

Sprawozdanie z ćwiczeń

laboratoryjnych

z przedmiotu: *Sterowanie Analogowe*

Numer ćwiczenia:	1
Tytuł ćwiczenia:	Identyfikacja obiektów dynamicznych
Imię, nazwisko i numer albumu:	Mateusz Kuczerowski 197900 Kewin Kisiel 197866
Data pomiarów:	9.10.2025
Data oddania:	15.10.2025
Ocena:	

Prowadzący: dr inż. Piotr Fiertek

Grupa laboratoryjna: 1A

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się z czasowymi i częstotliwościowymi metodami identyfikacji obiektów dynamicznych oraz praktyczne wyznaczenie modeli matematycznych opisujących ich zachowanie. W ramach zajęć analizowano odpowiedzi różnych typów układów dynamicznych na wymuszenia skokowe i sygnały harmoniczne, co pozwoliło na określenie ich podstawowych parametrów, takich jak wzmacnienie, stała czasowa, opóźnienie transportowe, współczynnik tłumienia czy pulsacja naturalna.

2 Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia przeprowadzono identyfikację kilku obiektów dynamicznych o znanych transmitancjach operatorowych: układu inercyjnego pierwszego rzędu, układu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym, układu całkującego, układu drugiego rzędu oraz układu nieminimalnofazowego. Dla każdego z nich wykonano pomiary odpowiedzi czasowych oraz charakterystyk częstotliwościowych (amplitudowych i fazowych). W trakcie zajęć wykorzystano stanowisko pomiarowe zbudowane z zestawu analogowych modeli procesów przemysłowych (ZAMPP), generatora funkcji, częstotliomierza oraz oscylскопu dwukanałowego. Zarejestrowane dane zostały następnie przetworzone i poddane analizie w środowisku MATLAB, gdzie z użyciem odpowiednich skryptów dokonano numerycznej identyfikacji parametrów poszczególnych modeli.

3 Pomiary i analiza wyników

Poniżej przedstawiono zdjęcia z przeprowadzonych pomiarów w trakcie laboratorium.

Ciągły sygnał odc. skoków 3 rzędu napisz			
A. 1	U _{in} [V]	U _{out} [V]	k _p = 4 at.
1 10Hz	0.49V	1.53V	4.8
2 100Hz	2.02V	5.04V	4.94
3 500Hz	1.99V	1.67V	1.98
4 1kHz	2.01V	1.6V	1.99
5 159	2	1.67	2.9

A. 2. U _{in} im 1 razy z gorszy trafić k _p =4 at			
f [Hz]	U _{in} [V _{pp}]	U _{out} [V _{pp}]	k _p = 4 at
1 10Hz	2.03V	1.53V	4.82
2 600	2.02V	5.04V	4.96
3 20	2	1.69V	1.93
4 62.5Hz	2.03	1.63	2.05
5 159	2.02	9.64m	39.1

A. 3. U _{in} ciągły			
obraz	skoków	jeżeli	które
U _{in} = 2V _{pp}	U _{out} = 2V _{pp}	U _{out} = 2V _{pp}	0.54
1 10	2V	2.05	6
100	2.01	1.99	17.5
1000	1.98	1.23	87

(a) Zdjęcie pomiarów 1.

1. 3. U _{in} skok			
09.10.2025	JL	G. startende	9
A. 1	U _{in} [V _{pp}]	1	1
2	V _{pp}	2	2
3	9	9	9
4	1	1	1
5	2	2	2

1. 5. U _{in} 2 mza			
f [Hz]	U _{in} [V _{pp}]	U _{out} [V _{pp}]	k _p = 1
1 10Hz	2	2	4.0-3.6
2 1.6K	1.99	6.71m	15.5
3 3.5Hz	2.05	2.03	5.6
4 12G	2.01	2.03	5.6
5 450	2	2.33	6.92

(b) Zdjęcie pomiarów 2.

Rysunek 1: Zdjęcia wykonane podczas laboratorium.

W ramach ćwiczenia dokonano identyfikacji następujących obiektów dynamicznych.

3.1 Układ inercyjny pierwszego rzędu

Transmitancja obiektu ma postać:

$$G(s) = \frac{k_p}{1 + sT_p} \quad (1)$$

gdzie: k_p – statyczne wzmacnianie układu, a T_p – stała czasowa obiektu.

W celu identyfikacji obiektu inercyjnego pierwszego rzędu na jego wejście podano sygnał prostokątny o amplitudzie międzyszczytowej równej 2 V. Odpowiedź skokowa systemu została zarejestrowana przy użyciu oscyloskopu cyfrowego, a dane pomiarowe zapisano w formacie CSV. Na podstawie zarejestrowanego przebiegu wyznaczono parametry układu za pomocą poniższych zależności.

Wzmocnienie statyczne k_p :

$$h(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = k_p = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta V_{in}} \quad (2)$$

Stała czasowa T_p :

$$h(t) = k_p(1 - e^{-t/T_p}) \quad (3)$$

Podstawiając czas t równy stałej czasowej T_p , otrzymujemy:

$$h(T_p) = k_p(1 - e^{-T_p/T_p}) = k_p(1 - e^{-1}) \quad (4)$$

Wartość e^{-1} jest stałą i wynosi w przybliżeniu 0,368, zatem:

$$h(T_p) \approx k_p(1 - 0,368) = 0,632 \cdot k_p \quad (5)$$

Oznacza to, że po czasie równym stałej czasowej T_p odpowiedź obiektu osiąga 63,2% swojej wartości ustalonej.

