

Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych

z przedmiotu: *Sterowanie Analogowe*

| | |
|--------------------------------|---|
| Numer ćwiczenia: | 2 |
| Tytuł ćwiczenia: | Badanie jakości i dokładności sterowania |
| Imię, nazwisko i numer albumu: | Mateusz Kuczerowski 197900 Kewin Kisiel 197866 |
| Data pomiarów: | 16.10.2025 |
| Data oddania: | 25.10.2025 |
| Ocena: | |

Prowadzący: dr inż. Piotr Fiertek

Grupa laboratoryjna: 1A

1 Cel ćwiczenia

W ramach zajęć analizowano odpowiedzi skokowe oraz charakterystyki częstotliwościowe (Bodego) dla różnych wartości wzmocnienia. Pozwoliło to na ocenę, jak zmiana k_c wpływa na parametry odpowiedzi, takie jak przeregulowanie, czas ustalania, pasmo przenoszenia oraz dokładność sterowania (uchyb ustalony).

2 Przebieg ćwiczenia

Podczas ćwiczenia przeprowadzono badanie trzech różnych układów zamkniętych (Układ A, B, D), wskazanych przez prowadzącego. Układy te były sterowane za pomocą sterownika proporcjonalnego (P). Dla każdego z badanych układów zarejestrowano łącznie 9 odpowiedzi skokowych – po trzy dla każdej z trzech różnych wartości wzmocnienia sterownika k_c . W trakcie zajęć wykorzystano stanowisko pomiarowe składające się z zestawu analogowych modeli procesów przemysłowych (ZAMPP), generatora funkcji oraz oscyloskopu dwukanałowego. Zarejestrowane na oscyloskopie przebiegi (dane pomiarowe) zostały następnie wykorzystane do porównania z wynikami symulacji teoretycznych. Opracowanie wyników wymagało również przygotowania wykresów Nyquista oraz linii pierwiastkowych dla badanych układów.

3 Pomiar i analiza wyników

Poniżej przedstawiono zdjęcia z przeprowadzonych pomiarów w trakcie laboratorium.

POMIARY:

UKŁAD : a

I Pomiar odp. składowy na k :

| L.p. | n | $\varphi [^\circ]$ |
|------|-----|--------------------|
| 1 | 0,4 | 0 |
| 2 | 1,3 | 0 |
| 3 | 2,4 | 0 |
| 4 | 4,4 | |

16.10.2025
Jm

II Char. częstot. z wyj. 1→2

dla k_1 m: 2,4

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 2,06 | 1,8 |
| 2 | 100 | 2 | 2,06 | 1,8 |
| 3 | 200 | 2 | 2,12 | 30,24 |
| 4 | 500 | 2 | 3,58 | 87,9 |
| 5 | 795 | 2 | 1,42 | -157,4 |
| 6 | 1000 | 2 | 0,58 | -133,2 |

dla k_2 m: 1,3

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 2,06 | 2,16 |
| 2 | 100 | 2 | 2,04 | 22,32 |
| 3 | 200 | 2 | 1,96 | 39,6 |
| 4 | 500 | 2 | 2,18 | 112,5 |
| 5 | 680 | 2 | 1,40 | -174,5 |
| 6 | 1k | 2 | 0,38 | -139,5 |

(a) Zdjęcie pomiarów 1.

dla k_1 m: 0,1

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 2,06 | 3,9 |
| 2 | 100 | 2 | 1,86 | 32,8 |
| 3 | 200 | 2 | 1,58 | 59,4 |
| 4 | 250 | 2 | 1,46 | 72,9 |
| 5 | 500 | 2 | 1,1 | 132,3 |
| 6 | 800 | 2 | 0,46 | -162,4 |

UKŁAD : b $U_{in} = 2V_{pp}$ $R = 10k\Omega$

I Pomiar odp. składowy na k :

| L.p. | n | $\varphi [^\circ]$ | $c(t)$ gch zolowanie |
|------|-----|--------------------|----------------------|
| 1 | 0,5 | 0 | |
| 2 | 1,5 | 0 | |
| 3 | 2,8 | 0 | |
| 4 | 3,6 | | |

II Char. częstot. z wyj. 1→2

dla k_1 m: 0,5

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 2,06 | 3,96 |
| 2 | 100 | 2 | 2,06 | 33,8 |
| 3 | 200 | 2 | 1,96 | 62,52 |
| 4 | 400 | 2 | 1,62 | 111,6 |
| 5 | 520 | 2 | 1,4 | 137,3 |
| 6 | 1k | 2 | 0,94 | 177,8 |

(b) Zdjęcie pomiarów 2.

dla k_2 m: 1,5

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 2,06 | 2,16 |
| 2 | 100 | 2 | 2,14 | 18 |
| 3 | 200 | 2 | 2,32 | 39,6 |
| 4 | 400 | 2 | 3,06 | 79,92 |
| 5 | 600 | 2 | 3,26 | 129 |
| 6 | 1,75k | 2 | 1,4 | -142,1 |

dla k_2 m: 2,5

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 2,06 | 2,16 |
| 2 | 100 | 2 | 2,14 | 12,24 |
| 3 | 200 | 2 | 2,34 | 25,2 |
| 4 | 400 | 2 | 3,48 | 42,48 |
| 5 | 800 | 2 | 12,2 | 131 |
| 6 | 3,5k | 2 | 1,4 | -107 |

UKŁAD : d

I Pomiar odp. składowy na k :

| L.p. | k_p | $\varphi [^\circ]$ | $c(t)$ gch zolowanie |
|------|-------|--------------------|----------------------|
| 1 | 1,1 | | |
| 2 | 4 | | |
| 3 | 8 | | |
| 4 | 10 | | |

α_{gromy}

(c) Zdjęcie pomiarów 3.

dla k_1 m: 1,1

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 0,44 | -6,82 |
| 2 | 200 | 2 | 0,42 | 6,84 |
| 3 | 400 | 2 | 0,4 | 12,96 |
| 4 | 800 | 2 | 0,34 | 33,12 |
| 5 | 1,5k | 2 | 0,26 | 48,9 |
| 6 | 2k | 2 | 0,162 | 68,12 |

dla k_2 m: 1

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 0,78 | -3,6 |
| 2 | 200 | 2 | 0,74 | 10,08 |
| 3 | 400 | 2 | 0,72 | 16,63 |
| 4 | 800 | 2 | 0,68 | 30,47 |
| 5 | 1,5k | 2 | 0,5 | 52,81 |
| 6 | 2k | 2 | 0,42 | 62,04 |

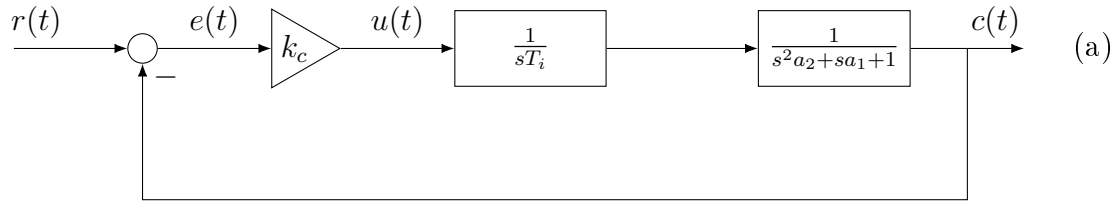
dla k_3 m: 8

| Lp. | $\varphi [Hz]$ | $U_{im} [V_{pp}]$ | $U_{out} [V_{pp}]$ | $\varphi [^\circ]$ |
|-----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | 10 | 2 | 1,08 | -2,16 |
| 2 | 200 | 2 | 1,04 | 6,48 |
| 3 | 400 | 2 | 1,04 | 10,8 |
| 4 | 800 | 2 | 0,96 | 25,48 |
| 5 | 1,5k | 2 | 0,8 | 43,94 |
| 6 | 2k | 2 | 0,68 | 56,44 |

(d) Zdjęcie pomiarów 4.

