

## ГЛАВА 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 1.1. Фазовое пространство и фазовые портреты динамических систем

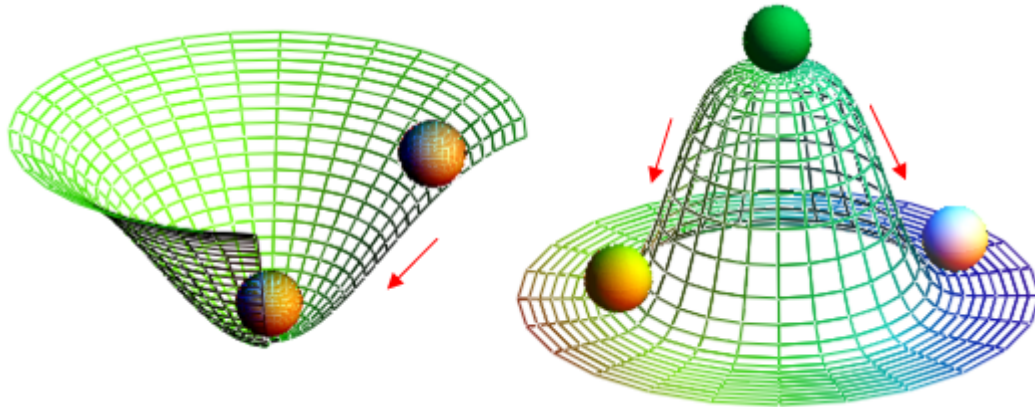


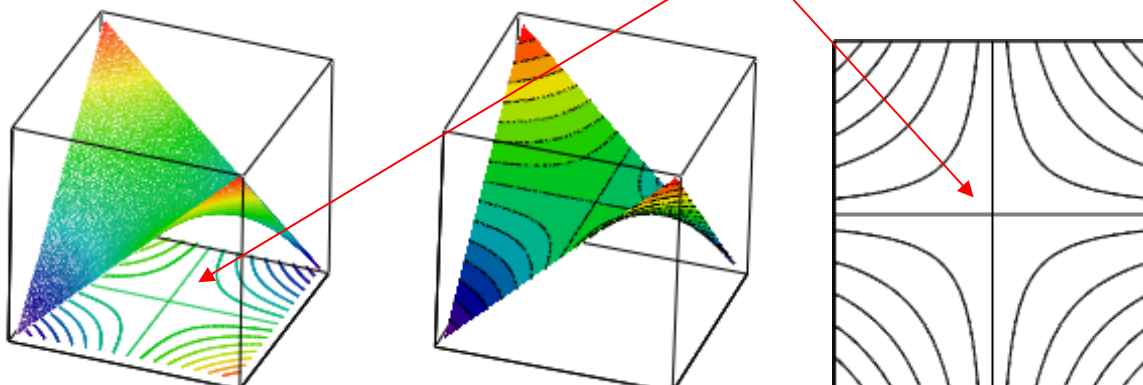
Рис. 1 Устойчивая система

Неустойчивая система

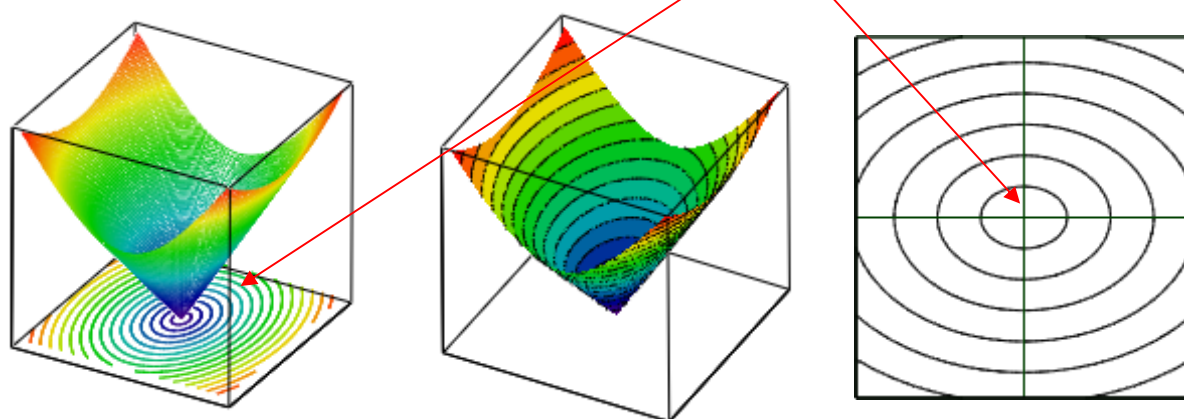
Любая электромеханическая система является динамической системой. Элементы, входящие в систему могут быть нелинейными, следовательно, дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы являются нелинейными.

Для исследования нелинейных систем и наглядного представления, происходящих в них сложных динамических процессов использует *фазовое пространство*, в котором строятся *фазовые портреты* (см. рис. 2). Каждая динамическая система имеет свой фазовый портрет. На фазовом портрете изображаются *особые точки* – *точки положения равновесия*, которые помогают, без решая дифференциальных уравнений, предсказать поведение динамической системы. Эти точки равновесия могут быть *устойчивыми* или *неустойчивыми*. Если динамическая система находится в окрестности устойчивой точки равновесия, то малые возмущения не нарушат устойчивой работы системы (см рис). Если точка положения равновесия не устойчива, то возмущения будут прогрессировать что может привести к разрушению системы (см. рис/ 2).

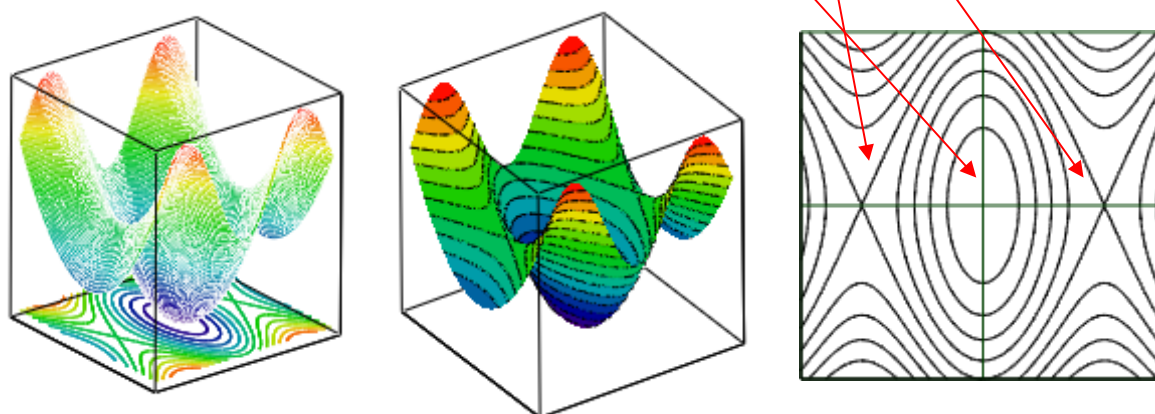
### Особая точка типа "Седло"



### Особая точка типа "Центр"



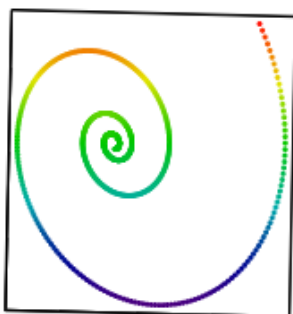
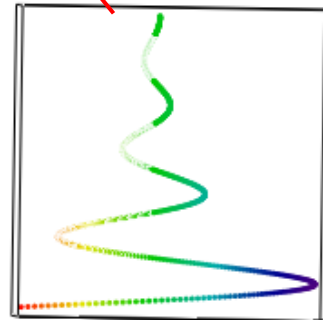
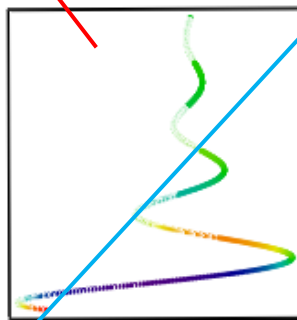
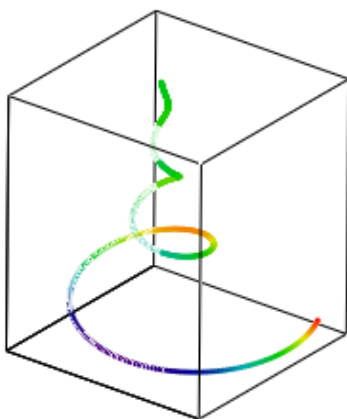
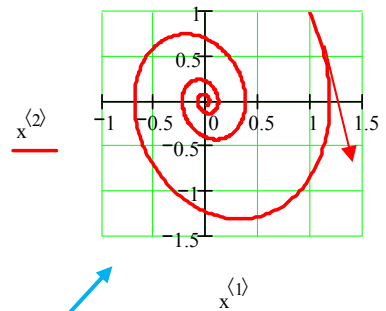
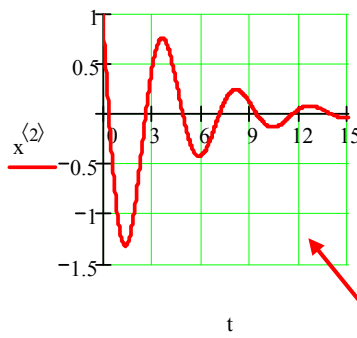
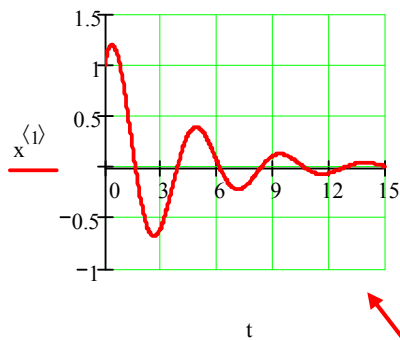
### Особые точки типа "Центр", "Седло", Линия разделяющая решения "Сепаратриса"



**Рис.2.** Фазовые портреты динамических систем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = y \\ \frac{d}{dt}y = -\frac{a_0}{a_2}x - \frac{a_1}{a_2}y \end{cases} \quad a := (2 \ 0.5 \ 1)^T \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix} \quad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -0.25 + 1.392i \\ -0.25 - 1.392i \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x \quad T := 15 \quad N := 10^2 \cdot 7 \quad x := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, T, N, D\right] \quad t := x^{(0)}$$



Проекции пространственной кривой на плоскости  $x-t$ ,  $y-t$ ,  $x-y$ .

Рассмотрим метод фазового пространства применительно к динамической системе второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \end{cases}, \quad (1)$$

здесь  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$  нелинейные функции своих аргументов.

Чтобы получить фазовые траектории нужно исключить время для чего делим второе уравнение на первое

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} \quad (2)$$

В точках положения равновесия производные по времени превращаются в нуль и тогда получаем отношение неопределенностей:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x, y)}{F_1(x, y)} = \frac{0}{0} \quad (3)$$

Точки, в которых встречаются неопределенности, называются особыми точками. В особых точках на фазовой плоскости решения могут разветвляться.

Опишем алгоритм поиска точек положения равновесия.

