{R}^3 avec les trois coordonnées positives), grâce à ce changement de variables puis grâce au passage aux coordonnées sphériques qui sépare les variables :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz = \iiint_B (aX)(bY)(cZ)(abc) \, dX \, dY \, dZ \\ &= a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (\rho \sin \theta \cos \varphi)(\rho \sin \theta \sin \varphi)(\rho \cos \theta)\rho^2 \sin \theta \, d\rho \\ &= a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^1 \rho^5 \, d\rho \\ &= a^2 b^2 c^2 \left[-\frac{\cos 2\varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} = a^2 b^2 c^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{a^2 b^2 c^2}{48}. \end{aligned}$$

Exercice 5.28.

Pour toutes les questions, la paramétrisation de la sphère de rayon a utilisant les coordonnées sphériques est

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = a \cos \theta. \end{cases}$$

On a clairement

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \cos \theta \\ a \sin \varphi \cos \theta \\ -a \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \sin \theta \\ a \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \varphi} = a^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

d'où $H = \|\overrightarrow{N}\| = a^2 \sin \theta$ (même calcul que pour la sphère unité p. 241 du cours).

1. L'aire de la calotte est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{calotte}} &= \iint_{[0,\alpha_1] \times [0,2\pi]} a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= a^2 \left(\int_0^{\alpha_1} \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \, d\varphi \right) \quad (\text{variables séparables}). \\ &= a^2 \left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\alpha_1} (2\pi) = 2\pi a^2 (1 - \cos \alpha_1).\end{aligned}$$

3. L'aire d'une couronne sphérique se calcule exactement de la même façon sauf que l'intégrale en θ est entre α_1 et α_2 (d'ailleurs, on peut considérer qu'une calotte sphérique est une couronne sphérique particulière avec un des parallèles limite de colatitude 0). On trouve immédiatement

$$\mathcal{A}_{\text{couronne}} = 2\pi a^2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

2. Pour un fuseau, θ varie entre 0 et π tandis que cette fois, φ reste entre β_1 et β_2 donc

$$\mathcal{A}_{\text{fuseau}} = 2a^2(\beta_2 - \beta_1).$$

4. Pour une maille, θ et φ sont tous deux limités respectivement par α_1 et α_2 et par β_1 , β_2 . De sorte que

$$\mathcal{A}_{\text{maille}} = a^2(\beta_2 - \beta_1)(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Exercice 5.29.

On calcule le flux du champ $\vec{V} : M(x, y, z) \mapsto y \vec{i} + x \vec{j} + (y + z) \vec{k}$ à travers la surface Σ^+ qui est définie par : $2x + y + z = 2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$, orientée vers le haut ; cette surface peut être paramétrée par $\begin{cases} z = z(x, y) = 2 - 2x - y \\ (x, y) \in D \end{cases}$

avec D définie par $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 - 2x \end{cases}$

En appliquant les formules des p. 242 et p. 248, on a

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = -\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \\ B = -\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \\ C = 1. \end{cases}$$

Notons que nous pouvions prévoir que le vecteur \vec{N} qui est normal au plan $2x + y + z = 1$ était colinéaire à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puisque ici on a $\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ y+z \end{pmatrix}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) &= \iint_D (AP + BQ + CR) \, dx \, dy = \iint_D (2y + x + (y + z(x, y))) \, dx \, dy \\ &= \iint_D (3y + x + (2 - 2x - y)) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (-x + 2y + 2) \, dy \\ &= \int_0^1 \left[-xy + y^2 + 2y \right]_{y=0}^{y=2-2x} \, dx \\ &= \int_0^1 \left(-x(2 - 2x) + (2 - 2x)^2 + 2(2 - 2x) \right) \, dx \\ \Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) &= \int_0^1 (6x^2 - 14x + 8) \, dx = \left[2x^3 - 7x^2 + 8x \right]_0^1 = 3.\end{aligned}$$

Exercice 5.30.

1. Directement

Si Σ^+ est la surface qui limite le cône, elle se décompose en deux morceaux : Σ_1^+ est le disque de la base orienté vers le bas et Σ_2^+ est la nappe conique formant le « bord » (orientée vers le haut) ; on a

$$\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) = \Phi_{\Sigma_1^+}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V}) = -\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V}) + \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V})$$

Σ_1^- est la base orientée vers le haut. Elle est paramétrée par $\begin{cases} z = 0 \\ (x, y) \in D \end{cases}$ avec D disque unité du plan xOy . On a

$$\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V}) = \iint_{\Sigma_1^-} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{N} \, dx \, dy = 0,$$

car en tout point de Σ_1^- , \overrightarrow{OM} et \vec{N} sont évidemment orthogonaux.