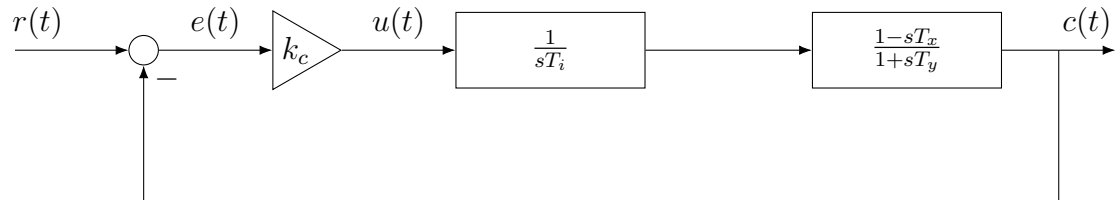
4 Układy pomiarowe

Układ A):



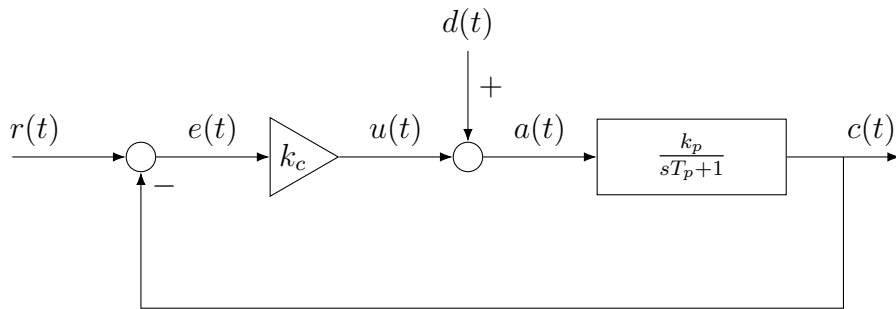
Rysunek 2: Schemat układu pomiarowego (a).

Układ B):



Rysunek 3: Schemat układu pomiarowego (b).

Układ D):



Rysunek 4: Schemat blokowy układu regulacji z zakłóceniem.

5 Układ A

Pierwszy badany układ składa się ze sterownika proporcjonalnego (P) oraz obiektu sterowanego w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego. Obiekt sterowany jest szeregowym połączeniem członu całkującego i członu inercyjnego drugiego rzędu.

Na podstawie identyfikacji przeprowadzonej w ćwiczeniu 1, przyjęto następujące parametry modeli:

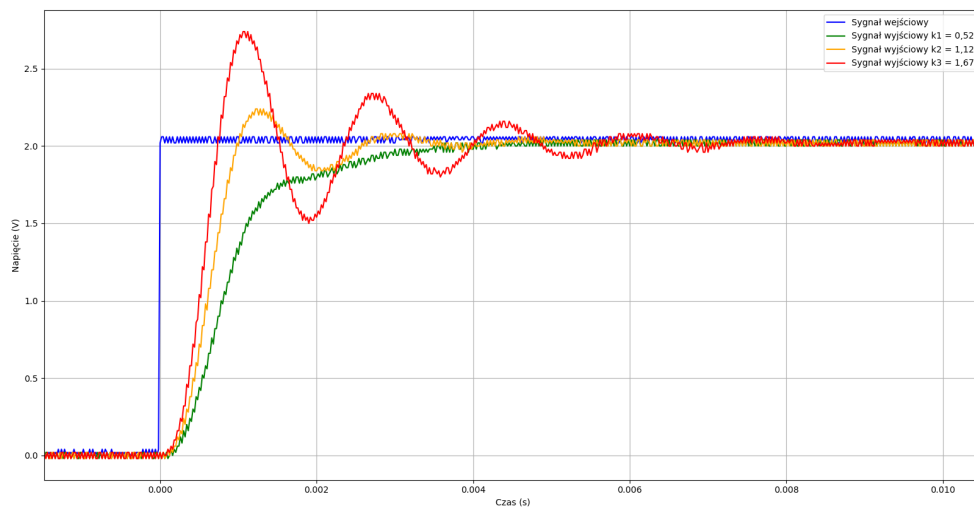
- Człon całkujący: $G(s) = \frac{1}{sT_i}$, gdzie $T_i = 1,33$ ms.
- Człon 2 rzędu: $G(s) = \frac{1}{1+sa_1+s^2a_2} = \frac{1}{1+s2\zeta\tau+s^2\tau^2} = \frac{w_n^2}{w_n^2+s2\zeta w_n+s^2}$, gdzie wyznaczone parametry to $\zeta = 0,336$ i $\omega_n = 2560$ rad/s.

Badania przeprowadzono dla trzech różnych wartości wzmocnienia k_c , obliczonych ze wzoru $k_c = 0,47 + n/2$:

- Dla $n_1 = 0,1$: $k_{c1} = 0,47 + 0,1/2 = 0,47 + 0,05 = \mathbf{0,52}$
- Dla $n_2 = 1,3$: $k_{c2} = 0,47 + 1,3/2 = 0,47 + 0,65 = \mathbf{1,12}$
- Dla $n_3 = 2,4$: $k_{c3} = 0,47 + 2,4/2 = 0,47 + 1,20 = \mathbf{1,67}$

5.1 Odpowiedzi skokowe

Na poniższym wykresie przedstawiono zarejestrowane odpowiedzi skokowe układu (A) dla trzech wyznaczonych wzmocnień k_c .

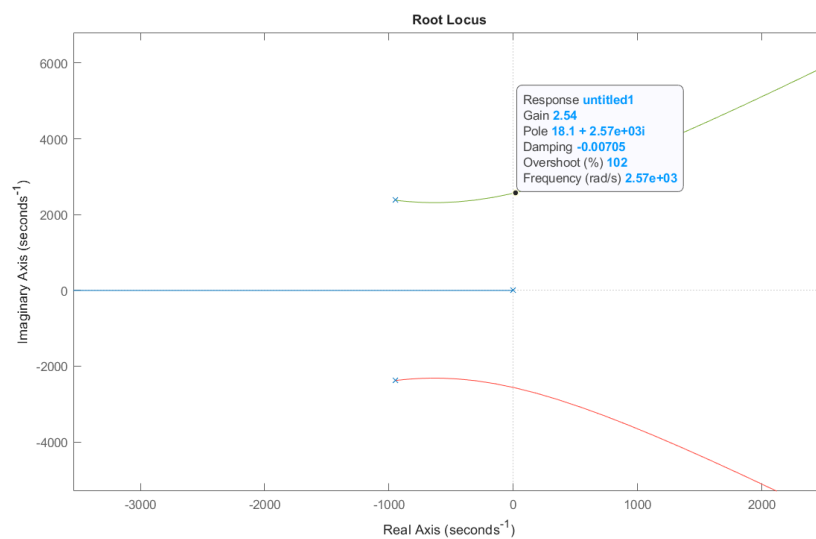


Rysunek 5: Odpowiedź skokowa układu (A) przy różnych wartościach wzmocnienia k_c wykreślona z pliku CSV.

Analiza odpowiedzi skokowych Układu A pokazuje, że zwiększanie wzmocnienia k_c skraca czas narastania, ale jednocześnie znacząco zwiększa przeregulowanie i oscylacyjność odpowiedzi. Niezależnie od wzmocnienia, uchyb ustalony wynosi zero, co jest zasługą członu całkującego w obiekcie sterowania.

5.2 Linie pierwiastkowe

Wykres linii pierwiastkowych dla układu otwartego $G_o(s) = k_c \cdot \frac{1}{sT_i} \cdot \frac{w_n^2}{w_n^2 + s2\zeta w_n + s^2}$ przedstawiono poniżej. Zaznaczono na nim położenie biegunów układu zamkniętego dla badanych wzmocnień k_{c1} , k_{c2} i k_{c3} .