В положении равновесия – при установившемся процессе искомые величины  $x$  и  $y$  не изменяются, поэтому производные равны нулю:

$$\begin{cases} 0 = F_1(x, y) \\ 0 = F_2(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

Решая полученную систему нелинейных уравнений, находим точки положения равновесия  $x_0, y_0$ . После определения координат точки положения равновесия нужно определить характер точки. Для определения характера точки, разложим функции  $F_1(x, y)$  и  $F_2(x, y)$  в окрестности точек положения равновесия  $x_0, y_0$ , и ограничиваемся первыми тремя членами разложения:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = F_1(x_0, y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(y - y_0) + \dots \\ F_2(x, y) = F_2(x_0, y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(y - y_0) + \dots \end{cases} \quad (5)$$

Выписываем коэффициенты при линейных членах и получаем матрицу Якоби или Якобиан:

$$\mathbf{A}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Элементы матрицы Якоби  $a_{i,j}$  являются постоянными величинами.

Следующий этап – определение характера точки. Для этого нужно найти собственные числа матрицы Якоби  $\lambda$ , решая характеристического уравнение.

$$|\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}| = 0. \quad (7)$$

Где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Определять собственные числа удобно с помощью программы **MathCAD** с использованием функции **eigenvals(A)**, при этом возможны несколько случаев.

**1. Оба собственных числа вещественны и положительны:**



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами  $x_0, y_0$  называется **неустойчивый узел**.

**2. Оба собственных числа вещественны и отрицательны:**



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами  $x_0, y_0$  называется **устойчивый узел**.

**3. Собственные числа вещественны и имеют разные знаки:**



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \quad \text{или} \quad \lambda_2 < 0, \lambda_1 > 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами  $x_0, y_0$  называется **седло**, или **седловой точкой**.

4. Собственные числа комплексно сопряженные числа и имеют



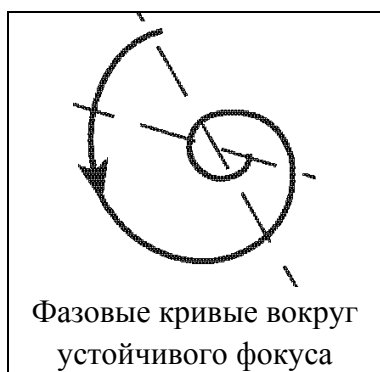
положительные действительные части:

$$\lambda_1 = \beta + j\omega, \lambda_2 = \beta - j\omega, \beta > 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами  $x_0, y_0$  называется

**неустойчивый фокус.**

5. Собственные числа комплексно сопряженные числа и имеют



отрицательные действительные части:

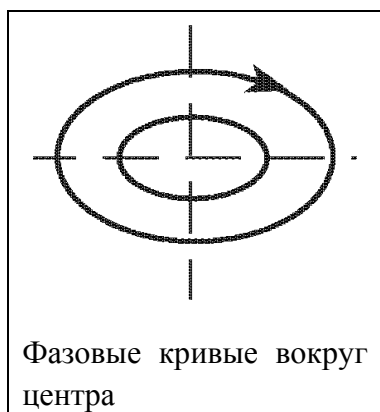
$$\lambda_1 = \beta + j\omega, \lambda_2 = \beta - j\omega, \beta < 0$$

Тогда, точка положения равновесия с координатами  $x_0, y_0$  называется

**устойчивый фокус.**

6. Собственные числа чисто мнимые

сопряженные числа:



$$\lambda_1 = j\omega, \lambda_2 = -j\omega$$

Тогда точка положения равновесия с координатами  $x_0, y_0$  называется **центр.**

Приведем несколько примеров определения точек положения равновесия и определим их характер, используя **MathCAD**.

ORIGIN:= 1

### Пример 1. Дана динамическая система

$$\frac{d}{dt}x = x^2 + y^2 - 17$$

$$\frac{d}{dt}y = x \cdot y + 4$$

Находим точки равновесия динамической системы

$$x^2 + y^2 - 17 = 0$$

$$x \cdot y + 4 = 0$$

$$z := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 17 \\ x \cdot y + 4 \end{pmatrix} \text{ solve, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_0 := z^{(1)} \quad y_0 := z^{(2)} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Разложим нелинейные функции в окрестности точек положения равновесия

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = -4, y = 1, 2 \rightarrow (-17) - 8 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$a := \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} -8.449 \\ -3.551 \end{pmatrix} \text{ точка с координатами } x=-4 \text{ и } y=1 \text{ является}$$

**устойчивым узлом**

$$x \cdot y \text{ series, } x = -4, y = 1, 2 \rightarrow 4 - 4 \cdot y + x$$

$$|a - \lambda \cdot I| \rightarrow 30 + 12 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = -1, y = 4, 2 \rightarrow (-17) - 2 \cdot x + 8 \cdot y$$



$$a := \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} -7.179 \\ 4.179 \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x = -1$  и  $y = 4$  является **седлом**

$$x \cdot y \text{ series, } x = -1, y = 4, 2 \rightarrow 4 - y + 4 \cdot x$$

$$|a - \lambda \cdot I| \rightarrow (-30) + 3 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = 1, y = -4, 2 \rightarrow (-17) + 2 \cdot x - 8 \cdot y$$

$$a := \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 7.179 \\ -4.179 \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x = 1$  и  $y = -4$  является **седлом**

$$x \cdot y \text{ series, } x = 1, y = -4, 2 \rightarrow 4 + y - 4 \cdot x$$

$$|a - \lambda \cdot I| \rightarrow (-30) - 3 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = 4, y = -1, 2 \rightarrow (-17) + 8 \cdot x - 2 \cdot y$$

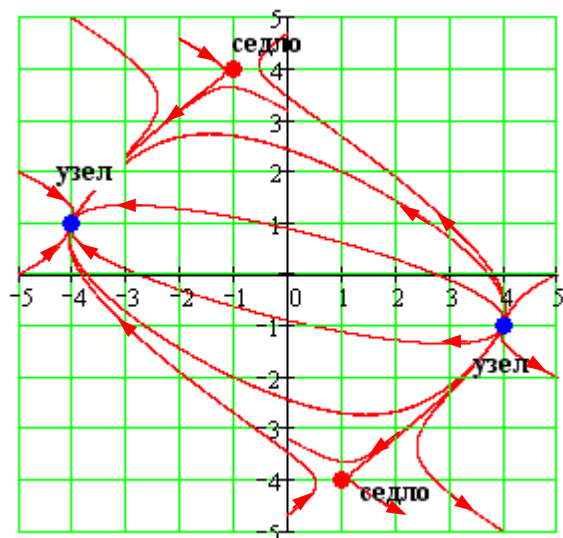
$$x \cdot y \text{ series, } x = 4, y = -1, 2 \rightarrow 4 + 4 \cdot y - x$$

$$a := \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 8.449 \\ 3.551 \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x = 4$  и  $y = -1$  является **неустойчивым узлом**

$$|a - \lambda \cdot I| \rightarrow 30 - 12 \cdot \lambda + \lambda^2$$

Фазовый портрет динамической системы



**Пример 2. Дана динамическая система**

$$\frac{d}{dt}x = x^2 - y^2 - 5 \quad \frac{d}{dt}y = x^2 + y^2 - 13$$

Находим точки положения равновесия динамической системы

$$x^2 - y^2 - 5 = 0 \quad x^2 + y^2 - 13 = 0$$

$$z := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - 5 \\ x^2 + y^2 - 13 \end{pmatrix} \text{ solve, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \\ 3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x_0 := z^{(1)} \quad y_0 := z^{(2)} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Разложим нелинейные уравнения системы в окрестности точки положения равновесия динамической системы

$$x^2 - y^2 \text{ series, } x = 3, y = 2, 2 \rightarrow (-5) + 6 \cdot x - 4 \cdot y$$

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = 3, y = 2, 2 \rightarrow (-13) + 6 \cdot x + 4 \cdot y$$

$$a := \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad |a - \lambda \cdot I| \rightarrow 48 - 10 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 5 + 4.796i \\ 5 - 4.796i \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x=3$  и  $y=2$  является

**неустойчивым фокусом**

$$x^2 - y^2 \text{ series, } x = -3, y = 2, 2 \rightarrow (-5) - 6 \cdot x - 4 \cdot y$$

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = -3, y = 2, 2 \rightarrow (-13) - 6 \cdot x + 4 \cdot y$$

$$a := \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \quad |a - \lambda \cdot I| \rightarrow (-48) + 2 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x=-3$  и  $y=2$  является **седлом**

$$x^2 - y^2 \text{ series, } x = 3, y = -2, 2 \rightarrow (-5) + 6 \cdot x + 4 \cdot y$$

$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = 3, y = -2, 2 \rightarrow (-13) + 6 \cdot x - 4 \cdot y$$

$$a := \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \quad |a - \lambda \cdot I| \rightarrow (-48) - 2 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x=3$  и  $y=-2$  является **седлом**

$$x^2 - y^2 \text{ series, } x = -3, y = -2, 2 \rightarrow (-5) - 6 \cdot x + 4 \cdot y$$

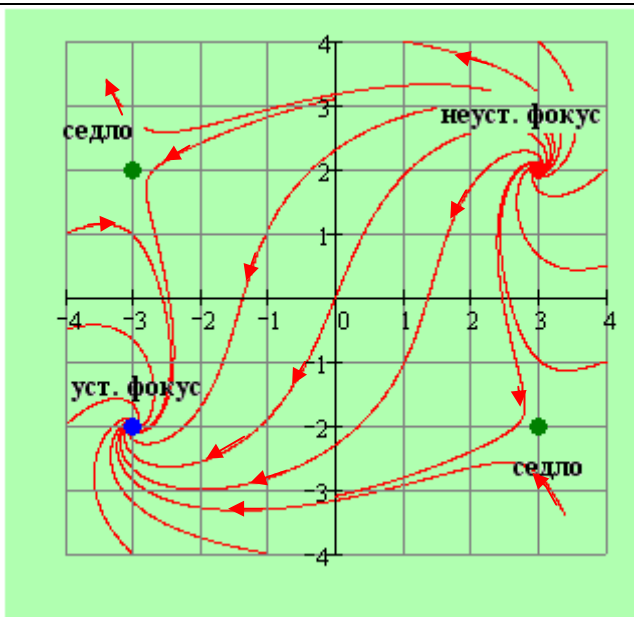
$$x^2 + y^2 \text{ series, } x = -3, y = -2, 2 \rightarrow (-13) - 6 \cdot x - 4 \cdot y$$

$$a := \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad |a - \lambda \cdot I| \rightarrow 48 + 10 \cdot \lambda + \lambda^2$$

$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} -5 + 4.796i \\ -5 - 4.796i \end{pmatrix}$  точка с координатами  $x=3$  и  $y=2$  является

**устойчивым фокусом**

Фазовый портрет динамической системы



**Пример 3. Определить тип точки положения равновесия линеаризованной динамической системы**

$$\frac{d}{dt}x = -x - 4y \quad \frac{d}{dt}y = 2x + 5y$$

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Тип точки } x=0, y=0 \text{ } \textit{неустойчивый}$$

*узел*

**Пример 4. Определить тип точки положения равновесия линеаризованной динамической системы**

$$\frac{d}{dt}x = -x - y \quad \frac{d}{dt}y = x - 3y$$

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Тип точки } x=0, y=0 \text{ } \textit{устойчивый}$$

*узел*

### 2.1.1. Построение фазовых портретов с использованием поверхностей

Приведем еще пару примеров с построением поверхностей, позволяющих установить структуру разбиения фазовой плоскости на траектории. Предварительно сделаем некоторые полезные вспомогательные вычисления. Запишем уравнение движения Ньютона для тела с единичной массой, на которое действует сила  $F(x)$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad (8)$$

