WYDZIAŁ
MATEMATYKI
I FIZYKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

PROGRAMOWANIE LINIOWE - **projekt**

Autor:
Mateusz Rzeźnikiewicz

Opiekun pracy:
dr Krzysztof Pupka

Rzeszów, 2024

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Programowanie liniowe (PL) jest jednym z najważniejszych narzędzi matematycznych stosowanych do optymalizacji procesów decyzyjnych. Celem tej pracy jest przedstawienie głównych aspektów programowania liniowego oraz jego zastosowań. Składa się ona z trzech głównych części, z których każda poświęcona jest różnym metodologiom i technikom tej dziedziny.

W pierwszej części pracy skupimy się na wykorzystaniu programowania dualnego jako kluczowego narzędzia wspomagającego rozwiązanie problemów programowania liniowego. Programowanie dualne nie tylko uzupełnia analizę problemu pierwotnego, ale również umożliwia głębsze zrozumienie struktury problemu oraz relacji między ograniczeniami a funkcją celu. Dzięki programowaniu dualnemu możemy uzyskać dodatkowe informacje na temat cen zasobów, które są kluczowe dla optymalnego rozwiązania problemu. Metoda graficzna będzie kolejnym kluczowym zagadnieniem tej części. Jest to podstawowa technika wizualizacji obszaru dopuszczalnych rozwiązań oraz identyfikacji punktu optymalnego w problemach programowania liniowego z dwiema zmiennymi decyzyjnymi. Analiza wrażliwości, która zamyka tę część, pozwoli nam zrozumieć, jak zmiany w parametrach modelu mogą wpłynąć na optymalne rozwiązanie.

Druga część pracy koncentruje się na algorytmie simpleks, który jest najbardziej rozpoznawalnym i szeroko stosowanym narzędziem do rozwiązywania problemów PL z wieloma zmiennymi decyzyjnymi. Algorytm simpleks, opracowany przez George'a Dantziga, jest efektywną metodą przeszukiwania wierzchołków wielowymiarowego obszaru dopuszczalnych rozwiązań w celu znalezienia optymalnego rozwiązania.

Trzecia część pracy poświęcona jest specjalizowanym algorytmom PL, takim jak algorytm transportowy i algorytm węgierski. Algorytm transportowy znajduje zastosowanie w optymalizacji problemów dystrybucji zasobów, gdzie celem jest minimalizacja kosztów transportu przy zachowaniu określonego popytu i podaży. Natomiast algorytm węgierski jest efektywnym narzędziem do rozwiązywania problemów przyporządkowania, gdzie celem jest znalezienie optymalnego przyporządkowania zadań do zasobów przy minimalizacji kosztów lub maksymalizacji zysków.

Rozdział 2

Część I

2.1 Wybrane zadanie

2.1.1 Treść zadania do części I oraz II

Przedsiębiorstwo może produkować cztery wyroby: A, B, C, D. Ograniczeniem w procesie produkcji są zasoby surowców: S_1 i S_2. Niezbędne dane zawarte są w poniższej tabeli.

Surowce	**Zużycie surowca (w kg)**				**Zapas surowca (w kg)**
	A	**B**	**C**	**D**	
I	1	0,6	0,4	0,6	1000
II	0,25	1,8	0,4	1	1400

Ceny wyrobów wynoszą odpowiednio 5, 9, 4 i 6 zł. Ustalić wielkości produkcji tych wyrobów gwarantujące przy istniejących zasobach z surowców maksymalny przychód z ich sprzedaży. Wykorzystać program dualny.

2.2 Rozwiązanie

2.2.1 Model matematyczny

Program pierwotny:

- x_1 - wielkość produkcji wyrobu A
- x_2 - wielkość produkcji wyrobu B
- x_3 - wielkość produkcji wyrobu C
- x_4 - wielkość produkcji wyrobu D

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$$

Ograniczenia:

$$\begin{cases} \text{I:} & x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 \leq 1000 \\ \text{II:} & 0,25x_1 + 1,8x_2 + 0,4x_3 + x_4 \leq 1400 \end{cases}$$

Warunki brzegowe:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Program dualny:

- y_1, y_2 - zmienne dualne

$$g(y_1, y_2) = 1000y_1 + 1400y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 0,25y_2 \geq 5 & (1) \\ 0,6y_1 + 1,8y_2 \geq 9 & (2) \\ 0,4y_1 + 0,4y_2 \geq 4 & (3) \\ 0,6y_1 + y_2 \geq 6 & (4) \end{cases}$$

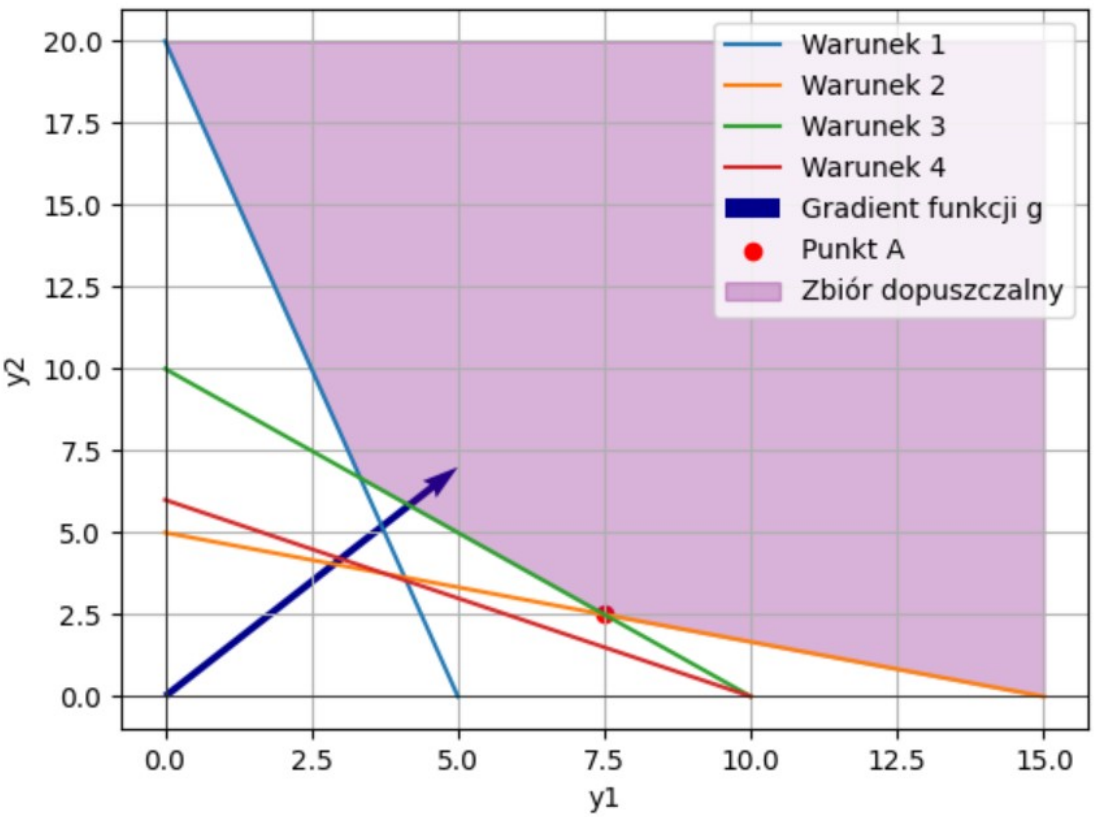
$$y_1, y_2 \geq 0$$

2.2.2 Metoda graficzna

W poniższej tabeli przedstawimy punkty przecięcia z osiami y_1 oraz y_2:

Nr warunku	$(y_1, 0)$	$(0, y_2)$
1	(5,0)	(0,20)
2	(15,0)	(0,5)
3	(10,0)	(0,10)
4	(10,0)	(0,6)

Wyznaczamy gradient funkcji: $\nabla g = \begin{bmatrix}10, & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5, & 7\end{bmatrix}$.