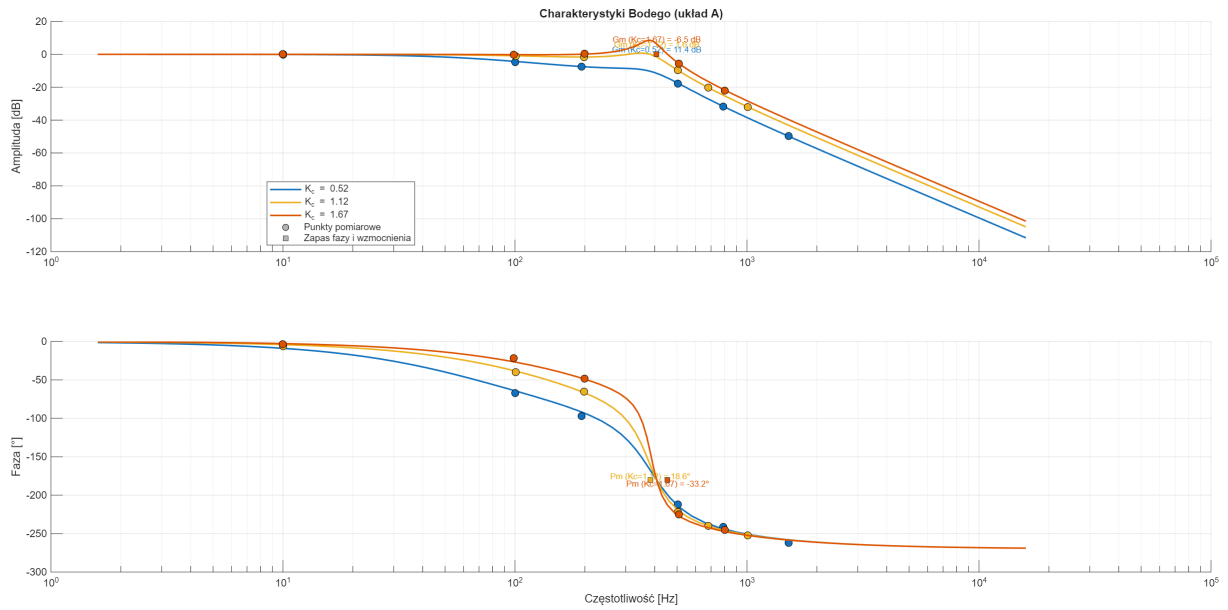


Rysunek 6: Linie pierwiastkowe układu otwartego (A).

Wykres linii pierwiastkowych pokazuje, że wraz ze wzrostem k_c bieguny układu zamkniętego zbliżają się do osi urojonej. Powoduje to spadek tłumienia, co bezpośrednio przekłada się na większe oscylacje widoczne na odpowiedziach skokowych. Linie pierwiastkowe wskazują również, że zbyt duże wzmocnienie k_c doprowadzi do niestabilności systemu, ponieważ gałęzie zmierzają w kierunku prawej półpłaszczyzny.

5.3 Charakterystyki Bodego

Poniższy wykres przedstawia charakterystyki Bodego układu zamkniętego dla badanych wartości k_c .

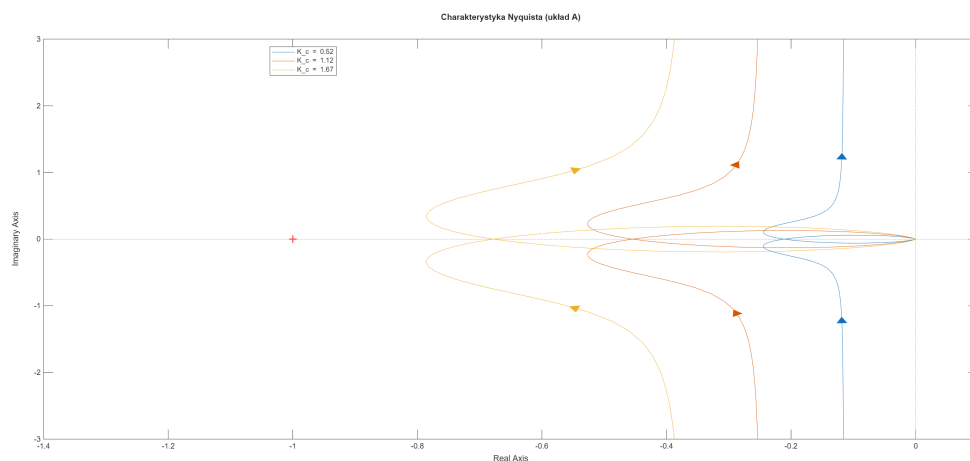


Rysunek 7: Charakterystyki Bodego układu zamkniętego (A).

Charakterystyki Bodego układu zamkniętego (Rysunek 7) pokazują, jak wzmacnienie k_c wpływa na odpowiedź częstotliwościową. Wzrost k_c powoduje pojawienie się i wzrost piku rezonansowego, oraz lekkie poszerzenie pasma przenoszenia. Wyższy pik rezonansowy jest bezpośrednio skorelowany z mniejszym tłumieniem i większym przeregulowaniem, co jest w pełni zgodne z analizą odpowiedzi skokowych (Rysunek 5).

5.4 Charakterystyki Nyquista

Na wykresie Nyquista układu otwartego można zbadać stabilność układu zamkniętego.



Rysunek 8: Charakterystyka Nyquista układu otwartego (A).

Wykres Nyquist układu otwartego (Rysunek 8) służy do oceny stabilności układu zamkniętego. Wzrost k_c powoduje proporcjonalne skalowanie wykresu. Dla małego wzmac-

nienia ($k_{c1} = 0.52$), wykres jest daleko od punktu krytycznego $(-1, 0j)$, co oznacza duży zapas stabilności. W miarę wzrostu k_c do 1.67, wykres niebezpiecznie zbliża się do punktu $(-1, 0j)$, co sygnalizuje mały zapas fazy i wzmocnienia oraz, co za tym idzie, silne oscylacje widoczne na odpowiedzi skokowej.

5.5 Analityczne uzasadnienie wyników dla układu A (Obiekt całkująco-inercyjny II rzędu)

Model obiektu: $G_p(s) = \frac{1}{sT_i} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$.

Transmitancja układu otwartego: $G_o(s) = k_c \cdot G_p(s) = \frac{k_c \omega_n^2}{sT_i(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$.

5.5.1 Dokładność sterowania (Uchyb ustalony)

- **Uzasadnienie analityczne:** Układ otwarty $G_o(s)$ posiada biegun w początku układu współrzędnych (człon całkujący $1/sT_i$). Czyni to system **układem typu 1**. Zgodnie z twierdzeniem o wartości końcowej, uchyb ustalony e dla pobudzenia skokowego $R(s) = 1/s$ wynosi:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G_o(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)}$$

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k_c \omega_n^2}{sT_i(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

- **Zgodność z pomiarami:** Analiza potwierdza obserwacje pomiarowe (Rysunek 5), że **uchyb ustalony wynosi zero niezależnie od wartości k_c** . Jest to bezpośrednia konsekwencja obecności członu całkującego w obiekcie.

5.5.2 Jakość odpowiedzi skokowej i stabilność

- **Uzasadnienie analityczne:** Transmitancja układu zamkniętego $G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$ posiada równanie charakterystyczne:

$$1 + G_o(s) = 0 \implies sT_i(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + k_c\omega_n^2 = 0$$

$$s^3T_i + 2\zeta\omega_n T_i s^2 + \omega_n^2 T_i s + k_c\omega_n^2 = 0$$

Jest to układ **trzeciego rzędu**. Stabilność takiego układu można zbadać kryterium Routha-Hurwitza. Warunkiem stabilności (poza dodatniością współczynników $T_i, 2\zeta\omega_n T_i, \omega_n^2 T_i, k_c\omega_n^2 > 0$) jest:

$$(2\zeta\omega_n T_i) \cdot (\omega_n^2 T_i) > (T_i) \cdot (k_c\omega_n^2)$$

$$2\zeta\omega_n T_i^2 \omega_n^2 > k_c T_i \omega_n^2 \implies 2\zeta\omega_n T_i > k_c$$

Istnieje więc wzmacnienie graniczne $k_{gr} = 2\zeta\omega_n T_i$, powyżej którego układ staje się niestabilny. Wzrost k_c przesuwa bieguny dominujące układu zamkniętego w kierunku osi urojonej $j\omega$.

- **Zgodność z pomiarami:** Model analityczny w pełni tłumaczy wyniki pomiarów. Jak widać na Rysunku 5, zwiększanie k_c **skraca czas narastania, ale jednocześnie zwiększa przeregulowanie i oscylacyjność**. Dzieje się tak, ponieważ bieguny zbliżają się do osi $j\omega$ (co widać na Rysunku 6), zmniejszając tłumienie systemu. Wykres Nyquista (Rysunek 8), skalowany przez k_c , potwierdza, że dla większych wzmoceń pętla $G_o(j\omega)$ zbliża się do punktu krytycznego $(-1, 0j)$, co sygnalizuje spadek zapasu fazy i wzmożenia oraz wzrost oscylacji.

