Universidade Estadual de Campinas

Faculdade de Engenharia Mecânica

Controle de um Sistema Ponte Rolante

ES710 – Controle de Sistemas Mecânicos

Gabriel De Freitas Leite 216180
Matheus Santos Sano 222370

CAMPINAS, novembro de 2021

1.

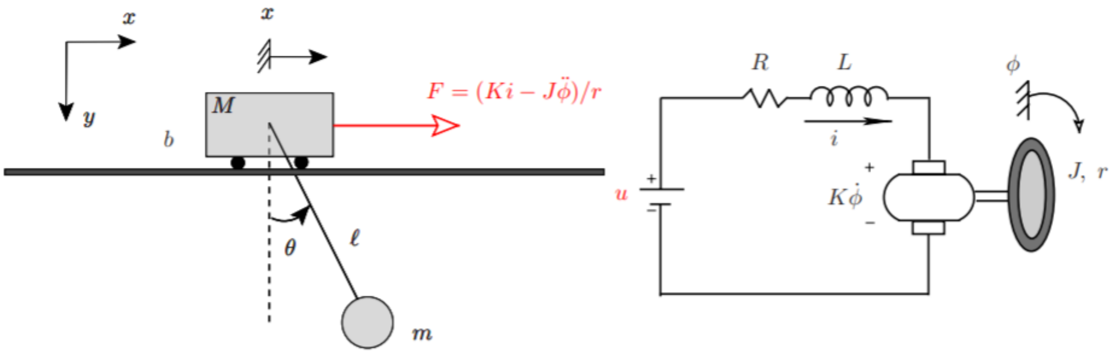

Figura 1: Sistema mecânico carro-pêndulo à esquerda e o sistema eletromecânico do motor à direita que transfere a força F(t) para o carro.

A partir do sistema apresentado na Figura 1, o sistema mecânico carro-pêndulo foi modelado:

- Carro:

$$F + T \cdot sen(\theta) - M\ddot{x} - b\dot{x} = 0 \qquad (1)$$

- Pêndulo:
  - Somatório das forças em Y:

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cdot cos(\theta) - mg + m\frac{d^2}{dt^2}\big(l \cdot cos(\theta)\big) = 0$$

$$T \cdot cos(\theta) - mg - ml \cdot cos(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 - ml \cdot \sin(\theta) \cdot \ddot{\theta} = 0 \qquad (2)$$

  - Somatório das forças em X:

$$\sum F_x = 0$$

$$T \cdot sen(\theta) + m\frac{d^2}{dt^2}\big(x + l \cdot sen(\theta)\big) = 0$$

$$T \cdot sen(\theta) + m\ddot{x} - ml \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + ml \cdot \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta} = 0 \qquad (3)$$

A partir das equações obtidas $(1), (2)$ e (3), pode-se fazer a seguinte manipulação $-\sin(\theta) \cdot (2) + \cos(\theta) \cdot (3) = (4)$ obtendo a expressão:

$$m\ddot{x} \cdot \cos(\theta) + mg \cdot \sin(\theta) + ml\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{x} \cdot \cos(\theta) + g \cdot \sin(\theta) + l\ddot{\theta} = 0 \quad (4)$$

Para obter a outra equação de movimento realiza-se outra manipulação por meio da subtração (1)-(3):

$$F - M\ddot{x} - b\dot{x} - \left(m\ddot{x} - ml \cdot sen(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 + ml \cdot \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta}\right) = 0$$

$$F - (M + m)\ddot{x} - b\dot{x} + ml\left(sen(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 - \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta}\right) = 0 \quad (5)$$

O sistema eletromecânico do motor apresentado na Figura 1, por sua vez, é modelado por meio da 2ª Lei de Kirchhoff, considerando que a indutância do motor é desprezível:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + K\dot{\phi} \qquad , \qquad L \approx 0$$

$$u = Ri + K\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad i = \frac{u - K\dot{\phi}}{R}$$

A partir da equação da corrente acima, pode-se obter a força gerada pelo motor F em função de $x(t)$ e da entrada $u(t)$:

$$F = \frac{\left(K \cdot i - J\ddot{\phi}\right)}{r}$$

$$F = K \cdot \frac{u - K\dot{\phi}}{R \cdot r} - \frac{J\ddot{\phi}}{r}$$

Como $x(t) = r\phi(t)$:

$$F = K \cdot \frac{u - \frac{K\dot{x}}{r}}{R \cdot r} - \frac{J\ddot{x}}{r^2} = \frac{K}{Rr}u - \frac{K^2}{Rr^2}\dot{x} - \frac{J\ddot{x}}{r^2} = \frac{Kru - K^2\dot{x} - RJ\ddot{x}}{Rr^2}$$

O modelo matemático não linear apresentado na Figura 01 é apresentado pelas equações (4) e (5):

$$\boxed{\begin{gathered} \ddot{x} \cdot \cos(\theta) + g \cdot \sin(\theta) + l\ddot{\theta} = 0 \\ F - (M + m)\ddot{x} - b\dot{x} + ml\left(sen(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 - \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta}\right) = 0 \quad , \quad F = \frac{Kru - K^2\dot{x} - RJ\ddot{x}}{Rr^2} \end{gathered}}$$

2.

Para representar o modelo não linear obtido no item 1 em espaço de estado, foi considerado que $y(t) = x(t)$ e que o vetor de estado:

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x} \cdot \cos(\theta) + g \cdot \sin(\theta) + l\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{Kru - K^2\dot{x} - RJ\ddot{x}}{Rr^2} - (M+m)\ddot{x} - b\dot{x} + ml\big(sen(\theta) \cdot \dot{\theta}^2 - \cos(\theta) \cdot \ddot{\theta}\big) = 0$$

A partir do modelo não linear foi obtido a sua representação de estado:

$$\frac{Kru - K^2\xi_2 - RJ\dot{\xi_2}}{Rr^2} - (M+m)\ddot{x} - b\xi_2 + ml(sen(\xi_3) \cdot {\xi_4}^2 - \cos(\xi_3) \cdot \dot{\xi_4}) = 0$$

$$\dot{\xi_2} \cdot \cos(\xi_3) + g \cdot \sin(\xi_3) + l\dot{\xi_4} = 0$$

$$\begin{bmatrix} M + m + \frac{J}{r^2} & ml \cdot \cos(\xi_3) \\ \cos(\xi_3) & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi_2} \\ \dot{\xi_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{Rr}u - \frac{K^2}{Rr^2}\xi_2 + ml \cdot sen(\xi_3) \cdot {\xi_4}^2 - b\xi_2 \\ -g \cdot sen(\xi_3) \end{bmatrix}$$

Para facilitar as contas, consideram-se as matrizes A e B:

$$A \begin{bmatrix} \dot{\xi_2} \\ \dot{\xi_4} \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} M + m + \frac{J}{r^2} & ml \cdot \cos(\xi_3) \\ \cos(\xi_3) & l \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{K}{Rr}u - \frac{K^2}{Rr^2}\xi_2 + ml \cdot sen(\xi_3) \cdot {\xi_4}^2 - b\xi_2 \\ -g \cdot sen(\xi_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi_2} \\ \dot{\xi_4} \end{bmatrix} = A^{-1}B$$

Sendo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} l & -ml \cdot \cos(\xi_3) \\ -\cos(\xi_3) & M + m + \frac{J}{r^2} \end{bmatrix} \qquad \det(A) = l(m + M + \tfrac{J}{r^2} - m \cdot cos(\xi_3)^2)$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}_2\\ \dot{\xi}_4\end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}AB_1\\ AB_2\end{bmatrix}$$

$$AB_1 = \frac{-l(K^2 + br^2R)\xi_2 + Klru}{r^2R} + ml(l{\xi_4}^2 + g\cdot cos(\xi_3))\, sen(\xi_3)$$

$$AB_2 = -g\left(m + M + \frac{J}{r^2}\right) sen(\xi_3) - cos(\xi_3)\left(\frac{-(K^2 + br^2R)\xi_2 + Kru}{r^2R} + ml\cdot sen(\xi_3)\cdot {\xi_4}^2\right)$$

Assim, a representação em espaço de estado do modelo não linear obtido no item 1 é:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\\ \dot{\xi}_3\\ \dot{\xi}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi_2\\ \dfrac{AB_1}{\det(A)}\\ \xi_4\\ \dfrac{AB_2}{\det(A)}\end{bmatrix} \quad ,$$

$$AB_1 = \frac{-l(K^2 + br^2R)\xi_2 + Klru}{r^2R} + ml(l{\xi_4}^2 + g\cdot cos(\xi_3))\, sen(\xi_3)$$

$$AB_2 = -g\left(m + M + \frac{J}{r^2}\right) sen(\xi_3) - cos(\xi_3)\left(\frac{-(K^2 + br^2R)\xi_2 + Kru}{r^2R} + ml\cdot sen(\xi_3)\cdot {\xi_4}^2\right)$$

$$\det(A) = l\left(m + M + \frac{J}{r^2} - m\cdot\cos(\xi_3)^2\right)$$

3.

O modelo não linear obtido no item 1 é:

$$\ddot{x}\cdot\cos(\theta) + g\cdot\sin(\theta) + l\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{Kru - K^2\dot{x} - RJ\ddot{x}}{Rr^2} - (M+m)\ddot{x} - b\dot{x} + ml(sen(\theta)\cdot\dot{\theta}^2 - \cos(\theta)\cdot\ddot{\theta}) = 0$$

Para linearizar um sistema $f(x,y,z)$ utiliza-se a fórmula a seguir:

$$f(x,y,z) = f(x_o,y_o,z_o) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_o) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_o) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0}(z - z_o)$$

$$P_o = (x_o, y_o, z_o)$$

Portanto, sendo os pontos de equilíbrio do sistema $f(\dot{x},\ddot{x},\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})$ e $Po = (0,0,0,0,0)$, o modelo acima é linearizado em torno de Po :

$$\boxed{\begin{gathered}\left(M+m+\frac{J}{r^2}\right)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}+\left(b+\frac{K^2}{Rr^2}\right)\dot{x}=\frac{K}{Rr}u\\ \ddot{x}+g\theta+l\ddot{\theta}=0\end{gathered}}$$

4.

