第 9 章 単純型付きラムダ計算

> 注意: 引用表現の部分では引用ではなく、回答の要約や解釈を書いている。

9.1 関数型

定義 9.1.1.

- Bool 上の単純型の集合

9.2 型付け関係

- 明示的型付けを扱う
- 暗黙的型付けは第 22 章で

演習 9.2.1. $[\star]$

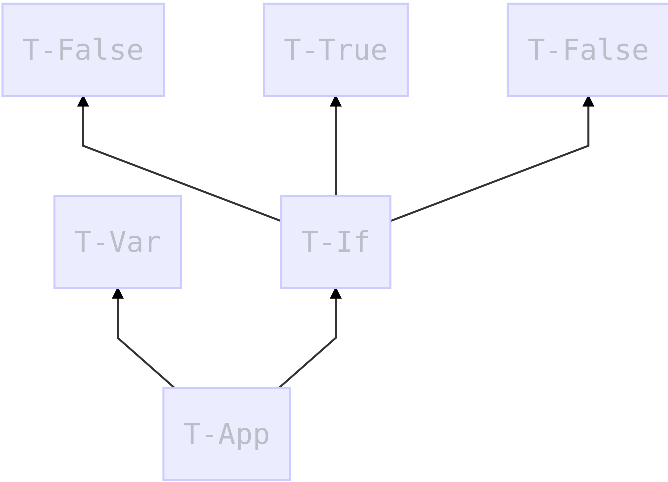
- 縮退ってなんだっけ
- ここでは、well typed な項が1つもないことを説明する

あらゆる項は評価を繰り返すことにより、行き詰まり状態になるか、値になる。純粋型付きラムダ計算では、項が値に評価されるとき、その値はラムダ抽象値である。ラムダ抽象値の束縛変数xはメタ変数の型Tを持つが、これは具体的な型ではない。well typed であるためには具体的な型を与えればよいが、どの型付け規則も具体手な型を与えない。よって、あらゆる項は well typed ではない。

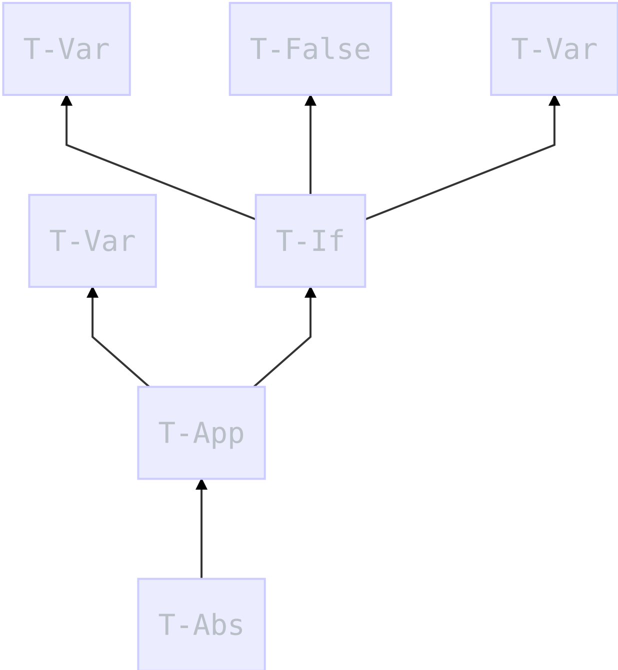
演習 9.2.2. $[\star \nrightarrow]$

全部書くと大変なので型付け規則だけ。

(1)


T-False
T-True
T-False
T-Var
T-If
T-App

(2)


T-Var
T-False
T-Var
T-Var
T-If
T-App
T-Abs

演習 9.2.3. $[\star]$

サンプル: $\Gamma = \mathsf{f} : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}, \mathsf{x} : \mathsf{Bool}, \mathsf{y} : \mathsf{Bool}$

集合を表す記述: $\Gamma = \forall \mathsf{T_1 T_2}. \mathsf{f} : \mathsf{T_1} \to \mathsf{T_2} \to \mathsf{Bool}, \mathsf{x} : \mathsf{T_1}, \mathsf{y} : \mathsf{T_2}$

9.3 型付けの性質

補題 9.3.1 [型付け関係の逆転]

- 逆転補題とも

演習 9.3.2. $[推奨, \star\star\star]$

存在しない。

[証明] $\Gamma \vdash \mathsf{x\,x} : \mathsf{T}$ なる文脈 Γ と型 T が存在すると仮定する。逆転補題(3)より、$\Gamma \vdash \mathsf{x\,x} : \mathsf{T}$ ならば、$\Gamma \vdash \mathsf{x} : \mathsf{T_{11}} \to \mathsf{T}$ と $\Gamma \vdash \mathsf{x} : \mathsf{T_{11}}$ を満たす $\mathsf{T_{11}}$ が存在する。このとき、文脈 Γ の下で x が $\mathsf{T_{11}} \to \mathsf{T}$ かつ $\mathsf{T_{11}}$ という型を持つことになり、矛盾する。ゆえにそのような文脈 Γ と型 T は存在しない。

