



## C4 - Fusion

TP Fusion de données par filtrage de Kalman

**COELHO RUBACK Arthur**  
**SANTOS SANO Matheus**

Palaiseau, France

Février 2024

# Compréhension du code

Le code est une implémentation du filtre de Kalman pour estimer la position d'un objet dans un système de coordonnées (Est, Nord) sur la base de données GPS. Pour prédire la position du objet, le filtre de Kalman est implémenté et il se compose de deux parties, la prédiction et la correction.

Dans la phase de prédiction, on implémente un modèle dynamique pour prédire le prochain état du système  $\hat{x}_{k|k-1}$  (1). Il faut noter que l'état est composé par les positions  $X$  et  $Y$ , et leur respective vitesse  $V_x$  et  $V_y$  du objet. Par ailleurs, on considère un vecteur de contrôle aléatoire qui suit une distribution normale  $u_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

$$\hat{x}_{k|k-1} = F_k x_{k-1} + B_k u_k \quad (1)$$

Toujours au stade de la prédiction, on calcule la prédiction de la covariance  $\hat{P}_{k|k-1}$  (2), qui représente l'incertitude associée à la prédiction de l'état. Elle est obtenue à partir de la matrice de covariance de l'erreur de processus  $Q_k$  et de la matrice de transition d'état  $F_k$  :

$$P_{k|k-1} = F_k P_{k-1} F_k^T + Q_k \quad (2)$$

Dans la section de correction, on obtient les observations réelles à partir des données GPS et calcule l'innovation  $Innov$  (la différence entre l'observation prédite  $Z_k$  (3) et l'observation réelle). En suite, la matrice de covariance du bruit de mesure  $S_k$  (4) à partir de la matrice de covariance du bruit de mesure  $R_k$ .

$$Z_k = H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (3)$$

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \quad (4)$$

Avec la matrice  $S_k$  (4), on calcule le gain du Filtre de Kalman  $K_k$  (5), qui pondère la correction de la prévision en fonction de la fiabilité des mesures. Ainsi, le filtre de Kalman cherche à réduire l'erreur entre la mesure et l'estimation via le gain de Kalman  $K_k$ .

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (S_k)^{-1} \quad (5)$$

De cette façon, l'état prédit  $\hat{x}_k$  (6) est mis à jour avec l'innovation pondérée par le gain, ce qui permet d'obtenir une estimation plus précise de la position et de la vitesse. La matrice de covariance de l'état  $P_k$  (7) est aussi mise à jour sur la base de la correction.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k Innov \quad (6)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^T \quad (7)$$

Comme le filtre de Kalman est un processus récursif, l'algorithme revient à l'étape de prédiction après avoir prédit et corrigé à nouveau l'état de la cible.

# Analyse de l'incertitude des mesures

Alors que  $R_k$  est la matrice de covariance du bruit de mesure, elle représente l'erreur des mesures du filtre. Par conséquent, si  $R_k$  est très grande, le filtre attribue de grandes incertitudes aux mesures, ce qui donne plus de confiance dans les prédictions. De cette façon, l'estimation du filtre aura tendance à suivre de plus près les prédictions, en ignorant ou en minimisant l'influence des mesures GPS. Ce phénomène est visible dans la Figure 1.