Gradient funkcji, kiedy rozważamy jego interpretację geometryczną, wskazuje nam kierunek najszybszego wzrostu wartości funkcji. W kontekście poszukiwania punktu stanowiącego optymalne rozwiązanie (w tym zadaniu, punktu, w którym wartość funkcji celu dualnej jest minimalna), możemy rozważać punkty przecięcia półpłaszczyzn (1) i (3), lub (2) i (3). Jednakże, dzięki gradientowi, możemy odrzucić pierwszy z tych punktów.

Oznaczmy punkt A jako punkt przecięcia półplaszczyzn (2) i (3), a następnie rozwiążmy poniższy układ równań:

$$\begin{cases} 0,6y_1 + 1,8y_2 = 9 & (5) \\ 0,4y_1 + 0,4y_2 = 4 & (6) \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań za pomocą metody wyznaczników.
Najpierw zapisujemy równania w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 1,8 \\ 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wyznacznik główny macierzy współczynników:

$$\Delta = (0,6 \cdot 0,4) - (0,4 \cdot 1,8) = 0,24 - 0,72 = -0,48$$

Następnie, obliczamy wyznaczniki Δ_{y_1} i Δ_{y_2} poprzez zastąpienie odpowiednich kolumn macierzy wyrazami wolnymi:

$$\Delta_{y_1} = \begin{vmatrix} 9 & 1,8 \\ 4 & 0,4 \end{vmatrix} = (9 \cdot 0,4) - (4 \cdot 1,8) = 3,6 - 7,2 = -3,6$$

$$\Delta_{y_2} = \begin{vmatrix} 0,6 & 9 \\ 0,4 & 4 \end{vmatrix} = (0,6 \cdot 4) - (0,4 \cdot 9) = 2,4 - 3,6 = -1,2$$

W kolejnym kroku rozwiązujemy układ równań:

$$y_1 = \frac{\Delta_{y_1}}{\Delta} = \frac{-3,6}{-0,48} = 7,5$$

$$y_2 = \frac{\Delta_{y_2}}{\Delta} = \frac{-1,2}{-0,48} = 2,5$$

Zatem, rozwiązaniem tego układu równań jest para $y_1 = 7,5$ i $y_2 = 2,5$,
czyli $A = (7,5; 2,5)$.

Minimalna wartość funkcji celu g wynosi:

$$g(A) = 1000 \cdot 7,5 + 1400 \cdot 2,5 = 7500 + 3500 = 11000.$$

Podstawiając $y_1 = 7,5$ i $y_2 = 2,5$ do warunków ograniczających programu dualnego (1) - (4), przekonujemy się, że drugi i trzeci warunek są aktywne, zaś pierwszy i czwarty - nie. Oznacza to, że w rozwiązaniu optymalnym programu pierwotnego druga i trzecia zmienna, x_2 i x_3, mają wartości dodatnie, zaś x_1 i x_4 są równe 0. Pamietając o tym fakcie, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 0,6x_2 + 0,4x_3 = 1000 & (7) \\ 1,8x_2 + 0,4x_3 = 1400 & (8) \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań również metodą Cramera.
Zaczynamy od przekształcenia równania do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 1,8 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wyznacznik główny macierzy współczynników:

$$\Delta = (0,6 \cdot 0,4) - (1,8 \cdot 0,4) = 0,24 - 0,72 = -0,48$$

Następnie, obliczamy wyznaczniki Δ_{x_2} i Δ_{x_3}:

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1000 & 0,4 \\ 1400 & 0,4 \end{vmatrix} = (1000 \cdot 0,4) - (1400 \cdot 0,4) = 400 - 560 = -160$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 0,6 & 1000 \\ 1,8 & 1400 \end{vmatrix} = (0,6 \cdot 1400) - (1,8 \cdot 1000) = 840 - 1800 = -960$$

W ostatnim kroku skorzystamy we wzorów Cramera do wyznaczenia rozwiązań:

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-160}{-0,48} = \frac{160}{0,48} = \frac{1000}{3}$$
$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-960}{-0,48} = \frac{960}{0,48} = 2000$$

Zatem, rozwiązaniem tego układu równań jest para $x_2 = \frac{1000}{3}$ i $x_3 = 2000$.
Niech $P = (0, 333\frac{1}{3}, 2000, 0)$. Sprawdźmy, czy $f(P) = g(A)$.

$$f(P) = 9 \cdot 333\frac{1}{3} + 4 \cdot 2000 = 3000 + 8000 = 11000 = g(A).$$

Jest to zatem rozwiązanie optymalne programu pierwotnego.

Odpowiedź: Aby uzyskać maksymalny przychód ze sprzedaży, należy wyprodukować $333\frac{1}{3}$ wyrobów B i 2000 wyrobów C. Maksymalny przychód wynosi 11000 zł.

2.3 Analiza wrażliwości

2.3.1 Program dualny

Dla współczynników funkcji celu w programie dualnym

Niech $K_c = -\frac{c_1}{c_2}$, gdzie c_1 i c_2 to odpowiednio współczynniki przy y_1 i y_2 w funkcji celu dla programu dualnego. Zaczniemy od wyznaczenia c_1.

$$
\begin{aligned}
K_c &= -\frac{c_1}{1400} \\
K_2 &= -\frac{0,6}{1,8} = -\frac{1}{3} \\
K_3 &= -\frac{0,4}{0,4} = -1
\end{aligned}
$$

W kolejnym kroku rozwiążemy równania $K_c = K_2$ i $K_c = K_3$.

$$
\begin{aligned}
&K_c = K_2 && K_c = K_3 \\
&-\frac{c_1}{1400} = -\frac{1}{3} && -\frac{c_1}{1400} = -1 \\
&c_1 = \frac{1}{3} \cdot 1400 && c_1 = 1400 \\
&c_1 = 466\frac{2}{3} &&
\end{aligned}
$$

Z tego wynika, że $c_1 \in [466\frac{2}{3}, 1400]$.

Analogiczną procedurę wykonamy w celu wyznaczenia c_2.

$$
K_c = -\frac{1000}{c_2}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_c = K_2 && K_c = K_3 \\
&-\frac{1000}{c_2} = -\frac{1}{3} && -\frac{1000}{c_2} = -1 \\
&c_2 = 1000 && c_2 = 3000
\end{aligned}
$$

Na podstawie powyższych równań wiemy, że $c_2 \in [1000, 3000]$.

Dla wyrazów wolnych w nierównościach (1) - (4)

- Warunki nieaktywne

Do lewych stron nierówności (1) oraz (4) wstawiamy współrzędne punktu A i ustalamy przedziały dopuszczalnych wzrostów i spadków.

$$(1) : 1 \cdot 7,5 + 0,25 \cdot 2,5 = 7,5 + 0,625 = 8,125 = 8\tfrac{1}{8} \Rightarrow b_1 \in \left(-\infty, 8\tfrac{1}{8}\right]$$
$$(4) : 0,6 \cdot 7,5 + 1 \cdot 2,5 = 4,5 + 2,5 = 7 \Rightarrow b_4 \in (-\infty, 7]$$

- Warunki aktywne

W lewą stronę nierówności (2) wstawimy punkt (10, 0) oraz punkt przecięcia półpłaszczyzn (1) i (3). Oznaczymy go jako B i naniesiemy na wykres.

Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 + 0,25y_2 = 5 & (9) \\ 0,4y_1 + 0,4y_2 = 4 & (10) \end{cases}$$

Reprezentując ten układ równań w postaci macierzowej, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy współczynników wynosi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,4 & 0,4 \end{vmatrix} = 0,3$$

Wyznacznik macierzy dla y_1 wynosi:

$$\Delta_{y_1} = \begin{vmatrix} 5 & 0,25 \\ 4 & 0,4 \end{vmatrix} = 1$$

Wyznacznik macierzy dla y_2 wynosi:

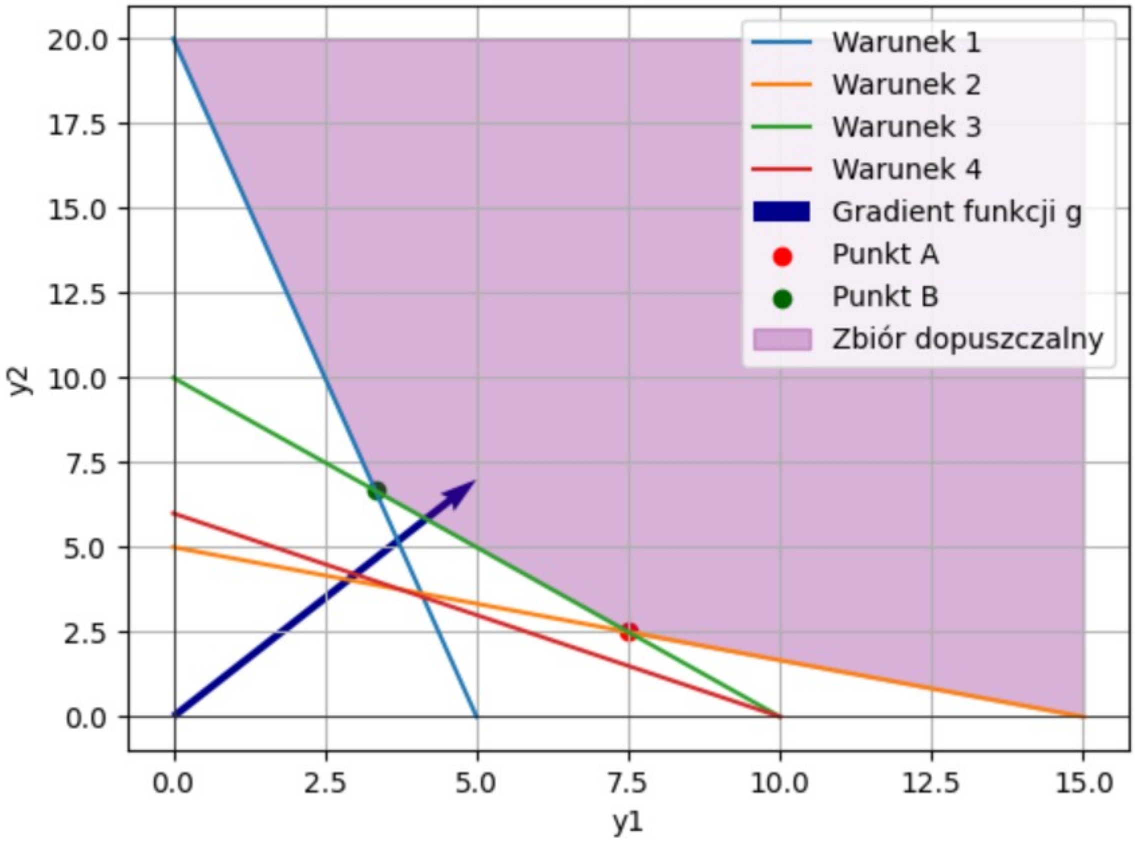
$$\Delta_{y_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0,4 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Ostatecznie, rozwiązania układu równań to:

$$y_1 = \frac{\Delta_{y_1}}{\Delta} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$$

$$y_2 = \frac{\Delta_{y_2}}{\Delta} = \frac{2}{0,3} = \frac{20}{3}$$

Zatem, rozwiązaniem tego układu równań jest para $y_1 = \frac{10}{3}$ i $y_2 = \frac{20}{3}$, czyli $B = (\frac{10}{3}, \frac{20}{3})$.



$$(10, 0) \Rightarrow 0,6 \cdot 10 + 1,8 \cdot 0 = 6 + 0 = 6$$
$$(\tfrac{10}{3}, \tfrac{20}{3}) \Rightarrow 0,6 \cdot \tfrac{10}{3} + 1,8 \cdot \tfrac{20}{3} = 2 + 12 = 14$$

Z powyższych równań możemy wywnioskować, że $b_2 \in [6, 14]$.

Tym razem w lewą stronę nierówności (3) wstawimy punkt $(15, 0)$ oraz punkt przecięcia półpłaszczyzn (1) i (2). Oznaczymy go jako C i również naniesiemy na wykres.

Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} y_1 + 0,25y_2 = 5 & (11) \\ 0,6y_1 + 1,8y_2 = 9 & (12) \end{cases}$$

Reprezentując ten układ równań w postaci macierzowej, otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,6 & 1,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,6 & 1,8 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1,8) - (0,25 \cdot 0,6) = 1,8 - 0,15 = 1.65$$

$$\Delta_{y_1} = \begin{vmatrix} 5 & 0,25 \\ 9 & 1,8 \end{vmatrix} = (5 \cdot 1,8) - (0,25 \cdot 9) = 9 - 2,25 = 6,75$$

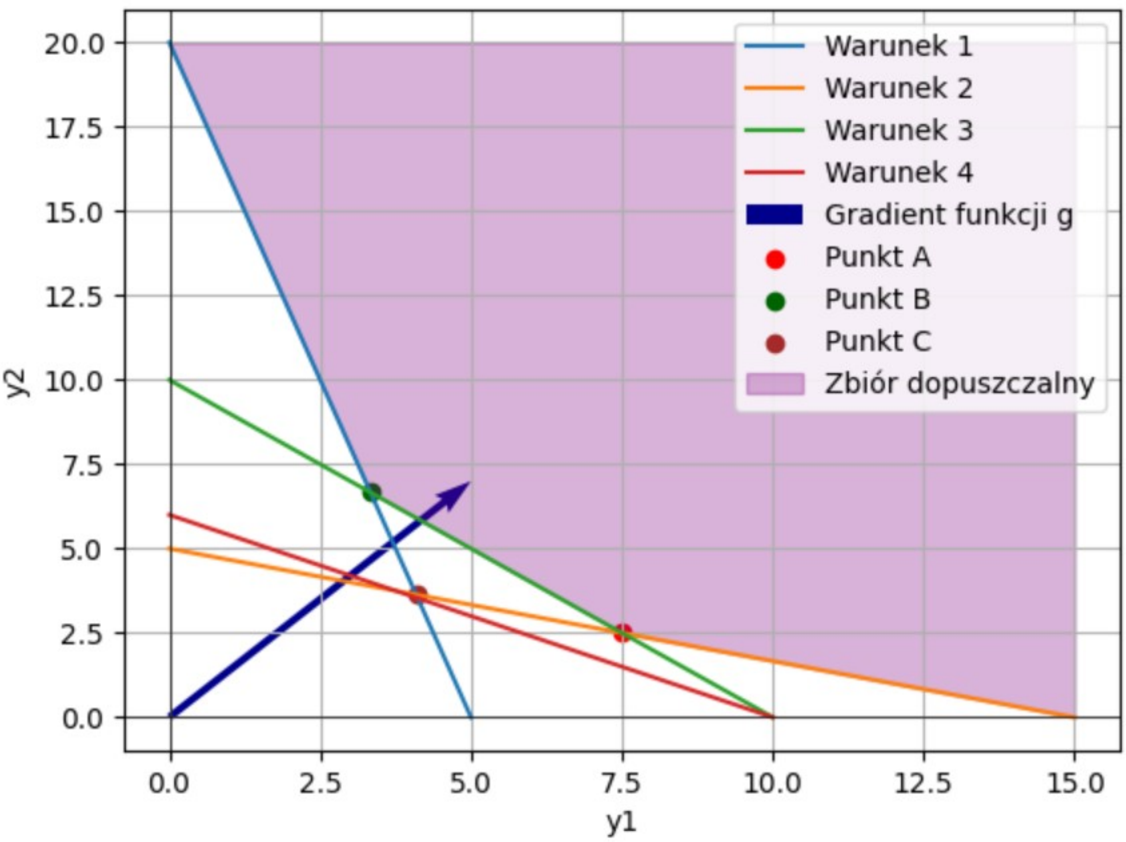
$$\Delta_{y_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0,6 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 9) - (5 \cdot 0,6) = 9 - 3 = 6$$