Si on n'est pas convaincu par cet argument, on fait le calcul :

$\vec{N} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k}$ alors que $\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $z = 0$ sur Σ_1^- donc

$$\Phi_{\Sigma_1^-}(\vec{V}) = \iint_D (AP + BQ + CR) \, dx \, dy = \iint_D (0x + 0y + 1.0) \, dx \, dy = 0.$$

Σ_2^+ est paramétrée par $\begin{cases} z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ (x, y) \in D. \end{cases}$; c'est en fait la nappe de la fonction

z , et on peut appliquer les formules vues p. 242, pour le cas d'une nappe de fonction.

$$\text{On a donc } \vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\text{De même, on a } \vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma_2^+}(\vec{V}) &= \iint_D (AP + BQ + CR) \, dx \, dy \\ &= \iint_D \left(2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} x + 2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} y + 1(2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta + 2 - 2r) r \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r \, dr = 2\pi. \end{aligned}$$

On en déduit que le flux cherché est $\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) = 2\pi$.

2. Avec Ostrogradski

Si \mathcal{V} est le domaine intérieur au cône, par Ostrogradski, on a

$$\Phi_{\Sigma^+}(\vec{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz$$

Or, $\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$, donc

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz &= \iint_D \left(\int_0^{2-2\sqrt{x^2+y^2}} 3 \, dz \right) \, dx \, dy = \iint_D (6 - 6\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (6 - 6r)r \, dr = 2\pi [3r^2 - 2r^3]_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Notons que ce deuxième résultat pouvait être obtenu plus rapidement en remarquant que $\iiint_{\mathcal{V}} 3 \, dx \, dy \, dz$ représente 3 fois le volume de \mathcal{V} , et en utilisant que le

volume d'un cône est donné par la formule $V = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$.

L'aire de la base du cône est π , la hauteur est 2, donc le volume du cône est $\frac{2\pi}{3}$ et on obtient ainsi rapidement le résultat sans calcul.

Exercice 5.31.

On calcule $I = \int_{\Gamma^+} y \, dx + z \, dy + x \, dz$ pour Γ^+ bord orienté de la surface orientée Σ paramétrée par $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec D disque de rayon R , centré à l'origine.

1. Directement

Le bord Γ^+ de Σ peut être paramétré par $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \cos \theta \\ z = \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$

On a donc $dx = -\sin \theta \, d\theta$; $dy = \cos \theta \, d\theta$.

D'où

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta(-\sin \theta) + \sin \theta(-\sin \theta) + \cos \theta \cos \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin 2\theta}{2} + \cos 2\theta \right) \, d\theta = 0. \end{aligned}$$

2. En appliquant la formule de Stokes-Ampère

On peut considérer que I est la circulation du vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ le long de Γ^+ .

On a donc $I = \Phi_{\Sigma}(\overrightarrow{\text{rot } \vec{V}})$.

$$\text{On obtient facilement } \overrightarrow{\text{rot } \vec{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la paramétrisation de Σ : $\begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = v \end{cases}$ avec $(u, v) \in D$, on a

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\overrightarrow{\text{rot } \vec{V}}$ et \vec{N} sont orthogonaux, on est sûr que le flux cherché est nul, et on a retrouvé le même résultat.

Exercice 5.32.

1.a) La sphère unité Σ peut être paramétrée simplement en utilisant les coordonnées sphériques (les autres tentatives ne paramètrent en général que la demi-sphère supérieure, et rien ne prouve que le flux à travers la demi-sphère supérieure est égal à la moitié du flux total). Puisque $\rho = 1$, on a donc la paramétrisation

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] = \mathcal{D} \text{ (ne pas oublier le domaine.)}$$

La normale extérieure à Σ est $\vec{N} = \sin \theta \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$ (calcul fait p. 241 du cours), de sorte que :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\mathcal{D}} \vec{V} \cdot \vec{N} \, d\theta \, d\varphi = \iint_{\mathcal{D}} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos \varphi \\ \sin^2 \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \, d\theta \, d\varphi \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi + \iint_{\mathcal{D}} \sin^3 \theta \sin \varphi \cos \varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &\quad + \iint_{\mathcal{D}} \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi + \iint_{\mathcal{D}} \sin^2 \theta \cos \theta \cos \varphi \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi + \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \\ &\quad + \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi + \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

On utilise maintenant les « formules utiles » de l'énoncé

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(\int_0^\pi \frac{3 \sin \theta - \sin 3\theta}{4} \, d\theta \right) \pi + 0 + 0 + 0 \\ &= \frac{\pi}{4} \left[-3 \cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4} \left(3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{4} \frac{16}{3} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

1.b Pour ramener le calcul de Φ à celui d'une intégrale triple, on utilise la formule d'Ostrogradski, qui est utilisable parce que Σ est la frontière d'un domaine de l'espace (Σ est la frontière de la boule unité \mathcal{B} , boule de centre l'origine, de rayon 1 ; il ne faut pas confondre boule et sphère.)

