

TP : Commande numérique pour l'asservissement en position d'un servomécanisme

UE 520 M2 SETI, ANNÉE 2023-2024

Avertissement

La préparation du TP doit être faite avant la première séance de TP ; un compte-rendu de préparation doit être remis au chargé de TP en début de séance.

1 Description du processus

Le processus étudié est un servomécanisme, schématisé Figure 1, composé d'un moto-réducteur à courant continu (*c.f.* doc. technique), entraînant une génératrice à courant continu branchée sur une résistance électrique variable. L'arbre de sortie du réducteur comporte un index que l'on désire asservir en position et un potentiomètre qui permet de mesurer la position angulaire de cet arbre. Sur l'arbre du moteur et de la génératrice est accouplée une génératrice tachymétrique qui permet de mesurer la vitesse de rotation de l'arbre du moteur. Les organes de guidages créent un couple résistant dû aux frottements sec et visqueux. L'électronique de commande est constituée d'un système dSpace DS1104 permettant l'acquisition, le calcul et la génération d'un signal de commande, en temps-réel. Il est situé à l'entrée d'un amplificateur de puissance électrique permettant de délivrer une tension de commande au moteur avec le courant électrique nécessaire. Cet amplificateur de puissance est supposé parfaitement linéaire en dehors du régime de saturation en courant et en tension.

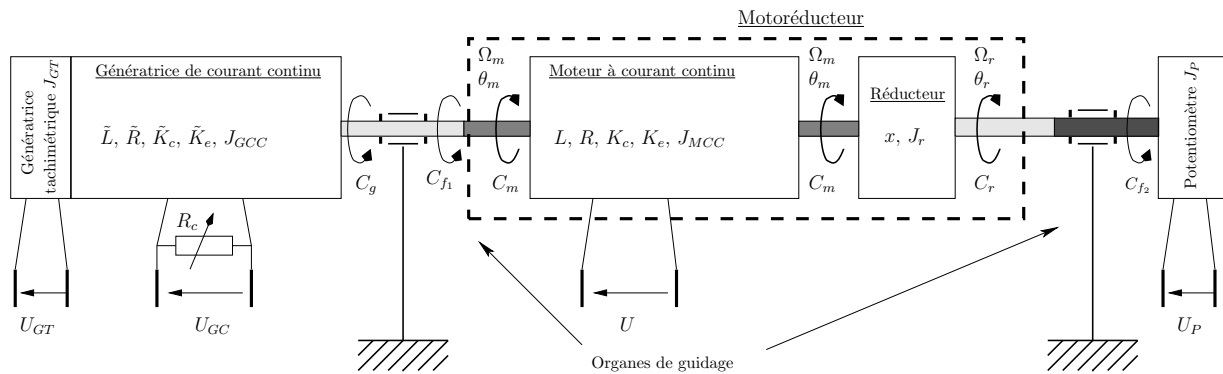


FIGURE 1 – Schéma du servomécanisme actionné par un moteur électrique à courant continu.

1.1 Caractéristiques du moteur et de la génératrice

Le moteur et la génératrice sont des machines à courant continu identiques (voir Figure 2 pour le modèle). Dans le cas d'un moteur, le sens du courant est celui de I_m . Une génératrice de courant est un moteur "utilisé à l'envers", c'est-à-dire comme une *dynamo*. Dans ce cas, le sens du courant est celui de I_g . La génératrice de courant Figure 1 est branchée aux bornes d'une résistance électrique variable R_c qui a pour but de faire varier le courant qui circule dans son bobinage.

1.2 Caractéristiques de la chaîne de mesure et de transmission cinématique

Voir la figure 1.

- **Réducteur du moto-réducteur** : Il réalise un rapport de réduction de vitesse $x = 36$ entre l'arbre du moteur (arbre d'entrée du réducteur) et l'arbre du potentiomètre (arbre de sortie du réducteur). Son moment d'inertie sera noté J_r , supposé très faible devant J_MCC .