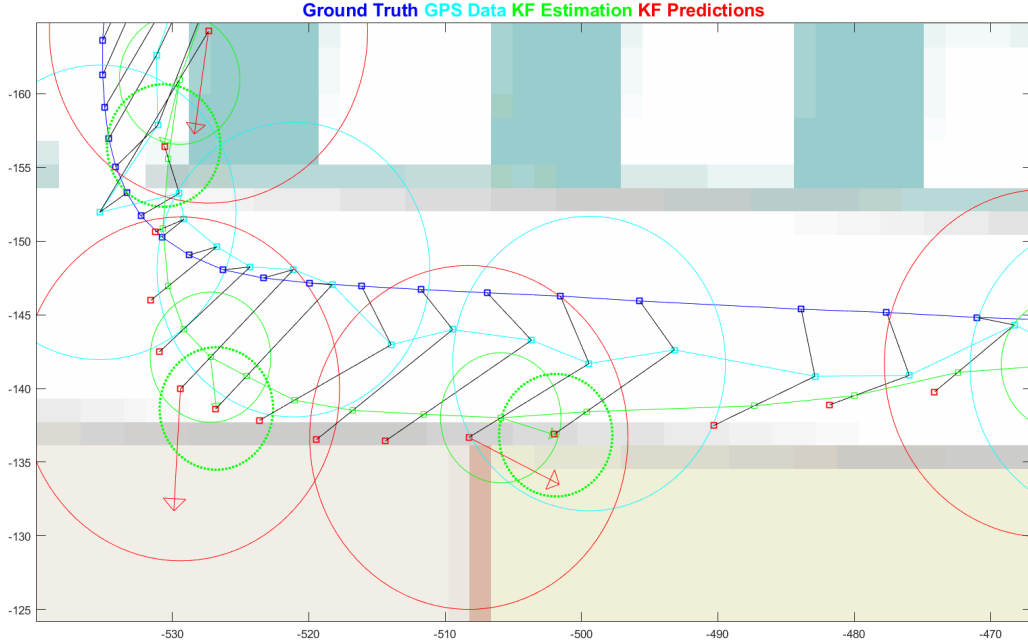


FIGURE 1 – Performance du Filtre de Kalman avec une incertitude de mesure très grande ( $R = 10$ ).

Comme le montre la Figure 1, avec une erreur de mesure très importante, le filtre de Kalman donne moins de confiance dans les mesures et, ainsi, les estimations du filtre de Kalman (vert) sont plus proches des prédictions (rouge). Par conséquent, le filtre devient plus sensible aux erreurs sur la modélisation.

En revanche, si l'erreur dans les mesures du filtre est très faible, le filtre accorde une grande confiance aux mesures et tient moins compte des prédictions. De cette manière, l'estimation du filtre de Kalman tend à suivre plus mesures que les prédictions, ce qui rend le filtre de Kalman plus sensible aux mesures bruitées. L'erreur d'estimation de l'état du cible devient donc plus importante, ainsi que l'incertitude de l'état du cible. Cet effet est visible dans la Figure 2.

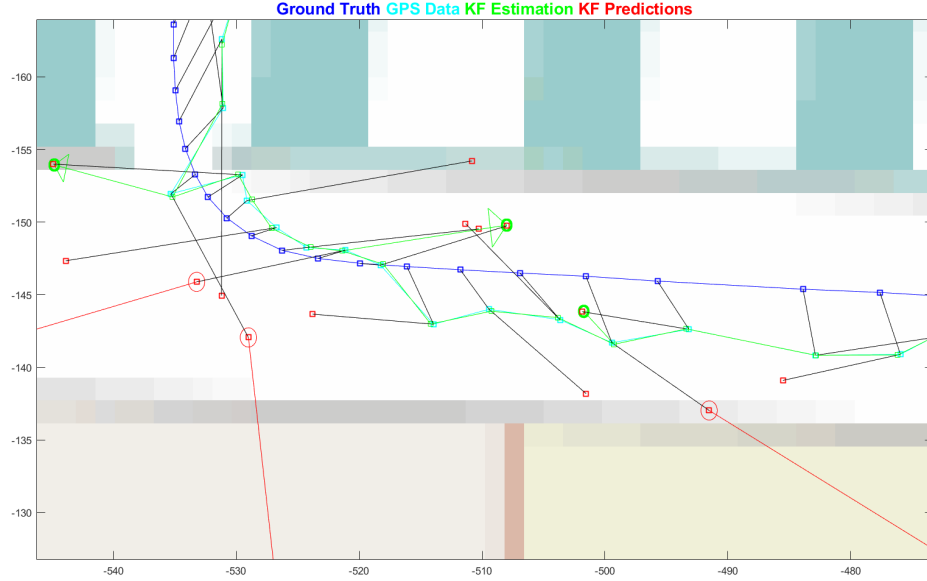


FIGURE 2 – Performance du Filtre de Kalman avec une incertitude de mesure très faible ( $R = 0.1$ ).