Ostatecznie, rozwiązania układu równań to:

$$y_1 = \frac{\Delta_{y_1}}{\Delta} = \frac{6,75}{1,65} = \frac{45}{11}$$

$$y_2 = \frac{\Delta_{y_2}}{\Delta} = \frac{6}{1,65} = \frac{40}{11}$$

Zatem, rozwiązaniem tego układu równań jest para $y_1 = \frac{45}{11}$ i $y_2 = \frac{40}{11}$, czyli $C = (\frac{45}{11}, \frac{40}{11})$.



$$(15,0) \Rightarrow 0,4 \cdot 15 + 0,4 \cdot 0 = 6 + 0 = 6$$
$$(\tfrac{45}{11}, \tfrac{40}{11}) \Rightarrow 0,4 \cdot \tfrac{45}{11} + 0,4 \cdot \tfrac{40}{11} = \tfrac{180+160}{110} = \tfrac{34}{11} = 3\tfrac{1}{11}$$

Z powyższych równań możemy wywnioskować, że $b_3 \in \left[3\frac{1}{11}, 6\right]$.

2.3.2 Program pierwotny

Analizy wrażliwości programu pierwotnego dokonamy poprzez odpowiednią interpretację analizy wrażliwości programu dualnego.

Dla współczynników funkcji celu w programie pierwotnym

Należy pamiętać, że wagi funkcji celu w programie pierwotnym są wyrazami wolnymi w programie dualnym. Zatem, sprawdźmy jak mogą zmieniać się wagi funkcji celu w programie pierwotnym, aby rozwiązanie dalej było optymalne. Nie będzie to trudne, gdyż wystarczy przejść z programu dualnego, dla którego udało nam się już wyznaczyć przedziały wrażliwości, na program pierwotny.

Ograniczenia dla wyrazów wolnych w programie dualnym:

$$\begin{cases} b_1 \in \left(-\infty, 8\frac{1}{8}\right] \\ b_2 \in [6, 14] \\ b_3 \in \left[3\frac{1}{11}, 6\right] \\ b_4 \in (-\infty, 7] \end{cases}$$

Ograniczenia współczynników funkcji celu w programie pierwotnym będą zatem wyglądać następująco:

$$\begin{cases} c_1 \in \left(-\infty, 8\frac{1}{8}\right] \\ c_2 \in [6, 14] \\ c_3 \in \left[3\frac{1}{11}, 6\right] \\ c_4 \in (-\infty, 7] \end{cases}$$

Dla wyrazów wolnych w programie pierwotnym

Wyrazy wolne w programie pierwotnym są współczynnikami funkcji celu w programie dulanym, więc do wykonania ich analizy wrażliwości posłużymy się analizą wrażliwośći dla wag funkcji celu w programie dualnym. Wykonamy właściwie analogiczny proces jak wyżej tzn. powrót z programu dualnego na program pierwotny.

Ograniczenia dla współczynników funkcji celu w programie dualnym:

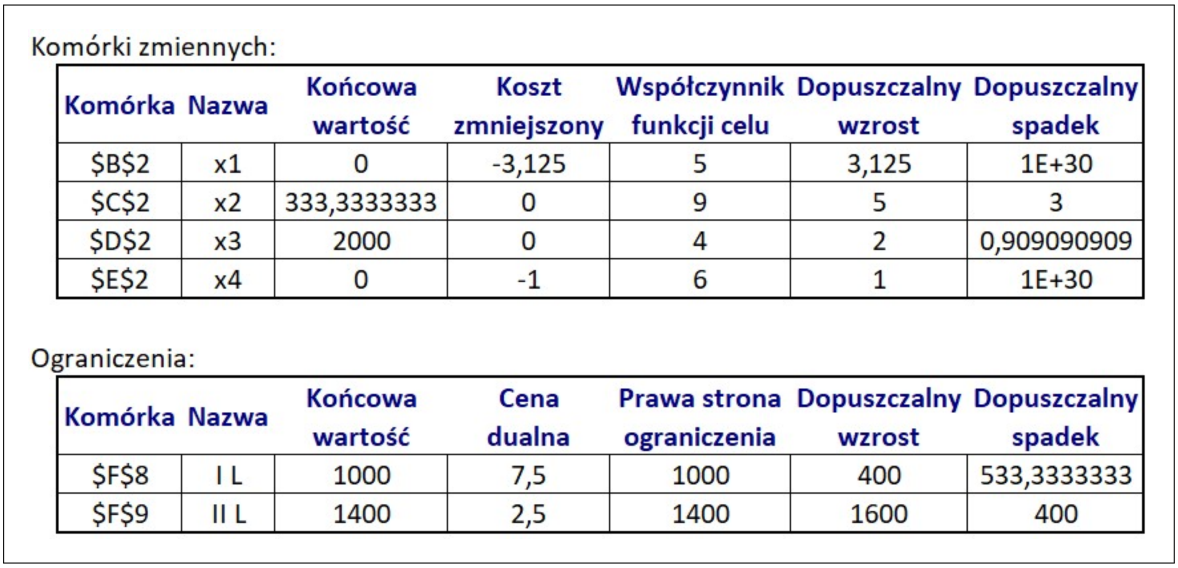
$$\begin{cases} c_1 \in \left[466\frac{2}{3}, 1400\right] \\ c_2 \in [1000, 3000] \end{cases}$$

Ograniczenia dla wyrazów wolnych w programie pierwotnym będą zatem wyglądać następująco:

$$\begin{cases} b_1 \in \left[466\frac{2}{3}, 1400\right] \\ b_2 \in [1000, 3000] \end{cases}$$

2.3.3 Raport wrażliwości dla programu pierwotnego

Sprawdzimy teraz poprawność wykonania analizy wrażliwości dla programu pierwotnego przez wykorzystanie pakietu Solver, będącego dodatkiem Microsoft Excel.



