

# 第 8 章 型付き算術式

## 8.1 型

## 8.2 型付け関係

定義 8.2.1.

- 型付け関係 typing relation
- 型付け可能 typable
- 正しく型付けされている well typed

補題 8.2.2. [型付け関係の逆転]

- 別名: 逆転補題 および 生成補題
- 項の形からその直接の部分項の型が決まる

### 演習 8.2.3. $[\star \rightarrow]$

言い換え: 任意の項  $t$  について、 $t$  が well typed ならば  $t$  の任意の部分項は well typed である。

[証明] 項  $t$  上の帰納法による。

$t$  が true, false, 0 のとき直ちに成り立つ。

$t$  が if  $t_1$  then  $t_2$  else  $t_3$  の形の時、 $t$  が well typed ならば補題 8.2.2. (3) より  $t_1, t_2, t_3$  も well typed であり、帰納法の仮定より  $t$  の任意の部分項は well typed である。

以下、succ  $t_1$ , pred  $t_1$ , iszero  $t_1$  の場合も同様。

定理 8.2.4. [型の一意性]

## 8.3 安全性 = 進行 + 保存

補題 8.3.1. [標準形]

- 型が決まれば値のケースが絞られる

定理 8.3.2. [進行]

- $t$  が well typed ならば  $t$  は値であるか評価が進行する
- [証明概略]  $t : T$  の導出に関する帰納法。型付け規則 (T-Xxx) によって場合分け。

定理 8.3.3. [保存]

- $t$  が well typed で評価できるならば、評価後も well typed である
- [証明概略]  $t : T$  の導出に関する帰納法。型付け規則 (T-Xxx) によって場合分け。

### 演習 8.3.4. $[\star\star \rightarrow]$

- [参照] 評価導出: B に関しては p.25, NB に関しては p.30

[証明]  $t$  の評価導出による帰納法による。帰納法の各ステップにおいて、すべての部分導出に関して所望の性質が成り立つと仮定する。そして、導出の最後の規則についての場合分けにより証明を進める。

- E-True の場合  $t = \text{true}$ 
  - 導出の最後の規則が E-True ならば、 $t$  が定数  $\text{true}$  である。これに該当する型付け規則は T-True のみであり、 $T$  は  $\text{Bool}$  となる。しかし、 $t$  は値なのでどんな  $t'$  に対しても  $t \rightarrow t'$  とならず、定理の要求は自明に満たされる。
  - E-False も同様。
- E-IfTrue の場合  $t = \text{if true then } t_2 \text{ else } t_3$ 
  - 導出の最後の規則が E-IfTrue ならば、その規則の形から、 $t$  はある  $t_2, t_3$  に対して  $\text{if true then } t_2 \text{ else } t_3$  という形でなければならない。また、結果の項  $t'$  は  $t_2$  となることがわかる。このとき、左側に  $\text{if}$  が現れる型付け規則は T-If のみであり、生成補題より  $t : T$  ならば  $t_2 : T, t_3 : T$  となるため、所要の結果となる。
  - E-IfFalse も同様。
- E-If の場合  $t_1 \rightarrow t_1', t = \text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$ 
  - 導出の最後の規則が E-If ならば、その規則の形から、 $t$  はある  $t_1, t_2, t_3$  に対して  $\text{if } t_1 \text{ then } t_2 \text{ else } t_3$  という形でなければならない。このとき、左側に  $\text{if}$  が現れる型付け規則は T-If のみであり、生成補題より  $t : T$  ならば  $t_1 : \text{Bool}, t_2 : T, t_3 : T$  となる。このとき E-If の仮定より  $t_1 \rightarrow t_1'$  であるため、 $t_1 : \text{Bool}$  かつ  $t_1 \rightarrow t_1'$  より  $t_1' : \text{Bool}$  を得る。この事実と  $t_2 : T, t_3 : T$  を合わせると T-If が適用でき、 $\text{if } t_1' \text{ then } t_2 \text{ else } t_3 : T$  となり、つまり  $t' : T$  が成り立つ。
- E-PredZero の場合  $t = \text{pred } 0$ 
  - (略記) 左側が  $\text{pred}$  となる型付け規則は T-Pred で、 $t : \text{Nat}$  ならば  $t_1 : \text{Nat}$  となる。仮定より  $t_1 = 0$  であり、T-Zero より  $t_1 : \text{Nat}$  となるため、所要の結果となる。
  - E-IszeroZero も似たような論調になると思われる。
- E-PredSucc の場合  $t = \text{pred (succ } nv1)$ 
  - (略記) 左側が  $\text{pred}$  となる型付け規則は T-Pred で  $t : \text{Nat}$  ならば  $t_1 : \text{Nat}$  となる。仮定より  $t_1 = \text{succ } nv1$  であり、T-Succ の帰納法の仮定より  $nv1 : \text{Nat} (= t')$  となるため、所要の結果となる。
  - E-IszeroSucc も似たような論調になると思われる。
- E-Succ の場合  $t_2 \rightarrow t_2', t = \text{succ } t_2$  (記号が T-Succ とかぶるので  $t_2$  にした)
  - (略記) 左側が  $\text{succ}$  となる型付け規則は T-Succ で  $t : \text{Nat}$  ならば  $t_1 : \text{Nat}$  となる。仮定より  $t_1 = t_2$  かつ  $t_2 \rightarrow t_2'$  なので  $t_2' : \text{Nat}$  である。このとき T-Succ が適用でき、 $\text{succ } t_2' : \text{Nat} (= t')$  となるため、所望の結果となる。
  - E-Pred 同様。