Les principales données fournies par le constructeur sont résumées ci-dessous :

Caractéristique	valeur	unité
Tension nominale	12	V
Vitesse limite	11 000	tr/min
Puissance	26	W
Courant max permanent	1,5	A
Couple nominal	24,4	mNm
Rendement maximum	83,2	$\%$
Resistance aux bornes (R)	1,34	Ω
Inductance aux bornes (L)	0,12	mH
Constante de vitesse ($k_v = 1/K_e$)	585	$tr/min/V$
Constante de couple (K_c)	16,3	mNm/A
Constante de temps électromécanique (τ)	4,63	ms
Inertie du rotor (J_m)	9,19	gcm^2

TABLE 1 – Valeurs numériques des paramètres physiques d'une machine à courant continu.

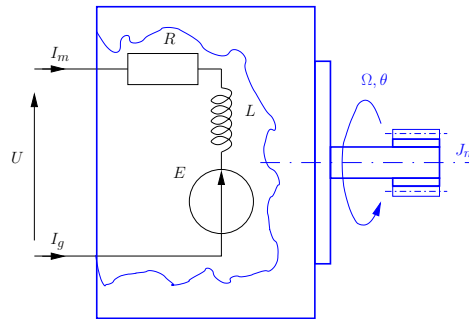


FIGURE 2 – Modèle schématique d'une machine à courant continu.

- **Génératrice tachymétrique** : C'est un capteur de vitesse angulaire. Il est placé en bout d'arbre de la génératrice de courant et délivre à ses bornes une tension proportionnelle à la vitesse de rotation angulaire, de gain $K_\Omega = 1,75 mV/tr/min$. Son moment d'inertie sera noté J_{GT} , supposé très faible devant J_{MCC} .
- **Potentiomètre** : Il sert de capteur de position angulaire. Il est placé en bout d'arbre de sortie du réducteur et délivre un signal proportionnel à l'angle. Le gain de ce capteur vaut $K_\Theta = 0,5 V/10^\circ$. Il possède un gain parfaitement linéaire tant que le courant qu'il délivre est inférieur à environ $2,5 A$. Son moment d'inertie sera noté J_P , supposé très faible devant J_{MCC} .
- **Guidage en rotation** : Au niveau de chaque organe de guidage se crée un couple résistant dû aux frottements sec et visqueux. On notera f le coefficient de frottement visqueux. Sa valeur est faible mais inconnue. Le coefficient de frottement sec μ est d'un ordre de grandeur de $0,01\%$, cette valeur est incertaine et dépend fortement de la température des solides en contact, de leur état de surface respectif...

Caractéristique	valeur	unité
x	36	
K_Θ	0,5	$V/10^\circ$
K_Ω	1,75	$mV/[tr/min]$

TABLE 2 – Caractéristiques annexes du servomécanisme.

1.3 Amplificateur de puissance

L'amplificateur de puissance est chargé de fournir le courant nécessaire à l'alimentation du moteur. Toutefois, le courant est limité à $1 A$, ce qui peut entraîner sa saturation en tension électrique.

2 Modélisation

En utilisant les notations du schéma d'ensemble du servomécanisme Fig. 1 et la description schématique d'une machine à courant continu Fig. 2, on en déduit les équations électriques régissant le fonctionnement du moteur :

$$U(t) = E_m(t) + RI_m(t) + L \frac{dI_m(t)}{dt} \quad (1)$$

$$E_m(t) = K_e \Omega_m(t) \quad (2)$$

$$C_m(t) = K_c I_m(t) \quad (3)$$

où I_m et E_m représentent respectivement le courant circulant dans le bobinage et la force contre électromotrice du moteur. De même, les équations régissant le fonctionnement de la génératrice de courant continu sont :

$$U_{GC}(t) = E_g(t) - \tilde{R}I_g(t) - \tilde{L} \frac{dI_g(t)}{dt} \quad (4)$$

$$U_{GC}(t) = R_c I_g(t) \quad (5)$$

$$E_g(t) = \tilde{K}_e \Omega_m(t) \quad (6)$$

$$C_g(t) = \tilde{K}_c I_g(t) \quad (7)$$

L'équation issue de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'arbre du moteur est :