Komórki zmiennych:

Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Koszt zmniejszony	Współczynnik funkcji celu	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek
B2	x1	0	-3,125	5	3,125	1E+30
C2	x2	333,3333333	0	9	5	3
D2	x3	2000	0	4	2	0,909090909
E2	x4	0	-1	6	1	1E+30

Ograniczenia:

Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Cena dualna	Prawa strona ograniczenia	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek
F8	I L	1000	7,5	1000	400	533,3333333
F9	II L	1400	2,5	1400	1600	400

Dokonamy teraz interpretacji wyników raportu wrażliwości:

$$\begin{cases} c_1 \in \left[5-\infty, 5+3\frac{1}{8}\right] = \left(-\infty, 8\frac{1}{8}\right] \\ c_2 \in [9-3, 9+5] = [6, 14] \\ c_3 \in \left[4-\frac{10}{11}, 4+2\right] = \left[3\frac{1}{11}, 6\right] \\ c_4 \in [6-\infty, 6+1] = (-\infty, 7] \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 \in \left[1000-533\frac{1}{3}, 1000+400\right] = \left[466\frac{2}{3}, 1400\right] \\ b_2 \in [1400-400, 1400+1600] = [1000, 3000] \end{cases}$$

Jak można zauważyć wyniki w raporcie wrażliwości pokrywają się z tymi, które wyznaczyliśmy ręcznie na podstawie odpowiednich obliczeń. Świadczy to o poprawnie przeprowadzonej analizie wrażliwości.

2.4 Program dualny w pakiecie Solver

Na koniec tego rozdziału sprawdzimy poprawność rozwiązania programu dualnego oraz analizy wrażliwości w pakiecie Solver. Rozwiązanie dla programu pierwotnego w tym samym pakiecie znajdzie się w kolejnym rozdziale dotyczącym algorytmu simpleks.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Zmienne	x1	x2	x3	x4								
2		0	333,3333	2000	0								
3													
4	Współczynniki funkcji celu	5	9	4	6				Funkcja celu	11000			
5													
6													
7	Ograniczenia					L	P					Zmienne dualne	
8	I	1	0,6	0,4	0,6	1000	1000					y1	7,5
9	II	0,25	1,8	0,4	1	1400	1400					y2	2,5
10													
11	Warunki dualne(L)	8,125	9	4	7								
12													
13									Funkcja celu(dualna)	11000			
14													

Komórki zmiennych:

Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Koszt zmniejszony	Współczynnik funkcji celu	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek
M8	y1	7,5	0	1000	400	533,3333333
M9	y2	2,5	0	1400	1600	400

Ograniczenia:

Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Cena dualna	Prawa strona ograniczenia	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek
B11	Warunki dualne(L) x1	8,125	0	5	3,125	1E+30
C11	Warunki dualne(L) x2	9	333,3333333	9	5	3
D11	Warunki dualne(L) x3	4	2000	4	2	0,909090909
E11	Warunki dualne(L) x4	7	0	6	1	1E+30

Rozwiązania w pakiecie Solver pokrywają się z tymi wyznaczonymi analitycznie, co sugeruje poprawność rozwiązania programu dualnego.

Rozdział 3

Część II

3.1 Algorytm simpleks

Funkcja celu:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max$$

Ograniczenia i warunki brzegowe:

$$\begin{cases} x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 + x_5 = 1000 \\ 0,25x_1 + 1,8x_2 + 0,4x_3 + x_4 + x_6 = 1400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Zamienimy ułamki dzieisiętne na ułamki zwykłe, wstawiając odpowiednie współczynniki do tablicy simpleksowej, w celu ułatwienia sobie rachunków.

c_b	c_j	5	9	4	6	0	0	Rozwiązanie
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_5	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	0	1000
0	x_6	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	1	1400
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	5	9	4	6	0	0	
0	x_5	$\frac{11}{12}$	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1600}{3}$
9	x_2	$\frac{5}{36}$	1	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{7000}{9}$
	z_j	$\frac{5}{4}$	9	2	5	0	9	7000
	$c_j - z_j$	$\frac{15}{4}$	0	2	1	0	-9	
5	x_1	1	0	$\frac{16}{55}$	$\frac{16}{55}$	$\frac{12}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$\frac{6400}{11}$
9	x_2	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{17}{33}$	$-\frac{5}{33}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{23000}{33}$
	z_j	5	9	$\frac{34}{11}$	$\frac{67}{11}$	$\frac{45}{11}$	$\frac{40}{11}$	$\frac{101000}{11}$
	$c_j - z_j$	0	0	$\frac{10}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{45}{11}$	$-\frac{40}{11}$	
4	x_3	$\frac{55}{16}$	0	1	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$	2000
9	x_2	$-\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1000}{3}$
	z_j	$\frac{65}{8}$	9	4	7	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	11000
	$c_j - z_j$	$-\frac{25}{8}$	0	0	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	

3.2 Analiza wrażliwośći

Dla współczynników funkcji celu programu pierwotnego

Przeprowadzimy teraz analizę wrażliwości wag funkcji celu w programie pierwotnym. Wprowadzimy w tym celu symbol Δ_i dla $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, który będzie określał przedział mówiący o dopuszczalnym spadku i dopuszczalnym wzroście współczynników w funkcji celu. Zaczniemy od zbadania dopuszczalnej zmienności współczynnika przy x_1.

c_b	c_j	$5 + \Delta_1$	9	4	6	0	0
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_3	$\frac{55}{16}$	0	1	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$
9	x_2	$-\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
	z_j	$\frac{65}{8}$	9	4	7	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$
	$c_j - z_j$	$\Delta_1 - \frac{25}{8}$	0	0	-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$

$$\Delta_1 - \tfrac{25}{8} \leq 0 \Rightarrow \Delta_1 \leq \tfrac{25}{8} \Rightarrow \Delta_1 \in \left(-\infty, 3\tfrac{1}{8}\right]$$
$$c_1 \in \left(-\infty, 8\tfrac{1}{8}\right]$$

Następnie, zbadamy jak może zmieniać się współczynnik przy x_2, aby wyznaczone przez nas rozwiązanie bazowe było dalej optymalne. Będzie to o tyle trudniejsze, że zmienna x_2 jest zmienna bazową.

c_b	c_j	5	$9 + \Delta_2$	4	6	0	0
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_3	$\frac{55}{16}$	0	1	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$
9	$x_2 + \Delta_2$	$-\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
	z_j	$\frac{65}{8} - \frac{5}{8}\Delta_2$	$9 + \Delta_2$	4	$7 + \frac{1}{3}\Delta_2$	$\frac{15}{2} - \frac{5}{6}\Delta_2$	$\frac{5}{2} + \frac{5}{6}\Delta_2$
	$c_j - z_j$	$-\frac{25}{8} + \frac{5}{8}\Delta_2$	0	0	$-1 - \frac{1}{3}\Delta_2$	$-\frac{15}{2} + \frac{5}{6}\Delta_2$	$-\frac{5}{2} - \frac{5}{6}\Delta_2$

$$\begin{cases} -\frac{25}{8} + \frac{5}{8}\Delta_2 \leq 0 \\ -1 - \frac{1}{3}\Delta_2 \leq 0 \\ -\frac{15}{2} + \frac{5}{6}\Delta_2 \leq 0 \\ -\frac{5}{2} - \frac{5}{6}\Delta_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_2 \leq 5 \\ \Delta_2 \geq -3 \\ \Delta_2 \leq 9 \\ \Delta_2 \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta_2 \in [-3, 5]$$

$$c_2 \in [9 - 3, 9 + 5]\,, \text{ czyli } c_2 \in [6, 14]$$

Zmienna x_3 jest również zmienną bazową, przez co bardzo ważne jest żebyśmy wyznaczyli przedział w obrębie jakiego może się zmieniać.