### 演習 8.3.5. [★]

このことを達成する = 進行と保存を満たす

達成できない。反例は  $\text{pred } 0$  である。

$\text{pred } 0$  に対して型付け導出を行うと、T-Pred  $\rightarrow$  T-Zero の順で導出でき、よって  $\text{pred } 0$  は well typed である。ところが、 $\text{pred } 0$  は値でなく、かつ評価を進行させる評価規則が存在しない (E-PredZero が存在しないので) ため、進行定理を満たさない。

### 演習 8.3.6. [推奨, ★★]

$t \rightarrow t'$  かつ  $t' : T$  ならば  $t : T$  が成り立つか?

成り立たない。反例は `if true then 0 else true` である。

`if true then 0 else true` に対して `E-IfTrue` による評価が可能であり、結果は `0` となる。`0` に対しては `T-Zero` が、`true` に対しては `T-True` によって型付けでき、 $0 : \text{Nat} (= t')$ ,  $\text{true} : \text{Bool}$  となる。このとき、`if true then 0 else true (= t)` に適用できる型付け規則は存在せず、ゆえに成り立たない。

### 演習 8.3.7. [推奨, ★★]

大ステップ評価に対して進行と保存が成立することである。すなわち、以下が成立すればよい。

- [進行]  $t$  が well typed と仮定すると、 $t$  は値であるか、ある  $t'$  が存在して  $t \rightarrow t'$
- [保存]  $t : T$  かつ  $t \rightarrow t'$  ならば  $t' : T$

A. 保存の法則のみ。(進行の法則はより強い主張であり、再帰を含む言語などでは成立しないとのこと。)

### 演習 8.3.8. [推奨, ★★]

`wrong`を除いた評価に対して進行と保存が成立することである。すなわち、以下が成立すればよい。

- [進行]  $t$  が well typed と仮定すると、 $t$  は値であるか、ある `wrong` ではない  $t'$  が存在して  $t \rightarrow t'$
- [保存] ある `wrong` ではない  $t'$  が存在して  $t : T$  かつ  $t \rightarrow t'$  ならば  $t' : T$

A. 進行の性質は自明。ただし、値でない項は他の項に評価されるか明示的に `wrong` に評価されることを証明する必要がある。この性質は保存の証明の一部となる。(なので保存の法則は必要)