> 矛盾を指摘するためには、型が有限のサイズを持つことを示す必要がある。型が無限のサイズを持つことが許されるとき、$\mathsf{T_{11}} \to \mathsf{T} = \mathsf{T_{11}}$ という等式の解を構築できうる（20章）。

定理 9.3.3. $[推奨, \star\star\star]$

方針: 項がある形を持つとき、項は型を持つ $\to$ 型を持つならそれは関数の型またはBool型のどちらか一方を持つ、という流れにする。

[証明] 項に関する構造帰納法で示す。ある型付け文脈 Γ と項 t について、項 t が

- 変数 x と表されるとき、仮定より、Γ の定義域に含まれる自由変数であるため、ある型 T が存在して、$\Gamma \vdash \mathsf{x} : \mathsf{T}$ となる。このとき型付け規則は T-App しか適用できないため、型 T は関数の型にならず、とりうる型はBoolのみである。ゆえに唯一の型を持つ。
- ラムダ抽象 $\lambda \mathsf{x} : \mathsf{T}. \mathsf{t_1}$ の形で表され、
  - 部分項 $\mathsf{t_1}$ が唯一の型 $\mathsf{T_1}$ を持つとする。このとき型付け規則は T-Abs のみが適用でき、$\Gamma \vdash \lambda \mathsf{x} : \mathsf{T}. \mathsf{t_1} : \mathsf{T} \to \mathsf{T_1}$ となり、これは関数の型である。
  - 部分項 $\mathsf{t_1}$ が型を持たない場合は、どの型付け規則も適用できないため項 t も型を持たない。
- 関数適用 $\mathsf{t_1}\ \mathsf{t_2}$ の形で表され、
  - 部分項 $\mathsf{t_1}$ が $\mathsf{T_{11}} \to \mathsf{T_{12}}$ の形をした唯一の型を持ち、かつ、部分項 $\mathsf{t_2}$ が唯一の型 $\mathsf{T_{12}}$ を持つとする。このとき型付け規則は T-App のみが適用でき、$\Gamma \vdash \mathsf{t_1}\ \mathsf{t_2} : \mathsf{T_{12}}$ となり、帰納法の仮定より部分項 $\mathsf{t_2}$ の唯一の型 $\mathsf{T_{12}}$ は関数の型またはBool型のどちらか一方を持つので、項 t も所望の性質が成り立つ。
  - それ以外の場合は、どの型付け規則も適用できないため項 t は型を持たない。

> - 項が2つの型を持つことを仮定し、型の導出に関する帰納法により、2つの型が等しくなることを示す。
>   - 唯一性の証明をするときの常套手段っぽい
>   - $\forall x. P(x, s)$かつ$P(x, t)$ を仮定 $\to$ $s = t$ を示す
> - ここでは、片方の型を型付け規則による導出、もう片方を逆転補題に使い、部分項が仮定より等しくなることを使って2つの型が等しいことを示す
> - 各型付け規則で場合分け

> - T-Trueとかを忘れないように（忘れてた）

補題 9.3.4. [標準形]

- 型が決まれば、項を限定できる
  - 進行定理の証明に使える

定理 9.3.5. [進行]

- 気づき: 「t → t' なる t' が存在する」という言明は「1ステップ評価が可能」とも言える

以下、保存定理に向けての補題が続く

補題 9.3.6. [並べ替え]

型付け文脈は並び替えても型付け判断は変わらん

補題 9.3.7. [弱化]

型付け文脈の定義域にない変数は、型付け文脈に追加しても型付け判断は変わらん

補題 9.3.8. [代入の下での型の保存]

- 代入補題とも
  - 評価が正しい型付けを保存することが証明できる
- p.54 の代入の定義を使うことになる

定理 9.3.9. [型保存] $[推奨, \star\star\star]$

[証明] $\Gamma \vdash \mathsf{t} : \mathsf{T}$ の導出に関する帰納法による。帰納法の各ステップにおいて、すべての部分導出に関して所望の性質が成り立つと仮定する。

そして、導出の最後の規則についての場合分けにより証明を進める。

- T-Var の場合 $\mathsf{t} = \mathsf{x} \quad \mathsf{T} = \mathsf{T}_1 \quad \mathsf{x} : \mathsf{T}_1 \in \Gamma$

  導出の最後の規則が T-Var ならば、その規則の形から、t は x という変数の形で、$\mathsf{x} : \mathsf{T}_1 \in \Gamma$ を結論とする部分導出があることがわかる。しかし t は変数なので、どんな t' に対しても $\mathsf{t} \to \mathsf{t}'$ とならず、定理の要求は自明に満たされる。

- T-Abs の場合 $\mathsf{t} = \lambda\mathsf{x} : \mathsf{T}_1 . \mathsf{t}_2 \quad \mathsf{T} = \mathsf{T}_1 \to \mathsf{T}_2 \quad \Gamma, \mathsf{x} : \mathsf{T}_1 \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_2$