Учитывая, что сила равняется градиенту потенциальной функции с отрицательным знаком, уравнение можно переписать в виде:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (9)$$

Это уравнение можно преобразовать умножением каждой стороны на скорость  $v = dx / dt$

$$v \frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + U \right) = 0$$

Из полученного соотношения следует, что выражение в скобках равно некой константе  $E$

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E(x, v) \quad \text{где} \quad U(x) = -\int_0^x F(x) dx \quad (10)$$

Теперь перейдем к исследованию динамической системы, имеющей вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 4x^3 \end{cases}$$

Если в первом выражении системы скорость обозначить через  $2y$ , а во втором уравнении правую часть считать за силу, действующую на частицу с единичной массой, тогда можно записать вспомогательную потенциальную функцию  $U(x)$  в виде:

$$U(x) = -\int_0^x (4x - 4x^3) dx = -2x^2 + x^4$$

Тогда выражение поверхности постоянной энергии будет иметь вид:

$$U(x) + 2y^2 = E \rightarrow (-2x^2 + x^4 + 2y^2) = E$$

Для построения фазового портрета строим поверхность постоянной энергии

Для решения этой задачи будем использовать **MathCAD**

$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = 2y \\ \frac{d}{dt}y = 4x - 4x^3 \end{cases}$ $F_1(x, y) := 2 \cdot y \quad F_2(x, y) := 4 \cdot x - 4 \cdot x^3$ <p>Находим точки положения равновесия</p> $z := \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \left  \begin{array}{l} \text{solve,} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1. & 0 \\ -1. & 0 \end{pmatrix} \quad x := z^{\langle 0 \rangle} \quad y := z^{\langle 1 \rangle}$
--

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Находим Якобиан

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad A(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 - 12 \cdot x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Определяем характер точки с координатами 0, 0

$$A_1 := A(x_0, y_0) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A_1)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 2.828 \\ -2.828 \end{pmatrix} \quad \textbf{Седловая точка}$$

Определяем характер точки с координатами 1, 0

$$A_2 := A(x_1, y_1) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A_2)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 4i \\ -4i \end{pmatrix} \quad \textbf{Центр}$$

Определяем характер точки с координатами -1, 0

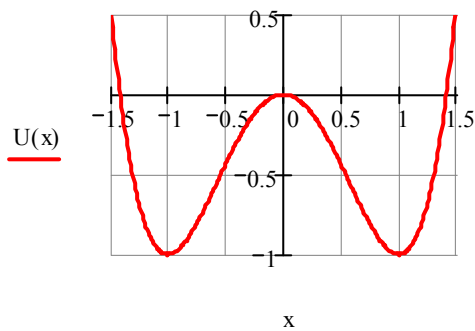
$$A_3 := A(x_2, y_2) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A_3)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 4i \\ -4i \end{pmatrix} \quad \textbf{Центр}$$

Записываем вспомогательную потенциальную функцию  $U(x)$

$$U(x) := - \int_0^x 4 \cdot x - 4 \cdot x^3 \, dx \rightarrow (-2) \cdot x^2 + x^4$$

$$x := -1.5, -1.5 + 0.01.. 1.5$$



Записываем вспомогательную функцию энергии  $E(x, y)$

$$E(x, y) := y^2 \cdot 2 + U(x)$$

Рисуем фазовый портрет

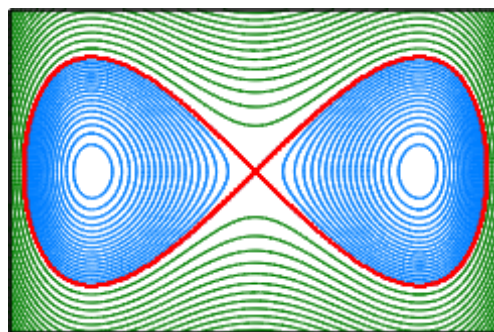
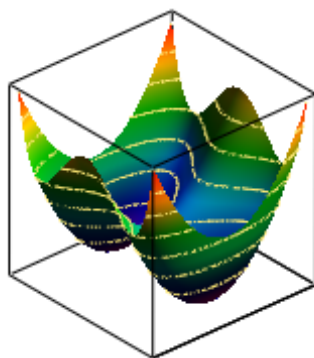
$$N := 251 \quad i := 0..N \quad j := i \quad x_i := -1.5 + \frac{3}{N} \cdot i \quad y_j := -1 + \frac{2}{N} \cdot j$$

Поверхность  $E_{i,j} := E(x_i, y_j)$

Поверхность ограниченная сепаратрисой  $E1_{i,j} := \text{if}(E_{i,j} < 0, E_{i,j}, 0)$

Поверхность за сепаратрисой  $E2_{i,j} := \text{if}(E_{i,j} > 0, E_{i,j}, 0)$

Сепаратриса  $\delta := 10^{-1} \quad Es_{i,j} := \text{if}(E_{i,j} > 0, \delta, 0)$

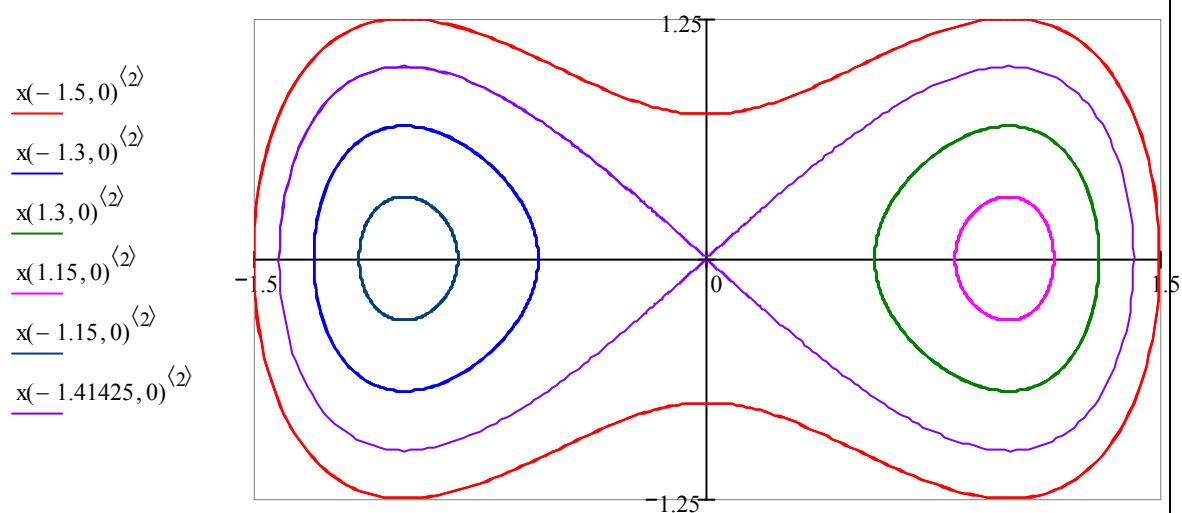


Для сравнения приведем непосредственное решение уравнений

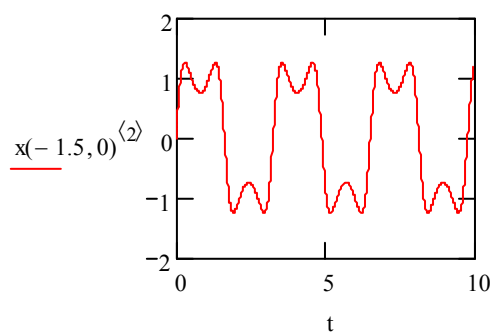
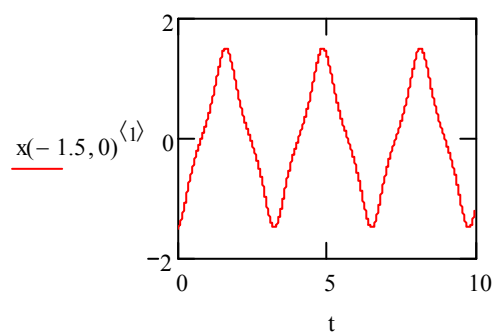
Все кривые на фазовой плоскости замкнутые кривые, значит, решения будут периодическими



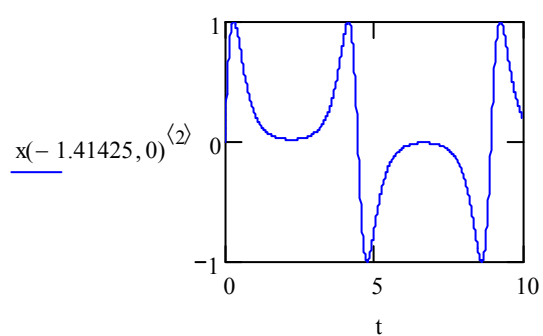
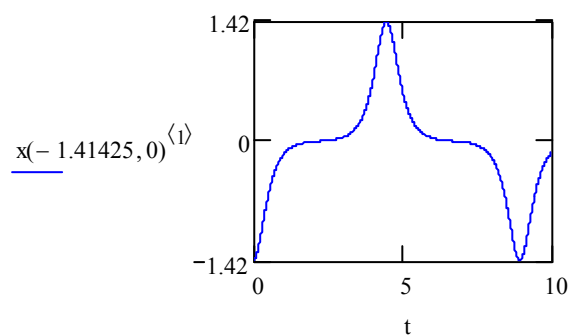
$$D(t, x) := \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 \\ 4 \cdot x_0 - 4 \cdot (x_0)^3 \end{bmatrix} \quad \underline{N} := 10^3 \quad \underline{T} := 10 \quad x(x_0, y_0) := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right] \quad t := x(0, 0)^{(0)}$$



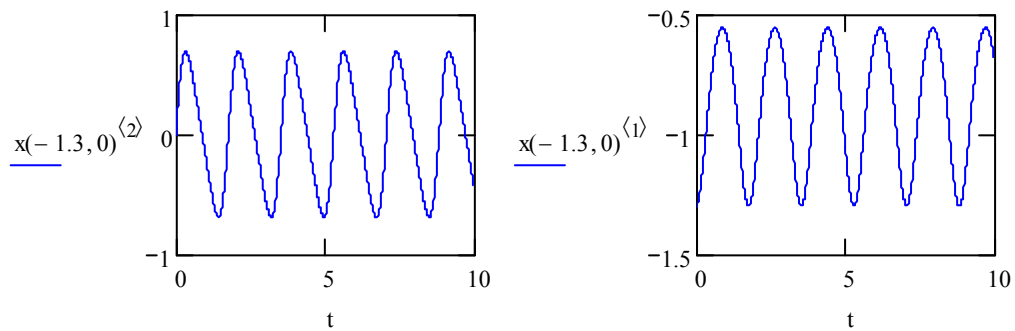
$$x(-1.5, 0)^{(1)}, x(-1.3, 0)^{(1)}, x(1.3, 0)^{(1)}, x(1.15, 0)^{(1)}, x(-1.15, 0)^{(1)}, x(-1.41425, 0)^{(1)}$$