Wyznaczone wartości parametrów układu są następujące:

- $k_p = 0,871$
- $T_p = 0,78$ ms

Parametry obliczone z charakterystyk częstotliwościowych:

Wzmocnienie k_p obliczono ze wzoru:

$$M(f) = \frac{A_{wy}}{A_{we}} \quad (6)$$

Z pomiaru przy najniższej częstotliwości (10 Hz) mamy

$$k_p \approx M(10 \text{ Hz}) = \frac{1,71}{2,03} = 0,842. \quad (7)$$

Wartość modułu przy częstotliwości granicznej spełnia

$$M(\omega_{3dB}) = \frac{k_p}{\sqrt{2}} \approx \frac{0,842}{\sqrt{2}} = 0,595. \quad (8)$$

Z tabeli widzimy, że częstotliwość wynosi:

$$f_{3dB} \approx 210 \text{ Hz.}$$

Stąd stała czasowa:

$$T_p = \frac{1}{\omega_{3dB}} = \frac{1}{2\pi f_{3dB}} \approx \frac{1}{2\pi \cdot 210} = 0,758 \text{ ms.} \quad (9)$$

Dla częstotliwości granicznej ω_{3dB} zachodzi zależność:

$$\omega_{3dB} = \frac{1}{T_p} \approx 1319,3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (10)$$

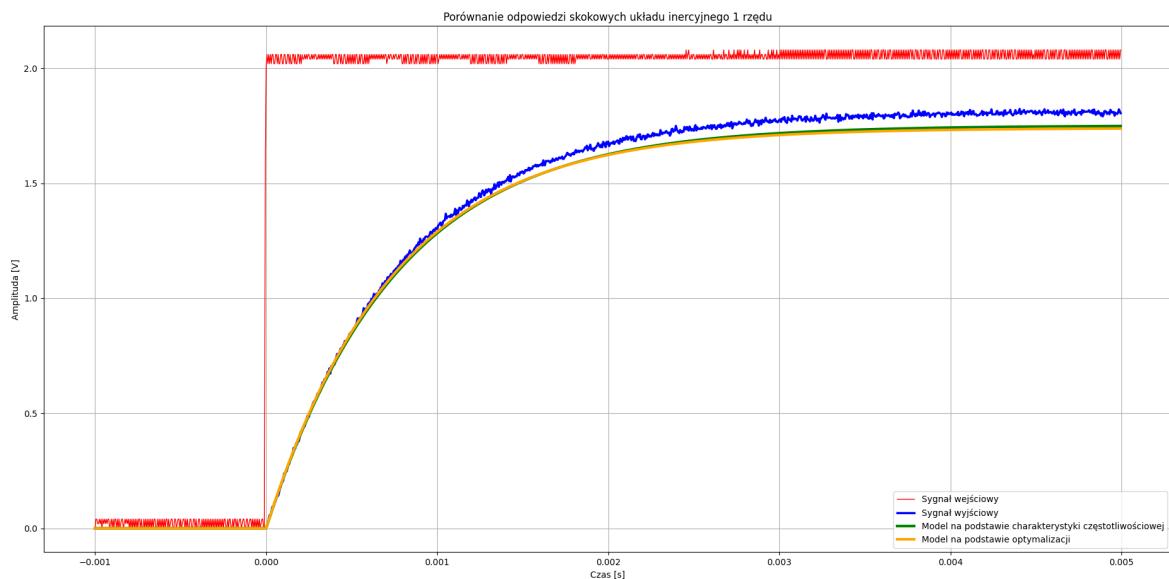
Parametry wyznaczone za pomocą skryptów MATLABowych:

- $k_p = 0,8366$
- $T_p = 0,74 \text{ ms}$

Porównanie odpowiedzi skokowych modeli otrzymanych różnymi metodami:

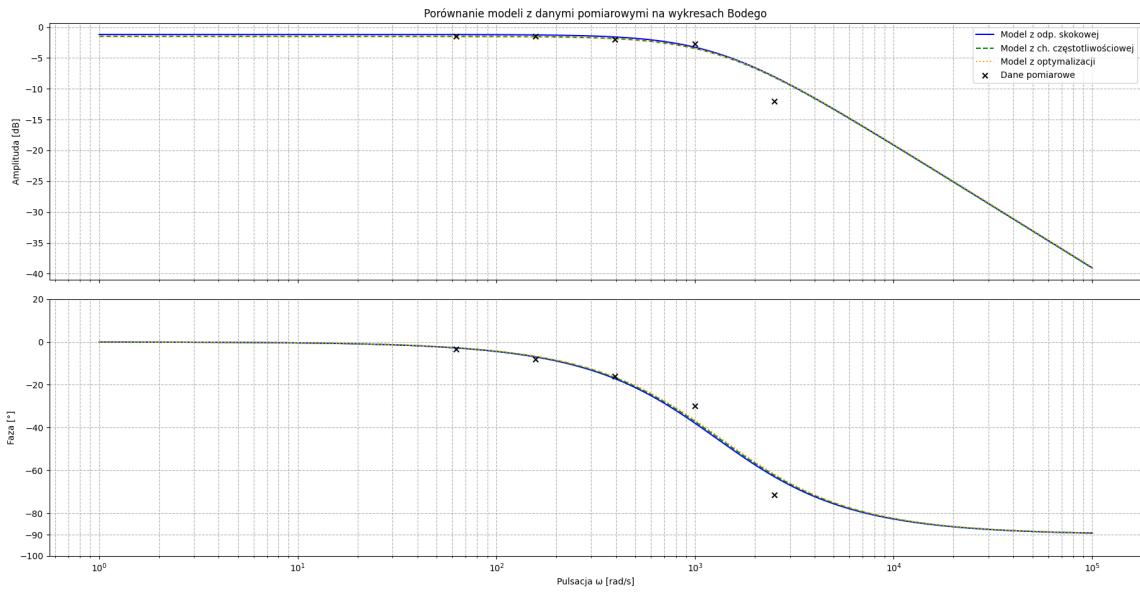
Dane wejściowe:

$$V_{in} = 2 \text{ [Vpp]}, f = 10 \text{ [Hz]}$$



Rysunek 2: Odpowiedzi skokowe układu inercyjnego pierwszego rzędu

Porównanie charakterystyk Bodego otrzymanych różnymi metodami:



Rysunek 3: Charakterystyki Bodego układowego inercyjnego pierwszego rzędu

Porównanie parametrów uzyskanych za pomocą trzech różnych metod identyfikacji wykazało bardzo dużą zgodność, która jest potwierdzona wizualnie na wykresach (Rysunek 2 i Rysunek 3). Świadczy to o wiarygodności wykonanych pomiarów oraz poprawności przyjętego modelu matematycznego. Zarejestrowana odpowiedź skokowa, przedstawiona na Rysunku 2, nie wykazuje przeregulowania, co stanowi typową cechę tego typu systemów. Właściwości obiektu jako filtra dolnoprzepustowego przejawiają się w tłumieniu składowych o wysokich częstotliwościach oraz w przesunięciu fazowym, które dla dużych częstotliwości dąży do -90° (Rysunek 3).

3.2 Układ inercyjny pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym

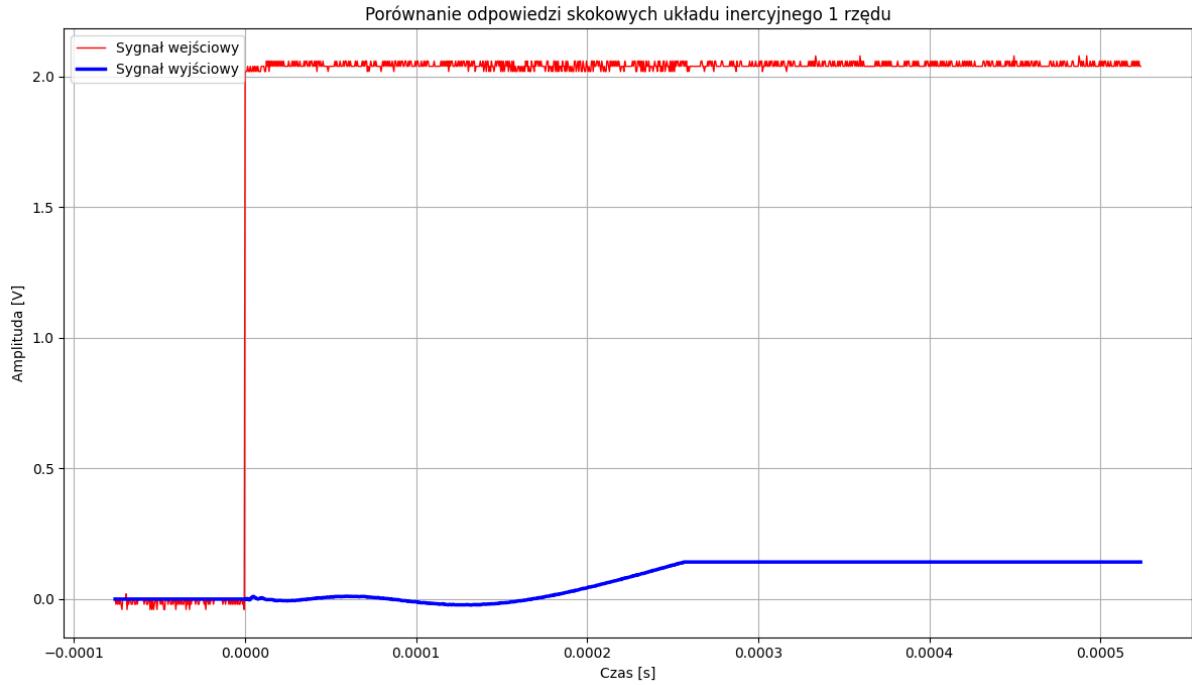
Transmitancja obiektu ma postać:

$$G(s) = \frac{k_p}{1 + sT_p} e^{-sT_0} \quad (11)$$

gdzie: k_p – statyczne wzmacnianie układu, T_p – stała czasowa obiektu, a T_0 - opóźnienie transportowe.

Parametry k_p i T_p przyjęto takie same jak dla układu inercyjnego pierwszego rzędu, ponieważ wprowadzenie opóźnienia transportowego T_0 nie wpływa na wzmacnianie ani stałą czasową, a jedynie powoduje dodatkowe przesunięcie fazowe.