Na representação do modelo linearizado obtido no item 3 em espaço de estado, foram considerados a saída $y(t) = x(t)$ e o vetor de estado:

$$\xi=\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \theta\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{bmatrix}$$

Dessa forma, a sua representação é:

$$(M+m+\frac{J}{r^2})\dot{\xi_2}+ml\dot{\xi_4}+(b+\frac{K^2}{Rr^2})\xi_2=\frac{K}{Rr}u$$

$$\dot{\xi_2}+g\xi_3+l\dot{\xi_4}=0$$

Esse sistema matemático pode ser representado na sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix}M+m+\frac{J}{r^2} & ml\\ 1 & l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\xi_2}\\ \dot{\xi_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{K}{Rr}u-(b+\frac{K^2}{Rr^2})\xi_2\\ -g\xi_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi_2}\\ \dot{\xi_4}\end{bmatrix}=\frac{1}{l(M+\frac{J}{r^2})}\begin{bmatrix}l & -ml\\ -1 & M+m+\frac{J}{r^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{K}{Rr}u-(b+\frac{K^2}{Rr^2})\xi_2\\ -g\xi_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi_2}\\ \dot{\xi_4}\end{bmatrix}=\frac{1}{l(M+\frac{J}{r^2})}\begin{bmatrix}gml\xi_3-l(b+\frac{K^2}{r^2R})\xi_2+\frac{Kl}{rR}u\\ \frac{(K^2+br^2R)\xi_2-g(J+(m+M)r^2)R)\xi_3-Kru}{r^2R}\end{bmatrix}$$

Assim, a representação em espaço de estado do modelo matemático linearizado é:

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = C\xi(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(b + \frac{K^2}{r^2 R})}{M + \frac{J}{r^2}} & \dfrac{gm}{M + \frac{J}{r^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\frac{K^2}{r^2 R} + b}{l(M + \frac{J}{r^2})} & \dfrac{-g\left(M + m + \frac{J}{r^2}\right)}{l(M + \frac{J}{r^2})} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{K}}{rR(M + \frac{J}{r^2})} \\ 0 \\ \dfrac{-K}{l\mathrm{r}R(M + \frac{J}{r^2})} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \qquad D = [0]$$

5.

Antes de projetar o controlador $C(s)$, foram feitas as substituições dos parâmetros nas matrizes obtidas no item 4 para que o sistema linearizado seja representado em espaço de estado na forma numérica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5{,}032 & 1{,}911 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15{,}239 & -35{,}496 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}999 \\ 0 \\ -3{,}025 \end{bmatrix}$$

A partir das matrizes A, B, C e D foi obtida a equação da planta por meio da função do MATLAB:

$$G = tf\big(ss(A, B, C, D)\big)$$

Assim, a equação da planta encontrada a partir da representação em estado do sistema linearizado é:

$$G(s) = \frac{0{,}999 \cdot s^2 + 29{,}67}{s^4 + 5{,}032 \cdot s^3 + 35{,}5 \cdot s^2 + 149{,}5 \cdot s}$$

Vale ressaltar que a presença de um polo em zero na planta já é suficiente para que o primeiro requisito de desempenho seja satisfeito, ou seja, o erro será nulo para entrada degrau. Além disso, pelo diagrama de blocos em malha fechada apresentado na Figura 2 foi possível obter a função de transferência $F(s)$ do sistema.

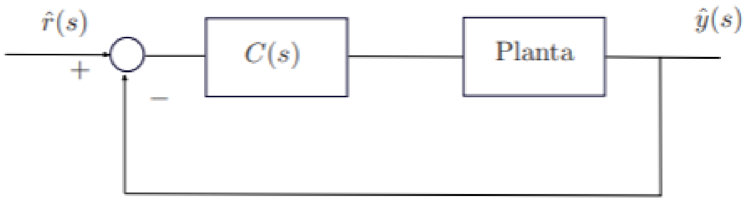

Figura 2: Diagrama de blocos em malha fechada que apresenta a saída $\hat{y}(t)$, a entrada $\hat{r}(t)$, o controlador $C(s)$ e a Planta $G(s)$.

A função de transferência do sistema é:

$$F(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Após a análise do tempo de estabilização, do fator de amortecimento e do esforço de controle para diferentes controladores no lugar das raízes, foi obtido o controlador a seguir, que satisfaz todos os requisitos de desempenho exigidos:

$$\boxed{C(s) = \frac{9}{16} \cdot \frac{(s+16)}{(s+3)}}$$

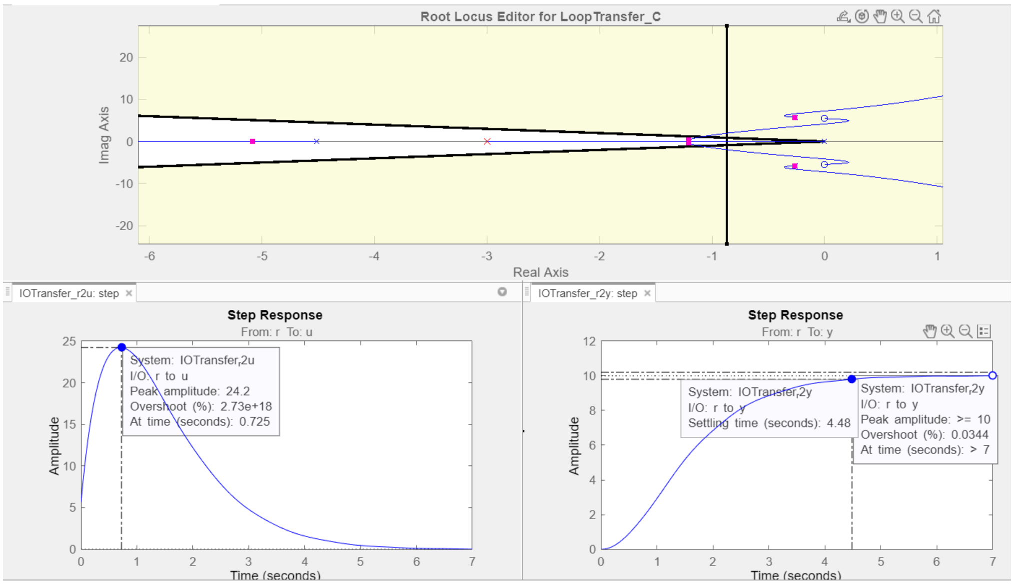

Figura 3: Gráfico do lugar das raízes para o sistema contínuo e não linear, cuja planta é $G(s)$ e seu controlador é $C(s)$.

Na Figura 4, pode-se observar o tempo de estabilização igual a 4,48 segundos e o Overshoot igual a 0.0344%. Sendo assim, o controlador respeita o requisito em que o tempo de estabilização seja menor do que 4,5 segundos e o requisito de amortecimento $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow Overshoot \leq 4.3\%$. Ademais no gráfico apresentado na Figura 5, pode-se visualizar que o esforço de controle é igual a 24,2 V e, portanto, respeita os requisitos de desempenho, sendo inferior a 25 V.

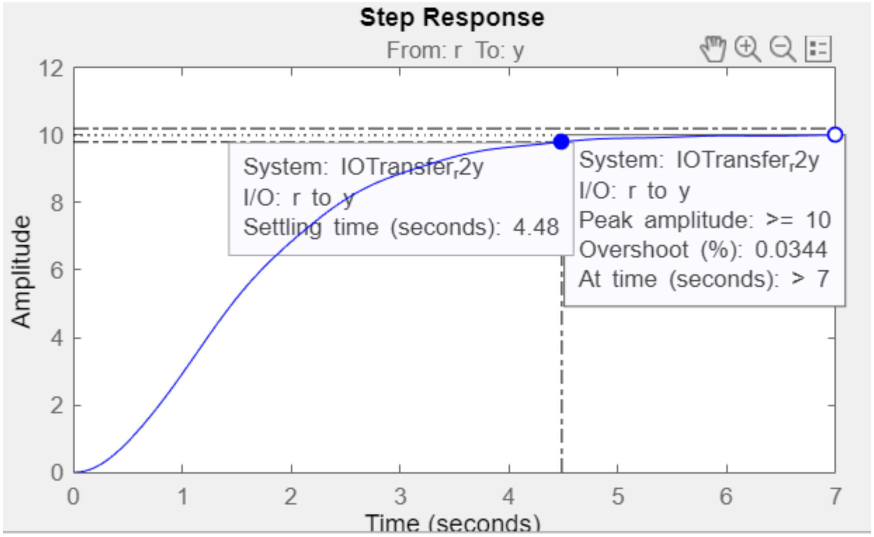

Figura 4: Identificação do ponto em que ocorre a estabilização do sistema linearizado e seu Overshoot. O tempo de estabilização presente neste ponto é de 4,48 segundos e Overshoot é de 0.0344%.

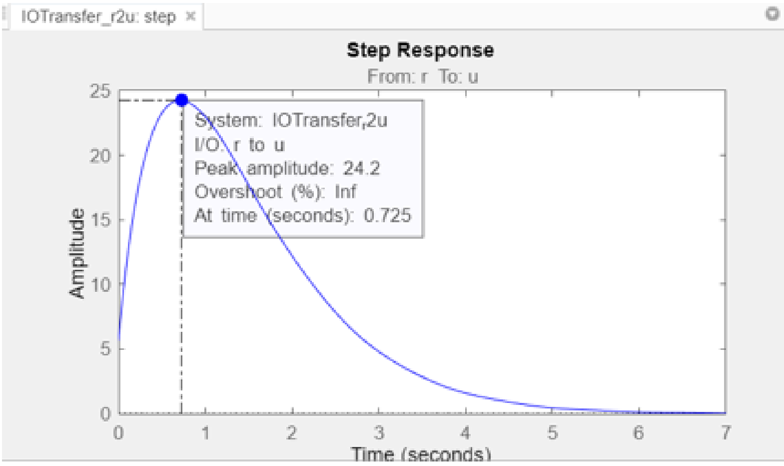

Figura 5: Identificação do ponto em que o esforço de controle é máximo (24,2 V).

6.

A partir do ponto no qual o diagrama polar de $C(jw)G(jw)$ cruza o eixo real, é obtida a margem de ganho em decibéis:

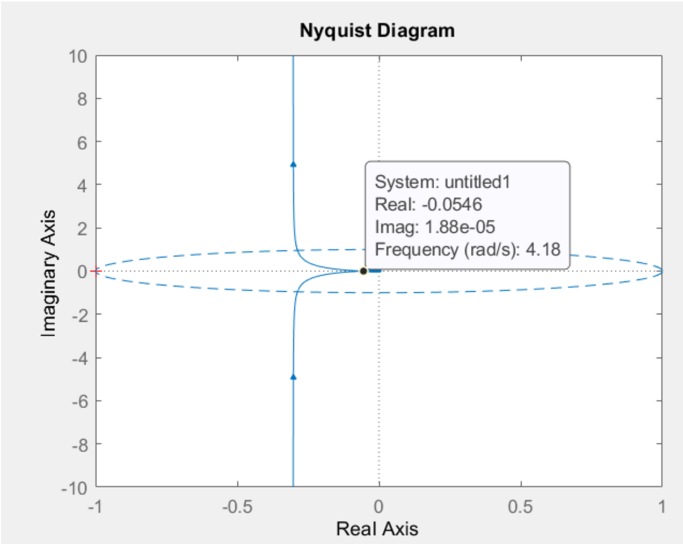

Figura 6: Diagrama polar de $C(jw)G(jw)$. O ponto indica onde o diagrama cruza o eixo real, ou seja, a parte imaginária de $C(jw)G(jw)$ é nula.