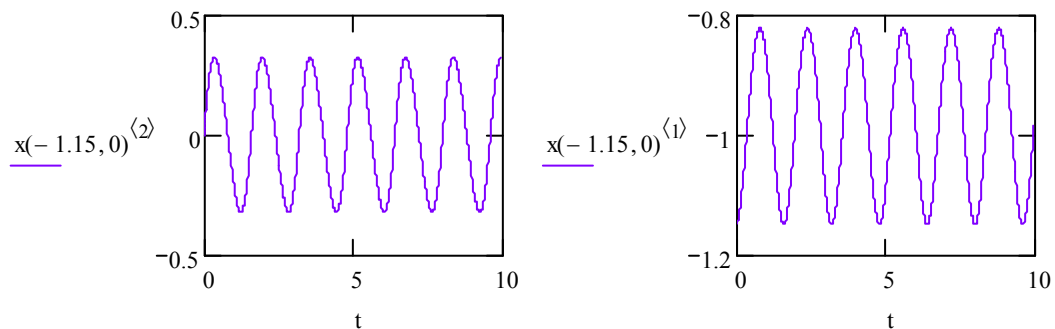
Решение за сепаратрисой



### Решение на сепаратрисе



### Решение в пределах сепаратрисы



### Решение в пределах сепаратрисы

Чем больше область, охватываемая фазовой кривой, тем больше период колебаний

## Исследование динамической устойчивости

Уравнение движения ротора генератора при малом изменении частоты можно записать в виде:

$$\tau \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_T - P_r \quad (11)$$

Перепишем уравнение в виде системы уравнений первого порядка, нормируя уравнения на  $\tau$  и учитывая, что  $P_r = P_m \sin(\delta)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= P_T - P_m \sin(\delta) \\ \frac{d\delta}{dt} &= \omega\end{aligned}\quad (12)$$

Найдем точки положения равновесия динамической системы и нарисует фазовый портрет, используя **MathCAD**

$$P_T := 0.7 \quad P_m := 1$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta = \omega \\ \frac{d}{dt} \omega = P_T - P_m \sin(\delta) \end{cases} \quad F_1(x, y) := y \quad F_2(x, y) := 0.7 - \sin(x)$$

Находим точки положения равновесия

$$\begin{aligned} z &:= \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{solve,} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow (.77540 \ 0) \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := z^T \quad x_1 := \pi - x_0 \quad y_1 := y_0 \quad x = \begin{pmatrix} 0.775 \\ 2.366 \end{pmatrix} \\ y &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Находим Якобиан

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad A(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Определяем характер точки с координатами 0.775 , 0

$$A_1 := A(x_0, y_0) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.714 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A_1)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.845i \\ -0.845i \end{pmatrix} \quad \text{Центр}$$

Определяем характер точки с координатами 2.366, 0

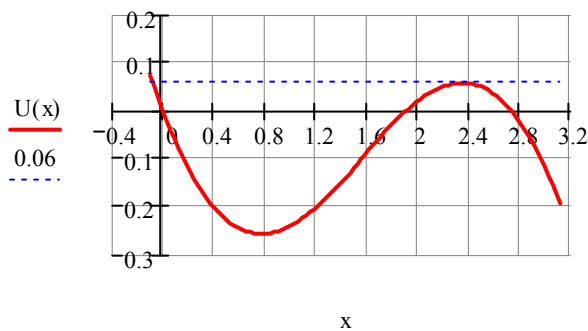
$$A_2 := A(x_1, y_1) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.714 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda := \text{eigenvals}(A_2)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.845 \\ -0.845 \end{pmatrix} \quad \text{Седловая точка}$$

Записываем вспомогательную потенциальную функцию  $U(x)$

$$U(x) := - \int_0^x (0.7 - \sin(x)) \, dx \text{ float, 5} \rightarrow (-.70000) \cdot x - 1 \cdot \cos(x) + 1.$$

$$x := -0.1, -0.1 + 0.01 \cdot \pi \dots \pi$$



Записываем вспомогательную функцию энергии  $E(x,y)$

$$E(x,y) := y^2 + U(x)$$

Рисуем фазовый портрет

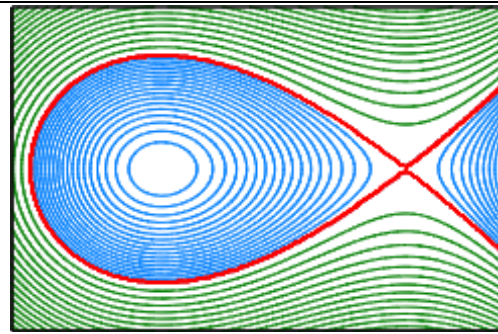
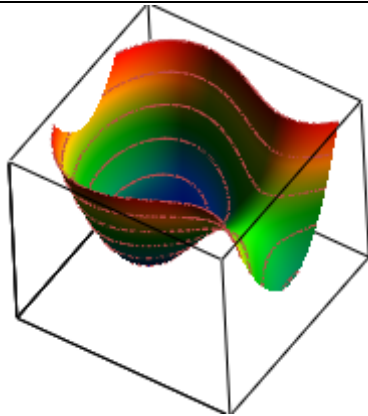
$$\underline{N} := 251 \quad i := 0..N \quad j := i \quad x_i := -0.2 + \frac{3.2}{N} \cdot i \quad y_j := -0.8 + \frac{1.6}{N} \cdot j$$

Поверхность  $\underline{E}_{i,j} := E(x_i, y_j)$

Поверхность ограниченная сепаратрисой  $E1_{i,j} := \text{if}(E_{i,j} < 0.058, E_{i,j}, 0.058)$

Поверхность за сепаратрисой  $E2_{i,j} := \text{if}(E_{i,j} \geq 0.06, E_{i,j}, 0.06)$

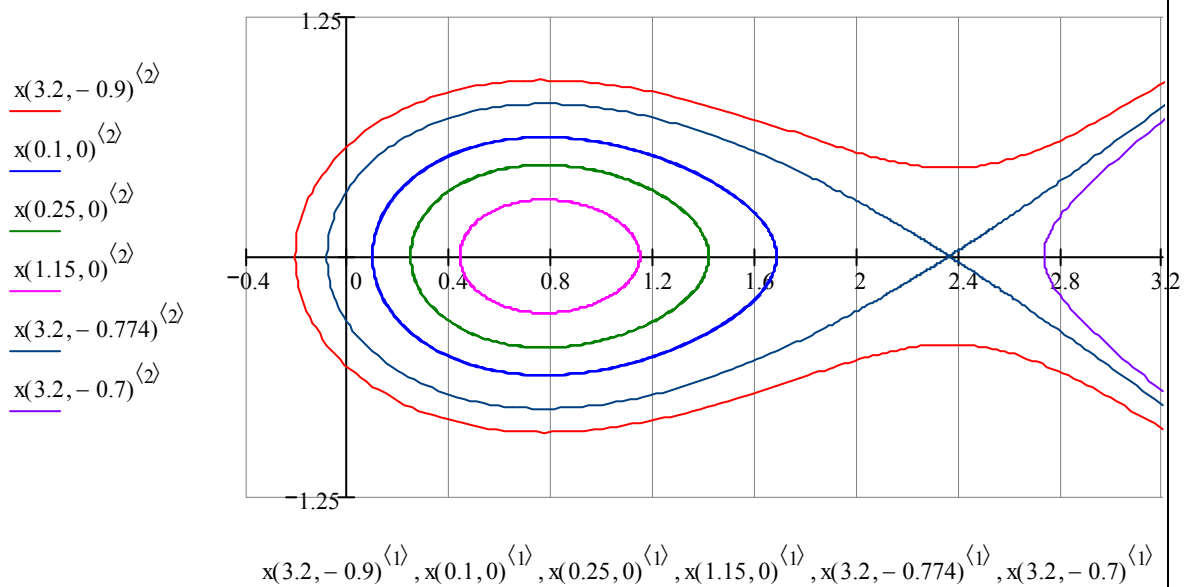
Сепаратриса  $\underline{\delta} := 10^{-3} \quad E_{s,i,j} := \text{if}(E_{i,j} \geq 0.058, \delta, 0)$



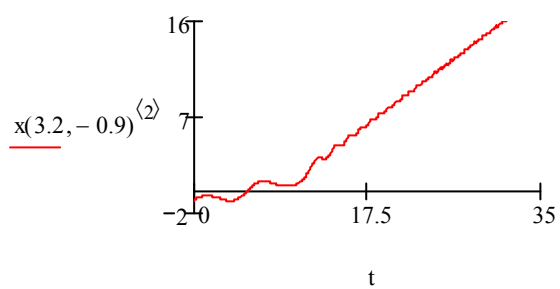
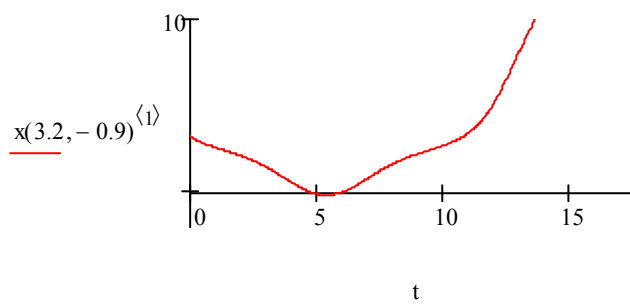
$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ 0.7 - \sin(x_0) \end{pmatrix} \quad \underline{N} := 10^3 \quad \underline{T} := 35 \quad x(x_0, y_0) := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right] \quad t := x(0, 0)^{(0)}$$

Для сравнения приведем непосредственное решение уравнений

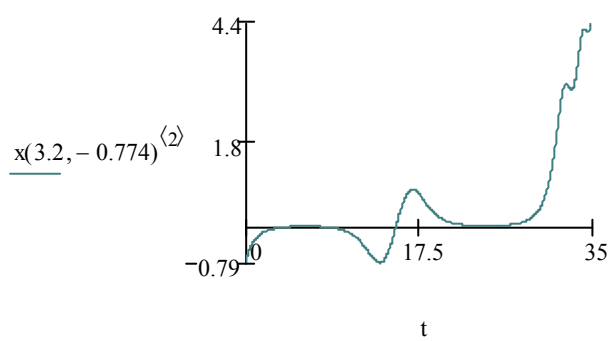
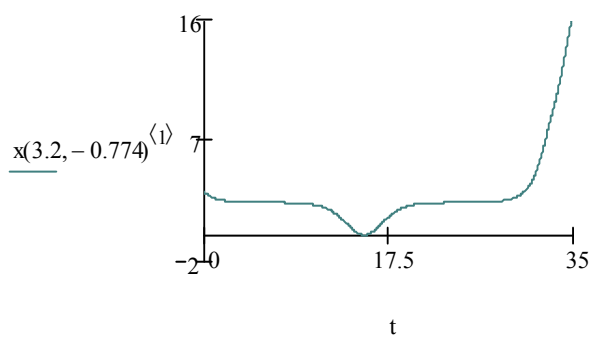
Замкнутые кривые на фазовой плоскости это периодические решения, не замкнутые кривые это неустойчивые решения.