Obliczenie opóźnienia transportowego T_0 na podstawie odpowiedzi skokowej:



Rysunek 4: Odpowiedź skokowa układu pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym

Wyznaczone wartości parametrów układu są następujące:

- $k_p = 0,871$
- $T_p = 0,78 \text{ ms}$
- $T_0 = 0,1678 \text{ ms}$

Obliczenie opóźnienia transportowego T_0 na podstawie charakterystyki częstotliwościowej:

$$T_0 = -T_p \cdot \left(\phi(\omega_{3\text{dB}}) + \frac{\pi}{4} \right) \quad (12)$$

Do obliczeń przyjęto $T_p = 0,758 \text{ ms}$ oraz przesunięcie fazowe $\phi = -58,5^\circ$ (odczytane dla częstotliwości, bliskiej $f_{3\text{dB}}$).

Konwersja fazy na radiany:

$$\phi = -58,5^\circ = -1,02023 \text{ rad}$$

Podstawienie wartości do wzoru:

$$T_0 = -0,000758 \text{ s} \cdot \left(-1,02023 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$T_0 = -0,000758 \text{ s} \cdot (-1,02023 + 0,7854)$$

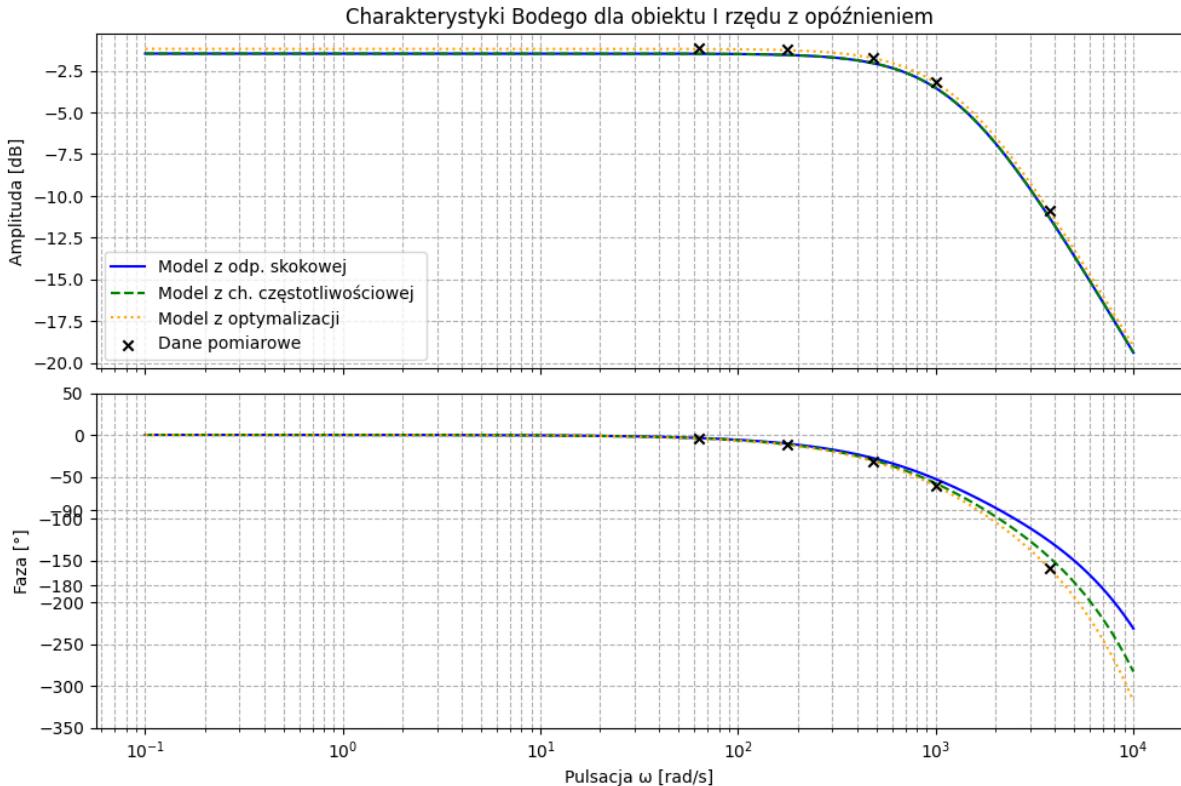
$$T_0 = -0,000758 \text{ s} \cdot (-0,23483)$$

$$T_0 \approx 0,000178 \text{ s}$$

Ostatecznie wyznaczone opóźnienie transportowe wynosi:

$$T_0 \approx 0,178 \text{ ms}$$

Porównanie charakterystyk Bodego otrzymanych różnymi metodami:



Rysunek 5: Charakterystyki Bodego układu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem transportowym.

Charakterystyka amplitudowa potwierdza, że obiekt zachowuje się jak filtr dolno-przepustowy, tłumiąc składowe o wysokich częstotliwościach. W odróżnieniu od układu inercyjnego bez opóźnienia, charakterystyka fazowa wykazuje znacznie większe przesunięcie ujemne, które systematycznie maleje wraz ze wzrostem częstotliwości. Jest to charakterystyczna cecha systemów z opóźnieniem transportowym, gdzie opóźnienie wprowadza dodatkowe, przesunięcie fazowe.