A margem de ganho MG_{dB}, em decibéis, é calculada:

$$MG = \frac{1}{0{,}0546} = 18{,}315$$

$$MG_{dB} = -20 \cdot \log(18{,}315)$$

$$\boxed{MG_{dB} = -25{,}256\ dB}$$

A margem de fase, por sua vez, também é obtida pelo diagrama polar no ponto em que o diagrama cruza com o círculo unitário apresentado na Figura 07.

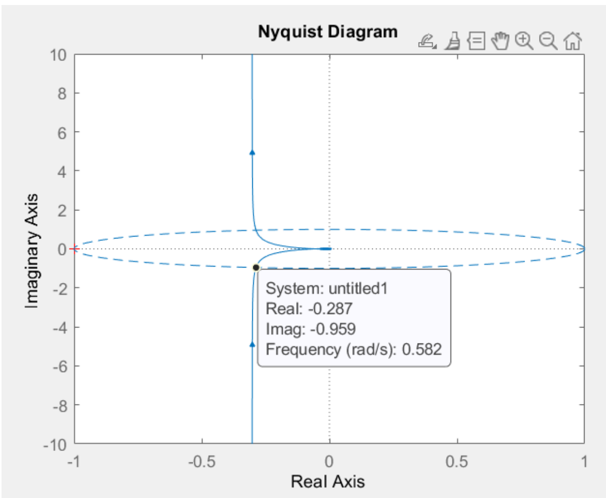

Figura 7: Diagrama polar de $C(jw)G(jw)$. O ponto indica onde o diagrama cruza o círculo unitário.

A partir do ponto indicado na Figura 7, foi calculada a margem de fase MF, em graus:

$$MF = \tan^{-1}\left(\frac{-0{,}959}{-0{,}287}\right)$$

$$\boxed{MF = 73{,}3^o}$$

Como forma de verificar se as margens calculadas pelo diagrama polar eram coerentes, foram obtidas também a margem de ganho e a margem de fase por meio dos diagramas de Bode.

Para obter MG por meio do diagrama de Bode apresentado na Figura 08, foi identificado primeiro a frequência na qual a fase é 180^o, sendo ela $4{,}15\, rad/s$. Em seguida, foi apontada qual é a magnitude em decibéis na frequência de $4{,}15\, rad/s$. Como pode ser visto no diagrama da magnitude da Figura 08, a margem de ganho é $-25{,}2\ dB$, confirmando MG_{dB} obtido pelo diagrama polar.

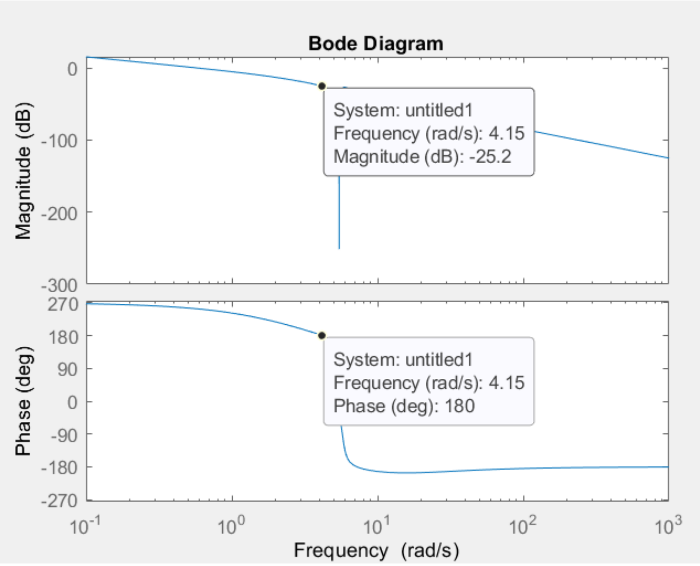

Figura 8: Diagramas de Bode da magnitude, em decibéis, e da fase, em graus.

Para obter a margem de fase, encontrou-se pelo diagrama da Figura 9 o ponto no qual a magnitude em decibéis era aproximadamente nula. Neste ponto, a frequência era de $0{,}579\, rad/s$. A margem de fase é igual a fase na frequência de $0{,}579\, rad/s$ somada com 180^o. Dessa forma, calculou-se o MF:

$$MF = 253^o + 180^o = 433^o$$

Obtendo um MF no intervalo entre 0^o e 360^o:

$$MF = 433^o - 360^o = 73^o$$

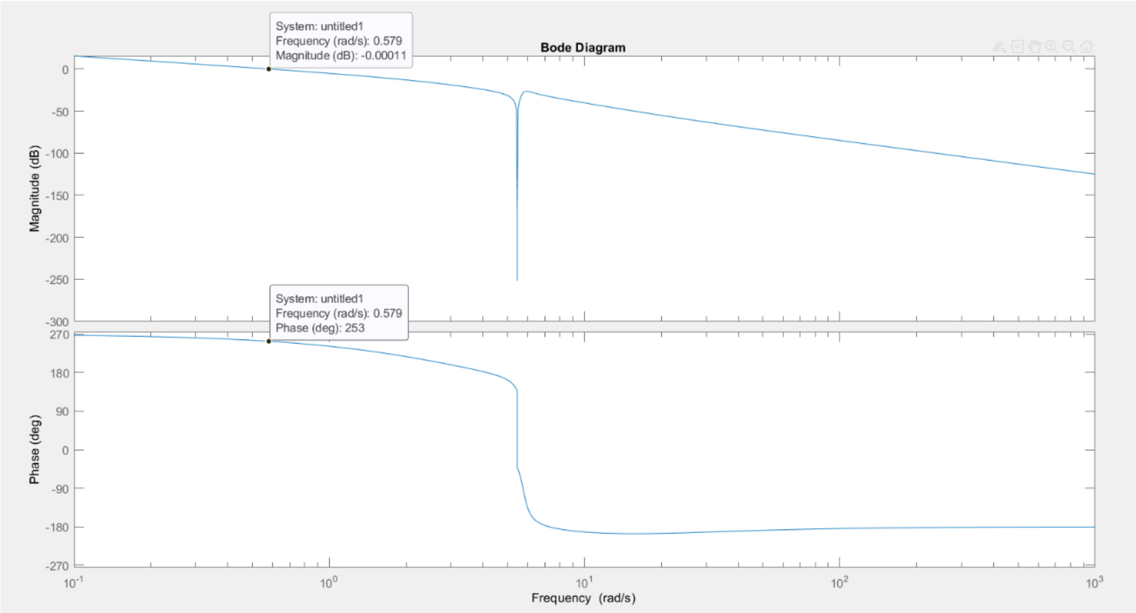

Figura 9: Diagramas de Bode da magnitude, em decibéis, e da fase, em graus.

Portanto, verifica-se que a margem de fase obtida por meio do diagrama de Bode é igual a margem de fase obtida pelo diagrama polar, logo, esse valor é coerente.

7.

Analisando as margens de ganho e de fase obtidas no item 6, pode-se concluir que o sistema em malha fechada é estável, pois $MF > 0$, $MG > 0$ e CG é estável. Ademais, pelo fato de a margem de fase ser maior do que 30^o, o controlador tem um bom desempenho.

8.

Assim como foi feito para o caso linear, substituiu-se os parâmetros do sistema em valores numéricos na representação em espaço de estado feita no item 2:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \dfrac{AB_1}{\det(A)} \\ \xi_4 \\ \dfrac{AB_2}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

$$AB_1 = -5{,}4 \cdot 0{,}3302 \cdot \xi_2 + 1{,}0717 \cdot 0{,}3302 \cdot u + 0{,}209 \cdot 0{,}3302\left(0{,}3302 \cdot {\xi_4}^2 + 9{,}81 \cdot cos(\xi_3)\right) \cdot sen(\xi_3)$$

$$AB_2 = -9{,}81(0{,}209 + 1{,}0731)\, sen(\xi_3) - cos(\xi_3)\left(-5{,}4 * \xi_2 + 1{,}0717u + 0{,}209 * 0{,}3302 \cdot sen(\xi_3) \cdot {\xi_4}^2\right)$$

$$\det(A) = 0{,}3302(0{,}209 + 1{,}0731 - 0{,}209 \cdot \cos(\xi_3)^2)$$

Aplicando o controlador $C(s)$ neste sistema não linear, pode-se comparar as respostas obtidas pelo sistema não linear em relação ao sistema não linearizado:

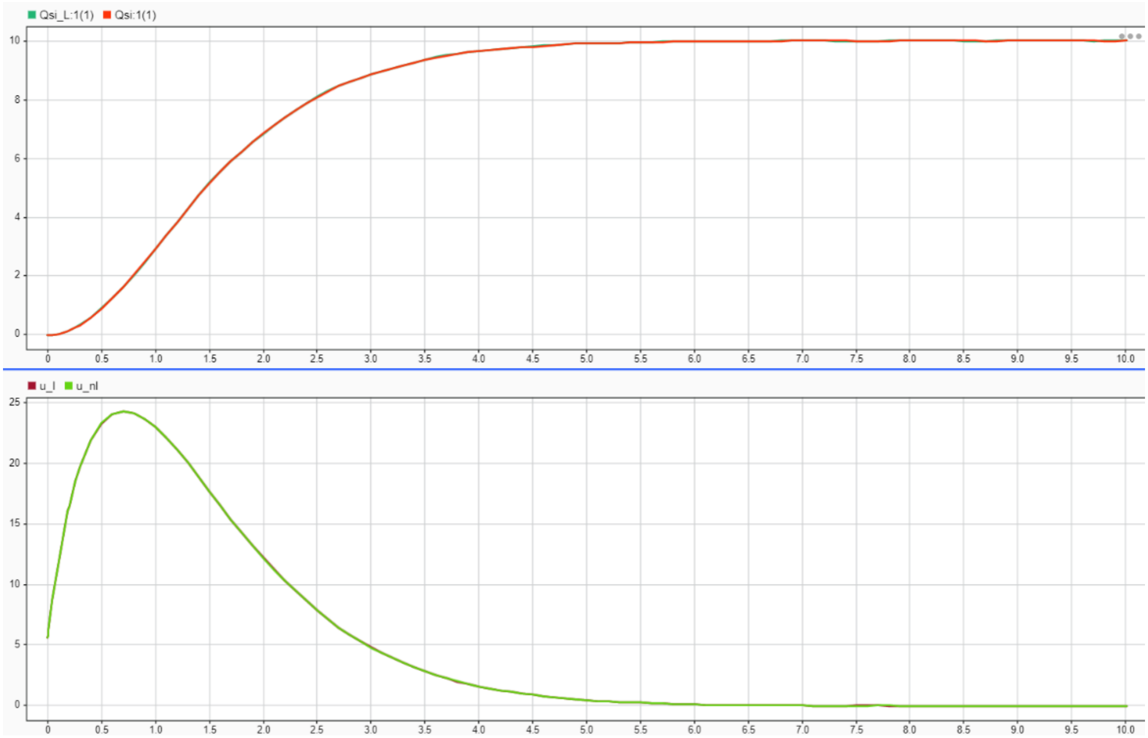

Figura 10: No gráfico de cima, Qsi_L (1) (em verde) é a saída do sistema $y(t)$ para o sistema linearizado e Qsi(1) (em laranja) é a saída para o não linearizado. No gráfico de baixo, u_l (em vinho) é a tensão no motor $u(t)$ no sistema linearizado e u_nl (em verde) é a mesma tensão no caso não linearizado.