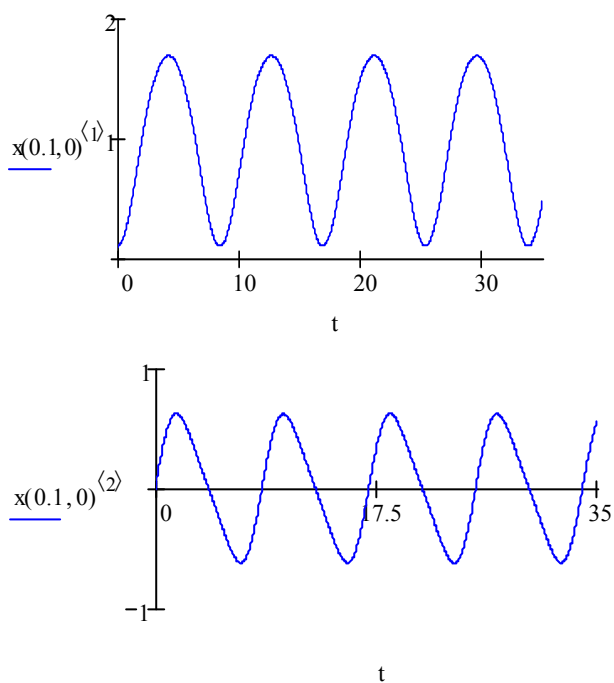
Неустойчивое движение за сепаратрисой



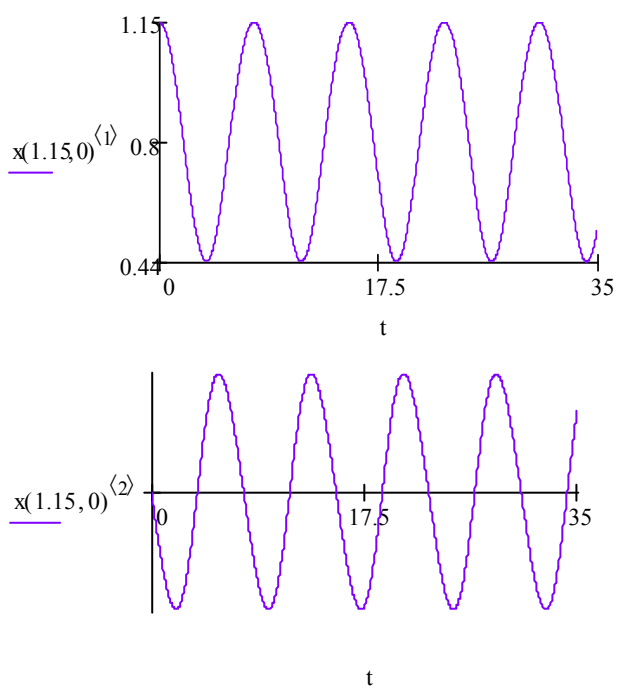
Движение на сепаратрисе



Движение в пределах сепаратрисы



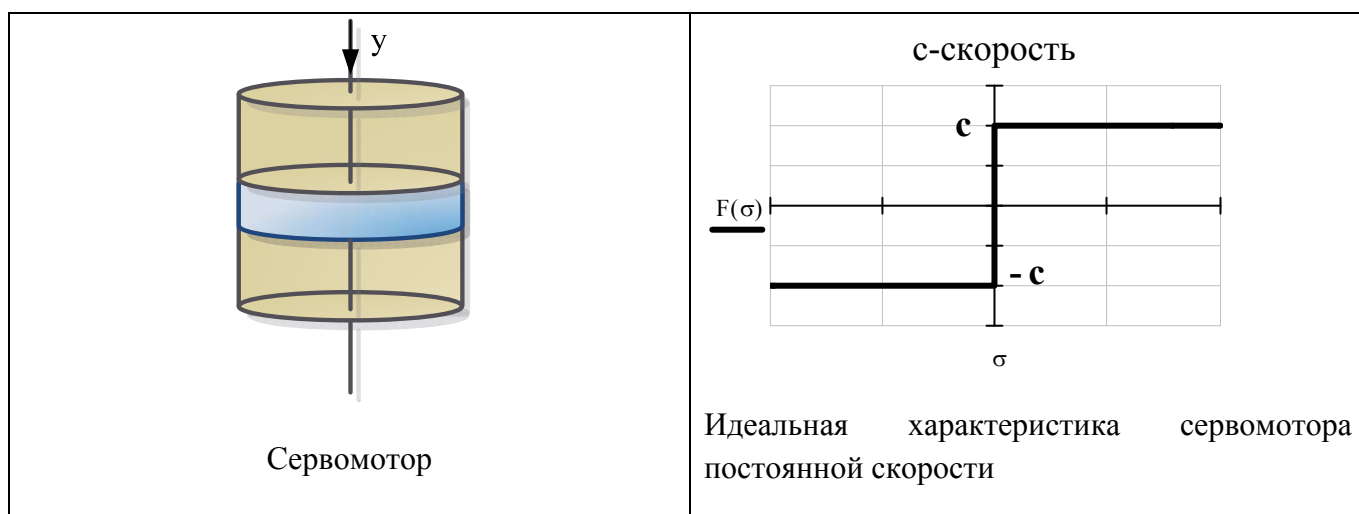
Движение в пределах сепаратрисы



## 2.2. Метод фазовой плоскости

### 2.2.1. Уравнение сервомотора с идеальной релейной характеристикой

Применим метод фазовой плоскости для выявления важных черт процесса, происходящего в нелинейной системе регулирования частоты вращения турбины сервомотором постоянной скорости, описываемой уравнениями [5]:



ротора

$$T_{\phi} \frac{d\phi}{dt} = \mu; \quad (13)$$

управляющего элемента

$$\sigma = -\phi - \mu; \quad (14)$$

сервомотора постоянной скорости

$$\frac{d\mu}{dt} = F(\sigma). \quad (15)$$

Где  $F(\sigma)$ :

$$F(\sigma) = c \cdot \text{sign}(\sigma). \quad (16)$$



В качестве координат фазовой плоскости  $(x, y)$  выберем

$$x = \phi, \quad y = \frac{d\phi}{dt}.$$

Динамическая система будет описываться системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{F(\sigma)}{T_x} \end{cases} \quad \text{где } F(\sigma) = c \cdot \text{sign}(-x - yT_x), \quad \sigma = -x - yT_x \quad (17)$$

Находим уравнение линии переключения сервомотора (вертикальный отрезок на графике)

$$\sigma = -x - yT_x = 0, \quad y = -x / T_x \quad (18)$$

Находим уравнения линий фазового портрета

В области  $\sigma < 0$  (отрицательные значения  $F$  на графике)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{c}{T_x} \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{T_x y} \rightarrow y^2 = -\frac{2cx}{T_x} + C_1 \quad (19)$$

В области  $\sigma > 0$  (положительные значения  $F$  на графике)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{c}{T_x} \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{T_x y} \rightarrow y^2 = \frac{2cx}{T_x} + C_2 \quad (20)$$

Запишем уравнение на вертикальном отрезке, приравнивая коэффициенты на прямой и в фазовой плоскости

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{T_x y}, \quad y = -\frac{x}{T_x} \rightarrow -\frac{c}{T_x y} = -\frac{1}{T_x} \rightarrow y = c \quad (21)$$

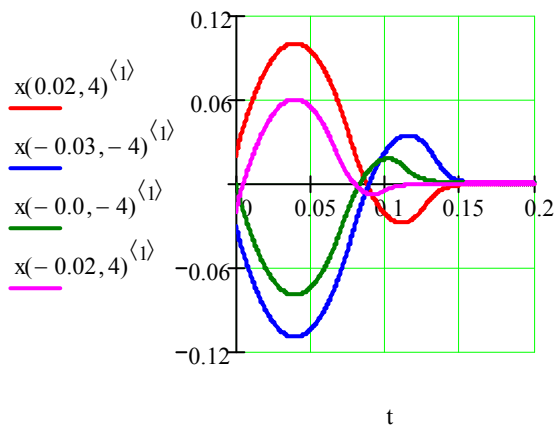
Находим дифференциальное уравнение на отрезке

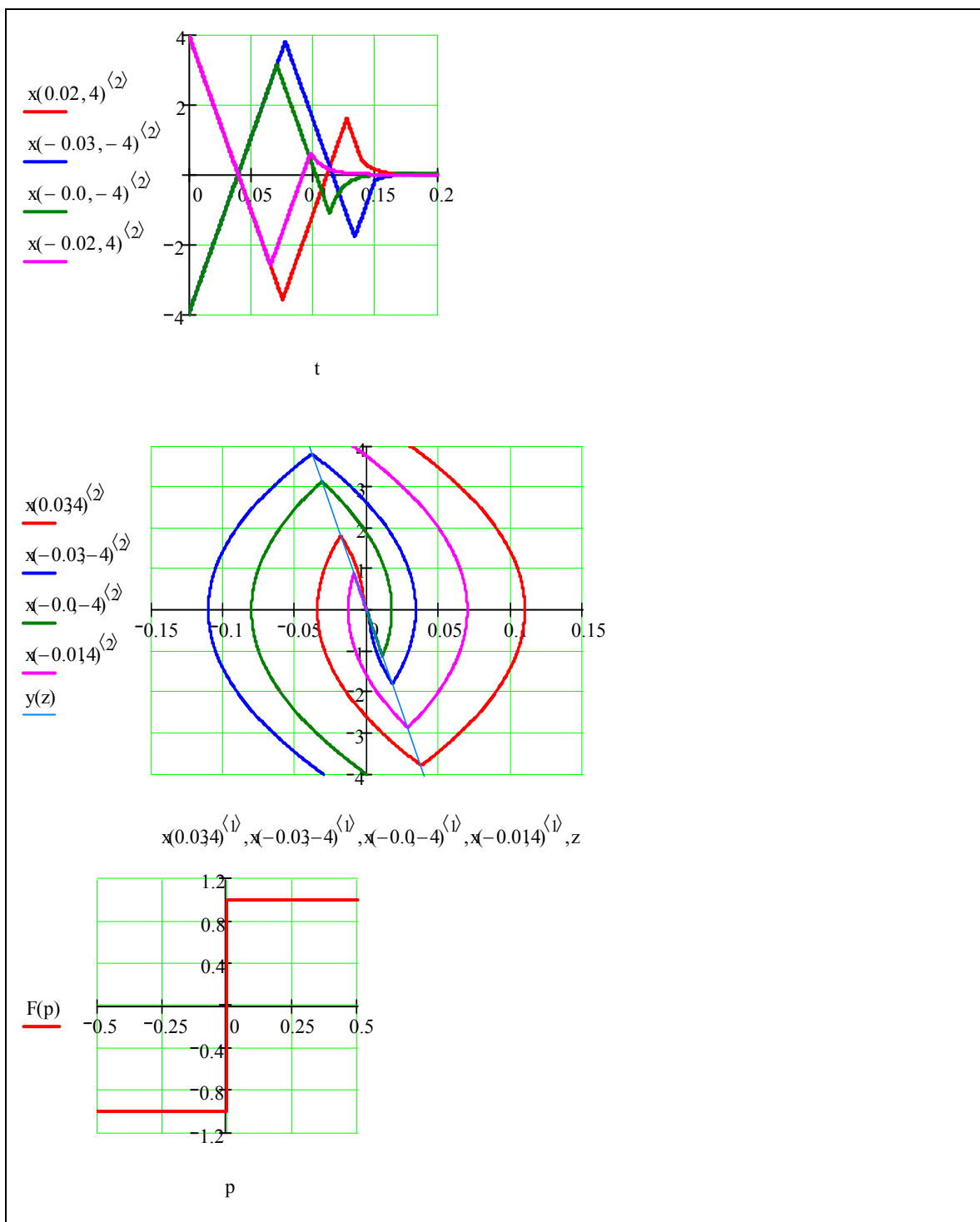
$$\frac{dx}{dt} = y, \quad y = -\frac{x}{T_x} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{T_x} \rightarrow x(t) = C_3 e^{-t/T_x} \quad (22)$$

скользящий процесс.