5.6 Wpływ wzmożenia sterownika typu P na postać wszystkich procesów przejściowych w układzie A

- Sygnał wyjściowy $c(t)$: Zwiększanie wzmożenia k_c skraca czas narastania odpowiedzi. Jednocześnie jednak, układ staje się bardziej oscylacyjny – rośnie zarówno przeregulowanie, jak i czas ustalania (z powodu dłuższego tłumienia oscylacji). Analiza linii pierwiastkowych potwierdziła, że wzrost k_c przesuwa bieguny układu zamkniętego bliżej osi urojonej, co powoduje spadek tłumienia.
- Uchyb $e(t)$: Wzrost k_c powoduje, że uchyb szybciej maleje do zera, ale robi to w sposób bardziej oscylacyjny, z większym przeregulowaniem w kierunku wartości ujemnych. Należy zaznaczyć, że dzięki obecności członu całkującego w obiekcie, uchyb ustalony zawsze dąży do zera, niezależnie od wartości k_c .
- Sygnał sterujący $u(t)$: Dla skokowej zmiany $r(t)$, uchyb początkowy $e(0)$ jest stały. Wzrost k_c powoduje więc proporcjonalnie większą początkową wartość sygnału sterującego $u(0)$. Ta silniejsza, bardziej agresywna reakcja sterownika jest przyczyną skrócenia czasu narastania. W trakcie stanu przejściowego, oscylacje obecne w $e(t)$ są wzmacniane przez k_c , co skutkuje również silnie oscylacyjnym sygnałem $u(t)$.

6 Układ B

Drugi badany układ składa się ze sterownika proporcjonalnego (P) oraz obiektu będącego szeregowym połączeniem członu całkującego i członu nieminimalnofazowego.

Na podstawie identyfikacji przeprowadzonej w ćwiczeniu 1, przyjęto następujące parametry modeli:

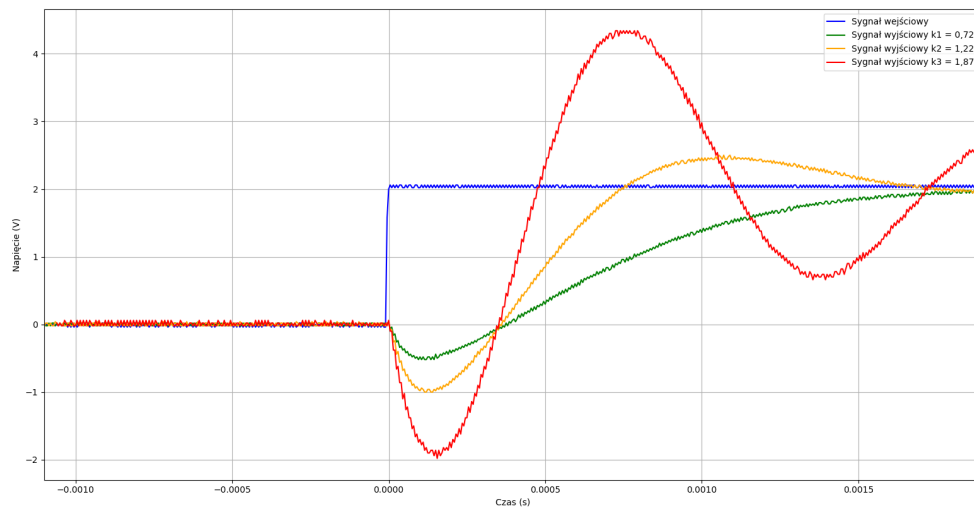
- Człon całkujący: $G(s) = \frac{1}{sT_i}$, gdzie $T_i = 1,33$ ms.
- Człon nieminimalnofazowy: $G(s) = \frac{1-sT_x}{1+sT_y}$, gdzie: $T_x = 0,396$ ms i $T_y = 0,113$ ms.

Badania przeprowadzono dla trzech wartości wzmocnienia k_c , obliczonych ze wzoru $k_c = 0,47 + n/2$:

- Dla $n_1 = 0,5$: $k_{c1} = 0,47 + 0,5/2 = 0,47 + 0,25 = \mathbf{0,72}$
- Dla $n_2 = 1,5$: $k_{c2} = 0,47 + 1,5/2 = 0,47 + 0,75 = \mathbf{1,22}$
- Dla $n_3 = 2,8$: $k_{c3} = 0,47 + 2,8/2 = 0,47 + 1,40 = \mathbf{1,87}$

6.1 Odpowiedzi skokowe

Na poniższym wykresie przedstawiono zarejestrowane odpowiedzi skokowe układu (B) dla trzech wyznaczonych wzmocnień k_c .

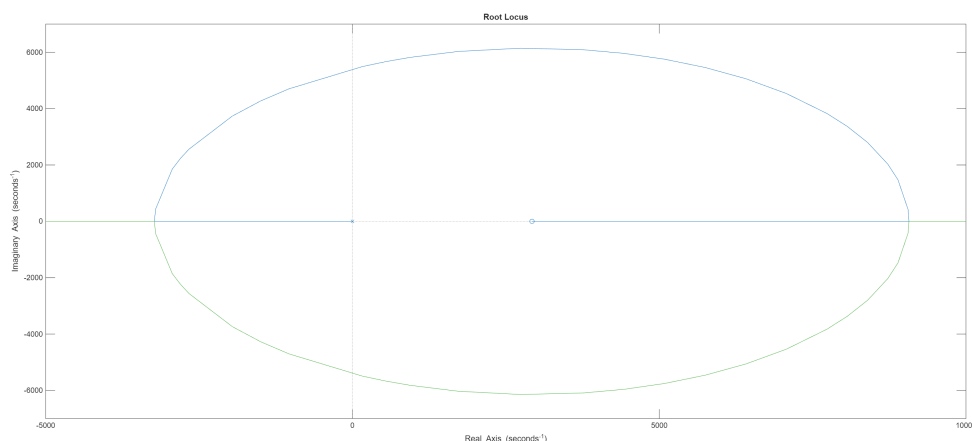


Rysunek 9: Odpowiedź skokowa układu (B) przy różnych wartościach wzmocnienia k_c .

Odpowiedzi skokowe Układu B (Rys. 9) wykazują cechy charakterystyczne dla układu nieminimalnofazowego, co jest zgodne z jego modelem. Kluczowym elementem jest sygnał wyjściowy, który początkowo podąża w kierunku przeciwnym do wartości zadanej. Wzrost wzmocnienia k_c skraca czas narastania, ale jednocześnie drastycznie pogłębia początkowe zanurkowanie oraz zwiększa przeregulowanie i oscylacyjność. Dla $k_{c3} = 1,87$ układ jest już na granicy stabilności. Podobnie jak w Układzie A, obecność członu całkującego zapewnia zerowy uchyb ustalony.