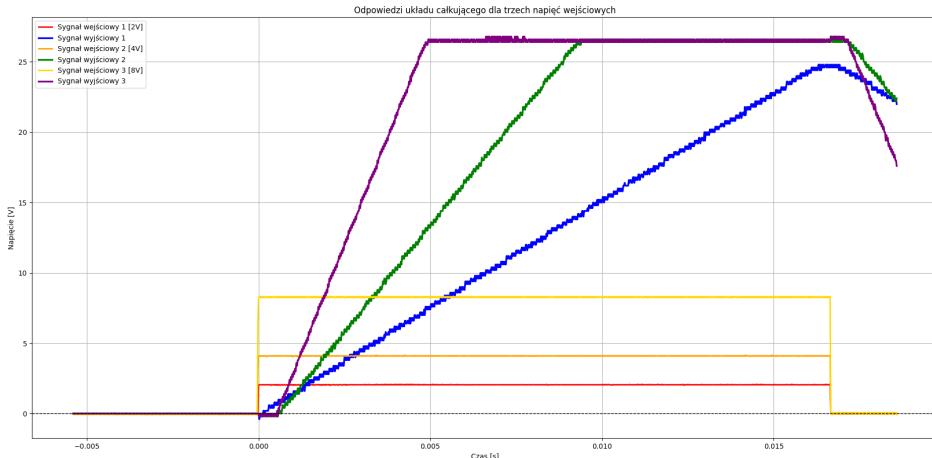
3.3 Układ całkujący

Transmitancja obiektu jest postaci:

$$G(s) = \frac{1}{sT_i} \quad (13)$$

gdzie: T_i – stała całkowania.

Porównanie sygnałów wyjściowych pobudzonych różnymi napięciami:



Rysunek 6: Odpowiedź układu całkującego na różne napięcia wejściowe.

Obliczenie stałej całkowania T_i na podstawie danych pomiarowych:

$$T_i = \frac{\Delta U_{we} \cdot \Delta x}{\Delta y}$$

- ΔU_{we} - Zmiana amplitudy sygnału wejściowego [V]
- Δx - Różnica czasu [s]
- Δy - Różnica napięcia [V]
- T_i - Stała całkowania [s]

ΔU_{we} [V]	Δx [s]	Δy [V]	T_i [ms]
2	0,001668	24,8	1,35
4	0,00896	27,5	1,30
8	0,00456	27,5	1,33

$$T_{i \text{ średnie}} = \frac{1,35 + 1,30 + 1,33}{3} = 1,33 \text{ ms}$$

Dla różnych wartości napięcia wejściowego obserwowano liniowy wzrost napięcia wyjściowego w funkcji czasu, co wskazuje na proporcjonalność prędkości narastania sygnału do amplitudy wymuszenia. Wyznaczone wartości stałej całkowania T_i dla trzech pomiarów są do siebie bardzo zbliżone ($T_{isrednie} = 1,33ms$), co potwierdza poprawność pomiarów i stabilność układu.

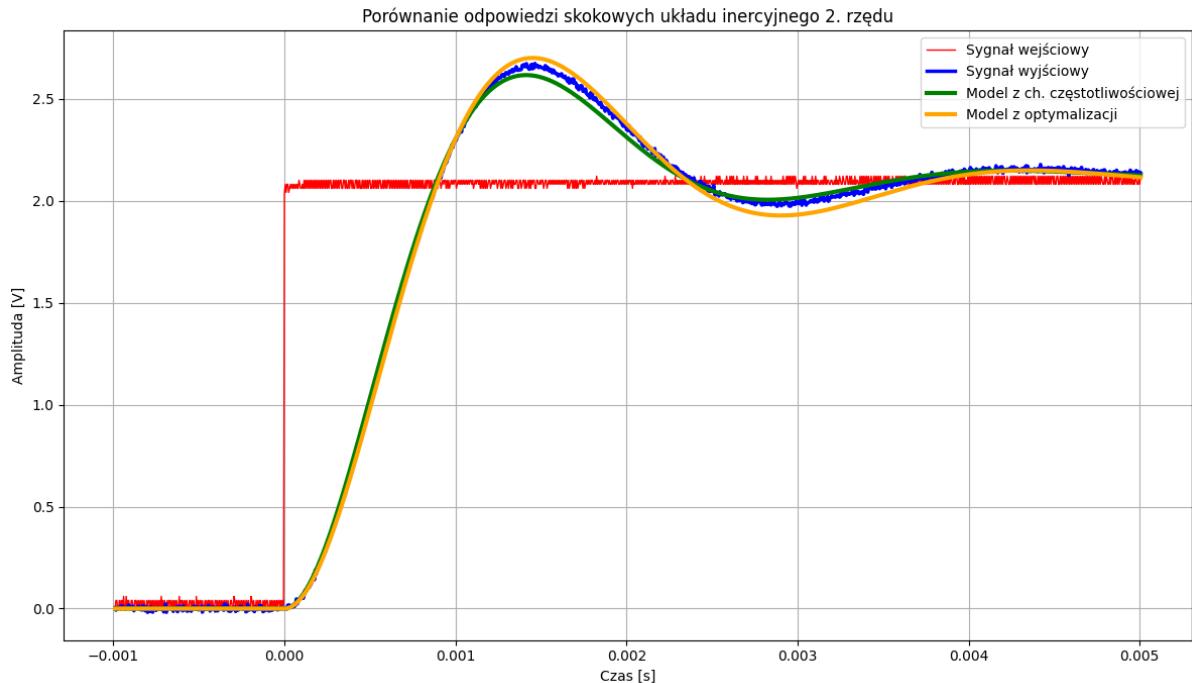
3.4 Układ drugiego rzędu

Transmitancja obiektu jest postaci:

$$G(s) = \frac{1}{1 + sa_1 + s^2 a_2} = \frac{1}{1 + s2\zeta\tau + s^2\tau^2} = \frac{w_n^2}{w_n^2 + s2\zeta w_n + s^2} \quad (14)$$

gdzie: ζ – współczynnik tłumienia, $w_n = \frac{1}{\tau}$ – pulsacja naturalna (drgań nietłumionych).