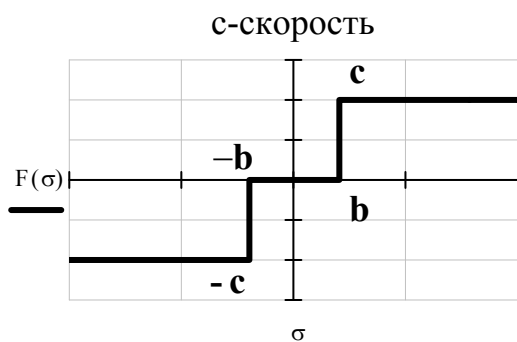
Приведем решение с построением фазового портрета с использованием **MathCAD**

$$\begin{aligned} & \underline{F}(x) := \text{sign}(x) \cdot 1 \quad T1 := 0.01 \quad \underline{N} := 10^3 \\ & D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{F(-x_0 - T1 \cdot x_1)}{T1} \end{pmatrix} \quad \underline{T} := 0.2 \quad x(x_0, x_1) := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right] \\ & y(z) := -z \cdot \frac{1}{T1} \quad z := -0.05, -0.05 + 0.01 \dots 0.1 \quad p := -0.5, -0.5 + 0.001 \dots 0.5 \quad t := x(0, 0)^{(0)} \end{aligned}$$





### 2.2.2. Уравнение сервомотора с реальной релейной характеристикой



Теперь переключению сервомотора соответствуют два вертикальных отрезка

$$\sigma = -x - yT_x = -b \rightarrow x = -yT_x + b$$

$$\sigma = -x - yT_x = b \rightarrow x = -yT_x - b$$

Рисуем их наклоны в фазовой плоскости (см. **MathCAD** документ ниже)

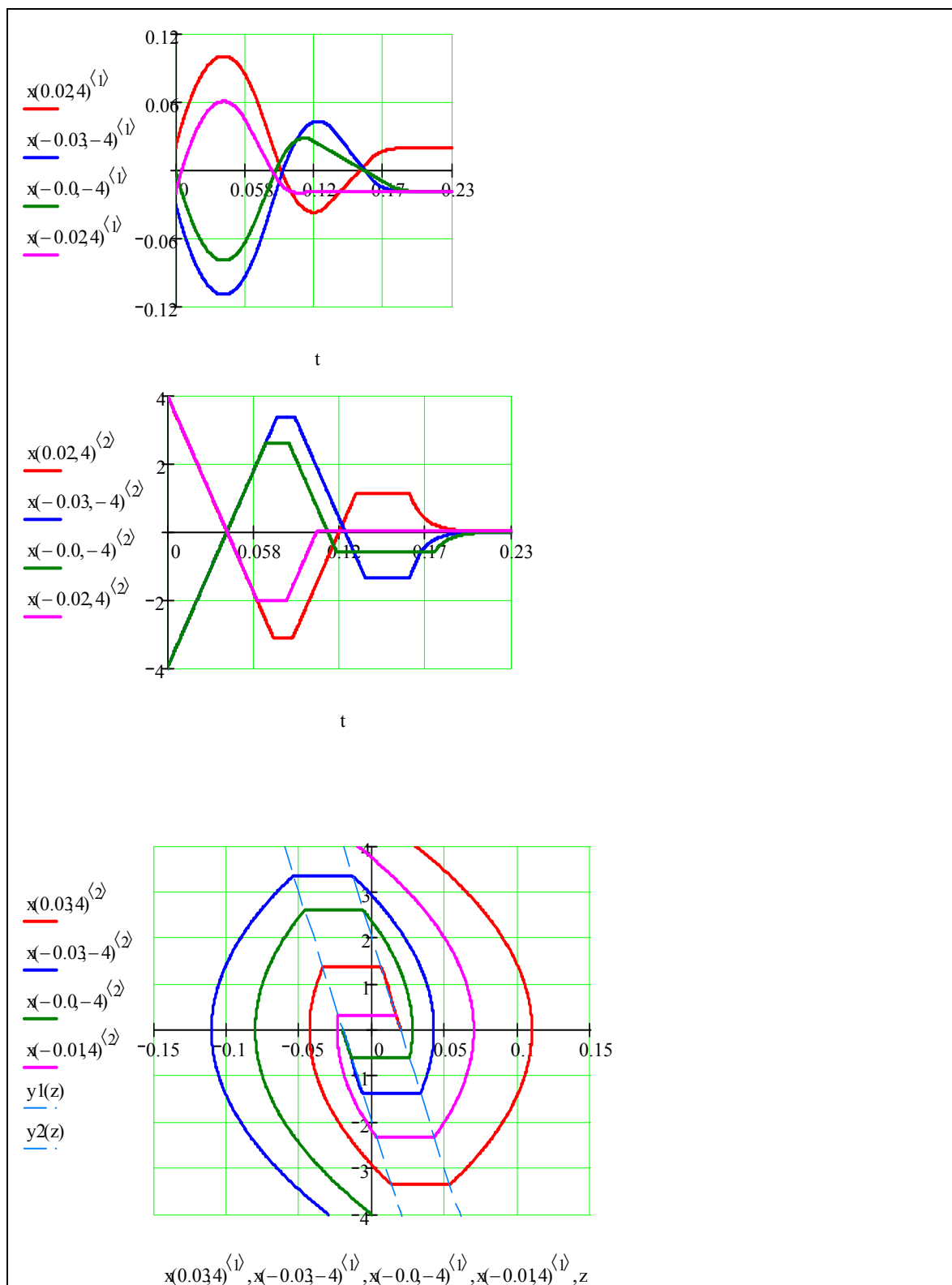
В отличие от предыдущего случая появляется еще одна область

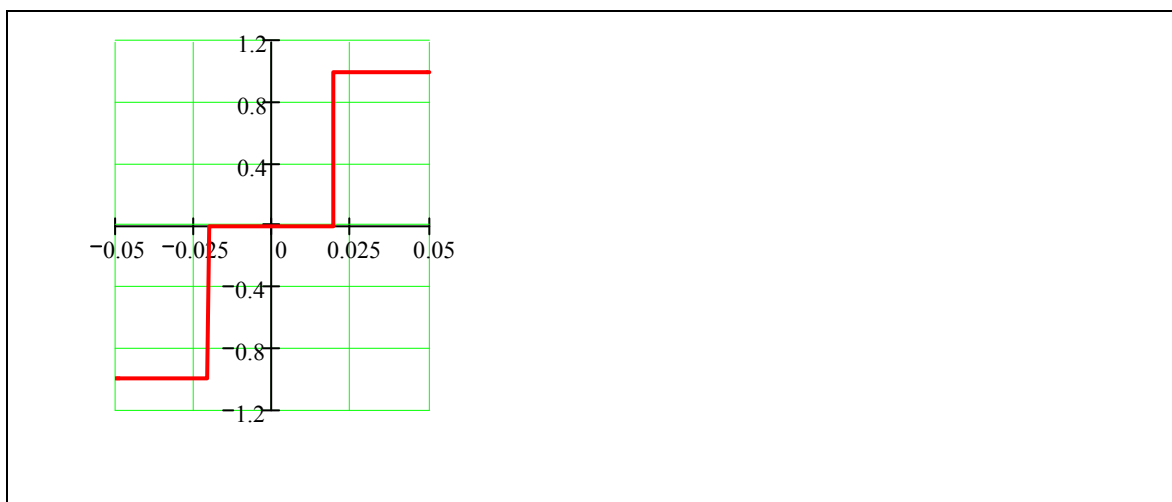
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow y = const$$

Прямые параллельные оси  $x$ . Теперь положение равновесия не одна точка, а отрезок

$$y = 0, \quad -b < x < b$$

$$\begin{aligned} & \underline{F(x)} := \text{sign}(x) \cdot 1 \quad b := 0.02 \quad \underline{F(x)} := \text{sign}(x) \cdot \text{if}(-b \leq x \leq b, 0, 1) \quad T1 := 0.01 \quad \underline{N} := 10^3 \\ & D(t, x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{F(-x_0 - T1 \cdot x_1)}{T1} \end{pmatrix} \quad \underline{T} := 0.23 \quad x(x_0, x_1) := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right] \quad t := x(0, 0) \langle 0 \rangle \\ & z := -0.1, -0.1 + 0.01..0.1 \quad y1(z) := -z \cdot \frac{1}{T1} + \frac{b}{T1} \quad y2(z) := -z \cdot \frac{1}{T1} - \frac{b}{T1} \\ & p := -0.05, -0.05 + 0.00025..0.05 \end{aligned}$$





### 2.3. Прямой метод Ляпунова

Метод основан на использовании скалярных функций, обладающих на

решениях динамической системы некоторыми специальными свойствами и по-

лучивших название функций Ляпунова. Функции Ляпунова позволяют оценить

устойчивость и качество системы, а также синтезировать алгоритмы управле-

ния, обеспечивающие заданные качественные показатели процессов.

Для системы, описанной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (23)$$

где функции  $f_1, f_2$  произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию  $f_1 = f_2 = 0$ , при  $x_1 = x_2 = 0$ , так как в установившемся состоянии все отклонения переменных и их производные равны нулю, можно ввести некоторую функцию всех фазовых координат системы (23)  $V(x, y)$  где  $x, y$  представляют собой отклонения переменных от некоторых установившихся значений. Функцию можно представить в 2-мерном фазовом пространстве. Тогда в каждой точке фазового пространства  $V$  будет принимать определенное значение, а в начале координат будет равна нулю.

Функцию  $V$  будем называть **знакоопределенной** в некоторой области, если в любых точках внутри ее функция  $V$  – имеет определенный знак и в ноль обращается только в начале координат. Рассмотрим пример знакоопределенной положительной функции для системы второго порядка  $n = 2$

$$V(x, y) = x^2 + y^2 \quad (24)$$

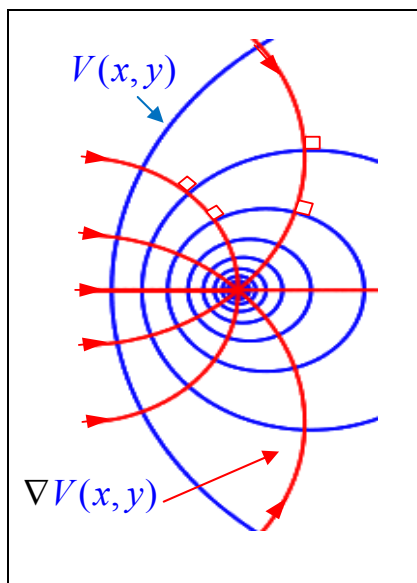
очевидно, что  $V > 0$ , и  $V = 0$ , только при  $x = y = 0$ .