En résumé, lors de la calibration de  $Rk$ , il est important de trouver un équilibre qui reflète la confiance réelle dans les mesures GPS. Des valeurs trop élevées peuvent compromettre les performances du filtre, tandis que des valeurs trop faibles peuvent entraîner un excès de confiance dans les mesures et une moindre capacité à rejeter le bruit dans les données GPS. Le réglage correct des paramètres du filtre est un élément essentiel d'un système de filtrage efficace. La Figure 3 montre les performances du filtre avec une valeur appropriée de  $Rk$ , dont les estimations se situent entre les mesures et les prédictions, ce qui confirme le bon fonctionnement du filtre.

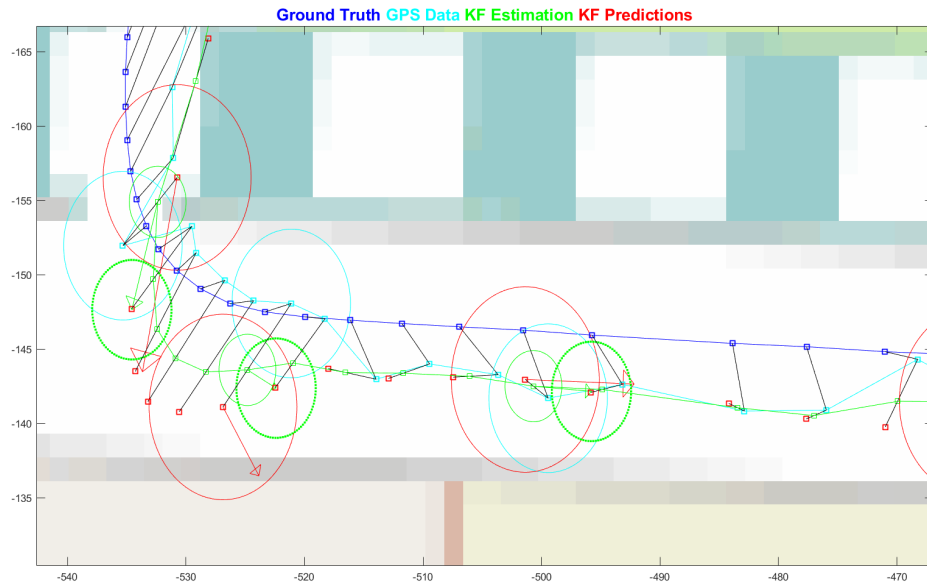


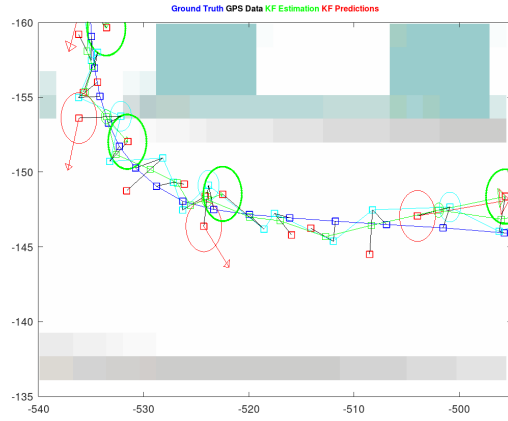
FIGURE 3 – Performance du Filtre de Kalman avec une incertitude de mesure appropriée ( $R = 4$ ).

Une autre analyse a été proposée en utilisant les données de la vérité terrain ajoutées d'un bruit gaussien aléatoire connu. Plusieurs cas sont montrés sur la figure 4.

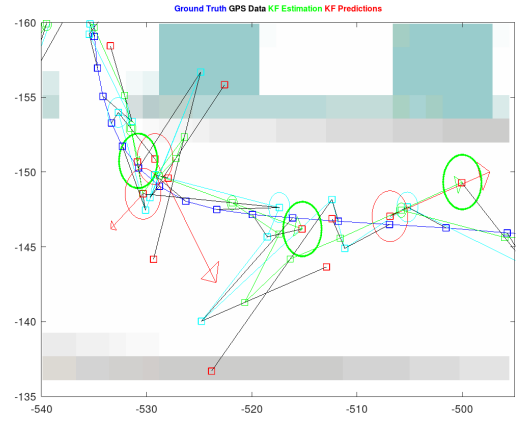
On observe pour le cas d'un bruit faible et d'un bruit fort trois variances distinctes, une faible, une adéquate et une forte.