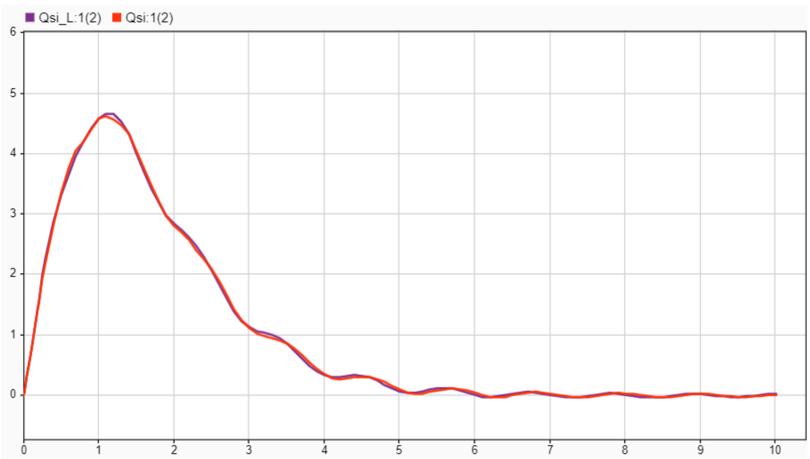

Figura 11: Gráfico em que Qsi_L (2) (em roxo) é $\dot{x}(t)$ no sistema linearizado, e Qsi (2) (em laranja) é $\dot{x}(t)$ no modelo não linear.

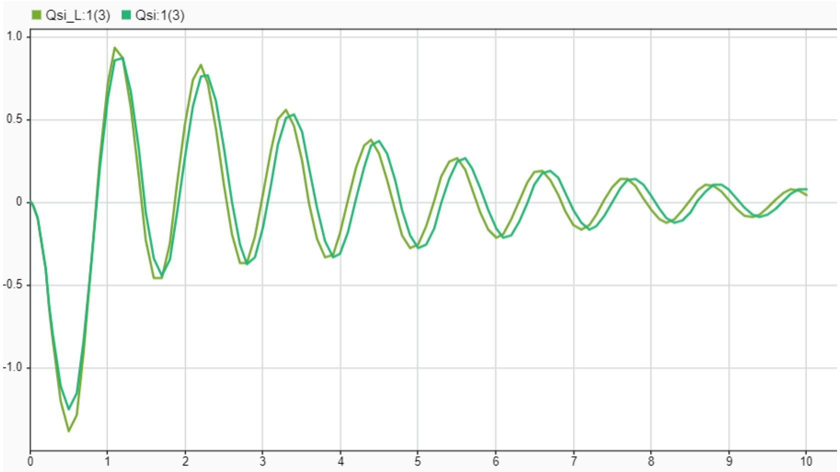

Figura 12: Gráfico em que Qsi_L (3) (em verde escuro) representa a curva de $\theta(t)$ no modelo linearizado, enquanto Qsi (3) (em verde claro) representa-o no modelo não linear.

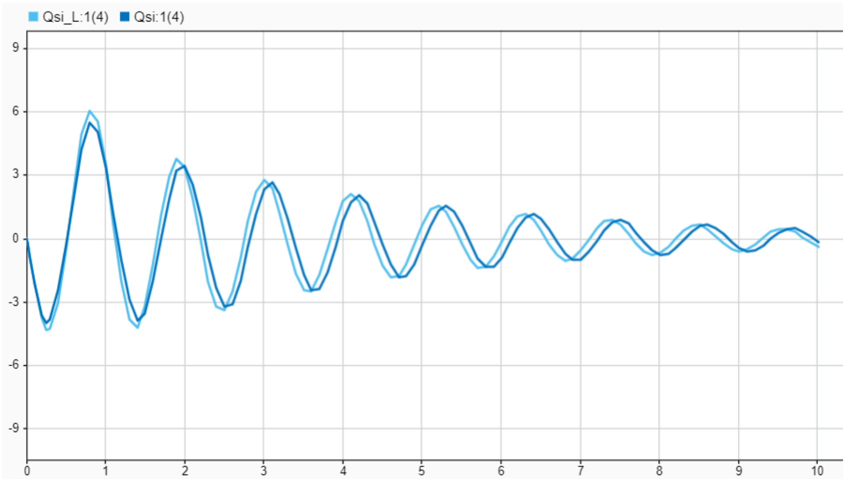

Gráfico 13: Gráfico em que Qsi_L (4) (em azul claro) é a curva de $\dot{\theta}(t)$ no sistema linear, e Qsi (4) (em azul escuro) é $\dot{\theta}(t)$ no não linear.

9.

<u>Segurador de Ordem Zero (SOZ)</u>

$$C_S(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=kT}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{16} \cdot \frac{(s+16)}{s(s+3)}\right\} = 3 \cdot u(t) - \frac{39}{16} \cdot e^{-3t} \cdot u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=KT} = 3 \cdot u(kT) - \frac{39}{16} \cdot e^{-3kT} \cdot u(kT)$$

$$Z\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=kT}\right) = Z\left(3 \cdot u(kT) - \frac{39}{16} \cdot e^{-3kT} \cdot u(kT)\right) = 3 \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{39}{16} \cdot \frac{z}{z - e^{-3T}}$$

Fazendo a simplificação $(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{z}$:

$$C_S(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \left(3 \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{39}{16} \cdot \frac{z}{z - e^{-3T}}\right)$$

$$\boxed{C_S(z) = \frac{-48 + 39e^{3T} + 9e^{3T}z}{-16 + 16e^{3T}z}}$$

MÉTODO DE TUSTIN

$$C_T(z) = C(s)\big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$

$$C_T(z) = \frac{9}{16} \cdot \frac{\left(\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)} + 16\right)}{\left(\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)} + 3\right)}$$

$$\boxed{C_T(z) = \frac{(9 + 72T)z + 72T - 9}{(16 + 24T)z + 24T - 16}}$$

MAPEAMENTO DE POLOS E ZEROS

$$C_M(z) = C(s)\big|_{z=e^{sT}} \qquad , \qquad K_d = \frac{K_c \propto}{\beta} \frac{\left(1 - e^{-\beta T}\right)}{\left(1 - e^{-\alpha T}\right)}$$

$$C_M(z) = K_d \cdot \frac{9}{16} \frac{\left(z - e^{-16T}\right)}{\left(z - e^{-3T}\right)} = \frac{16}{3} \frac{\left(1 - e^{-3T}\right)}{\left(1 - e^{-16T}\right)} \cdot \frac{9}{16} \frac{\left(z - e^{-16T}\right)}{\left(z - e^{-3T}\right)}$$

$$\boxed{C_M(z) = \frac{3\left(1 - e^{-3T}\right)\left(z - e^{-16T}\right)}{\left(1 - e^{-16T}\right)\left(z - e^{-3T}\right)}}$$

10.

O controlador digital discretizado pelo segurador de ordem zero para o período de amostragem de 0.1 segundos, 0.5 segundos e 1 segundo são, respectivamente:

$$C_{S_{0.1}} = \frac{0{,}563 \cdot z + 0{,}215}{z - 0{,}741} \qquad C_{S_{0.5}} = \frac{0{,}563 \cdot z + 1{,}768}{z - 0{,}223} \qquad C_{S_1} = \frac{0{,}563 \cdot z + 2{,}288}{z - 0{,}049}$$

O controlador digital discretizado pelo método de Tustin para o período de amostragem de 0.1 segundos, 0.5 segundos e 1 segundo são, respectivamente:

$$C_{T_{0.1}} = \frac{0,88 \cdot z - 0,098}{z - 0,739} \qquad C_{T_{0.5}} = \frac{1,607 \cdot z + 0,9643}{z - 0,143} \qquad C_{T_1} = \frac{2,025 \cdot z + 1,575}{z - 0,2}$$

O controlador digital discretizado pelo mapeamento dos polos e zeros para o período de amostragem de 0.1 segundos, 0.5 segundos e 1 segundo são, respectivamente:

$$C_{M_{0.1}} = \frac{0,974 \cdot z - 0,197}{z - 0,741} \qquad C_{M_{0.5}} = \frac{2,331 \cdot z + 0,001}{z - 0,231} \qquad C_{M_1} = \frac{2,851 \cdot z + 3,21 \cdot 10^{-7}}{z - 0,049}$$

Após conectar cada um dos controladores digitais no sistema linearizado por meio do Simulink do MATLAB, foram obtidas a saída do sistema amostrado e a tensão do motor para diferentes períodos de amostragens:

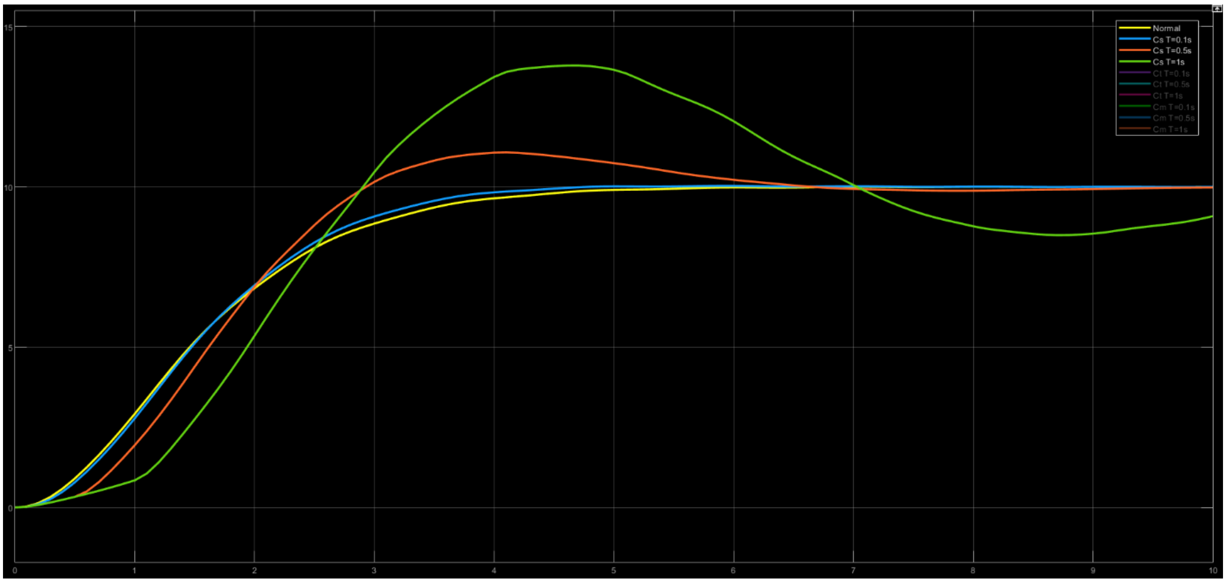

Figura 14: Saída do sistema amostrado em malha fechada com o controlador digital $C_S(z)$ para os períodos de amostragem de 0.1 segundos (curva azul), 0.5 segundos (curva laranja) e 1 segundo (curva verde). A curva amarela é a curva de saída do sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