6.2 Linie pierwiastkowe

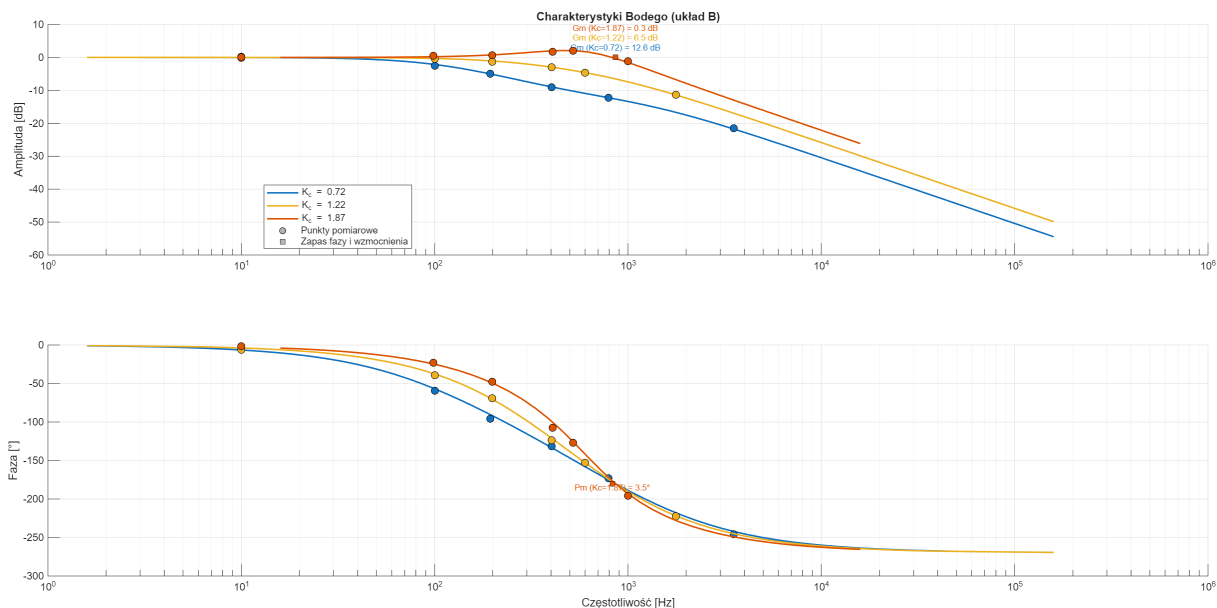
Wykres linii pierwiastkowych dla układu otwartego $G_o(s) = k_c \cdot \frac{1}{sT_i} \cdot \frac{1-sT_x}{1+sT_y}$ przedstawiono poniżej. Zaznaczono na nim położenie biegunów układu zamkniętego dla badanych wzmocnień k_{c1} , k_{c2} i k_{c3} .



Rysunek 10: Linie pierwiastkowe układu otwartego (B).

Wykres linii pierwiastkowych dla Układu B (Rys. 10) jest zdominowany przez obecność zera w prawej półpłaszczyźnie (wynikającego z członu nieminimalnofazowego). To zero przyciąga do siebie jedną z gałęzi linii pierwiastkowych, powodując, że bieguny układu zamkniętego bardzo szybko przekraczają oś urojoną i przechodzą do strefy niestabilnej. Wyjaśnia to, dlaczego już stosunkowo niewielki wzrost k_c prowadzi do tak silnych oscylacji i szybkiej utraty stabilności, co zaobserwowano na odpowiedzi skokowej (Rys. 9).

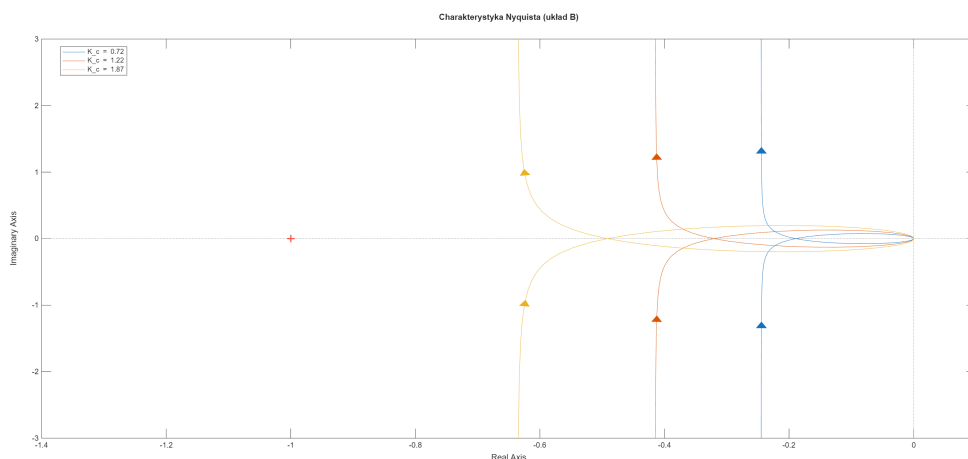
6.3 Charakterystyki Bodego



Rysunek 11: Charakterystyki Bodego układu zamkniętego (B).

Charakterystyki Bodego układu zamkniętego (Rys. 11) potwierdzają analizę. Wzrost k_c podnosi pik rezonansowy. Jednak kluczowa jest charakterystyka fazowa – człon nieminimalnofazowy wprowadza dodatkowe, nieliniowe opóźnienie fazowe. Faza spada znacznie poniżej -180° , co drastycznie redukuje zapas fazy i jest główną przyczyną niestabilności układu.

6.4 Charakterystyki Nyquista



Rysunek 12: Charakterystyka Nyquista układu otwartego (B).

Wykresy Nyquista układu otwartego (Rys. 12) ilustrują problem stabilności układu. Z powodu dodatkowego opóźnienia fazowego, wykres zawija się i dla rosnącego k_c bardzo

szybko zbliża się do punktu krytycznego $(-1, 0j)$. Potwierdza to wnioski z linii pierwiastkowych: układ ma bardzo mały margines wzmocnienia i staje się niestabilny już przy niewielkich wartościach k_c .

6.5 Analityczne uzasadnienie wyników dla układu B (Obiekt całkujący z członem nieminimalnofazowym)

Model obiektu: $G_p(s) = \frac{1}{sT_i} \cdot \frac{1-sT_x}{1+sT_y}$.

Transmitancja układu otwartego: $G_o(s) = k_c \cdot G_p(s) = \frac{k_c(1-sT_x)}{sT_i(1+sT_y)}$.

6.5.1 Dokładność sterowania (Uchyb ustalony)

- **Uzasadnienie analityczne:** Podobnie jak w Układzie A, obecność członu całkującego $1/sT_i$ w pętli otwartej sprawia, że jest to **układ typu 1**. Z tego samego powodu (twierdzenie o wartości końcowej), **uchyb ustalony dla pobudzenia skokowego jest równy zero**.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k_c(1-0)}{sT_i(1+0)}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

- **Zgodność z pomiarami:** Pomiary (Rysunek 9) potwierdziły, że **uchyb ustalony wynosił zero** dla każdej wartości k_c .

6.5.2 Jakość odpowiedzi skokowej i stabilność

- **Uzasadnienie analityczne:** Układ ten jest **nieminimalnofazowy** z powodu obecności zera $z = +1/T_x$ w prawej półpłaszczyźnie zespolonej. Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$1 + G_o(s) = 0 \implies sT_i(1 + sT_y) + k_c(1 - sT_x) = 0$$

$$s^2(T_iT_y) + s(T_i - k_cT_x) + k_c = 0$$

Jest to układ **drugiego rzędu**. Z kryterium Routha-Hurwitza, dla stabilności wszystkie współczynniki muszą być dodatnie. O ile $T_iT_y > 0$ i $k_c > 0$, krytycznym warunkiem jest:

$$T_i - k_cT_x > 0 \implies k_c < \frac{T_i}{T_x}$$

Układ jest **warunkowo stabilny**, z wzmocnieniem granicznym $k_{gr} = T_i/T_x$. Zero w prawej półpłaszczyźnie przyciąga do siebie jedną z gałęzi linii pierwiastkowych (Rysunek 10), powodując szybką utratę stabilności. W dziedzinie czasu, zero jest analityczną przyczyną obserwowanego **początkowego zanurkowania** (odpowieź w kierunku przeciwnym do zadanego).

- **Zgodność z pomiarami:** Model analityczny idealnie wyjaśnia zachowanie układu. Pomiary na Rysunku 9 wykazały charakterystyczne zanurkowanie sygnału wyjściowego. Zwiększanie k_c nie tylko pogłębiało to zanurkowanie, ale też gwałtownie zwiększało oscylacje (dla $k_{c3} = 1.87$ układ był na granicy stabilności), co jest zgodne z istnieniem niskiego wzmocnienia granicznego k_{gr} .

