Rozwiązywanie układów równań liniowych

Mateusz Nowak

25.05.2023

1 Wprowadzenie

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) i bezpośrednich (Gaussa) rozwiązywania układów równań liniowych. Do implementacji wykorzystałem język Python, a do rysowania wykresów bibliotekę Matplotlib.

2 Zadanie A

Celem zadania było utworzenie układu równań:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Dla numeru indeksu 189420 otrzymujemy a1 = 9 i N = 920.
Macierz **A** dla powyższych danych wygląda w taki sposób:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 9 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Natomiast wektor **b** jest obliczany ze wzoru $\mathbf{b_i} = sin(i * (f + 1))$, co dla $f = 9$ daje następujący wektor:

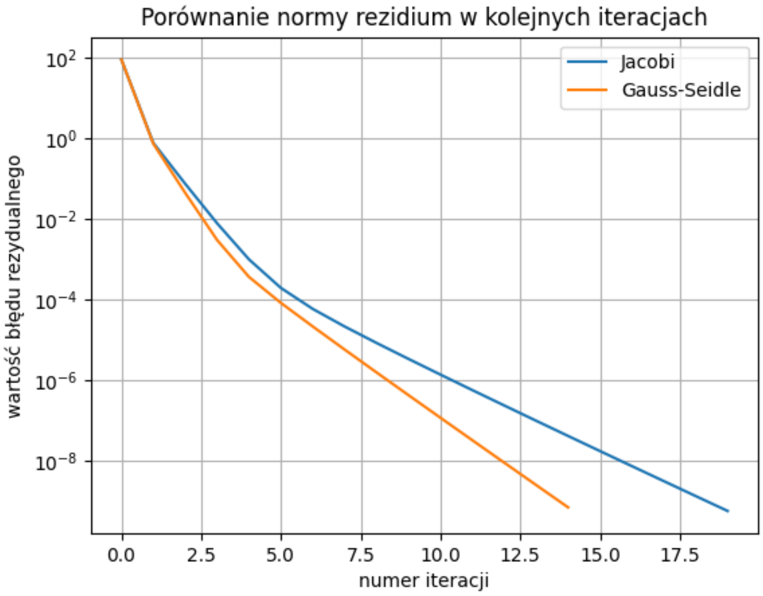
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.90930 & -0.75680 & -0.27942 & \dots & 0.79582 & 0.21943 \end{bmatrix}^T$$

3 Zadanie B

W ramach tego zadania rozwiązano powyższy układ równań za pomocą metod iteracyjnych Jacobiego i Gaussa-Seidla.

Metoda	Czas (s)	Liczba iteracji
Jacobiego	0.2039	19
Gaussa-Seidla	0.1501	14

Iteracje przeprowadzano, dopóki norma z wektora residuum była większa od 10^{-9}.



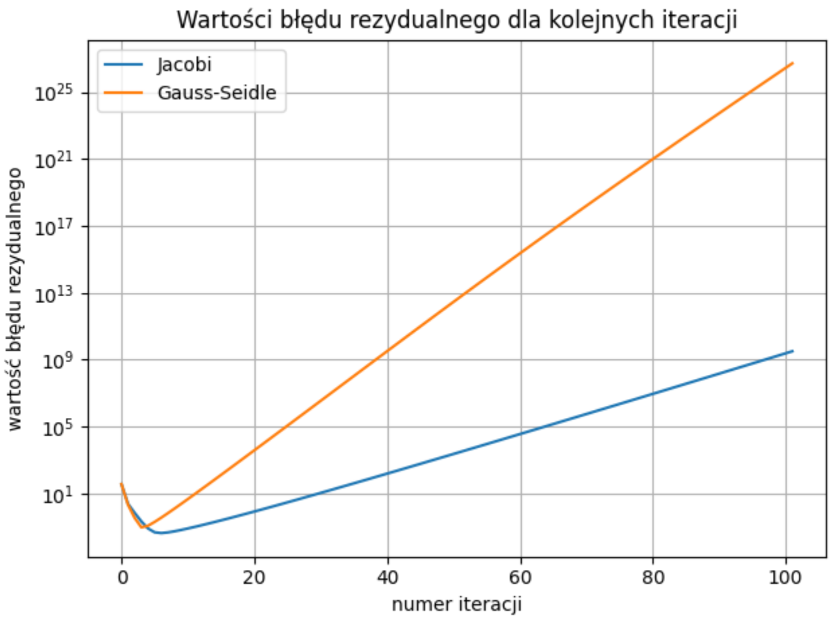
Rysunek 1: wykres zależności normy rezidium w kolejnych iteracjach dla metod Jacobiego, Gaussa-Seidla

4 Zadanie C

W ramach tego zadania utworzono macierz **C** podobnie jak w zadaniu 1, przy czym a1 = 3.
Macierz **C** wygląda w ten sposób:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Próby obliczenia układu równań $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ za pomocą powyższych metod iteracyjncych kończyły się pythonowym błędem "*OverflowError - Result too large*" (podczas liczenia normy wektora residuum; odpowiednio po 1266 iteracjach metodą Jacobiego i 605 metodą Gaussa-Seidla), z czego wnioskuję, że te metody iteracyjne dla takich wartości nie zbiegają się.