Pour les deux intensités de bruit la conclusion est la même :

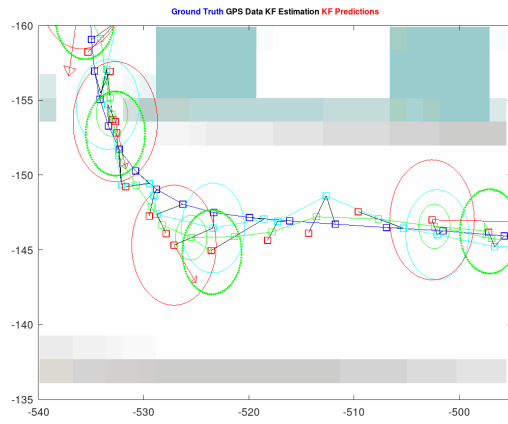
1. Une variance trop faible, qui sous-estime l'intensité du bruit, fait trop confiance aux mesures et pas assez aux propres prédictions. La sortie est donc assez bruitée et à la limite ( $R$  proche à 0) le filtre ignore la dynamique du système. La figure 4a montre un cas où le bruit estimé est pile au réel et quand même on observe que la sortie est assez bruitée. La figure 4b montre une forte sous-estimation du bruit et alors une sur-confiance sur les mesures. Le résultat est évidemment horrible.
2. Une variance adéquate à celle du bruit (figures 4c et 4d) montre comme la sortie du filtre prends en compte les mesures GPS sans faire trop confiance à celles et en utilisant bien la dynamique du système. Les ellipses d'incertitude sont de taille adéquate et dans la plupart des cas contiennent les vrais points.
3. Une variance trop importante par rapport au vrai bruit crée, en plus d'un écart de suivie, des incertitudes trop importantes qui ne permettent pas de bien localiser le véhicule (figures 4e et 4f).



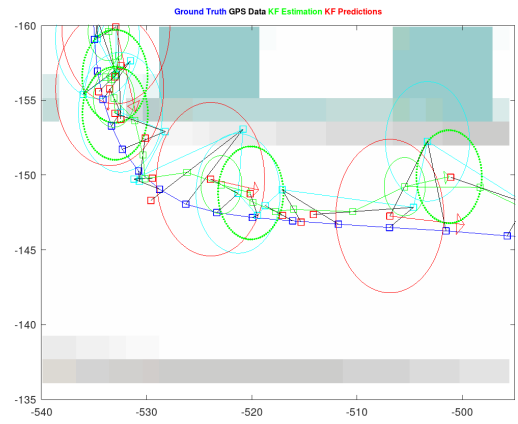
(a) Bruit = 1, R = 1



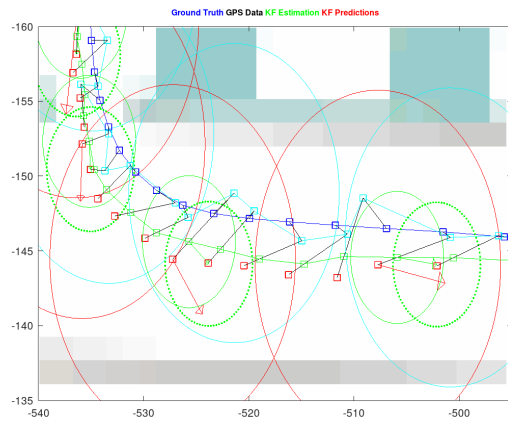
(b) Bruit = 3, R = 1



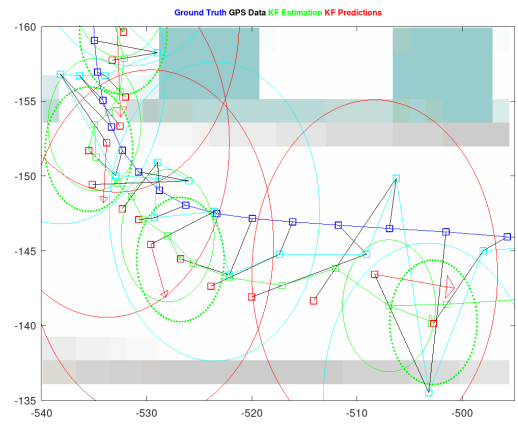
(c) Bruit = 1, R = 3



(d) Bruit = 3, R = 4



(e) Bruit = 1, R = 10



(f) Bruit = 3, R = 10

FIGURE 4 – Influence des variations de l'écart typique réel vs estimé

## Analyse de l'incertitude du processus

Comme la matrice  $Qk$  représente la covariance de l'erreur de processus, c'est-à-dire le bruit dynamique du filtre, sa variation affectera l'estimation du filtre de Kalman. Si  $Qk$  est trop grand, le filtre de Kalman accordera plus de confiance aux innovations du modèle qu'aux