  導出の最後の規則が T-Abs ならば、その規則の形から、$\mathsf{t}, \ \mathsf{T}$ は上記を満たし、$\Gamma, \mathsf{x} : \mathsf{T}_1 \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_2$ なる部分導出がある。しかし t はラムダ抽象値なので、どんな t' に対しても $\mathsf{t} \to \mathsf{t}'$ とならず、定理の要求は自明に満たされる。

- T-App の場合 $\mathsf{t} = \mathsf{t}_1 \ \mathsf{t}_2 \quad \mathsf{T} = \mathsf{T}_{12} \quad \Gamma \vdash \mathsf{t}_1 : \mathsf{T}_{11} \to \mathsf{T}_{12} \quad \Gamma \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_{11}$

  導出の最後の規則が T-App ならば、その規則の形から、$\mathsf{t}, \ \mathsf{T}$ は上記を満たし、$\Gamma \vdash \mathsf{t}_1 : \mathsf{T}_{11} \to \mathsf{T}_{12}$ と $\Gamma \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_{11}$ をそれぞれ結論とする部分導出がある。ここで、左側に関数適用が現れる評価規則を見ると、$\mathsf{t} \to \mathsf{t}'$ を導出できる規則は3つ、E-App1, E-App2, E-AppAbs があるとわかる。それぞれの場合について別々に考える。

  - E-App1 の場合 $\mathsf{t}_1 \to \mathsf{t}_1' \quad \mathsf{t}' = \mathsf{t}_1' \ \mathsf{t}_2$

    場合分け T-App の仮定から、結論が $\Gamma \vdash \mathsf{t}_1 : \mathsf{T}_{11} \to \mathsf{T}_{12}$ である、元の型付け導出の部分導出が得られる。帰納法の仮定をこの部分導出に適用して $\Gamma \vdash \mathsf{t}_1' : \mathsf{T}_{11} \to \mathsf{T}_{12}$ を得る。この事実と $\Gamma \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_{11}$ を合わせると規則 T-App が適用でき、$\Gamma \vdash \mathsf{t} = \mathsf{t}_1' \ \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_{12}$ となる。つまり $\mathsf{t}' : \mathsf{T}$ が成り立つ。

  - E-App2 の場合: E-App1 の場合と同様
  - E-AppAbs の場合 $\mathsf{t}_1 = (\lambda\mathsf{x} : \mathsf{T}_{11} . \mathsf{t}_{12}) \quad \mathsf{t}_2 = \mathsf{v}_2 \quad \mathsf{t}' = [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{v}_2]\mathsf{t}_{12}$

$\mathsf{t} \to \mathsf{t}'$ が E-AppAbsを使って導出されたならば、この規則の形から、t_1, t_2, t' は上記を満たすことがわかる。このとき、場合分け T-App の仮定から、結論が $\Gamma \vdash \mathsf{t}_1 : \mathsf{T}_{11} \to \mathsf{T}_{12}$ 部分導出があり、型付け関係の逆転（2）を適用して、$\Gamma, \mathsf{x} : \mathsf{T}_{11} \vdash \mathsf{t}_{12} : \mathsf{T}_{12}$ となる。さらに、場合分け T-App の仮定から、結論が $\Gamma \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{T}_{11}$ となる部分導出があり、先程の $\Gamma, \mathsf{x} : \mathsf{T}_{11} \vdash \mathsf{t}_{12} : \mathsf{T}_{12}$ と合わせて代入補題を適用でき、$\Gamma \vdash [\mathsf{x} \mapsto \mathsf{v}_2]\mathsf{t}_{12} : \mathsf{T}_{12}$ となる。つまり $\mathsf{t}' : \mathsf{T}$ が成り立つ。

- 他の規則の場合は、定理 8.3.3. の型付き算術式における保存定理と同様

演習 9.3.10. [推奨, ★★]

成り立つ。

[方針] わからず

> A. 成り立たない。$(\lambda \mathsf{x} : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}.\ \lambda \mathsf{y} : \mathsf{Bool}.\ \mathsf{y})\ (\lambda \mathsf{z} : \mathsf{Bool}.\ \mathsf{true}\ \mathsf{true})$ という項は正しく型付けできないが、簡約すると $(\lambda \mathsf{y} : \mathsf{Bool}.\ \mathsf{y})$ となり、これは正しく型付けできる。

演習 9.4.1. [★]

- Bool
  - 導入規則: T-True, T-False
  - 除去規則: T-If
- Nat
  - 導入規則: T-Zero
  - 除去規則: T-IsZero

> Succ, Predも考慮の対象になる（型付け規則ではNatだったものがNatになっているので、変化なし、とみなしていたが、そうではないらしい）。
>
> - Nat
>   - 導入規則: T-Zero, T-Succ
>   - 除去規則: T-IsZero, T-Pred

定義 9.5.1. [型消去] 単純型付き項を型無し項へ移す消去関数 erase

定理 9.5.2. 単純型付き項と対応数する型無し項は評価によって同じ項が得られる

定義 9.5.3. [型付け可能] 型無しラムダ計算の項がある単純型付き項、型、文脈からなる型付け関係への逆写像 $erase^{-1}$ を持つ