Функция  $V$  называется **знакопостоянной**, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в ноль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция  $V$  называется **знакопеременной**, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Произвольная функция  $V = V(x, y)$ , которая обращается в ноль только при  $x = y = 0$ , и где  $x, y$  – отклонения, в которых записано уравнение движения системы, называется **функцией Ляпунова**. Определим

производную функции  $V$  по времени. Для этого необходимо вспомнить, что такое оператор градиента  $\nabla$ :



$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \nabla V(x, y) = \mathbf{grad} V(x, y)$$

– направления наибольшего (быстрого) изменения функции. Теперь можно записать производную функции  $f(x, y)$  по времени, предполагая зависимость  $x, y$  от  $t$ :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \cancel{\frac{\partial V}{\partial t}} + \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x, y)$$

$$\frac{dV}{dt} = (\nabla V, \mathbf{v}), \mathbf{v} = (f_1, f_2)$$

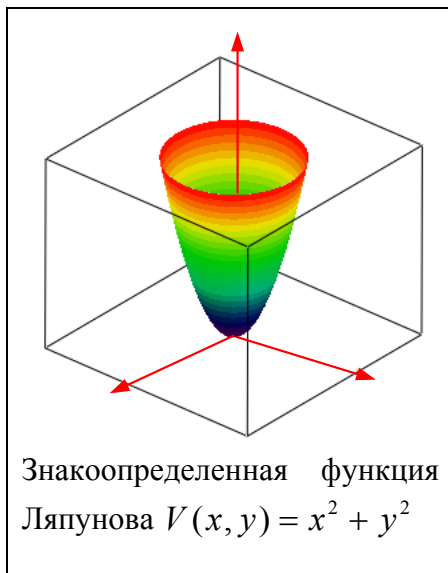
**Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем:** если при заданных в форме (23) уравнениях системы можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова  $V(x, y)$ , чтобы ее производная по времени  $dV/dt$  тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку  $V$ , то данная система устойчива.

**Пример:** Пусть нелинейная система описывается уравнениями



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -y^3 \end{cases}$$

Подберем знакоопределенную функцию Ляпунова



вида:  $V(x, y) = x^2 + y^2$

Находим производную по времени функции Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} f_2(x, y)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x(-x - x^3) + 2y(-y^3) = -2(x^2 + x^4 + y^4)$$

Функции  $dV / dt$  является функцией знакопостоянной, но противоположна по знаку функции  $V(x, y)$ , следовательно,

система устойчивая.

## 2.4. Метод гармонической линеаризации

Одним из основных методов исследования нелинейных систем высокого порядка в настоящее время является приближенный метод гармонической линеаризации. Рассмотрим применение метода, когда объект с линейной передаточной функцией управляется звеном с нелинейной характеристикой

$$y = F(x). \quad (25)$$

Пусть на вход нелинейного звена поступает гармонический сигнал

$$x = A \sin(\omega t) \quad (26)$$

Выходной сигнал будет тоже периодическим и поэтому его можно разложить в

$$y = F(A \sin(\omega t)) = q(A) \sin(\psi) + q'(A) \cos(\psi) + \text{высшие гармоники ряд}$$

Фурье

$$y = F(A \sin(\omega t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\psi)) d\psi + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi \right] \sin(\psi) + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\psi)) \cos(\psi) d\psi \right] \cos(\psi) + \text{высшие гармоники}$$

При нечетной симметрии нелинейной характеристики (а именно такие мы и будем рассматривать) будет отсутствовать постоянная составляющая

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\psi)) d\psi = 0 \quad (27)$$

Тогда выходной сигнал можно записать

$$y = q(A)x + q'(A) \frac{\dot{x}}{\omega} + \text{высшие гармоники} \quad (28)$$

Линейная часть замкнутой САР вследствие инерционности является фильтром низких частот, т.е. высокие гармоники проходят ее со значительно большим ослаблением, чем первая:

$$y = q(A)a + q'(A) \frac{\dot{x}}{\omega} + \text{высшие гармоники} \quad (29)$$

$$= \left[ q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega} \right] x, \quad p \rightarrow \frac{d}{dt}$$

Такое представление называется гармонической линеаризацией нелинейности, а величины, определяемые по формулам

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\psi)) \sin(\psi) d\psi, \quad q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\psi)) \cos(\psi) d\psi, \quad (30)$$

называются коэффициентами гармонической линеаризации.

Передаточная функция эквивалентного линейного звена имеет вид

$$y = \left[ q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega} \right] x, \rightarrow W(A, p) = q(A) + q'(A) \frac{p}{\omega}, \quad p = j\omega \quad (31)$$

$$W(A, j\omega) = q(A) + q'(A) \frac{j\omega}{\omega} = q(A) + q'(A)j$$

Передаточная функция не зависит от частоты. Она усиливает амплитуду входного сигнала, и называется комплексным коэффициентом усиления.

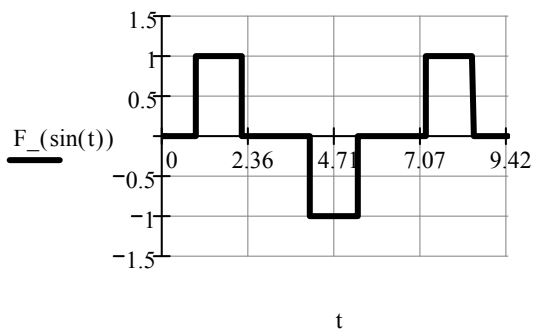
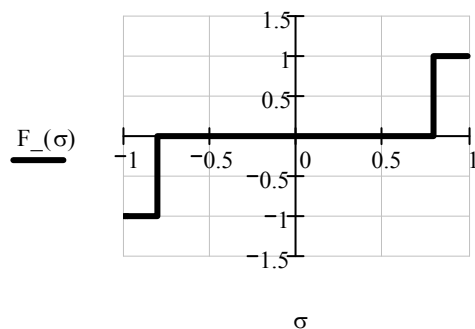
Таким образом нелинейный элемент может быть заменен линейным. Частотная характеристика которого зависит от амплитуды входного сигнала.

**Пример.** Найти комплексный коэффициент усиления заданного нелинейного звена. Будем использовать **MathCAD**

$$F(\sigma) := \text{if}(\sigma < 0, -1, 1) \quad b := 0.8$$

$$F_-(\sigma) := \text{if}(-b \leq \sigma \leq b, 0, F(\sigma)) \quad \text{характеристика нелинейного звена}$$

$$\sigma := -1, -1 + 10^{-4} \dots 1$$



Характеристика нелинейного элемента и выходной сигнал

Находим коэффициент усиления **a** для разных амплитуд, **b=0** т.к. функция четная

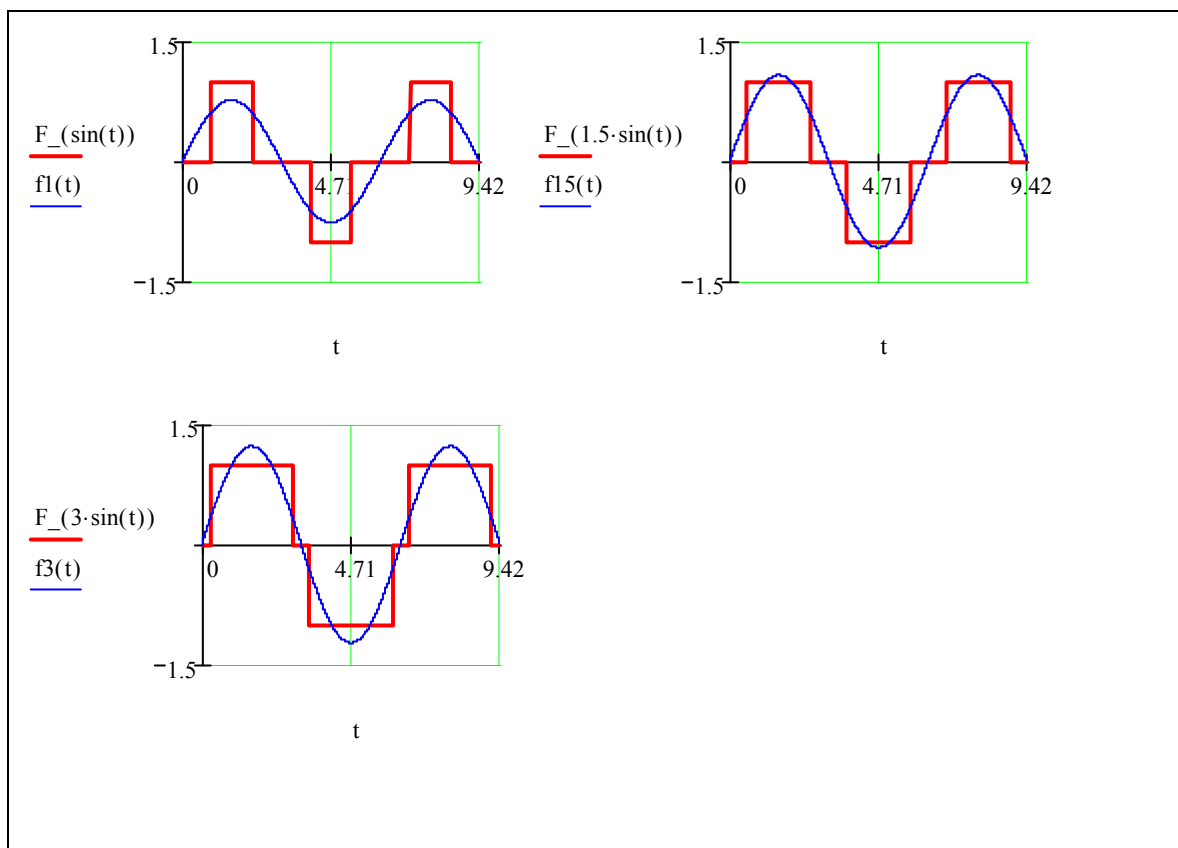
$$a(A) := \frac{1}{\pi \cdot A} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} F(A \cdot \sin(t)) \cdot \sin(t) \, dt$$

Находим коэффициенты усиления и эквивалентных синусоид при различных амплитудах

$$a(1) = 0.764 \quad f1(t) := a(1) \cdot \sin(t)$$

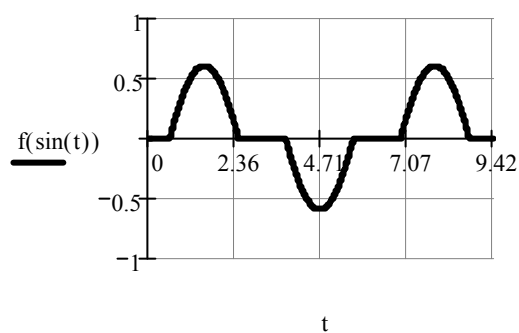
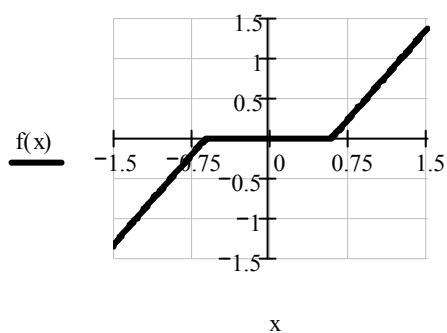
$$a(1.5) = 0.718 \quad f15(t) := a(1.5) \cdot 1.5 \cdot \sin(t)$$

$$a(3) = 0.409 \quad f3(t) := a(3) \cdot 3 \cdot \sin(t)$$



$A_ := 1.5$   $f(x) := x A_ - B$   $x := -1.5, -1.5 + 0.01.. 1.5$   $f(x) := \text{if}(x > 0, f(x), -f(-x))$