mesures. Il peut en résulter des estimations plus influencées par les prédictions du modèle que par les données de mesure.

En revanche, si  $Qk$  est trop petit, le filtre de Kalman donne plus de confiance dans les mesures au détriment du modèle. De cette manière, les estimations sont fortement influencées par les données de mesure, même si le modèle du processus est considéré comme plus fiable. De cette façon, toute mesure inexacte ou bruyante aura un impact direct sur l'estimation, conduisant à une plus grande incertitude.

Pour calculer la matrice de covariance de l'erreur de processus  $Qk$ , 3 modèles ont été implémentés. Le modèle 1 modélise une accélération isotrope constante et est un modèle simple avec peu de paramètres à ajuster. Cependant, il peut être limité pour les systèmes qui présentent des variations significatives dans la dynamique, en particulier si l'accélération n'est pas isotrope. Une voiture n'est pas capable de se déplacer à n'importe quel direction à tout moment, non holonome. Le modèle 2 modélise donc une accélération anisotrope, en tenant compte de la direction de l'accélération, ce qui peut être important pour les systèmes dont les mouvements sont dirigés. En outre, ce modèle permet une modélisation plus souple, en tenant compte des variations de l'accélération dans différentes directions. Le modèle 3, à son tour, introduit une variation de l'accélération en fonction de la vitesse, s'adaptant ainsi aux différents régimes de vitesse. C'est un cas encore plus raffinée de la modélisation de la voiture vu que les accélérations latérales possibles sont inversement proportionnelles à la vitesse. Cependant, il est sensible à la valeur seuil de vitesse choisie.

En comparant les résultats obtenus avec chaque méthode, nous constatons qu'il y a une amélioration importante avec les méthodes 2 et 3 (figures 6 et 7). Notamment on observe que les ellipses deviennent plus allongés dans la direction de la vitesse. Cela est donné par le modèle et physiquement fait plus de sens vu que les déplacements latéraux sont moins probables. On arrive alors à améliorer le résultat de la sortie tout en réduisant l'incertitude.

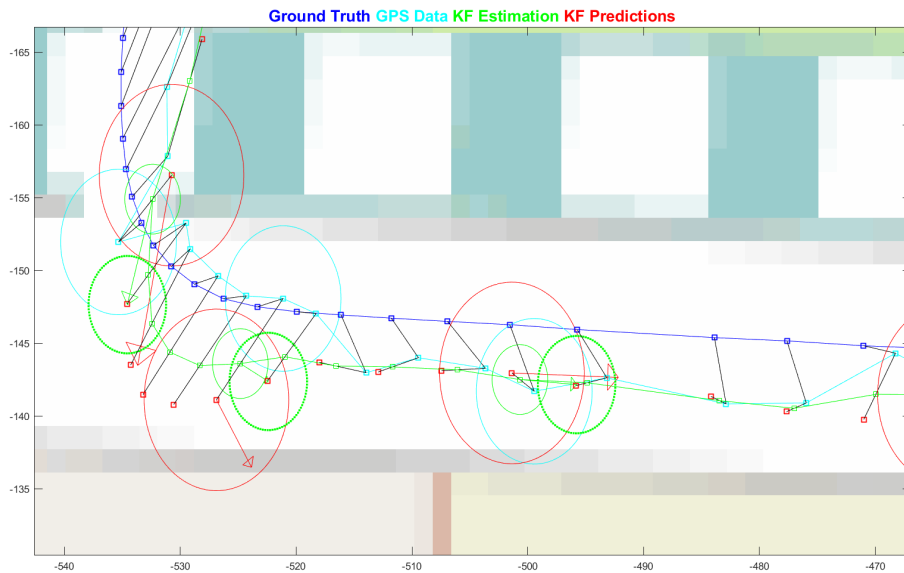


FIGURE 5 – Performance du Filtre de Kalman avec le calcul de  $Qk$  par la méthode 1.