c_b	c_j	5	9	$4+\Delta_3$	6	0	0
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	$x_3+\Delta_3$	$\frac{55}{16}$	0	1	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$
9	x_2	$-\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
	z_j	$\frac{65}{8}+\frac{55}{16}\Delta_3$	9	$4+\Delta_3$	$7+\Delta_3$	$\frac{15}{2}+\frac{15}{4}\Delta_3$	$\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\Delta_3$
	c_j-z_j	$-\frac{25}{8}-\frac{55}{16}\Delta_3$	0	0	$-1-\Delta_3$	$-\frac{15}{2}-\frac{15}{4}\Delta_3$	$-\frac{5}{2}+\frac{5}{4}\Delta_3$

$$\begin{cases} -\frac{25}{8}-\frac{55}{16}\Delta_3 \le 0 \\ -1-\Delta_3 \le 0 \\ -\frac{15}{2}-\frac{15}{4}\Delta_3 \le 0 \\ -\frac{5}{2}+\frac{5}{4}\Delta_3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_3 \ge -\frac{10}{11} \\ \Delta_3 \le -1 \\ \Delta_3 \ge -2 \\ \Delta_3 \le 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \Delta_3 \in \left[-\frac{10}{11}, 2\right]$$

$$c_3 \in \left[4-\frac{10}{11}, 4+2\right], \text{ czyli } c_3 \in \left[3\frac{1}{11}, 6\right]$$

W ostatnim kroku, zajmiemy się zmienną x_4. Nie jest ona zmienną bazową, dzięki czemu będzie to nietrudne zadanie.

c_b	c_j	5	9	4	$6+\Delta_4$	0	0
	Zmienne bazowe	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_3	$\frac{55}{16}$	0	1	1	$\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$
9	x_2	$-\frac{5}{8}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$
	z_j	$\frac{65}{8}$	9	4	7	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$
	c_j-z_j	$\frac{25}{8}$	0	0	Δ_4-1	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$

$$\Delta_4 - 1 \le 0 \Rightarrow \Delta_4 \le 1 \Rightarrow \Delta_1 \in (-\infty, 1]$$

$$c_4 \in (-\infty, 7]$$

Udało się nam wyznaczyć dopuszczalne przedziały zmienności, a co za tym idzie wiemy jak mogą się zmieniać współczynniki funkcji celu, aby nasze rozwiązanie było dalej optymalne. Wyniki pokrywają się z analizą wrażliwości przeprowadzoną podczas wykonywania tego samego zadania z zastosowaniem programu dualnego, co świadczy o ich poprawności. Przejdziemy teraz do tej samej procedury, jednak dla wyrazów wolnych.

Dla wyrazów wolnych

Definiujemy trzy macierze:

$$B_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1400 \end{bmatrix},$$

gdzie: A - macierz warunków ograniczających połączona z macierzą jednostkową, B - wektor wyrazów wolnych warunków ogranicząjących oraz B_3^{-1} - macierz obrotu.

Obliczymy teraz iloczyn macierzy obrotu B_3^{-1} oraz warunków ograniczających A.

$$B_3^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{55}{16} & 0 & 1 & 1 & \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{8} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Wynikiem mnożenia jest zasadnicza część tablicy simpleksowej po jej ostatnim obrocie. Analogiczną procedurę wykonamy dla macierzy obrotu B_3^{-1} oraz wektora wyrazów wolnych B.

$$B_3^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 1400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ \frac{1000}{3} \end{bmatrix}$$

Iloczynem jest kolumna z rozwiązaniem po ostatnim obrocie tablicy simpleksowej. Świadczy to o poprawnie zdefiniowanej macierzy obrotu B_3^{-1}.

Przjedziemy teraz do analizy wrażliwości wyrazów wolnych. Wyznaczymy dopuszczalne przedziały ich zmienności, określone przez symbole ε_1 oraz ε_2. Mnożymy macierz obrotu B_3^{-1} przez wektor wyrazów wolnych, dodając składniki ε_1 i ε_2 w odpowiednie miejsca. Jako iloczyn dostajemy macierze o wymiarach 2 na 1, z których tworzymy układy równań, a następnie je rozwiązujemy. W ostatnim kroku, nanosimy dopuszczalne spadki i wzrosty na obecne wyrazy wolne, żeby sprawdzić w jakim przedziale mogą sie one zmieniać, aby aktualne rozwiązanie dalej było optymalne.

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 + \varepsilon_1 \\ 1400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 + \frac{15}{4}\varepsilon_1 \\ \frac{1000}{3} - \frac{5}{6}\varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2000 + \frac{15}{4}\varepsilon_1 \geq 0 \\ \frac{1000}{3} - \frac{5}{6}\varepsilon_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 \geq -\frac{1600}{3} \\ \varepsilon_1 \leq 400 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_1 \in \left[-\frac{1600}{3}, 400\right]$$

$$c_1 \in \left[466\frac{2}{3}, 1400\right]$$

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1000 \\ 1400+\varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000-\frac{5}{4}\varepsilon_2 \\ \frac{1000}{3}+\frac{5}{6}\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2000-\frac{5}{4}\varepsilon_2 \geq 0 \\ \frac{1000}{3}+\frac{5}{6}\varepsilon_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_2 \leq 1600 \\ \varepsilon_2 \geq -400 \end{cases} \Rightarrow \quad \varepsilon_2 \in [-400, 1600]$$

$$c_2 \in [1000, 3000]$$

3.3 Rozwiązanie zadania w pakiecie Solver

Sprawdzimy sobie na koniec tego rozdziału poprawność wykonania zadania wraz z pakietem Solver. Pokażemy, ile powinna wynosić wartość funkcji celu, ile powinny wynosić jej współczynniki i jak powinnien wyglądać raport wrażliwości.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Zmienne	x1	x2	x3	x4					
2		0	333,3333	2000	0					
3										
4	Współczynniki funkcji celu	5	9	4	6				Funkcja celu	11000
5										
6										
7	Ograniczenia					L	P			
8	I	1	0,6	0,4	0,6	1000	1000			
9	II	0,25	1,8	0,4	1	1400	1400			
10										

Komórki zmiennych:

Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Koszt zmniejszony	Współczynnik funkcji celu	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek
B2	x1	0	-3,125	5	3,125	1E+30
C2	x2	333,3333333	0	9	5	3
D2	x3	2000	0	4	2	0,909090909
E2	x4	0	-1	6	1	1E+30

Ograniczenia:

Komórka	Nazwa	Końcowa wartość	Cena dualna	Prawa strona ograniczenia	Dopuszczalny wzrost	Dopuszczalny spadek
F8	I L	1000	7,5	1000	400	533,3333333
F9	II L	1400	2,5	1400	1600	400

Rozwiązania z pakietu Solver pokrywają się z tymi wyznaczonymi analitycznie, co sugeruje poprawność wykonania zadania.

Rozdział 4

Część III

4.1 Algorytm transportowy

4.1.1 Treść zadania i rozwiązanie

Trzy cementownie C_1, C_2 i C_3 położone w różnych miejscowościach zaopatrują w cement cztery składy materiałów budowlanych S_1, S_2, S_3, S_4. Zdolności produkcyjne każdej cementowni wynoszą 500 t, natomiast zapotrzebowanie składów wynosi odpowiednio 200 t, 300 t, 400 t i 600 t. Koszty produkcji w poszczególnych cementowniach wynoszą odpowiednio 100, 90 i 95 zł za tonę, a koszty transportu jednej tony cementu z cementowni do składów (w złotówkach) podano w tabeli poniżej.