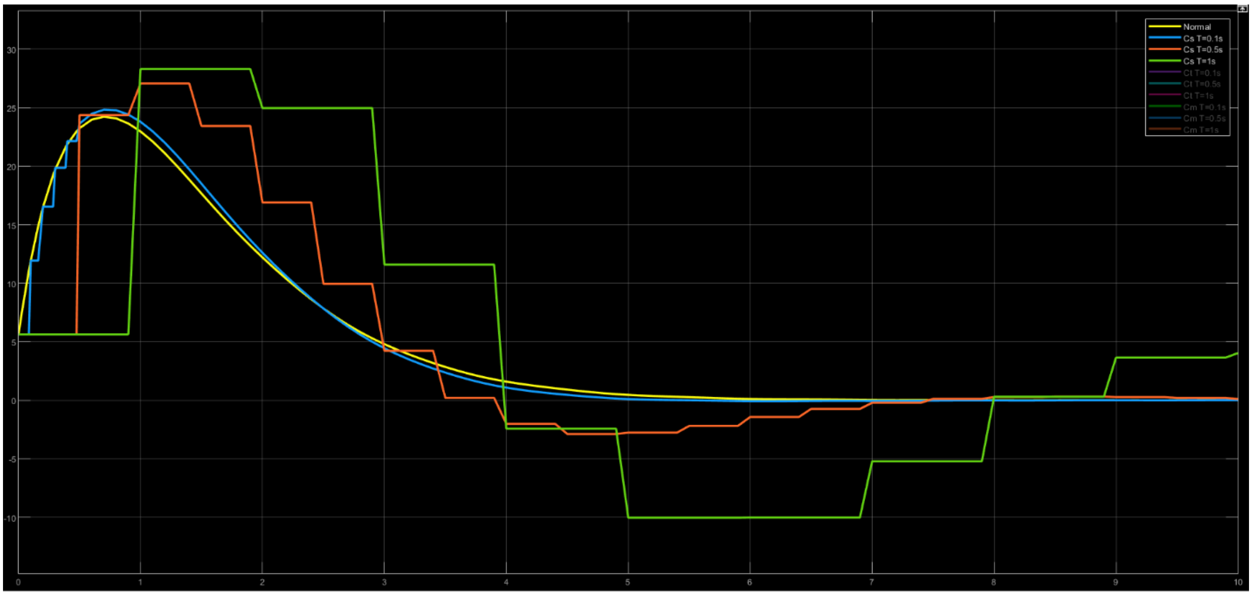

Figura 15: Tensão do motor em malha fechada com o controlador digital $C_S(z)$ para os períodos de amostragem de 0.1 segundos (curva azul), 0.5 segundos (curva laranja) e 1 segundo (curva verde). A curva amarela é a curva da tensão no sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

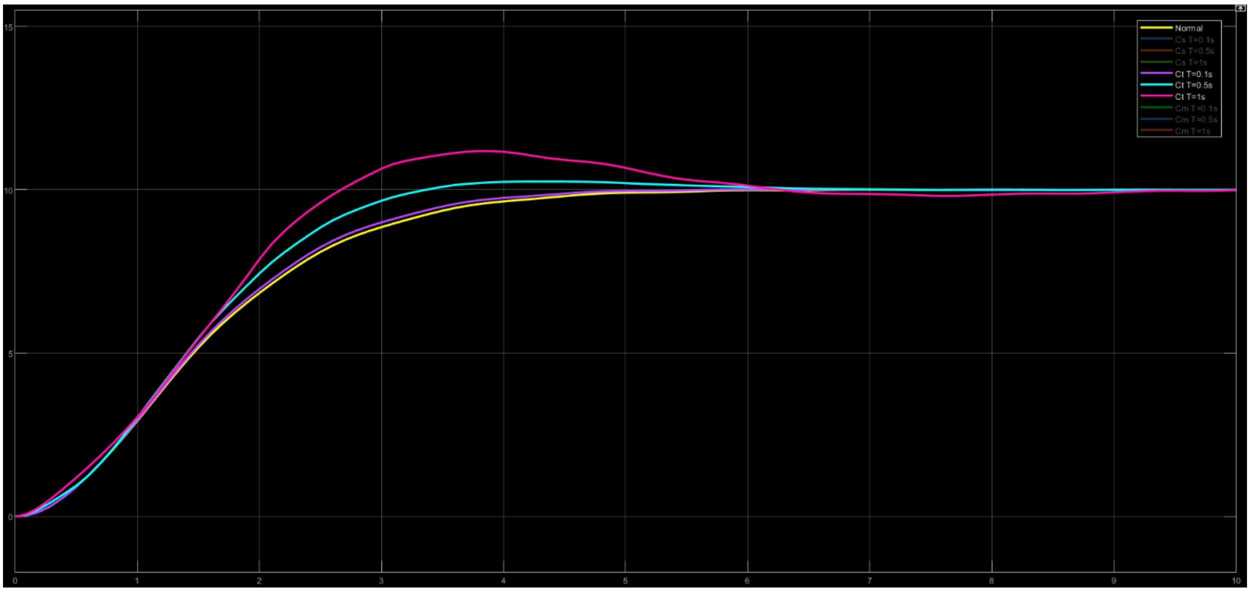

Figura 16: Saída do sistema amostrado em malha fechada com o controlador digital $C_T(z)$ para os períodos de amostragem de 0.1 segundos (curva roxa), 0.5 segundos (curva ciano) e 1 segundo (curva rosa). A curva amarela é a curva de saída do sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

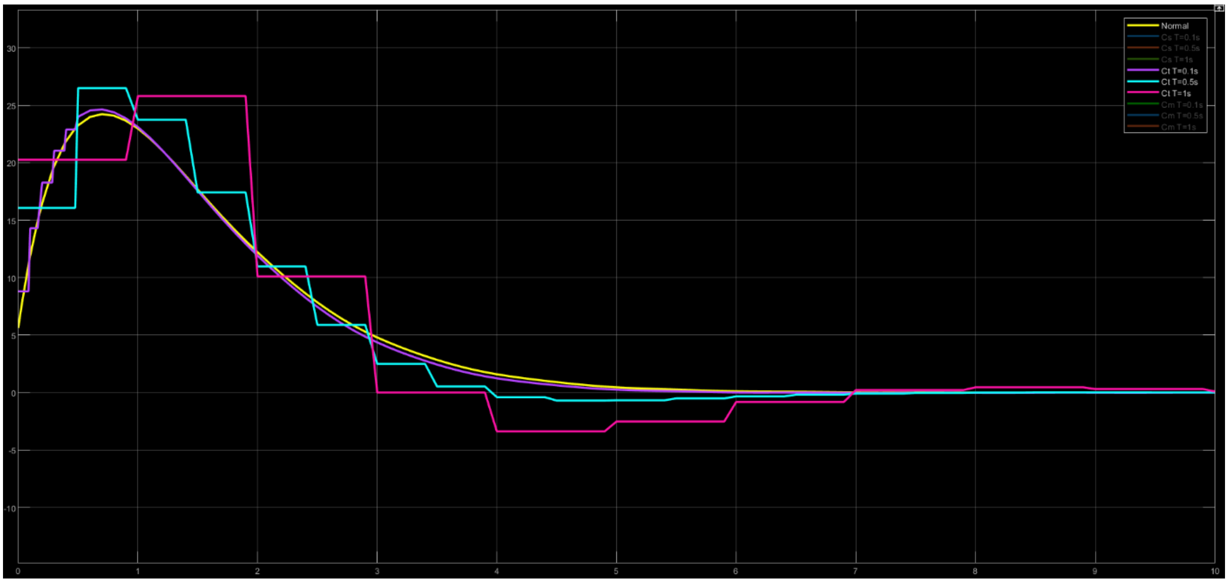

Figura 17: Tensão do motor em malha fechada com o controlador digital $C_T(z)$ para os períodos de amostragem de 0.1 segundos (curva roxa), 0.5 segundos (curva ciano) e 1 segundo (curva rosa). A curva amarela é a curva da tensão no sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

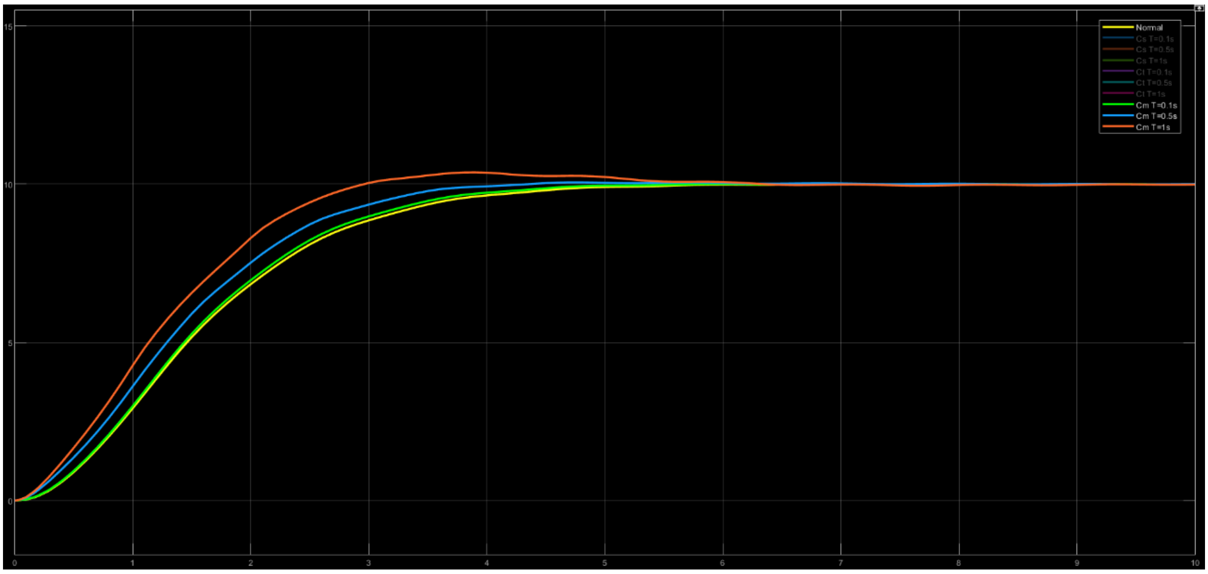

Figura 18: Saída do sistema amostrado em malha fechada com o controlador digital $C_M(z)$ para os períodos de amostragem de 0.1 segundos (curva verde claro), 0.5 segundos (curva azul) e 1 segundo (curva laranja). A curva amarela é a curva de saída do sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