6.6 Wpływ wzmocnienia sterownika typu P na postać wszystkich procesów przejściowych w układzie B

- Sygnał wyjściowy $c(t)$: Najbardziej charakterystyczną cechą jest początkowe zanurkowanie sygnału $c(t)$ w kierunku przeciwnym do wartości zadanej. Zwiększanie wzmocnienia k_c ma dwójaki negatywny skutek: drastycznie pogłębia to początkowe zanurkowanie oraz znacząco zwiększa przeregulowanie i oscylacyjność. Jak pokazała analiza linii pierwiastkowych i Nyquista, układ ten bardzo szybko traci stabilność wraz ze wzrostem k_c .
- Uchyb $e(t)$: Z powodu zanurkowania $c(t)$, uchyb $e(t)$ początkowo rośnie (błąd się powiększa), zanim zacznie maleć. Wzrost k_c pogłębia ten niekorzystny efekt. Proces przejściowy $e(t)$ jest silnie oscylacyjny. Podobnie jak w Układzie A, człon całkujący zapewnia jednak zerowy uchyb ustalony.
- Sygnał sterujący $u(t)$: Wzrost k_c prowadzi do bardzo agresywnego sygnału $u(t)$. Sterownik, reagując na rosnący błąd (spowodowany zanurkowaniem), generuje bardzo duży sygnał sterujący, który następnie prowadzi do gwałtownego przeregulowania.

7 Układ D

Ostatni badany układ to układ regulacji z zakłóceniem, składający się ze sterownika proporcjonalnego (P) i obiektu inercyjnego pierwszego rzędu.

Na podstawie identyfikacji przeprowadzonej w ćwiczeniu 1, przyjęto następujące parametry modeli:

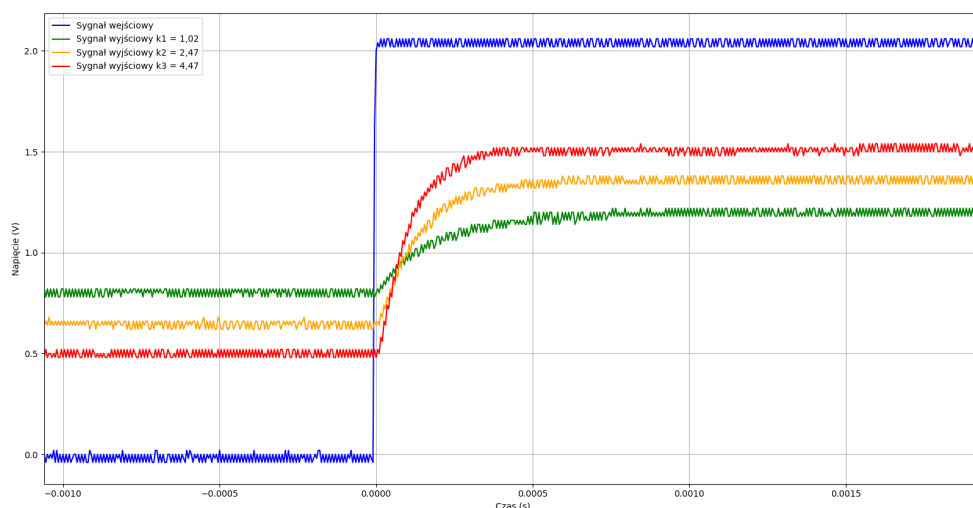
- Człon inercyjny 1 rzędu: $G(s) = \frac{k_p}{1+sT_p}$, gdzie $k_p = 0,871$ i $T_p = 0,78$ ms.

Badania przeprowadzono dla trzech wartości wzmocnienia k_c , obliczonych ze wzoru $k_c = 0,47 + n/2$:

- Dla $n_1 = 1,1$: $k_{c1} = 0,47 + 1,1/2 = 0,47 + 0,55 = \mathbf{1,02}$
- Dla $n_2 = 4,0$: $k_{c2} = 0,47 + 4,0/2 = 0,47 + 2,00 = \mathbf{2,47}$
- Dla $n_3 = 8,0$: $k_{c3} = 0,47 + 8,0/2 = 0,47 + 4,00 = \mathbf{4,47}$

7.1 Odpowiedzi skokowe

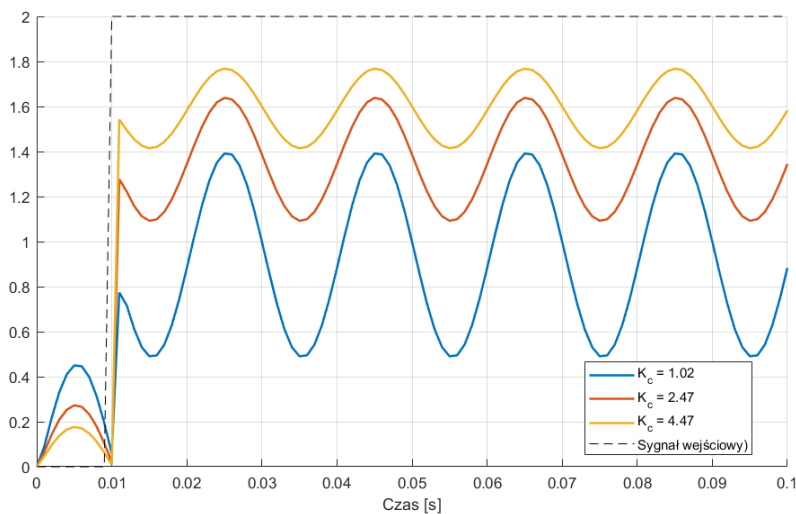
Na poniższym wykresie przedstawiono zarejestrowane odpowiedzi skokowe układu (D) dla trzech wyznaczonych wzmocnień k_c .



Rysunek 13: Odpowiedź skokowa układu (D) przy różnych wartościach wzmocnienia k_c .

Odpowiedzi skokowe dla Układu D (Rys. 13) są typowe dla układu inercyjnego pierwszego rzędu w pętli sprzężenia zwrotnego. Układ jest stabilny i nie wykazuje żadnych oscylacji ani przeregulowań, niezależnie od wartości k_c . Zwiększanie wzmocnienia k_c przynosi dwa efekty: po pierwsze, skraca czas odpowiedzi (system staje się szybszy), a po drugie, zmniejsza uchyb ustalony. Ze względu na brak członu całkującego w pętli, uchyb ten nigdy nie jest zredukowany do zera, ale staje się mniejszy dla wyższych k_c .

7.2 Wpływ zakłóceń na wartość sygnału wyjściowego

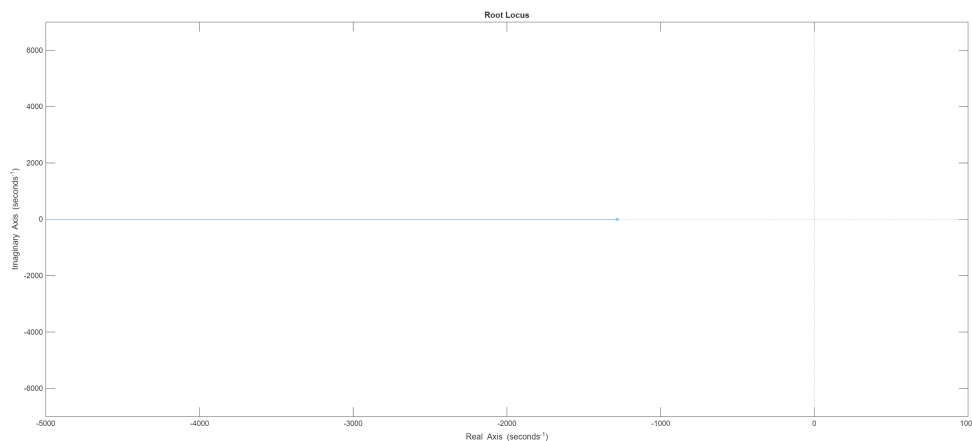


Rysunek 14: Symulacja wpływu zakłóceń na odpowiedź skokową układu (D).

Na podstawie przedstawionego wykresu można wywnioskować, że wzrost wzmocnienia k_c znacząco poprawia zdolność układu do tłumienia zakłóceń. Jest to ewidentne, gdy porównamy amplitudę oscylacji sygnału wyjściowego $c(t)$ dla różnych wartości k_c :

- Dla najmniejszego wzmocnienia $k_c = 1.02$ (linia niebieska), amplituda oscylacji wywołanych zakłóceniem jest największa.
- Dla największego wzmocnienia $k_c = 4.47$ (linia żółta), oscylacje te są najsłabiej tłumione i mają najmniejszą amplitudę.