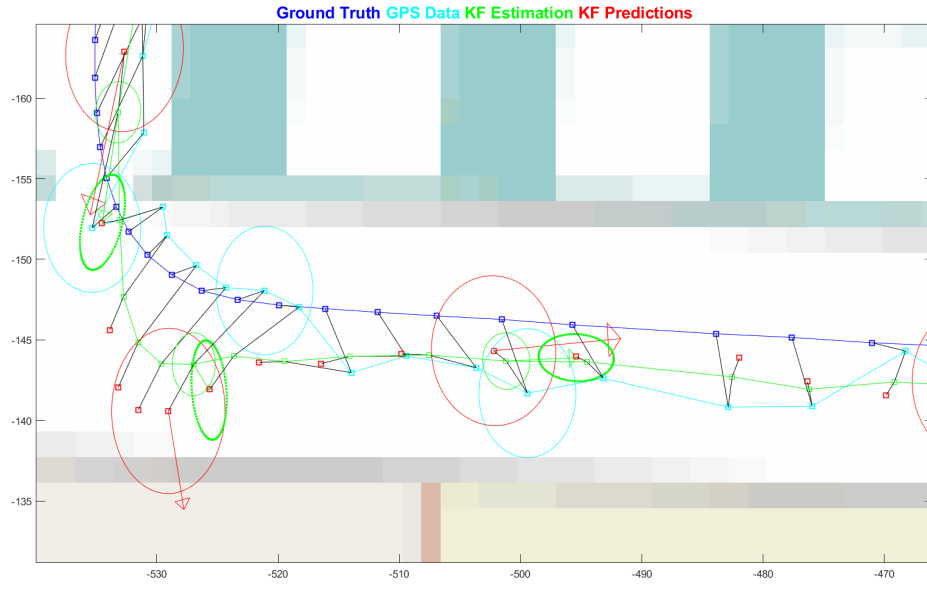


FIGURE 6 – Performance du Filtre de Kalman avec le calcul de  $Q_k$  par la méthode 2.

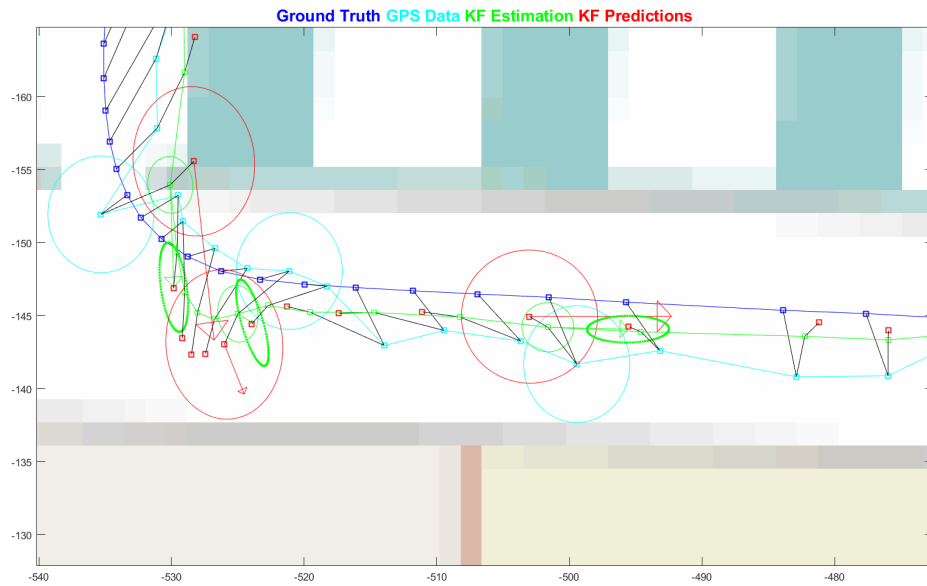


FIGURE 7 – Performance du Filtre de Kalman avec le calcul de  $Q_k$  par la méthode 3.