第 12 章 正規化

> テキストの解答要約はこんな感じで引用表現にする（引用じゃないけど）

演習 12.1.1. [⋆]

E-AppAbs において、項のサイズが減少するとは言えないため。

例えば、(λc : A→A. c (c (c (c (λz : A. z))))) (λx : A. x) (サイズ 14) を簡約すると、(λx : A. x) ((λx : A. x) ((λx : A. x) ((λx : A. x) (λz : A. z)))) (サイズ15) となってしまう。

> 適用 t1 t2 が正規化可能であることを示すとき、逆転補題と標準形補題から (λx:T11.t12) v2 の形に簡約できることがわかるが、E-AppAbsを適用すると、代入により元の項よりサイズが大きい項ができる恐れがある（で、その例が先述もの。）

演習 12.1.7. [推奨, ⋆ ⋆ ⋆]

メモ

- 正規化可能：評価が有限ステップで停止
- $R_{\mathsf{T}}(\mathsf{t})$: 型 T を持つ、閉じた項からなる集合
- 定義 12.1.2. 論理述語 R が真なら単純型でも関数型でも停止し、適用されても真理値は変わらない
- 補題 12.1.3. $R_{\mathsf{T}}(\mathsf{t})$ ならば、t は停止
- 補題 12.1.4. R の真理値は評価されても変わらない
- 補題 12.1.5. R の真理値は開いた項の閉じたインスタンスの代入でも変わらない
- 定理 12.1.6. [正規化] ⊢ t : T ならば t は正規化可能
    - 12.1.5. 12.1.3. より
- 演習 12.1.7. ブール値と直積で拡張しても ⊢ t : T ならば t は正規化可能
    - ブール値：Tにブール値型Bool、型付け規則にT-True/False/Ifがある。
    - 直積：Tに二つ組 {t, t} 射影 t.1 と t.2、型付け規則にT-Pair/Proj1/Proj2がある。

はい

補題12.1.5. を拡張できれば、定理 12.1.6. の拡張も成り立つ（？）。よって補題12.1.5. を拡張する。型付け導出に関する帰納法による。連続代入は長いので $\sigma_{1..n} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathsf{x}_1 \mapsto \mathsf{v}_1] \cdots [\mathsf{x}_n \mapsto \mathsf{v}_n]$ と略記します…。

- T-True/False の場合、直ちに明らか。
- T-If の場合、（証明概略、部分項を値まで評価するとRが）
    - $\mathsf{t} = \mathsf{if}\ \mathsf{t}_1\ \mathsf{then}\ \mathsf{t}_2\ \mathsf{else}\ \mathsf{t}_3$ $\mathsf{x}_1 : \mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \mathsf{T}_n \vdash \mathsf{t}_1 : \mathsf{Bool}$ $\mathsf{x}_1 : \mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \mathsf{T}_n \vdash \mathsf{t}_2 : \mathsf{S}$ $\mathsf{x}_1 : \mathsf{T}_1, \ldots, \mathsf{x}_n : \mathsf{T}_n \vdash \mathsf{t}_3 : \mathsf{S}$ $\mathsf{T} = \mathsf{S}$
    - 帰納法の仮定より、$R_{\mathsf{Bool}}(\sigma_{1..n}\mathsf{t}_1)$ かつ $R_{\mathsf{S}}(\sigma_{1..n}\mathsf{t}_2)$ かつ $R_{\mathsf{S}}(\sigma_{1..n}\mathsf{t}_3)$ である。
    - $R_{\mathsf{Bool}}(\sigma_{1..n}\mathsf{t}_1)$ と補題12.1.3. から、$\sigma_{1..n}\mathsf{t}_1 \to^* \mathsf{v}_1$ となり、標準形補題より v_1 は true または false

- $v1 = \mathsf{true}$ のとき、評価導出の最後は E-IfTrue なので if $\sigma_{1..n}t_1$ then $\sigma_{1..n}t_2$ else $\sigma_{1..n}t_3 \rightarrow^* \sigma_{1..n}t_2$
    - $R_S(\sigma_{1..n}t_2)$ と補題 12.1.4. より、$R_S(\text{if } \sigma_{1..n}t_1 \text{ then } \sigma_{1..n}t_2 \text{ else } \sigma_{1..n}t_3)$ となる。
- $v1 = \mathsf{false}$ のとき、評価導出の最後は E-IfFalse なので if $\sigma_{1..n}t_1$ then $\sigma_{1..n}t_2$ else $\sigma_{1..n}t_3 \rightarrow^* \sigma_{1..n}t_3$
    - $R_S(\sigma_{1..n}t_3)$ と補題 12.1.4. より、$R_S(\text{if } \sigma_{1..n}t_1 \text{ then } \sigma_{1..n}t_2 \text{ else } \sigma_{1..n}t_3)$ となる。
- すなわち、$R_S(\sigma_{1..n}(\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3))$ となる。

* T-Pair の場合
    - $t = \{t_1, t_2\}$ $x_1 : T_1, ..., x_n : T_n \vdash t_1 : S_1$ $x_1 : T_1, ..., x_n : T_n \vdash t_2 : S_2$ $T = S_1 \times S_2$
    - 帰納法の仮定より、$R_{S_1}(\sigma_{1..n}t_1)$ かつ $R_{S_2}(\sigma_{1..n}t_2)$ である。
    - $R_{S_1 \times S_2}$ の定義から、$R_{S_1 \times S_2}(\{\sigma_{1..n}t_1, \sigma_{1..n}t_2\})$ となる。
    - すなわち、$R_{S_1 \times S_2}(\sigma_{1..n}(\{t_1, t_2\}))$ となる。
* T-Proj1 の場合（T-Proj2も同様）
    - $t = t_1.1$ $x_1 : T_1, ..., x_n : T_n \vdash t_1 : T_{11} \times T_{12}$ $T = T_{11}$
    - 帰納法の仮定より、$R_{T_{11} \times T_{12}}(\sigma_{1..n}t_1)$ 、
    - $R_{T_{11} \times T_{12}}$ の定義から、$R_{T_{11}}((\sigma_{1..n}t_1).1)$ 、
    - すなわち $R_{T_{11}}(\sigma_{1..n}(t_1.1))$

> - 定義 12.1.2 を拡張して、Bool と $T_1 \times T_2$ に対応させることが必要。
> - 補題 12.1.4 を拡張して、射影による評価について R が保存されることを示すことが必要。
> - 補題 12.1.5 は T-Pair について、射影による評価規則で場合分けが必要。
>   - 解答では場合分けを変数化してまとめている。かしこい。あと連続代入を σ にしていて自分より乱暴。