1 圈复杂度与图论

1.1 基路径测试

在进行白盒测试时，我们常常不能穷尽程序的所有路径。这时一个可行的选择是将程序看成是由一个个独立路径组合而成，转而去测试每一条独立路径上程序的行为。这里路径指的是从程序的起始点到结束点的一条通路，这里我们假设程序有且只有一个起始点与结束点。而独立路径指的是这条路径不能通过其他路径的线性组合得到。这种将程序分解成独立路径的思想是由 McCabe 在他 1976 年的论文《A Complexity Measure》中提出的，在这篇论文中，他也意识到了这是一种有用的测试方法。

1.2 独立路径个数 = 圈复杂度

有了这种思想，我们的第一个问题就是对于特定的程序，这样的独立路径有多少个。McCabe 直接引用了图论中的结论：

定义 1.1 *设图 G 有 n 个顶点，e 条边，p 个连通分枝，那么其圈复杂度（cyclomatic number）定义为：$v(G) = e - n + p$。*

定理 1.1 *对于一个强连通图，其圈复杂度等于其极大线性无关回路的个数。*

这样，McCabe 在控制流图中添加一条边，将程序的结束点与开始点相连，使之成为强连通的，此时运用定理 1.1，直接对新得到的图运用公式得到程序的独立路径个数。下面我们就证明这个定理。

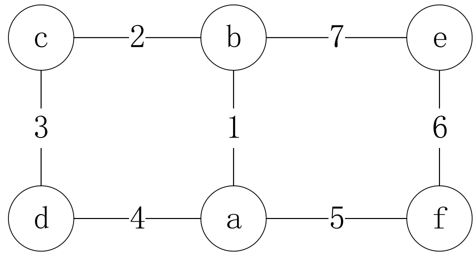
我们先证明两个引理。

引理 1.2 *对于 s-多重图（即两个点之间至多有 s 条边）G，如果在其两个点 a, b 间再增加一条边，构成新图 G' 那么有：*

1. *如果 a, b 是同一顶点，或者是连通的，那么 $v(G') = v(G) + 1$*
2. *对于 a, b 的其他情况，那么 $v(G') = v(G)$*

证明 1.1 *考虑这种操作的影响，如果 a, b 是同一顶点，或者是连通的，那么节点数不变，连通分支数不变，只有边数增加 1. 故 $v(G') = v(G) + 1$；对于 a, b 的其他情况，节点数不变，连通分支数减少 1，边数增加 1，故 $v(G') = v(G)$。*

下面为了形式化的表示独立圈的概念，我们将一个圈用向量的形式表示：为边编号为 $1, 2, \cdots, k$，为边任意指定一个方向以抵消同一条边相反方向的两次经过，那么向量 $(c_1, c_2, \cdots, c_k)$ 就代表这个圈经过了第 $1, 2, \cdots, k$ 条边 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 次。这种表示方法可以构成一个线性空间，故我们可以如常定义线性独立的含义。下面我们举一个简单的例子。



如上图所示，图中 $n = 6, e = 7p = 1, v(G) = 7 - 6 + 1 = 2$. 我们选择 $a \to b \to c \to d \to a$ 和 $a \to b \to e \to f \to a$ 作为一组基。表为向量：$x = (1,1,1,1,0,0,0), y = (1,0,0,0,1,1,1)$，现在考虑图中另外的圈，如 $a \to f \to e \to b \to b \to a, z_1 = (-1,0,0,0,-1,-1,-1) = -y$, 又如 $c \to b \to e \to f \to a \to d \to c, z_2 = (0,-1,-1,-1,1,1,1) = -x + y$. 我们还可以注意到这里运算的图论意义：对向量取反即圈反向，乘以一个正整数 n 即重复圈 n 次。

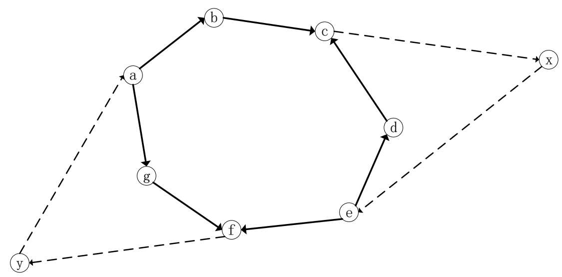
引理 1.3 *对于 s-多重图 G，其圈复杂度等于其极大线性无关圈数。*

证明 1.2 *我们考虑将图 G 中的边全部去掉，再一条一条增加回去。首先我们知道初始没有边时 $v(G) = 0$。又由引理 1.2知，只有在将边连成环时 $v(G)$ 才会增加。现在假设我们已经有了一组基包括圈 $\mu_1, \mu_2, \cdots$, 下面添加一条边 u_k 后形成了一些新环 $\nu_1, \nu_2, \cdots$。下面我们说明此时 $V(G)$ 与极大线性无关圈数同时增加 1. 前者是由引理 1.2显然的。考虑向量 ν_1, 它必然不能被 $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 线性表示，这是因为这些圈不包含边 u_k, 其向量的第 k 个分量均为 0, 而 ν_1 向量的第 k 个分量为 1. 另一方面 $\mu_2, \cdots$ 不包含新边，已经能够被 $\mu_1, \mu_2, \cdots, nu_1$ 线性表示。故其极大线性无关圈数也增加 1. 如此我们就证明了这个引理。*

下面我们就来证明定理 1.1。首先我们说明证明的思路：在引理 1.3中我们已经说明了如何处理无向图，那么在有向图中，如果我们忽略方向，得到对应的 2-多重图，再将其中的圈仿照引理 1.3处理，将其表示为回路的线性组合，是否就完成了证明呢？这里有一个方向导致的重要问题：即新得到的图中的圈可能在原图中由于边的方向相对而不是回路，并且要使用回路而不是圈构造。