Dostawcy	Odbiorcy			
	S_1	S_2	S_3	S_4
C_1	4	9	11	9
C_2	8	11	5	12
C_3	5	15	10	8

Zakładając, że cemenetownie będą produkować tylko tyle, ile potrzebują odbiorcy, opracować plan produkcji cementu i jego transportu do składów materiałów budowlanych, optymalny z punktu widzenia łącznych kosztów produkcji i transportu.

Model matematyczny

Funkcja celu:

$$f(x_{11}, x_{12}, ..., x_{33}, x_{34}) = 104x_{11} + 109x_{12} + ... + 105x_{33} + 103x_{34} \rightarrow \min$$

x_{ij} - przewóz od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy, gdzie $i \in \{1, 2, 3\}$ i $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x_{ij} \geq 0$.

Ograniczenia

Dla dostawców:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 500 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 500 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 500 \end{cases}$$

Dla odbiorców:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 400 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 600 \end{cases}$$

Zagadnienie transportowe

Znanych mamy trzech dostawców (cementownie) i czterech odbiorców cementu (składy materiałów budowalnych). Ponadto znane są dodatnie liczby x_{ij}, tworzące macierz jednostkowych kosztów transportu. Rozpoczniemy od sprawdzenia, czy nasze zagadnienie jest zamknięte. Aby tak było musi zachodzić równość pomiędzy zasobami dostawców oraz zapotrzebowaniami odbiorców. Nietrudno jednak zauważyć, że obie sumy są sobie równe i wynoszą 1500 ton. Mamy zatem do czynienia z zagadnieniem zamkniętym. Dla zamkniętego zadania transportowego uzyskanie rozwiązania dopuszczalnego, które okaże się rozwiązaniem bazowym jest zawsze możliwe i nie wymaga zastosowania żadnych specjalnych technik. Zastosujemy najpierw tzw. metodę kąta północno - wschodniego, a później metodę najmniejszego elementu macierzy. Po zastosowaniu obu tych metod spróbujemy doprowadzić rozwiązania dopuszczalne do rozwiązania optymalnego.

Metoda kąta północno - wschodniego

Zaczynamy od zapisania zagadnienia transportowego w tablicy transportowej.

	200	300	400	600
500	104	109	111	109
500	98	101	95	102
500	100	110	105	103

Następnie, wyznaczamy rozwiązanie dopuszczalne metodą kątą północno - wschodniego. Sprawdzamy też, czy może nie mieliśmy wielkiej ilości szczęścia i od razu nasze rozwiązanie dopuszczalne nie jest, aby optymalne. Szanse na to są z reguły bardzo niskie dla tej metody, jednak niezerowe. Utworzymy w tym celu tablicę kosztów zastępczych.

	200	300	400	600	
500	104^{200}	109^{300}	111	109	0
500	98	101^{0}	95^{400}	102^{100}	-8
500	100	110	105	103^{500}	-7
	104	109	103	110	

Otrzymujemy zatem nową tablicę. Widzimy, że nasz rozwiązanie nie okazało się optymalne, gdyż w poniższej tablicy występują elementy o ujemnych wartościach.

	0^{200}	0^{300}	8	-1
	2	0^{0}	0^{400}	0^{100}
	3	8	9	0^{500}

Spróbujemy dodać nową trasę, tym samym zmieniając wielkość przewozu na pozostałych trasach, żeby rozwiązanie pozostało dopuszczalne. Jeśli, rozpoczynając od nowej trasy, będziemy kolejno dodawać i odejmować od przewozów dodatnią wartość t, to nowe rozwiązanie będzie dopuszczalne, jeśli tylko wszystkie jego składowe będą ≥ 0. Warto wspomnieć, że możemy poruszać się tylko kolejno raz w poziomie i raz w pionie pomiędzy punktami bazowymi. Zobaczmy jak zmieni się rozwiązanie dla $t = 100$.

	0^{200}	0^{300-t}	8	-1^{+t}
	2	0^{0+t}	0^{400}	0^{100-t}
	3	8	9	0^{500}

Otrzymaliśmy nowe rozwiązanie dopuszczalne. Sprawdzimy teraz, czy jest optymalne.

	0^{200}	0^{200}	8	-1^{100}
	2	0^{100}	0^{400}	0^{x}
	3	8	9	0^{500}

Po zmodyfikowaniu tras, tworzymy kolejną tablicę kosztów zastępczych.

	200	300	400	600	
500	104^{200}	109^{200}	111	109^{100}	0
500	98	101^{100}	95^{400}	102	-8
500	100	110	105	103^{500}	-6
	104	109	103	109	

Wszystkie elementy tablicy kosztów zastępczych są nieujemne, co implikuje fakt o tym, że otrzymaliśmy powyżej rozwiązanie dopuszczalne w tablicy transportowej, które jest rozwiązaniem optymalnym.

	0^{200}	0^{200}	8	0^{100}
	2	0^{100}	0^{400}	1
	2	7	8	0^{500}

Odpowiedź: Wartość funkcji celu f po zastosowaniu metody kąta północno - wschodniego wynosiła 153200, jednak minimalna wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego wynosi 153100, co wyznaczyliśmy dzięki algorytmowi transportowemu.

Metoda najmniejszego elementu macierzy

W tej części drugi raz zajmiemy się tym samym problemem, jednak tym razem rozwiążemy go metodą najmniejszego elementu macierzy, a następnie utworzymy tablicę kosztów zastępczych. Nie będziemy opisywać bardzo szczegółowo procesu uzyskania rozwiązania optymalnego, gdyż zrobiliśmy to dla metody kąta północno - wschodniego.

	200	300	400	600	
500	104	109^{300}	111	109^{200}	6
500	98^{100}	101	95^{400}	102	-2
500	100^{100}	110	105	103^{400}	0
	100	103	97	103	

Rozwiązanie dopuszczalne, które jest wynikiem metody najmniejszego elementu macierzy nie jest optymalne, gdyż w tablicy kosztów zastępczych znajdują się elementy ujemne. Wartość funkcji celu f dla tego rozwiązania to 153500.

	-2	0^{300}	8	0^{200}
	0^{100}	0	0^{400}	1
	0^{100}	7	8	0^{400}

Ustalamy nową trasę, tym samym biorąc $t = 100$.

	-2^{+t}	0^{300}	8	0^{200-t}
	0^{100}	0	0^{400}	1
	0^{100-t}	7	8	0^{400+t}

Po aktualizacji kosztów uzyskujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne.

	-2^{100}	0^{300}	8	0^{100}
	0^{100}	0	0^{400}	1
	0^{x}	7	8	0^{500}

Sprawdzamy, czy nowe rozwiązanie jest optymalne. Tworzymy kolejną tablicę kosztów zastępczych. Wartość funkcji celu f dla tego rozwiązania wynosi 153300.

	200	300	400	600	
500	104^{100}	109^{300}	111	109^{100}	0
500	98^{100}	101	95^{400}	102	-6
500	100	110	105	103^{500}	-6
	104	109	101	109	

Jak widać poniżej, dalej nie udało nam się uzyskać optymalnego rozwiązania.

	0^{100}	0^{300}	10	0^{100}
	0^{100}	-2	0^{400}	-1
	2	7	10	0^{500}

Po raz kolejny dodajemy nową trasę. Ustalamy $t = 100$.

	0^{100+t}	0^{300-t}	10	0^{100}
	0^{100-t}	-2^{+t}	0^{400}	-1
	2	7	10	0^{500}

Otrzymujemy nowe rozwiązanie dopuszczalne. Sprawdzimy, czy jest ono optymalne.