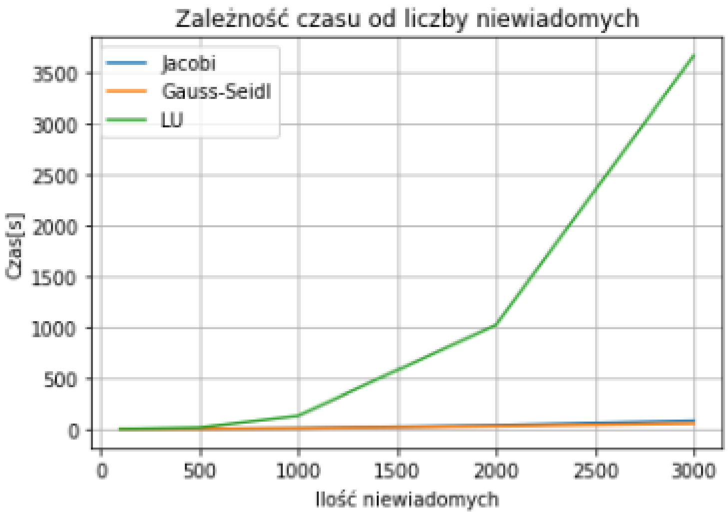
Rysunek 2: wykres wartości błędu rezidium w kolejnych iteracjach dla metod Jacobiego, Gaussa-Seidla

5 Zadanie D

W ramach tego zadania rozwiązano powyższy układ równań za pomocą metody bezpośredniej: faktoryzacji LU. W tym przypadku norma z residuum wyniosła około $2.96965 * 10^{-15}$. Jest to wynik bliski 0, co oznacza wysoką dokładność wykonanych obliczeń.

6 Zadanie E

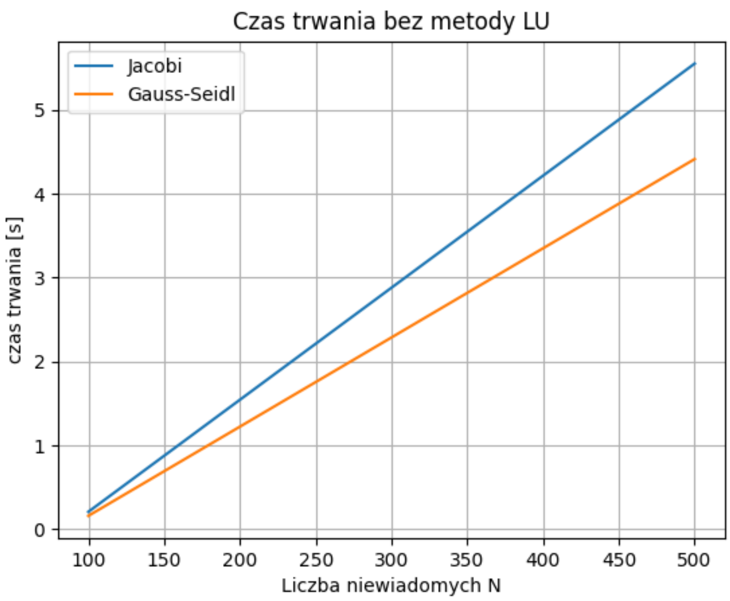
W ramach tego zadania utworzono wykres zależności czasu od liczby niewiadomych dla powyższych metod. Zależność została przedstawiona na poniższym wykresie:



Rysunek 3: wykres zależności czasu od liczby niewiadomych dla metod Jacobiego, Gaussa-Seidla i LU

Dokładne czasy przedstawia poniższa tabela:

Ilość iteracji	Jacobi	Gauss-Seidl	LU
100	0.09	0.06	0.11
500	3.88	1.81	17.10
1000	11.69	9.63	138.44
2000	48.42	40.09	1074.86
3000	106.96	69.41	3685.58



Rysunek 4: wykres zależności czasu od liczby niewiadomych tylko dla metod Jacobiego i Gaussa-Seidla

7 Wnioski

Metoda bezpośrednia (Gaussa) jest zdecydowanie wolniejsza od metod bezpośrednich. Jednak, bardziej dokładna i mniej podatna na błędy niekorzystnej macierzy. Metoda Gaussa-Seidla wymaga mniejszej liczby iteracji i znajduje rozwiązanie szybciej niż metoda Jacobiego dla każdego rozmiaru danych. Wnioskując z obserwacji można stwierdzić, że metody iteracyjne nadają się lepiej w układach o dużej ilości niewiadomych. W celu ulepszenia implementacji i poradzenia sobie z problemem niekorzystnych macierzy należało by wykryć moment, w którym residium zaczyna rosnąć i przełączyć się na metodę bezpośrednią.