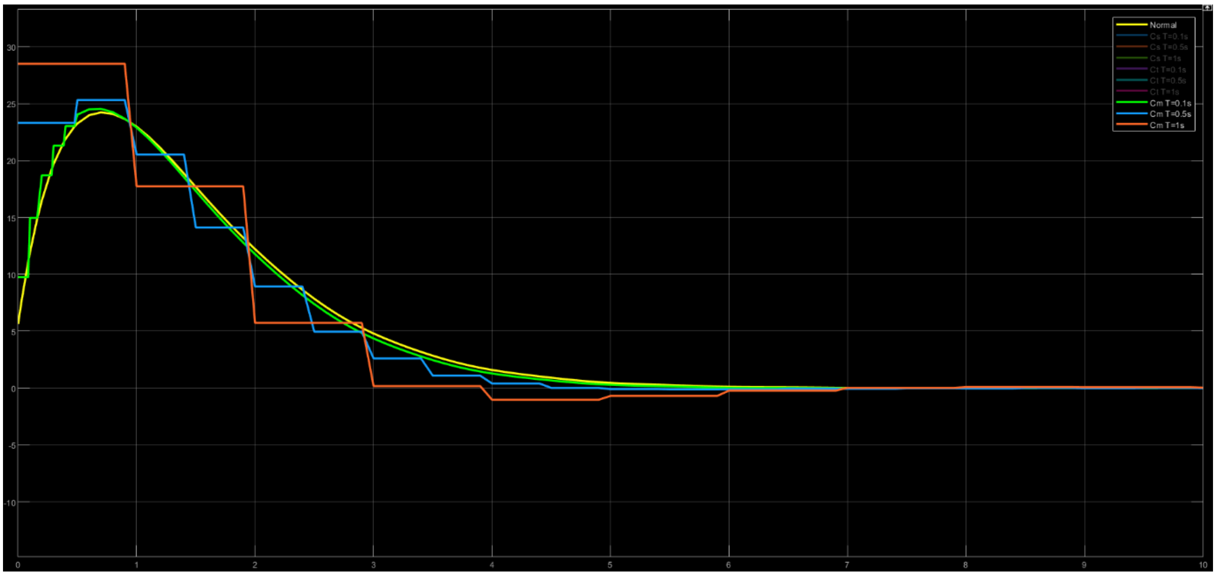

Figura 19: Tensão do motor em malha fechada com o controlador digital $C_M(z)$ para os períodos de amostragem de 0.1 segundos (curva verde), 0.5 segundos (curva azul) e 1 segundo (curva laranja). A curva amarela é a curva da tensão no sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

Como pode ser confirmado nas figuras acima, à medida que o período de amostragem no controlador diminui, a curva de saída do sistema discreto se aproxima da curva do sistema contínuo. De fato, a curva cujo controlador tem o menor período de amostragem, 0.1 segundos, é a que mais se aproxima da curva amarela.

Ademais, as Figuras 20 e 21 apresentam um comparativo de desempenho entre os diferentes controladores $C_S(z)$, $C_T(z)$ e $C_M(z)$ para um mesmo período de amostragem de 0,1 segundos. Como pode ser observado, o controlador de melhor desempenho é aquele que foi discretizado pelo mapeamento de polos e zeros $C_M(z)$, mostrando uma melhor aproximação em relação ao método de Tustin e ao segurador de ordem zero.

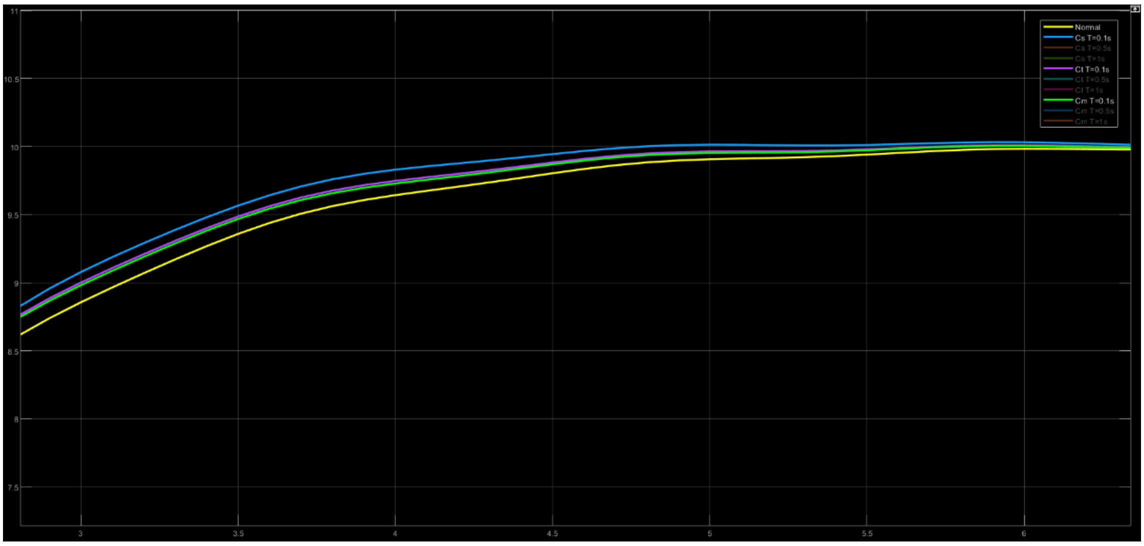

Figura 20: Saída do sistema amostrado em malha fechada com um período de amostragem de 0,1 segundos para os controladores digitais $C_M(z)$ (curva verde claro), $C_T(z)$ (curva roxa) e $C_M(z)$ (curva azul). A curva amarela é a curva de saída do sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

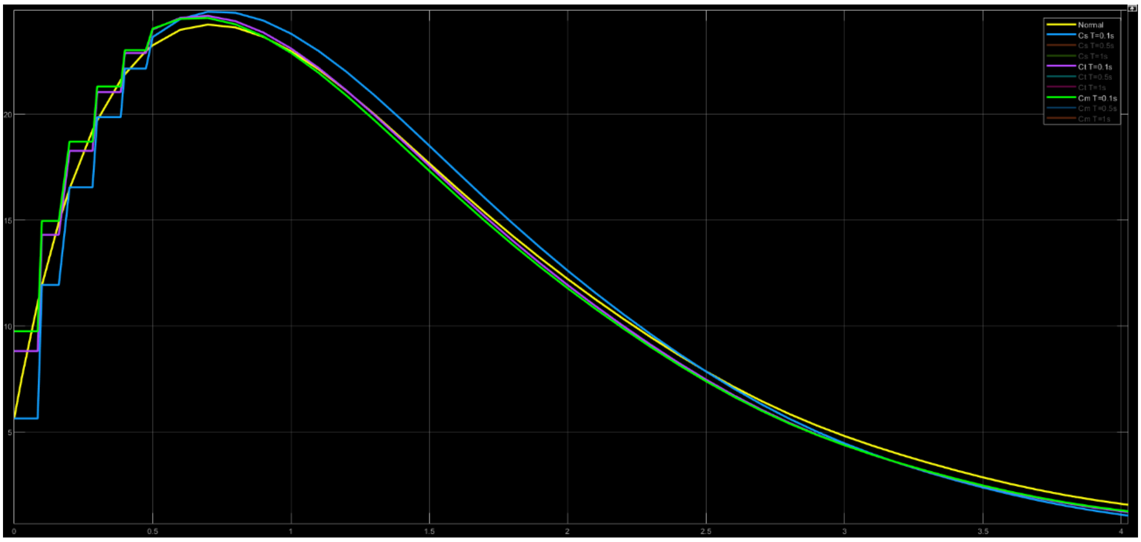

Figura 21: Tensão do motor em malha fechada com um período de amostragem de 0,1 segundos para os controladores digitais $C_M(z)$ (curva verde claro), $C_T(z)$ (curva roxa) e $C_M(z)$ (curva azul). A curva amarela é a curva de saída do sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

11.

Por meio do Simulink MATLAB o controlador digital de melhor desempenho no sistema não linear é conectado, gerando as curvas de saída com os diferentes períodos de amostragem. Assim como foi observado no item 10, o controlador de melhor desempenho é o discretizado pelo mapeamento de polos e zeros $C_M(z)$.

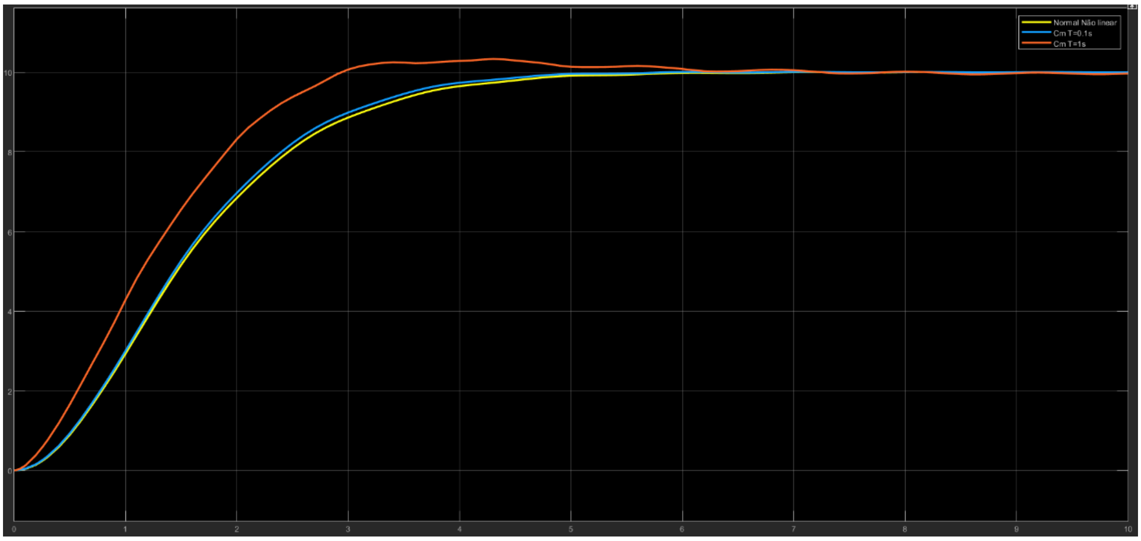

Figura 22: Saída do sistema amostrado em malha fechada com o controlador digital de melhor desempenho, $C_M(z)$, para os períodos de amostragem de 0,1 segundos (curva azul) e de 1 segundo (curva laranja). A curva amarela é a curva de saída do sistema linearizado com o controlador $C(s)$.

Assim como no sistema linearizado, o controlador discreto que mais se aproxima do controlador contínuo é aquele cujo período de amostragem é menor. Como pode ser observado na Figura 22, a curva do controlador cujo período de amostragem é de 0,1 segundos se assemelha mais com a curva do controlador contínuo $C(s)$.

12.