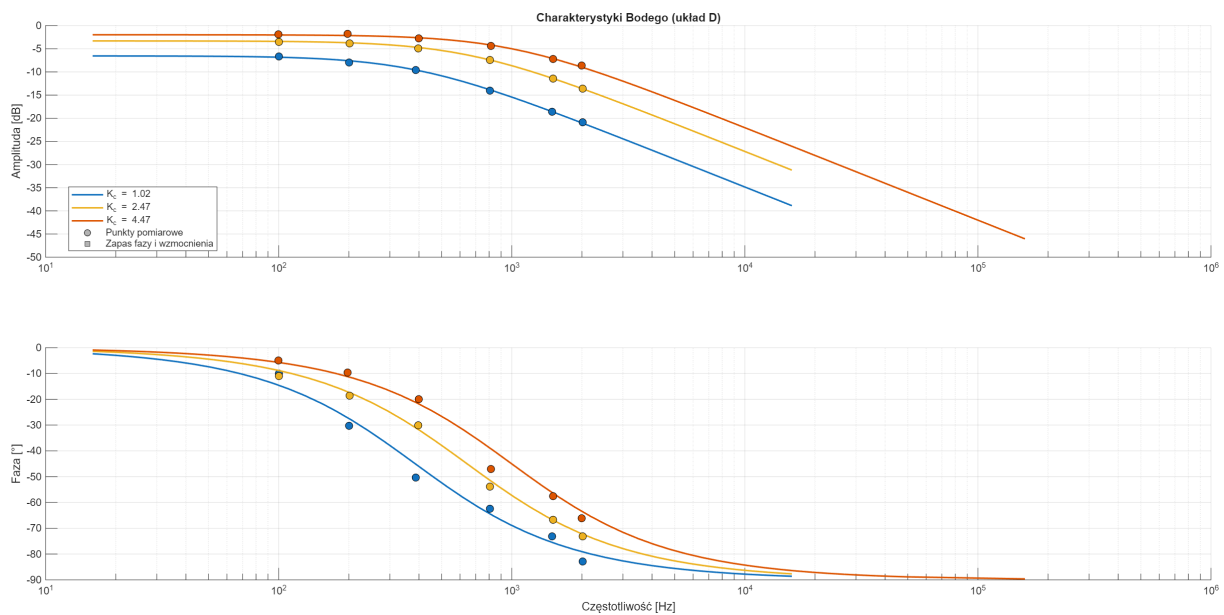
7.3 Linie pierwiastkowe



Rysunek 15: Linie pierwiastkowe układu otwartego (D).

Linie pierwiastkowe dla Układu D (Rys. 14) są najprostsze z analizowanych. Układ otwarty ma tylko jeden biegun na ujemnej osi rzeczywistej (w punkcie $-1/T_p$). W rezultacie, linia pierwiastkowa to pojedyncza gałąź biegnąca od tego bieguna w lewo, w kierunku $-\infty$. Ponieważ biegun układu zamkniętego zawsze pozostaje na ujemnej osi rzeczywistej i nigdy nie zbliża się do osi urojonej, system jest bezwarunkowo stabilny i nieoscylacyjny dla każdej dodatniej wartości k_c .

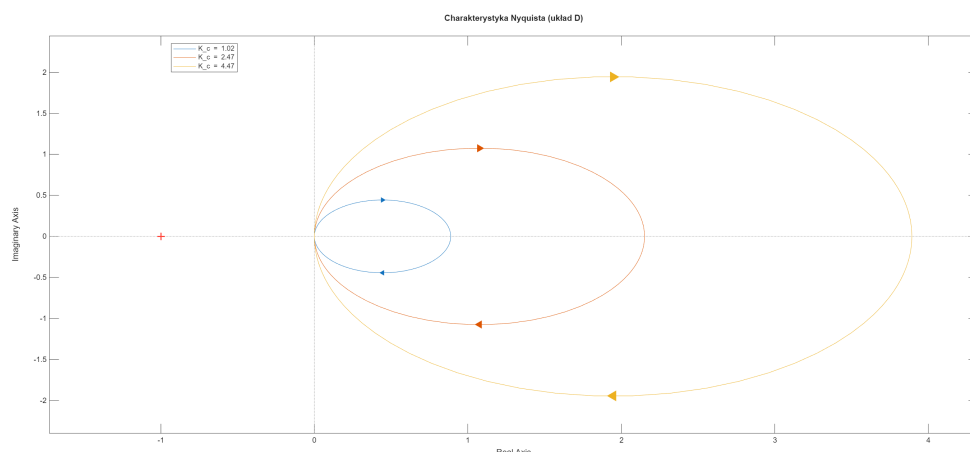
7.4 Charakterystyki Bodego



Rysunek 16: Charakterystyki Bodego układu zamkniętego (D).

Charakterystyki Bodego układu zamkniętego (Rys. 15) pokazują, że układ działa jak filtr dolnoprzepustowy. Zwiększanie k_c przesunęła całą charakterystykę amplitudową w górę i poszerza pasmo przenoszenia. Szersze pasmo oznacza, że układ szybciej reaguje na zmiany, co jest w pełni zgodne z szybszym czasem narastania widocznym na odpowiedziach skokowych (Rys. 13). Charakterystyka fazowa pokazuje maksymalne przesunięcie -90° , co potwierdza brak oscylacji.

7.5 Charakterystyki Nyquista



Rysunek 17: Charakterystyka Nyquista układu otwartego (D).

Wykres Nyquista dla układu otwartego (Rys. 16) to prosty półokrąg leżący w całości w prawej półpłaszczyźnie (przesunięty o wartość wzmocnienia $k_c \cdot k_p$). Wzrost k_c jedynie powiększa ten półokrąg. Wykres ten nigdy, nawet dla nieskończonego wzmocnienia, nie zbliży się do punktu krytycznego $(-1, 0j)$. Oznacza to, że układ posiada nieskończony zapas wzmocnienia i fazy, co czyni go bezwarunkowo stabilnym, co potwierdzają wszystkie pozostałe analizy.

7.6 Analityczne uzasadnienie wyników dla układu D (Obiekt inercyjny I rzędu)

Model obiektu: $G_p(s) = \frac{k_p}{1+sT_p}$.

Transmitancja układu otwartego: $G_o(s) = k_c \cdot G_p(s) = \frac{k_c k_p}{1+sT_p}$.

7.6.1 Dokładność sterowania (Uchyb ustalony)

- **Uzasadnienie analityczne:** Układ otwarty $G_o(s)$ nie posiada bieguna w początku układu (brak członu całkującego). Jest to **układ typu 0**. Uchyb ustalony dla pobudzenia skokowego wynosi:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_c k_p}{1+sT_p}} = \frac{1}{1 + k_c k_p}$$

Uchyb jest **niezerowy**, a jego wartość jest odwrotnie proporcjonalna do wzmocnienia pętli $k_c k_p$. Zwiększanie k_c powoduje **zmniejszenie uchybu ustalonego**.

- **Zgodność z pomiarami:** Pomiary (Rysunek 13) w pełni to potwierdzają. Zaobserwowano, że uchyb ustalony **nigdy nie osiąga zera**, ale jego wartość **maleje wraz ze wzrostem k_c** .

7.6.2 Jakość odpowiedzi skokowej i stabilność

- **Uzasadnienie analityczne:** Transmittancja układu zamkniętego $G_z(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$ ma postać:

$$G_z(s) = \frac{\frac{k_c k_p}{1+sT_p}}{1 + \frac{k_c k_p}{1+sT_p}} = \frac{k_c k_p}{1 + sT_p + k_c k_p} = \frac{\frac{k_c k_p}{1+k_c k_p}}{1 + s \frac{T_p}{1+k_c k_p}}$$

Jest to **obiekt inercyjny pierwszego rzędu** o wzmocnieniu $K_z = \frac{k_c k_p}{1+k_c k_p}$ i stałej czasowej $T_z = \frac{T_p}{1+k_c k_p}$. Układ posiada tylko jeden, rzeczywisty biegun ujemny $s = -1/T_z$. Taki układ jest **zawsze stabilny (bezwarunkowo)** i z natury **nie może wykazywać oscylacji ani przeregulowań**. Wzrost k_c powoduje zmniejszenie stałej czasowej T_z , co oznacza **przyspieszenie odpowiedzi** systemu.