证明 1.3 *考虑将这个强连通图变为一个 2-多重图。对应这个多重图中的任意一个圈 μ, 其上的顶点可以分为三类：*

1. *顶点有在原图中有 1 条出边，1 条入边，记为 S*
2. *顶点有在原图中有 2 条出边，记为 S'*
3. *顶点有在原图中有 2 条入边，记为 S''*



上图中，b，g，d 是第一类节点，a，e 是第二类节点，c，f 是第三类节点。我们首先可以发现：第二类和第三类顶点是交替出现，数量相等的。
下面开始我们的构造：我们记 $x'_1, x'_2, \cdots \in S'$,$x''_1, x''_2, \cdots \in S''$ 那么在圈上 x'_1 遇到的第一个非 S 中的顶点为 x''_1, 依次类推。我们直接用例子说明这种构造方法：
$\mu = a \to b \to c \to d \to e \to f \to g \to a$
$= (a \to b \to c) - (e \to d \to c) + (e \to f) - (a \to g \to f)$
$= (a \to b \to c) - (c \to x \to e \to d \to c) + (c \to x \to e) + (e \to f) - (f \to y \to a \to g \to f) + (f \to y \to a)$
$= (a \to b \to c) - \mu_1 + (c \to x \to e) + (e \to f) - \mu_2 + (f \to y \to a)$
$= \mu' - (\mu_1 + \mu_2)$
这里的关键在于为什么存在这样的 x, y 节点，原因是图的强连通性，使得 x''_i 必有一条路径通向 x'_{i+1} 下面我们定义记号 $\nu[a, b]$ 意为节点 a 到 b 的一条路径，那么证明如下：
$\mu = \mu[x'_1, x''_1] - \mu[x'_2, x''_1] + \mu[x'_2, x''_2] + \cdots$
$= \mu[x'_1, x''_1] + \mu[x''_1, x'_2] + \mu[x'_2, x''_2] + \cdots - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots)$
$= \mu' - (\mu_1 + \mu_2 + \cdots)$
这样，对与图中任意的圈，我们将其分解成了原图中回路的线性组合。这些回路构成了一组基，根据引理 *1.3* 我们知道这一基构成的线性空间维数等于 $v(G)$，由此我们证明了这个结论。

1.3 圈复杂度的计算方法

1.3.1 构造新图求 $v(G')$

这是 McCabe 给出的定义。添加一条新边由结束点指向开始点，求 $e - n + p$，常常只考虑单个程序 $p = 1$ 故为 $e - n + 1$

1.3.2 不构造新图，求 $e - n + 2p$

考虑这样新图中新增的边的影响 (处于一般性考虑，图 G 由 p 个互不连通的程序构成)：它将连通分支个数从 0 变成了 p，并将边数增加 p。即将图 G 变为图 G' 时，$n' = n, e' = e + p, p' = 0 + p$ 由此我们得到了另一个常用的公式：$v(G') = e' - n' + p' = (e + p) - n + (0 + p) = e - n + 2p$, 常常只考虑单个程序 $p = 1$ 故通常形式为 $e - n + 2$

1.4 对于平面图，求围成区域的个数

借用上一小节的公式 $v(G') = e - n + 2$，结合平面图的欧拉公式：$n - e + f = 2$，立刻得到 $v(G') = f - 2 + 2 = f$
那么控制流图一定是平面图吗？显然不是，考虑 $K_{(3,3)}$ 即可。

1.4.1 对于结束点唯一的程序，求判断节点个数加 1

这是非常本质的洞见，是判断节点的增加导致了圈复杂度的增加，顺序执行的代码再长也不会增加圈复杂度。由此我们还可以设想一种极端情况：程序进入死循环，即控制流图中存在无出口的自环，此时这个自环是不会增加圈复杂度的，因为它并非判断节点。下面给出对有且只有一个起始点与结束点的程序的证明，这里将多判断节点都转换为 2 判断节点：

证明 1.4 *我们仍从公式 $v(G') = e - n + 2$ 开始，考虑所有边与其起点的关系，可以分为三类：*

1. *结束点，无出边*
2. *判断节点，2 条出边，有 n_1 个*
3. *一般节点，1 条出边，有 n_2 个*

那么我们有 $1 + n_1 + n_2 = n$ 且 $2n_1 + n_2 = e$ 带入公式即得 $v(G') = (2n_1 + n_2) - (1 + n_1 + n_2) + 2 = n_1 + 1$ 这就得到了我们想要的结论。McCabe 在他的论文中证明了更一般的情况：循环复杂度如下：$\pi - s + 2$，其中,π 是程序中决策点的个数,s 为结束点的个数.

1.5 参考资料

一般关于基路径测试的知识可见于任何软件工程或软件测试的教材。本文参考或翻译自以下资料：

1. 维基百科 https://zh.wikipedia.org/wiki/
2. McCabe. A Complexity Measure (PDF). IEEE Transactions on Software Engineering. December 1976: 308–320.
3. C. Berge, Graphs and Hypergraphs. Amsterdam, The Netherlands:North-Holland,1973

论文中包含的内容非常丰富，又不十分难懂，可惜时间所限没有细读。McCabe 作为数学出身后转向编程的软件工程研究者，懂得线性代数与图论并不奇怪，但是他能够发现程序的控制流图中的线性空间，并结合理论发展出基于圈复杂度的程序分解与测试方法十分可贵。数学有趣之处不仅在于其高深的理论与严谨的推理，更在于它应用广泛，无处不在。