# 型システム入門メモ

maton

# 第 21 章　再帰型のメタ理論

## 21.1　帰納法と余帰納法

**演習 21.1.7.** [$\star$]　生成関数 $E_2$ は以下の推論規則から定義されている。

$$\frac{}{a} \qquad \frac{c}{b} \qquad \frac{a \quad b}{c}$$

関係 $E_2$ に含まれる組の集合は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
E_2(\emptyset) &= \{a\} & E_2(\{a,b\}) &= \{a,c\} \\
E_2(\{a\}) &= \{a\} & E_2(\{a,c\}) &= \{a,b\} \\
E_2(\{b\}) &= \{a\} & E_2(\{b,c\}) &= \{a,b\} \\
E_2(\{c\}) &= \{a,b\} & E_2(\{a,b,c\}) &= \{a,b,c\}
\end{aligned}$$

このとき、$E_2$ について閉じている集合は、$\{a\}, \{a,b,c\}$ であり、$E_2$ について整合的な集合は、$\emptyset, \{a\}, \{a,b,c\}$ である。以上から、$\mu E_2 = \{a\},\ \nu E_2 = \{a,b,c\}$ である。

**系 21.1.8.** (定理 21.1.4 の系).

(1) 帰納法原理 : $X$ が $F$ について閉じているならば、$\mu F \subseteq X$ である。

(2) 余帰納法原理 : $X$ が $F$ について整合的ならば、$X \subseteq \nu F$ である。

**演習 21.1.9.** [推奨，$\star\star\star$]　公理 2.4.1. [自然数上の通常の帰納法の原理] は、以下のように表現される。

> $P$ を自然数上の述語とする。このとき、
>
> 各自然数 $n$ に対して、
> 　　任意の $i < n$ に対して $P(i)$ が成り立つとき、
> 　　$P(n)$ が証明できる
> ならば、すべての $n$ に対して $P(n)$ が成り立つ。

ここで、

$N$ 以下の任意の自然数 $n$ に対して、
任意の $i < n$ に対して $P(i)$ が成り立つとき、
$P(n)$ が証明できる

という言明が真になる $U$ の部分集合を $X_N$ とし、$F$ をある言明 $X_N$ から言明 $X_M$ $(M \leq N)$ を生成する関数とする。このとき生成される言明 $X_M$ は $M$ 以下の任意の自然数に対する言明であり、言明 $X_N$ は言明 $X_M$ を含んでいる。すなわち、$F(X) \subseteq X$ であり、$X$ が $F$ について閉じている。このとき、帰納法原理により $\mu F \subseteq X$ である。ここで、$\mu F$ とは、$F$ の最小不動点であり、$\mu F = \bigcap_{X \in C} X$ ただし、$C = \{X \mid F(X) \subseteq X\}$ である。すなわち、すべての $n$ に対して成り立つ（みたいなことがいいたい）

解答を見ると、$F(P) \subseteq P$ であることが容易に確認できるようだが、解釈が難しかったので丁寧に書き下してみる。ここで、ある自然数 $k$ が述語 $P$ を満たす、すなわち $P(k)$ であるとする。このとき、述語 $P$ の定義から明らかに $P(k+1)$ である。また、$F(X)$ の定義から、$k+1 \in F(P)$ である。ただし、$k \in F(P)$ かどうかは明らかではない。このことから、$F(P) \subseteq P$ となる。うーん、なんか微妙な感じ……。これ以降の議論は特に問題ないと思う。