	0^{200}	0^{200}	10	0^{100}
	0^{x}	-2^{100}	0^{400}	-1
	2	7	10	0^{500}

Z uwagi na fakt, że wiemy jakie jest rozwiązanie optymalne po rozwiązaniu zadania transportowego dla metody kąta północno - wschodniego widzimy, że koszty się zgadzają. Jednak sprawdzimy to jeszcze raz, tworząc tablicę kosztów zastępczych.

	200	300	400	600	
500	104^{200}	109^{200}	111	109^{100}	0
500	98	101^{100}	95^{400}	102	-8
500	100	110	105	103^{500}	-6
	104	109	103	109	

Wszystkie elementy tablicy kosztów zastępczych są nieujemne. Powyższe rozwiązanie zagadnienia transportowego zawarte w tablicy transportowej jest optymalne.

	0^{200}	0^{200}	8	0^{100}
	2	0^{100}	0^{400}	1
	2	7	8	0^{500}

Odpowiedź: Wartość funkcji celu f dla rozwiązania optymalnego wynosi 153100.

4.2 Algorytm węgierski

4.2.1 Treść zadania i rozwiązanie

W pewnym zakładzie są cztery obrabiarki: O_1, O_2, O_3 i O_4, na których można wykonywać trzy rodzaje czynności: 1, 2 i 3. Każdą czynność można jednocześnie realizować tylko na jednej obrabiarce i każda obrabiarka może być zajęta wykonywaniem tylko jednej czynności. W tablicy poniżej podano nakłady czasu (w godzinach) niezbędne dla realizacji na i-tej obrabiarce j-tej czynności.

Obrabiarka	Czynność		
	1	2	3
O_1	30	14	23
O_2	17	22	18
O_3	11	18	7
O_4	20	6	12

Określić najbardziej racjonalny rozdział czynności pomiędzy obrabiarki, zapewniający minimalizację łącznych nakładów czasu.

Model matematyczny

Funkcja celu:

$$f(x_{11}, x_{12}, ..., x_{42}, x_{43}) = 30x_{11} + 14x_{12} + ... + 6x_{42} + 12x_{43} \rightarrow \min$$

x_{ij} - i-ta obrabiarka wykonuje j-tą czynność, gdzie $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ oraz $x_{ij} \in \{0, 1\}$

Ograniczenia

Dla obrabiarek:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 1 \end{cases}$$

Dla czynności:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \end{cases}$$

Algorytm węgierski

Cztery obrabiarki mają zostać przydzielone do wykonywania trzech różnych czynności, przy czym x_{ij} oznacza koszt przypisania i-tej obrabiarki do j-tej czynności dla wcześniej zdefiniowanych i oraz j. Używając zmiennych decyzyjnych:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy obrabiarka } i \text{ wykonuje czynność } j, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Innymi słowy, każda obrabiarka może wykonywać tylko jedną czynność, a każda czynność może być przydzielona tylko do jednej obrabiarki. Warto jednak pamiętać o tym, że aby zastosować ten algorytm, problem musi dotyczyć minimalizacji, a macierz kosztów musi być kwadratowa. W naszym przypadku jednak mamy macierz wymiaru 4 na 3, więc musimy dopisać jeszcze jedną kolumnę - wypełnioną samymi zerami, określającą czwartą, fikcyjną czynność.

$$\begin{bmatrix} 30 & 14 & 23 & 0 \\ 17 & 22 & 18 & 0 \\ 11 & 18 & 7 & 0 \\ 20 & 6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Następnie, odejmujemy od każdej kolumny jej najmniejszy element, a później staramy się skreślić wszystkie zera w tej tablicy możliwie małą liczbą linii prostych - pionowych lub poziomych. Jeżeli najmniejsza liczba takich linii, niezbędna do skreślenia wszystkich zer jest równa stopniowi macierzy (u nas ten wymiar wynosi 4), to otrzymujemy rozwiązanie optymalne. Moglibyśmy skreślić np. czwartą kolumnę oraz trzeci i czwarty wiersz, jednak dalej liczba minimalnych skreśleń jest mniejsza od 4.

$$\begin{bmatrix} 19 & 8 & 16 & 0 \\ 6 & 16 & 11 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

W kolejnym kroku znajdujemy najmniejszy, nieskreślony element macierzy, który w naszym przypadku jest równy 6. Odejmujemy go od elementów nieskreślonych, dodajemy do elementów podwójnie skreślonych, a elementy raz skreślone zostają bez zmian. Tym samym otrzymujemy nową macierz, w której minimalna liczba skreśleń wynosi cztery. Jest to równoznaczne z otrzymaniem rozwiązania optymalnego.

$$\begin{bmatrix} 13 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Na końcu pozstaje nam przydzielić odpowiednie obrabiarki do konretnych czynności według wcześniej zdefiniowanych reguł.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odpowiedź: Obrabiarka O_2 powinna wykonywać pierwszą czynność, obrabiarka O_4 drugą czynność, a obrabiarka O_3 trzecią, minimalizując przy tym nakład pracy do $17 + 6 + 7 = 30$ godzin.

4.3 Rozwiązania zadań w pakiecie Solver

Sprawdzimy poprawność wykonanych zadań w rozdziale 4 przy pomocy pakietu Solver.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Koszty	S1	S2	S3	S4						
2	C1	104	109	111	109						
3	C2	98	101	95	102						
4	C3	100	110	105	103						
5											
6											
7	Przewozy	S1	S2	S3	S4	Wywóz	Podaż			Funkcja celu	153100
8	C1	200	200	0	100	500	500				
9	C2	0	100	400	0	500	500				
10	C3	0	0	0	500	500	500				
11											
12	Przywóz	200	300	400	600						
13	Popyt	200	300	400	600						

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Obrabiarka/Czynność	1	2	3						
2	O1	30	14	23						
3	O2	17	22	18						
4	O3	11	18	7						
5	O4	20	6	12						
6										
7										
8	Obrabiarka/Czynność	1	2	3	Wywóz	Podaż			Funkcja celu	30
9	O1	0	0	0	0	1				
10	O2	1	0	0	1	1				
11	O3	0	0	1	1	1				
12	O4	0	1	0	1	1				
13										
14	Przywóz	1	1	1						
15	Popyt	1	1	1						

Pierwsze zdjęcie prezentuje rozwiązanie zadania z algorytmem transportowym, a drugie z algorytmem węgierskim. Jak można zauważyć, oba rozwiązania pokrywają się z tymi wyznaczonymi analitycznie.

Rozdział 5

Podsumowanie

- Dzięki zastosowaniu programu dualnego, mogliśmy skorzystać z metody graficznej, co umożliwiło nam znalezienie optymalnego rozwiązania problemu produkcji. Nasze rozwiązanie pozwoliło maksymalizować przychód przy ograniczonych zasobach surowców.
- Analiza wrażliwości pozwoliła nam ocenić wpływ zmian parametrów na ostateczne rozwiązanie, identyfikując zakresy dopuszczalnych zmian w kosztach surowców i cenach wyrobów.
- Algorytm transportowy pozwolił nam skutecznie rozwiązać problem dystrybucji zasobów, gdyż takie jest jego główne zastosowanie.
- Algorytm węgierski umożliwił nam rozwiązanie problemu przydziału w bardzo skuteczny i stosunkowo łatwy sposób.
- Pakiet Solver to jedno z najskuteczniejszych narzędzi do rozwiązywania problemów programowania liniowego.