Para realizar o projeto do controlador digital para um período de amostragem de 1 segundo a planta $G(s)$ foi discretizada pelo método do segurador de ordem zero:

$$G_o(z) = \frac{0{,}15 \cdot z^3 - 0{,}153 \cdot z^2 + 0{,}028 \cdot z + 0{,}027}{z^4 - 2{,}34 \cdot z^3 + 1{,}947 \cdot z^2 - 0{,}615 \cdot z + 0{,}007}$$

Em seguida, foi aplicada a função sisotool do MATLAB na planta discretizada $G_o(z)$ e modificou o lugar das raízes, adicionando um polo e um zero nas melhores posições para obter um controlador digital com melhor desempenho em relação ao obtido no item 11. Assim, o controlador discreto, $C_d(z)$, obtido pelo lugar raízes da Figura 23 é:

$$\boxed{C_d(z) = \frac{2{,}487 \cdot z - 0{,}004629}{z + 0{,}0134}}$$

Como pode ser visto na Figura 24, o controlador $C_d(z)$ projetado é aceitável e respeita todos os requisitos de desempenho do item 5:

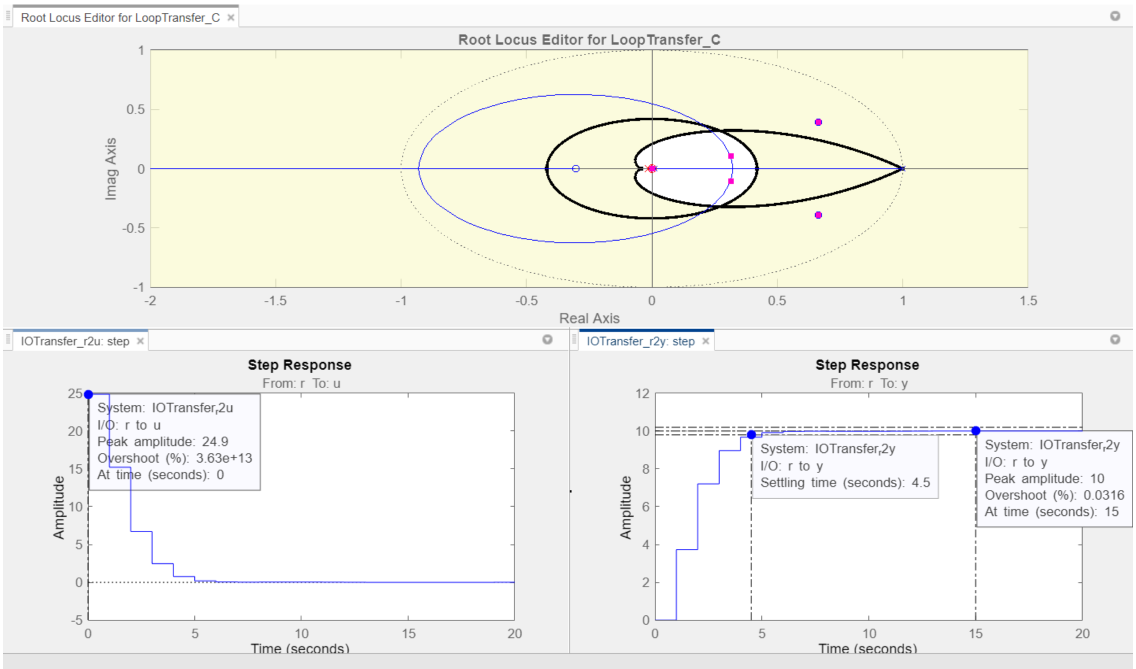

Figura 23: Gráfico do lugar das raízes para o sistema discreto e não linear, cuja planta é $G_o(z)$ e seu controlador é $C_d(z)$.

Após conectar este controlador e o controlador $C_M(z)$ obtido no item 11 no sistema não linear pelo Simulink MATLAB, foram plotadas as seguintes curvas:

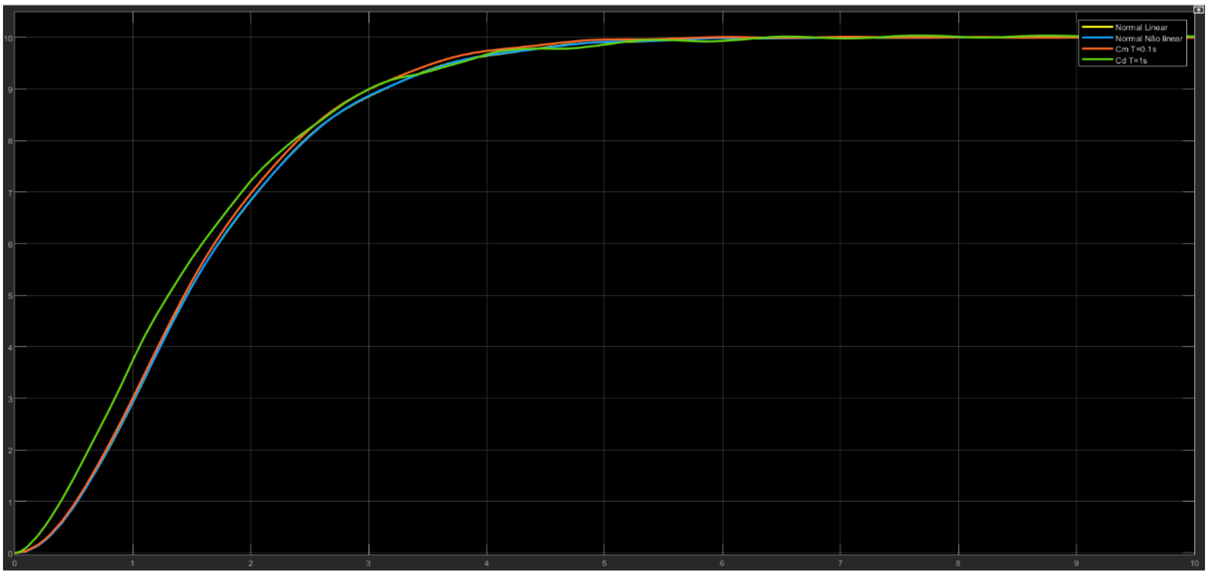

Figura 24: Saída do sistema não linear amostrado em malha fechada para o controlador $C_d(z)$ em $T = 1\ s$ (em verde), para $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$ (em laranja) e para o controlador contínuo $C(s)$ (em azul). Saída do sistema linear para o controlador contínuo $C(s)$ (em amarelo).

Como pode ser analisado na Figura 24, o controlador $C_d(z)$ (curva verde) é um bom controlador, pois sua respectiva curva se aproxima do controlador contínuo (curva azul) no sistema não linear, apesar de possuir um período de amostragem 10 vezes maior do que o controlador $C_M(z)$ (curva laranja).

13.

Aplicando o controlador digital $C_M(z)$ no sistema não linear, pode-se comparar as respostas obtidas pelo sistema discretizado não linear em relação ao contínuo não linear:

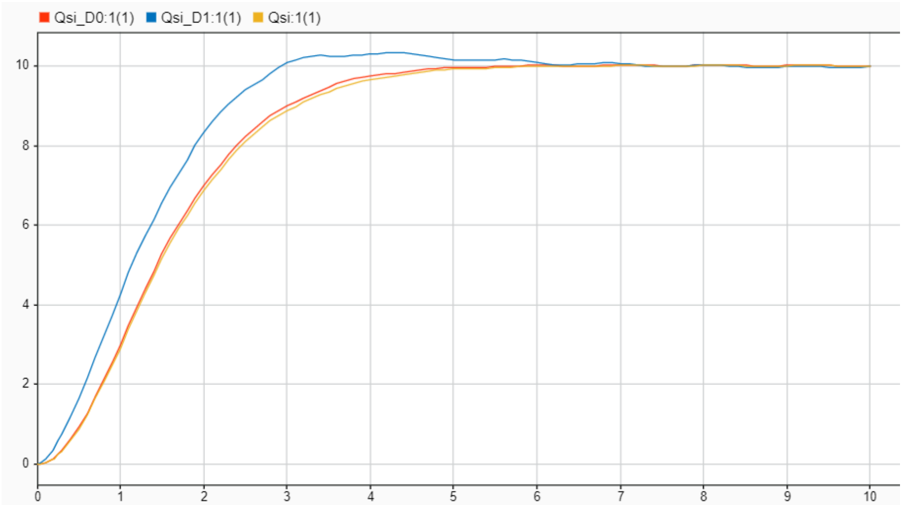

Figura 25: Gráfico em que Qsi_D0 (1) (em laranja) é $x(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_D1 (1) (em azul) é $x(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi (1) (em amarelo) é $x(t)$ para o controlador contínuo não linear.

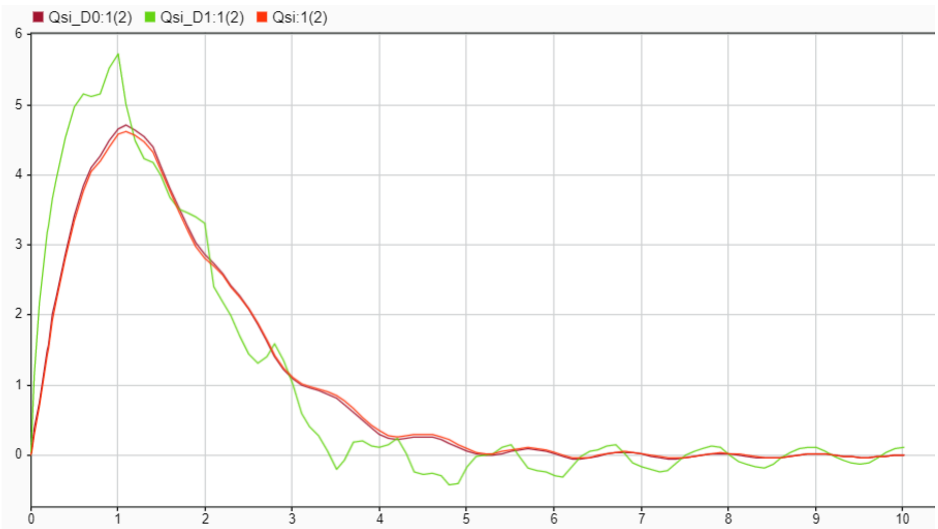

Figura 26: Gráfico em que Qsi_D0 (2) (em vinho) é $\dot{x}(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_D1 (2) (em verde) é $\dot{x}(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi (2) (em laranja) é $\dot{x}(t)$ para o controlador contínuo não linear.