Porównanie odpowiedzi skokowych układu inercyjnego 2. rzędu



Rysunek 7: Porównanie odpowiedzi skokowych układu inercyjnego 2. rzędu.

Wartości parametrów z odpowiedzi skokowej:

Do identyfikacji na podstawie odpowiedzi skokowej wykorzystano parametry przeregulowania κ oraz czas jego wystąpienia T_κ . Z wykresu odpowiedzi skokowej (Rysunek 7) odczytano:

- Maksymalna amplituda $h_{max} \approx 2,67$ V
- Wartość ustalona $h(\infty) \approx 2,05$ V
- Czas wystąpienia maksimum $T_\kappa \approx 1,37$ ms

Względne przeregulowanie κ obliczamy ze wzoru:

$$\kappa = \frac{h_{max} - h(\infty)}{h(\infty)} \approx \frac{2,67 \text{ V} - 2,05 \text{ V}}{2,05 \text{ V}} \approx 0,302 \quad (15)$$

Następnie obliczamy współczynnik tłumienia ζ oraz stałą czasową τ z formuł (jak w Tabeli 1.1 oraz na załączonym zdjęciu):

$$\zeta = \frac{|\ln \kappa|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \kappa)^2}} = \frac{|\ln(0,302)|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(0,302))^2}} \approx \frac{1,197}{\sqrt{(3,1416)^2 + (1,197)^2}} \approx \frac{1,197}{\sqrt{9,8696 + 1,4328}} \approx 0,336 \quad (16)$$

$$\tau = \frac{\zeta \cdot T_\kappa}{|\ln \kappa|} = \frac{0,336 \cdot 1,37 \text{ ms}}{1,197} \approx 0,385 \text{ ms} \quad (17)$$

$$\omega_n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,000385} \approx 2\,597,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (18)$$

Identyfikacja na podstawie charakterystyk częstotliwościowych

Do identyfikacji wykorzystano punkt z danych pomiarowych, dla którego wartość pulsacji $\omega_{-\pi/2}$ oraz wzmacnienia $M(\omega_{-\pi/2})$ w tym punkcie wynosi:

- $\omega_{-\pi/2} \approx 2451 \text{ rad/s}$
- $M(\omega_{-\pi/2}) \approx 1,19$

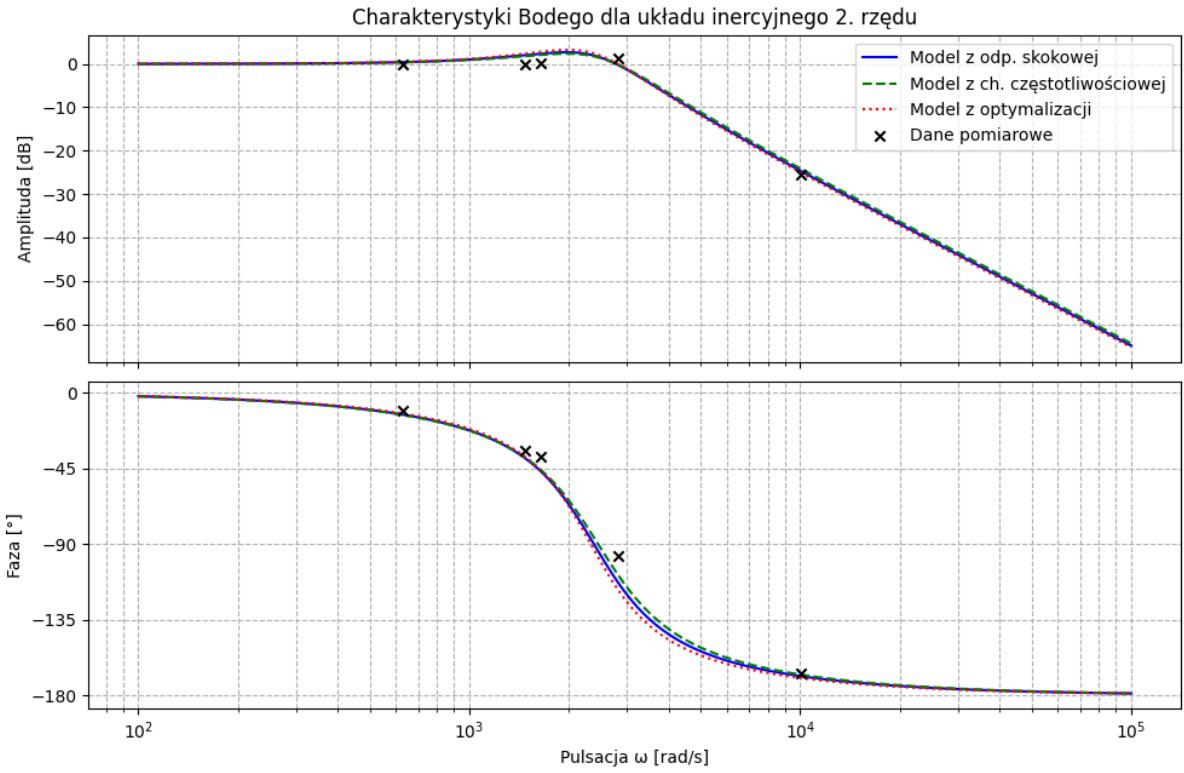
Korzystamy ze wzorów:

$$\zeta = \frac{1}{2M(\omega_{-\pi/2})} = \frac{1}{2 \cdot 1,19} \approx 0,42 \quad (19)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_{-\pi/2}} = \frac{1}{2451 \text{ rad/s}} \approx 0,408 \text{ ms} \quad (20)$$

