趣题: 满足条件的所有 n

题目

设自然数 $n>1$, 现有 $n-1$ 个分数 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}$, 将这些分数化为最简分数, 把这些最简分数的分子相加, 得到的和记为 $f(n)$. 求所有自然数 n , 满足 $f(n)$ 与 $f(2021n)$ 的奇偶性不同.

Solution 1

注意到

- 加减一个偶数不影响一个数的奇偶性
- 乘除一个奇数不影响一个数的奇偶性

我们只关心 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{n-1}{n}$ 的最简分数形式中奇数分子数量的奇偶性.

如果 n 是奇数, 那么 $f(n)$ 为奇数; $2021n$ 也是奇数, 故 $f(2021n)$ 也为奇数, 不满足条件.

如果 n 是偶数, 记 $n=2^km$, 其中 m 为奇数. 考虑 $\frac{i}{n},1\le i\le n-1$, 若 i 为奇数, 那么约分后也为奇数, 这样的奇数一共有 $\frac{n}{2}=2^{k-1}m$ 个; 若 i 为偶数, 设 $i=2^{k_i}m_i$, 只有当 $k_i>k$ 时约分结果为为偶数, 这样的偶数一共有 $\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\rfloor$ 个, 所以 i 为偶数时提供的奇数为 $2^{k-1}m-1-\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\rfloor$ 个. 对于偶数 n , 最终 $f(n)$ 的奇偶性与 $2^{k-1}m+2^{k-1}m-1-\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\rfloor=2^km-1-\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\rfloor\equiv\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\rfloor+1$ 相同. 而 $f(2021n)\equiv\lfloor\frac{2021n}{2^{k+1}}\rfloor+1=\lfloor\frac{2^k\cdot 2021m}{2^{k+1}}\rfloor+1=\lfloor\frac{2^k\cdot 2020m}{2^{k+1}}+\frac{2^k\cdot m}{2^{k+1}}\rfloor+1=\lfloor 1010m+\frac{2^k\cdot m}{2^{k+1}}\rfloor+1=1010m+\lfloor\frac{2^k\cdot m}{2^{k+1}}\rfloor+1\equiv\lfloor\frac{2^k\cdot m}{2^{k+1}}=\lfloor\frac{n}{2^{k+1}}\rfloor+1\equiv f(n)$, 故满足条件的偶数 n 也不存在.

综上, 不存在满足要求的自然数 n .