On a

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iiint_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\vec{V}) \, dx \, dy \, dz.$$

$$\text{Ici, } \operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}z + \frac{\partial}{\partial z}x = 1 + 0 + 0 = 1,$$

donc on obtient $\Phi = \iiint_{\mathcal{B}} 1 \, dx \, dy \, dz = \text{volume}(\mathcal{B}) = \frac{4\pi}{3}$.

2.a) On peut paramétriser Σ'^+ , comme une nappe de fonction par $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

avec $(x, y) \in \mathcal{D}'$ (\mathcal{D}' est le disque de centre O , de rayon 1 du plan Oxy). Pour cette paramétrisation, qui correspond toujours à une orientation vers le haut, donc qui convient à la situation étudiée, le vecteur normal se calcule ainsi en tout $(x, y) \in \mathcal{D}'$:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix};$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part, sachant que $P = x + y$, $Q = z$ et $R = x$, on a

$$\overrightarrow{\text{rot } V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \Phi' &= \iint_{\mathcal{D}'} \overrightarrow{\text{rot } V} \cdot \vec{N} \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}'} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}'} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale double, le passage en polaires s'impose :

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\cos \theta + \sin \theta - 1) r \, dr \quad (\text{variables séparables}) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} (\cos \theta + \sin \theta - 1) \, d\theta \right) \left(\int_0^1 r \, dr \right) = (-2\pi) \left(\frac{1}{2} \right) = -\pi. \end{aligned}$$

2.b) Le bord de la nappe Σ' est le cercle \mathcal{C} de centre O , de rayon 1 du plan Oxy . La formule de Stokes-Ampère s'écrit ici

$$\Phi' = \iint_{\Sigma'^+} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \int_{\mathcal{C}^+} \vec{V} \cdot d\vec{M}.$$

Une paramétrisation du cercle C^+ , qui est le cercle trigonométrique du plan Oxy , (mais qui doit quand même être considéré comme une courbe de l'espace), est

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t & t \in [0, 2\pi] \quad (\Sigma'^+ \text{ étant orientée vers le haut, } \mathcal{C}^+ \text{ est dans le sens direct}) \\ z = 0, \end{cases}$$

 de sorte que :

$$\begin{aligned} \Phi' &= \int_0^{2\pi} Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t) \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 0(\sin t) + (\cos t)0] \, dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -0 - \pi = -\pi. \end{aligned}$$

3. L'aire de Σ' est donnée par

$$\text{aire}(\Sigma') = \iint_{\Sigma'} d\sigma = \iint_{\mathcal{D}'} H \, dx \, dy.$$

Ici, on a

$$H = \|\vec{N}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.$$

de sorte que

$$\text{aire}(\Sigma') = \iint_{\mathcal{D}'} \sqrt{2} \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_{\mathcal{D}'} dx \, dy = \sqrt{2} \text{aire}(\mathcal{D}') = \sqrt{2} \pi.$$

puisque \mathcal{D}' est un disque de rayon 1.



Certifié PEFC

Ce produit est issu de
forêts gérées durablement
et de sources contrôlées
www.pefc-france.org

PEFC/031-2007
BV/CC/172601

Achevé d'imprimer en juillet 2011 par EMD S.A.S. (France)

N° éditeur : 2011/680 - Dépôt légal : août 2011

N° d'imprimeur : 25268

Bruno Aebischer

Analyse

Fonctions de plusieurs variables & géométrie analytique

Rédigé à l'attention des étudiants en deuxième année de licence, ce **cours complet** sur les fonctions de plusieurs variables et la géométrie analytique est illustré de **134 exercices d'application aux solutions très détaillées**. D'une lecture aisée, ce manuel d'analyse sera également utile aux étudiants en deuxième année de classes préparatoires, voire à ceux qui, préparant le CAPES ou l'Agrégation de mathématiques, désirent consolider leurs connaissances dans ce domaine.

Sommaire

- | | |
|--|--|
| 1. Notions de topologie dans \mathbb{R}^n | 5. Calcul d'intégrales doubles,
triples et de surface |
| 2. Fonctions vectorielles.
Courbes paramétrées | Indications pour la résolution
des exercices |
| 3. Fonctions de \mathbb{R}^p vers \mathbb{R}^n | Solutions des exercices |
| 4. Intégrale curviligne.
Longueur d'une courbe | |

Agrégé de mathématiques, Bruno Aebischer enseigne à l'UFR sciences et techniques de l'université de Franche-Comté. Il a été professeur en classes préparatoires puis a rejoint l'université en qualité de professeur agrégé de l'enseignement du second degré (PRAG). Il a participé durant plusieurs années au jury du CAPES de mathématiques.

ISBN 978-2-311-00275-1



9 782311 002751