$f(x) := \text{if}(-bb < x < bb, 0, f(x))$



Характеристика нелинейного элемента и выходной сигнал

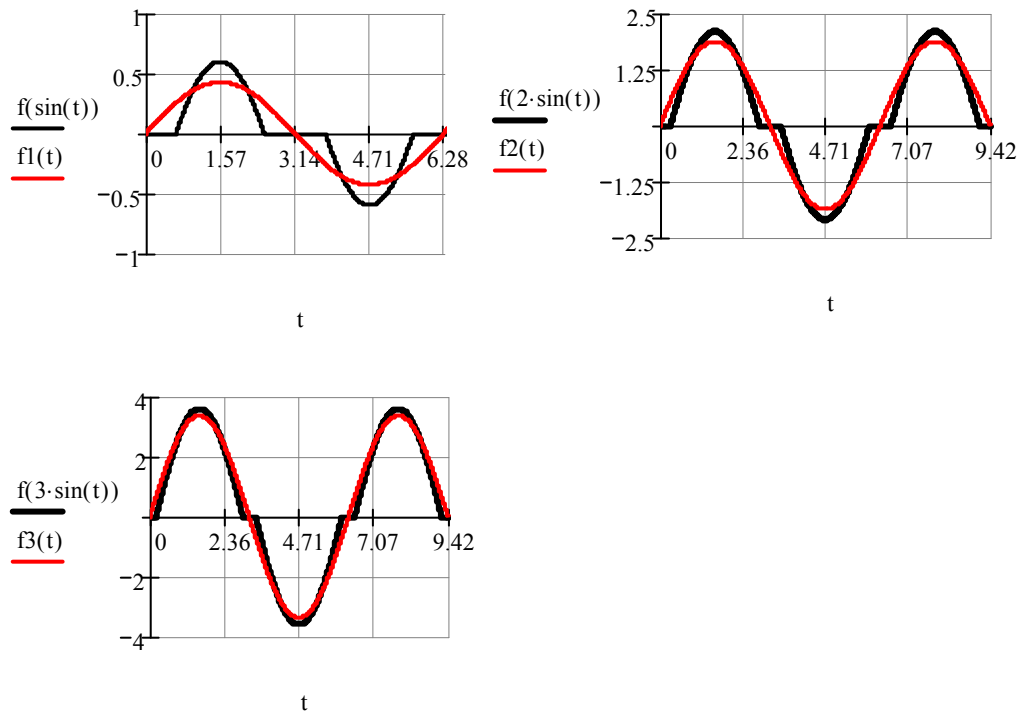
Находим коэффициент усиления **a** для разных амплитуд, **b=0** т.к. функция четная

$$a(A) := \frac{1}{\pi \cdot A} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} F(A \cdot \sin(t)) \cdot \sin(t) dt$$

Находим коэффициенты усиления и эквивалентных синусоид при различных амплитудах

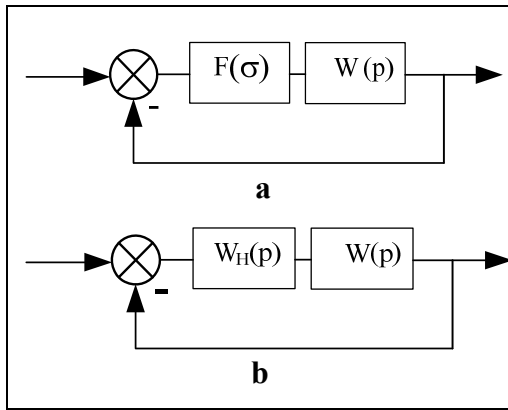
$$a(1) = 0.427 \quad f_1(t) := 0.427 \sin(t) \quad a(2) = 0.936 \quad f_2(t) := 0.9362 \sin(t) \quad a(3) = 1.121$$

$$f_3(t) := 1.121 \cdot 3 \sin(t)$$



## 2.5. Алгоритм анализа автоколебаний

С помощью гармонической линеаризации нелинейного элемента замкнутая система (рис. **a**), представленная на рисунке приводится к системе с линейным эквивалентным элементом (рис.**b**). Исследование системы с нелинейным элементом сводится к исследованию линейной системы.



Найдем характеристическое уравнение

$$W(p)W_H(A) = -1, \quad W(p) = -1 / W_H(A),$$

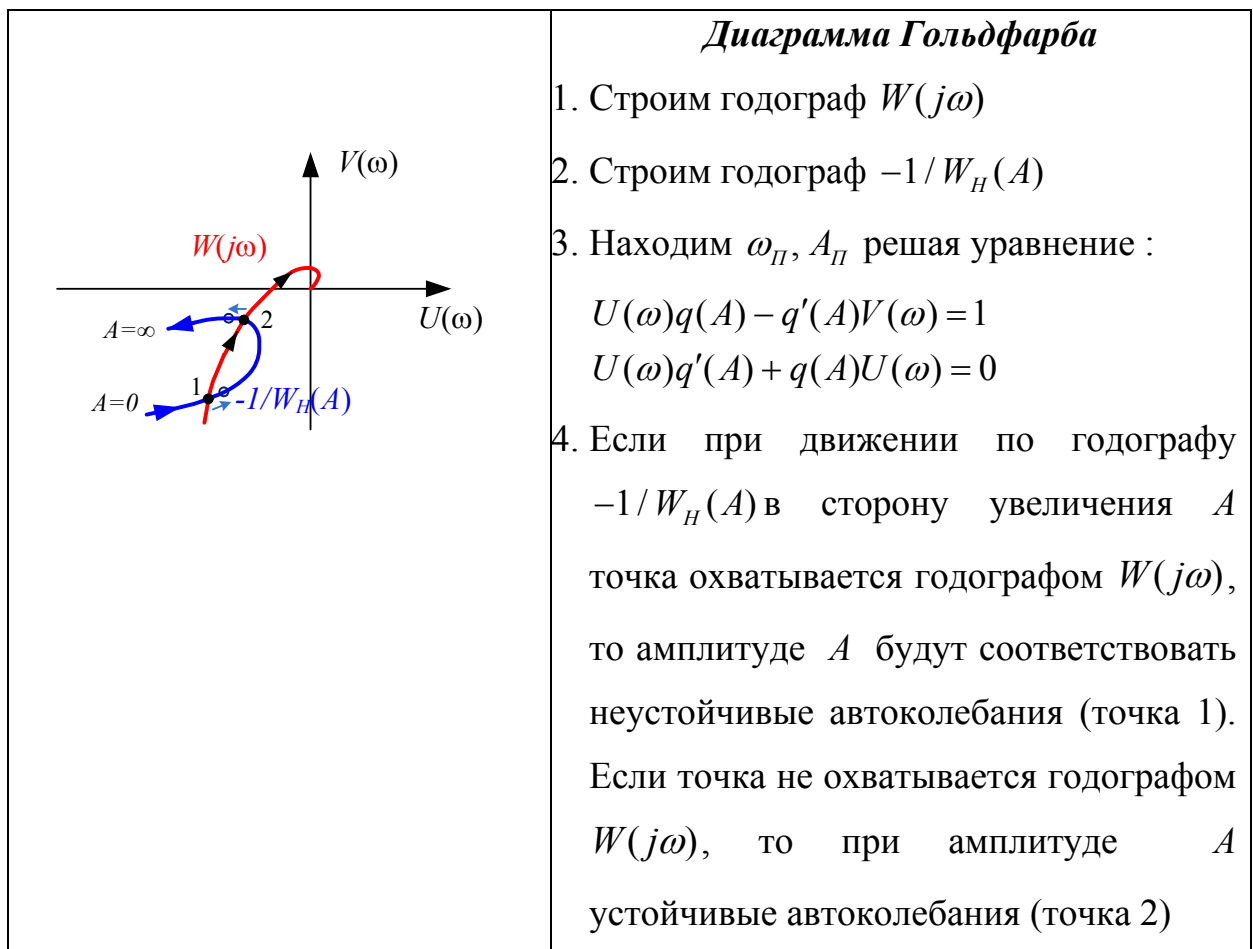
$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad W_H(A) = q(A) + jq'(A)$$

Из последнего уравнения следует что:

$$\begin{aligned} U(\omega)q(A) - q'(A)V(\omega) &= 1 \\ U(\omega)q'(A) + q(A)U(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Где  $q(A)$ ,  $q'(A)$  коэффициента гармонической линеаризации. Решение уравнения дает нам точки положения равновесия  $\omega_{\Pi}$ ,  $A_{\Pi}$ .

При решении задачи удобно пользоваться графоаналитической схемой **Гольдфарба**, алгоритм которой приведен ниже.

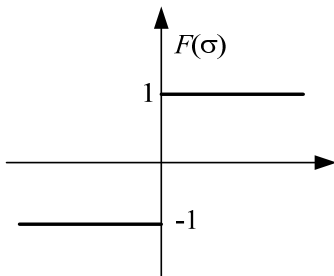


Рассмотрим пример с использование **MathCAD**

## Исследовать систему на наличие автоколебаний

$$\underline{W}(p) := \frac{3}{p^3 + 3 \cdot p^2 + p} \quad U(\omega) := \operatorname{Re}(W(i \cdot \omega)) \quad \underline{V}(\omega) := \operatorname{Im}(W(i \cdot \omega))$$

$$\underline{U}(\omega) := U(\omega) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{simplify} \rightarrow \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \frac{-9.}{7 \cdot \omega^2 + \omega^4 + 1.} \quad \underline{V}(\omega) := V(\omega) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{simplify} \rightarrow \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \frac{3.}{\omega} \cdot \frac{\omega^2 - 1.}{7 \cdot \omega^2 + \omega^4 + 1.}$$



$$q(a) := \frac{4}{\pi \cdot a}$$

Коэффициент гармонической  
линеаризации нелинейного  
звена

Находим точку пересечения, частоту и амплитуду

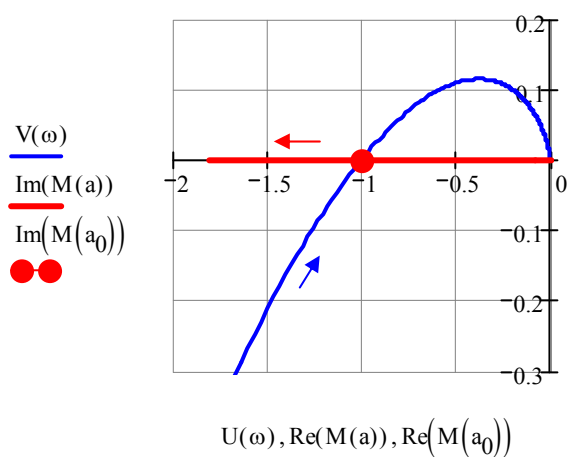
$$W_H(a) := q(a)$$

$$w := \left( \begin{array}{l} U(\omega) \cdot q(a) = -1 \\ V(\omega) \cdot q(a) = 0 \\ \omega > 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \text{solve}, \left( \begin{array}{l} \omega \\ a \end{array} \right) \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow (1. \quad 1.2732)$$

$$(\omega_0 \quad \underline{a_0}) := w \quad \omega_0 = 1 \quad a_0 = 1.273$$

$$\omega := 0.01..10 \quad M(a) := \frac{-1}{W_H(a)} \quad U(1) = -1 \quad a := 0.01..2.3$$





Найденным значениям параметров  $\omega_0 = 1$  и  $a_0 = 1.273$  соответствует устойчивые автоколебания

так как при движении точки по годографу  $M(a)$  в сторону увеличения

амплитуды  $a$ , точка не охватывается годографом

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Е.И.Юревич Теория автоматического управления. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 560с.
2. А.В. Пантелеев, А.С. Бортакровский. Теория автоматического управления в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2003. 583 с.
3. В.Я. Ротач. Теория автоматического управления. М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 400с.
4. Е.А. Никулин. Основы теория автоматического управления. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 640с.
5. А.Е. Булкин. Автоматическое регулирование энергоустановок. М. Издательский дом МЭИ, 2009, 508с.