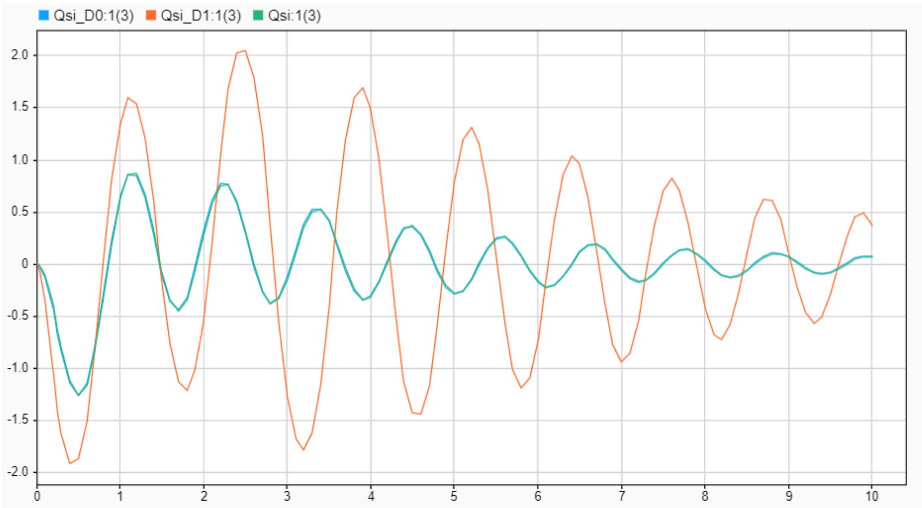

Figura 27: Gráfico em que Qsi_D0 (3) (em azul) é $\theta(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_D1 (3) (em laranja) é $\theta(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi (3) (em verde) é $\theta(t)$ para o controlador contínuo não linear.

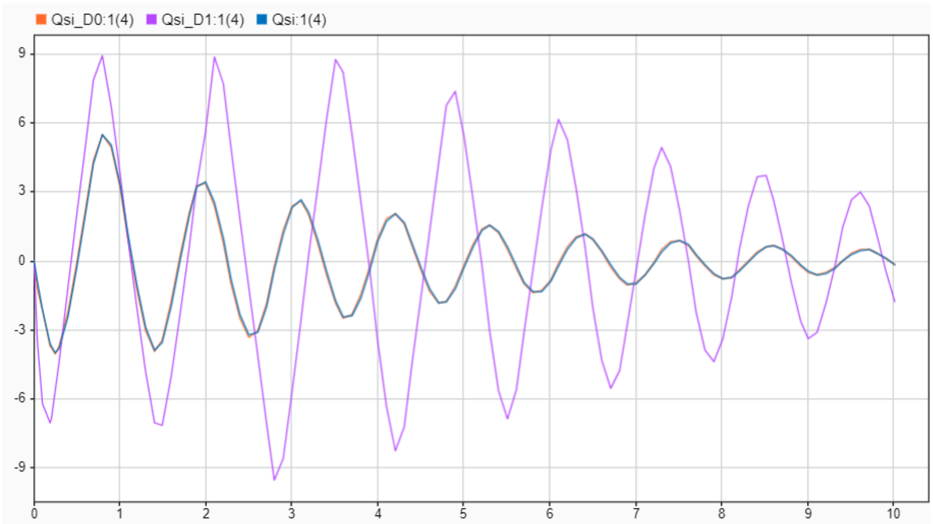

Figura 28: Gráfico em que Qsi_D0 (4) (em laranja) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_D1 (4) (em roxo) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi (4) (em azul) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador contínuo não linear.

Aplicando o controlador digital $C_d(z)$ no sistema não linear, pode-se comparar as respostas obtidas pelo sistema discretizado não linear do item 12 em relação ao obtido no item 11, ao contínuo não linear e ao contínuo linear:

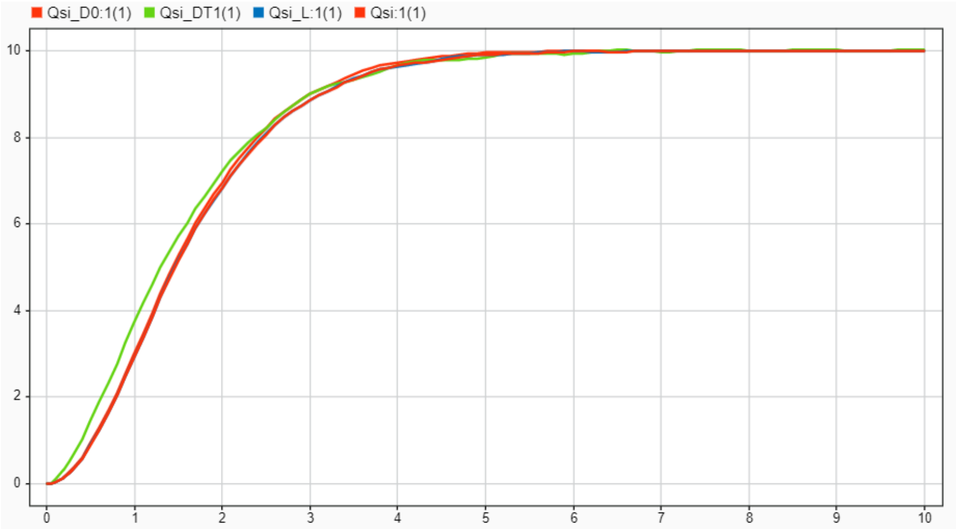

Figura 29: Gráfico em que Qsi_D0 (0) (em laranja) é $x(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_DT1 (0) (em verde) é $x(t)$ para o controlador $C_d(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi_L (0) (em azul) é $x(t)$ para o controlador contínuo linear. Qsi (0) (em vermelho) é $x(t)$ para o controlador contínuo não linear.

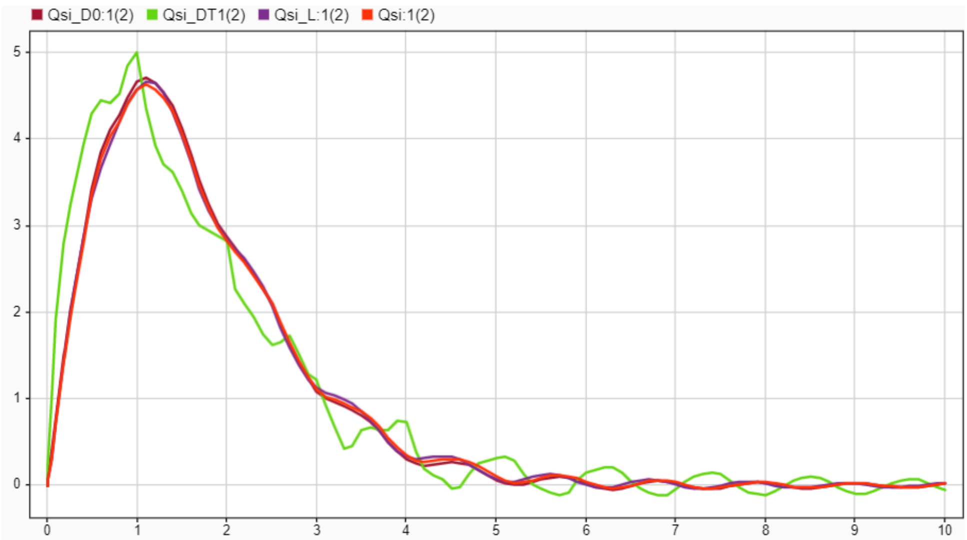

Figura 30: Gráfico em que Qsi_D0 (2) (em vinho) é $\dot{x}(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_DT1 (2) (em verde) é $\dot{x}(t)$ para o controlador $C_d(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi_L (2) (em roxo) é $\dot{x}(t)$ para o controlador contínuo linear. Qsi (2) (em laranja) é $\dot{x}(t)$ para o controlador contínuo não linear.

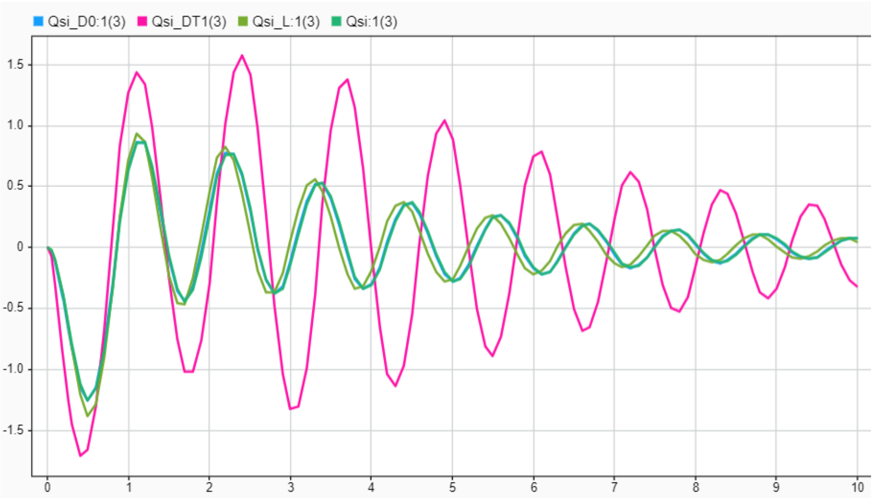

Figura 31: Gráfico em que Qsi_D0 (3) (em azul) é $\theta(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_DT1 (3) (em rosa) é $\theta(t)$ para o controlador $C_d(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi_L (3) (em verde escuro) é $\theta(t)$ para o controlador contínuo linear. Qsi (3) (em verde claro) é $\theta(t)$ para o controlador contínuo não linear.

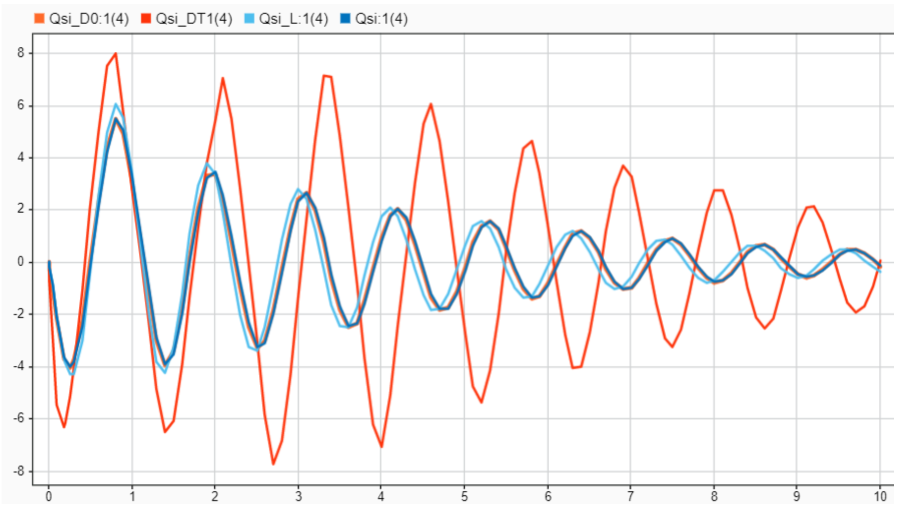

Figura 32: Gráfico em que Qsi_D0 (4) (em laranja) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador $C_M(z)$ em $T = 0{,}1\ s$. Qsi_DT1 (4) (em vermelho) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador $C_d(z)$ em $T = 1\ s$. Qsi_L (4) (em azul claro) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador contínuo linear. Qsi (4) (em azul escuro) é $\dot{\theta}(t)$ para o controlador contínuo não linear.