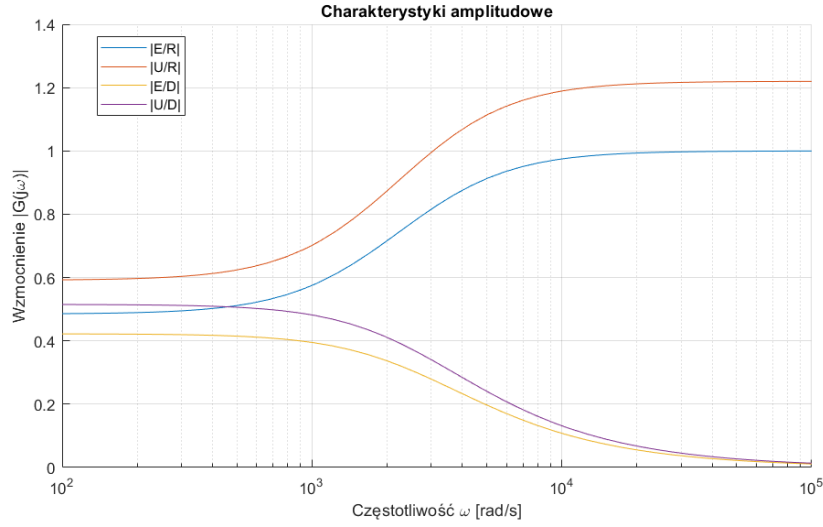
- **Zgodność z pomiarami:** Wyniki pomiarów (Rysunek 13) są w idealnej zgodzie z modelem. Stwierdzono, że układ **nie wykazuje żadnych oscylacji ani przeregulowań niezależnie od k_c** . Zaobserwowano również, że **zwiększanie k_c skraca czas odpowiedzi**. Analiza linii pierwiastkowych (Rys. 15) i Nyquista (Rys. 17) również potwierdza bezwarunkową stabilność.

7.7 Wpływ wzmocnienia sterownika typu P na postać wszystkich procesów przejściowych w układzie D

- Sygnał wyjściowy $c(t)$: Zwiększanie k_c przynosi wyłącznie pozytywne efekty dla procesu przejściowego: skraca czas odpowiedzi (system staje się szybszy). Co kluczowe, w tym układzie wzrost k_c nie powoduje żadnych przeregulowań ani oscylacji. Analiza linii pierwiastkowych potwierdziła, że biegun układu zamkniętego zawsze pozostaje na ujemnej osi rzeczywistej, co gwarantuje bezwarunkową stabilność i aperiodyczność odpowiedzi.
- Uchyb $e(t)$: Proces przejściowy $e(t)$ również staje się szybszy – uchyb szybciej stabilizuje się na swojej wartości ustalonej. W przeciwieństwie do układów A i B, układ ten posiada niezerowy uchyb ustalony. Zwiększanie k_c ma jednak korzystny wpływ na dokładność, zmniejszając wartość tego uchybu.
- Sygnał sterujący $u(t)$: Wzrost k_c skutkuje silniejszą reakcją początkową (większe $u(0)$), co przekłada się na szybsze narastanie $c(t)$. Proces przejściowy $u(t)$ jest, podobnie jak $e(t)$, aperiodyczny i stabilizuje się na niezerowej wartości.
- Sygnał $a(t)$: W schemacie układu sygnał $a(t)$ jest sumą sygnału sterującego $u(t)$ i zakłócenia $d(t)$. W analizie odpowiedzi skokowej (gdzie $d(t) = 0$), proces przejściowy $a(t)$ jest tożsamy z procesem przejściowym $u(t)$.

7.8 Charakterystyki amplitudowe

Do przeprowadzenia symulacji dobraliśmy wzmacnienie układu o wartości $k_c = 1.22$.



Rysunek 18: Charakterystyka Nyquista układu otwartego (D).

Analiza przedstawionych charakterystyk amplitudowych pozwala stwierdzić, że zaprojektowany układ z regulatorem proporcjonalnym (P) wykazuje uchyb ustalony – wzmacnienie $|G_{re}(j\omega)|$ (linia niebieska) dla niskich częstotliwości stabilizuje się na poziomie ok. 0.5, a nie dąży do zera. Oznacza to, że układ nie jest w stanie idealnie śledzić wolnozmiennych sygnałów zadanych $r(t)$. Zdolność ta dodatkowo pogarsza się wraz ze wzrostem częstotliwości, a dla $\omega > 10^4$ rad/s system praktycznie przestaje nadążać za wartością zadaną ($|G_{re}(j\omega)| \approx 1$). Podobnie, system wykazuje ograniczoną zdolność do tłumienia zakłóceń $d(t)$ w paśmie niskich częstotliwości, co obrazuje charakterystyka $|G_{de}(j\omega)|$ (linia żółta, która odpowiada również $|G_{dc}(j\omega)|$), mająca wzmacnienie ok. 0.43. Wskazuje to na niezerowy wpływ stałych lub wolnozmiennych zakłóceń na sygnał wyjściowy $c(t)$. Zaletą układu jest natomiast skuteczne filtrowanie zakłóceń o wysokich częstotliwościach, gdzie wzmacnienie $|G_{de}(j\omega)|$ wyraźnie spada do zera. Charakterystyki sygnału sterującego $u(t)$ ($|G_{ru}(j\omega)|$ i $|G_{ud}(j\omega)|$) pokazują, że regulator najaktywniej działa w paśmie niskich i średnich częstotliwości, aby przeciwdziałać błędom i zakłóceniom, jednocześnie (co jest korzystne) ignorując szumy o wysokiej częstotliwości.

8 Wnioski

Przeprowadzone ćwiczenie pozwoliło na praktyczną weryfikację wpływu wzmacnienia k_c sterownika proporcjonalnego na jakość i dokładność sterowania. Kluczowym wnioskiem jest fakt, że ten sam regulator (P) prowadzi do drastycznie różnych wyników, które są ściśle uzależnione od dynamiki sterowanego obiektu.

- **Dla Układu A** (obiekt II rzędu z członem całkującym), zaobserwowano klasyczny **kompromis między szybkością a stabilnością**. Zwiększanie k_c skracało co prawda czas narastania, ale odbywało się to kosztem znaczącego wzrostu przeregulowania i oscylacyjności. Analiza linii pierwiastkowych i Nyquista potwierdziła, że układ jest **warunkowo stabilny**, a wzrost k_c niebezpiecznie zmniejsza zapas stabilności. Niewątpliwą zaletą, wynikającą z obecności integratora w obiekcie, był zerowy uchyb ustalony niezależnie od wzmocnienia.
- **Dla Układu B** (obiekt nieminimalnofazowy z z członem całkującym), badanie wykazało fundamentalne ograniczenia sterowania. Obecność zera w prawej półpłaszczyźnie powodowała nie tylko charakterystyczne zanurkowanie odpowiedzi, ale także **bardzo szybką utratę stabilności**. Zwiększanie k_c drastycznie pogłębiało wszystkie negatywne aspekty odpowiedzi. Układ ten ma bardzo małe marginesy wzmocnienia.
- **Dla Układu D** (obiekt inercyjny I rzędu), zwiększanie wzmocnienia k_c przynosiło niemal wyłącznie korzyści: skracało czas odpowiedzi (system stawał się szybszy) oraz, co kluczowe dla układu typu 0, zmniejszało uchyb ustalony. Co najważniejsze, układ ten, jest **bezwarunkowo stabilny** i nie wykazuje żadnych przeregulowań ani oscylacji, niezależnie od wartości k_c . Zwiększenie k_c poprawiło również zdolność tłumienia zakłóceń.

Podsumowując, sterownik proporcjonalny jest prostym i skutecznym regulatorem, ale tylko dla prostych obiektów inercyjnych (jak Układ D). W przypadku obiektów wyższych rzędów (jak Układ A) jego stosowanie jest ograniczone przez niestabilność i wymaga kompromisu. Natomiast dla obiektów nieminimalnofazowych (jak Układ B) regulator P jest w praktyce niezalecany, gdyż wzmacnianie sygnału sterującego prowadzi głównie do pogorszenia jakości odpowiedzi i silnej destabilizacji systemu.