Wartości z zadań optymalizacji:

- $K = 0,99$
- $\zeta = 0,37$
- $\omega_n = 2330 \text{ rad/s}$



Rysunek 8: Charakterystyki Bodego dla układu inercyjnego 2. rzędu.

Porównanie odpowiedzi skokowych (Rysunek 7) wykazało, że zidentyfikowane modele bardzo dobrze odwzorowują zachowanie rzeczywistego obiektu. Zarówno pomiary, jak i modele wykazują charakterystyczne przeregulowanie, typowe dla układu drugiego rzędu niedotłumionego ($\zeta < 1$).

Analiza charakterystyk Bodego (Rysunek 8) potwierdza, że układ ma rezonans amplitudowy, widoczny jako lokalne maksimum, co jest również cechą układu niedotłumionego. Modele przebiegają przez większość zebranych danych pomiarowych dążąc do przesunięcia fazowego -180° przy wysokich częstotliwościach.

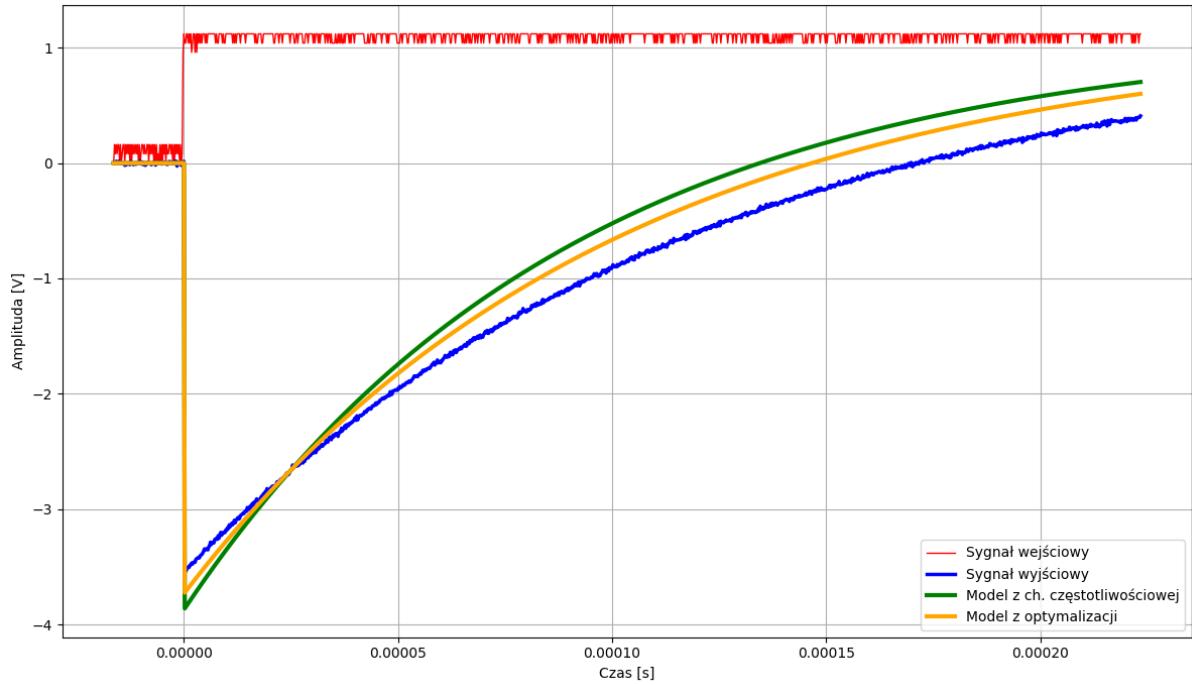
3.5 Układ nieminimalnofazowy

Transmitancja obiektu jest postaci:

$$G(s) = \frac{1 - sT_x}{1 + sT_y} \quad (21)$$

gdzie: T_x – stała czasowa zera, T_y – stała czasowa bieguna.

Porównanie odpowiedzi skokowych różnych modeli



Rysunek 9: Odpowiedzi układu nieminimalnofazowego na skok jednostkowy

Wyznaczenie parametrów z odpowiedzi skokowej

Żeby policzyć parametry systemu nieminimalnofazowego potrzebujemy znaleźć na przebiegu odpowiedzi skokowej początkowy punkty czyli $h(0)$ oraz czas osiągnięcia wartości zera na wyjściu, $h(t_0) = 0$. Następnie korzystając z poniższych wzorów:

$$h(0) = \frac{T_x}{T_y} \quad (22)$$

$$T_y = \frac{t_0}{\ln(1 - h(0))} \quad (23)$$

Na podstawie których możemy odpowiednio wyznaczyć:

$$h(0) = -3,504, \quad t_0 = 0,17 \text{ ms}$$

$$T_x = 0,396 \text{ ms}, \quad T_y = 0,113 \text{ ms}$$

Parametry na podstawie pomiarów char. częstotliwościowej

Żeby wyznaczyć parametry korzystając z pomiarów charakterystki częstotliwościowej musimy wyznaczyć wzmocnienie w stanie ustalonym ($M(\infty)$) oraz pulsacje dla której przesunięcie fazowe jest równe $-\frac{\pi}{2}$. W naszym przypadku to odpowiednio:

$$M(\infty) = 3,357 \quad \omega_{-pi/2} = 6280 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Następnie korzystając z poniższych wzorów:

$$T_x = \sqrt{\frac{M(\infty)}{\omega_{-pi/2}}} \quad (24)$$

$$M(\infty) = \frac{T_x}{T_y} \quad (25)$$

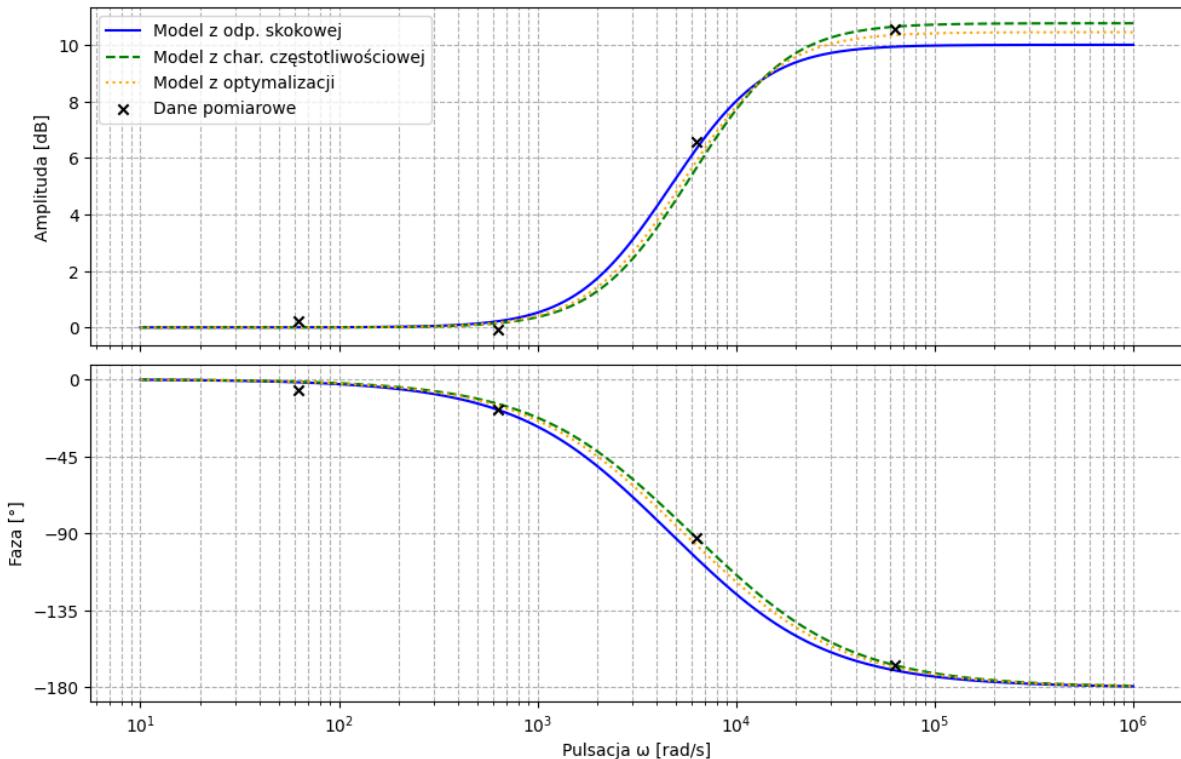
Otrzymujemy takie wyniki:

$$T_x = 0,311\text{ms} \quad T_y = 0,09\text{ms}$$

Parametry obliczone przez zadanie optymalizacji

$$T_x = 0,342\text{ms} \quad T_y = 0,1\text{ms}$$

Na podstawie wyznaczonych parametrów możemy narysować dla każdej pary wartości odpowiadające wykresy charakterystki Bodego.



Rysunek 10: Charakterystyka Bodego układu nieminimalnofazowego

4 Wnioski

W ramach ćwiczenia dokonano identyfikacji kilku typów obiektów dynamicznych, a uzyskane wyniki potwierdziły poprawność przyjętych modeli matematycznych. Dla układu inercyjnego pierwszego rzędu oraz jego wersji z opóźnieniem transportowym uzyskano bardzo dobrą zgodność parametrów T_p i T_0 z wartościami teoretycznymi.

Dla układu całkującego średnia stała całkowania $T_i = 1,33 \text{ ms}$ wykazała niewielkie odchylenia między pomiarami, co świadczy o stabilności i liniowym charakterze badanego obiektu. W przypadku układu drugiego rzędu i nieminimalnofazowego uzyskane wartości współczynników tłumienia, czasów i pulsacji naturalnych odpowiadały przewidywaniom teoretycznym oraz dobrze odwzorowywały rzeczywiste przebiegi.

Ostatecznie potwierdzono, że wszystkie analizowane metody (czasowa i częstotliwościowa) prowadzą do spójnych wyników identyfikacji, a wyznaczone parametry wiernie opisują zachowanie badanych układów dynamicznych.