$$J \frac{d\Omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_g(t) - C_{f_1}(t) - \frac{1}{x} C_{f_2}(t) \quad (8)$$

où J représente le moment d'inertie total du mécanisme par rapport à l'axe de rotation de l'arbre du moteur. En supposant que la transmission du mouvement dans le réducteur se fait sans perte de puissance, on montre que :

$$J = J_{MCC} + J_{GCC} + J_{GT} + \frac{J_r}{x^2} + \frac{J_P}{x^2} + J_{ja_1} + \frac{J_{ja_2}}{x^2} \quad (9)$$

où J_{ja_1} représente le moment d'inertie du joint d'accouplement des arbres du moteur et de la génératrice de courant, J_{ja_2} celui des arbres du réducteur et du potentiomètre. Ces deux grandeurs sont supposées très faibles devant J_{MCC} . Le moteur et la génératrice de courant étant des machines identiques, les paramètres physiques de l'un sont alors identiques à ceux de l'autre : $\tilde{R} = R$, $\tilde{L} = L$, $\tilde{K}_c = K_c$, $\tilde{K}_e = K_e$, $J_{GCC} = J_{MCC}$ que l'on notera désormais J_m , les valeurs numériques correspondantes sont reportées Tab. 1.

Les termes C_{f_1} et C_{f_2} intègrent les couples de frottement sec et visqueux. Ainsi, on les modélise comme suit :

$$C_{f_1}(t) = f\Omega_m(t) + C_{r_1}(t) \quad (10)$$

$$C_{f_2}(t) = \underbrace{f\Omega_r(t)}_{\substack{\text{terme de frottement vis-} \\ \text{queux}}} + \underbrace{C_{r_2}(t)}_{\substack{\text{terme de frottement} \\ \text{sec}}} \quad (11)$$

$$\Omega_r = \frac{1}{x} \Omega_m \quad (\text{principe du réducteur}) \quad (12)$$

où les deux contributions du frottement sec peuvent être modélisées par un couple constant dès que il y a mouvement de rotation :

$$C_{r_1}(t) = C_{r_2}(t) = C_{r_0} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ / \Omega_m(t) \neq 0 \quad (13)$$

L'**instant initial** considéré est $\mathbf{t}_0 = \mathbf{0}$. On suppose que le **système** est **au repos avant cet instant** et qu'il ne l'est plus à partir de cet instant (**principe de causalité**).

Travail préparatoire demandé

3 Construction d’un modèle de connaissance du système

Cette partie contient des questions pour lesquelles les réponses seront inscrites dans le compte rendu.

A partir des équations régissant le fonctionnement du servomécanisme, et de votre compréhension du fonctionnement :

3.1 Analyse du fonctionnement

Identifier toutes les grandeurs physiques du processus et effectuer une classification de celles-ci en précisant lesquelles peuvent être considérées comme

1. des commandes (dans ce cas, dire à quel(s) actionneur(s) elles sont associées),
2. des sorties mesurées par des capteurs (dire lesquels),
3. des perturbation(s) du système,
4. des sorties que l’on souhaite typiquement contrôler par asservissement, sans toutefois être obligé de les mesurer par des capteurs.

3.2 Schémas-blocs

En vous aidant des équations issues de la physique du système, établies à la section 2,

1. dessiner le schéma-bloc **détaillé** dans le domaine temporel.
2. dessiner le schéma-bloc **détaillé** dans le domaine de Laplace.

3.3 Détermination des fonctions de transfert

On souhaite déterminer les relations *entrées-sorties* (à l’aide de *fonctions de transfert*), d’abord entre la tension appliquée au moteur U et la tension recueillie par la génératrice tachymétrique U_{GT} , puis entre la tension appliquée au moteur U et la tension recueillie par le potentiomètre U_P . On notera $P_r(t)$ le signal regroupant toutes les perturbations statiques ramenées à l’entrée du système.

1. Donner l’expression de $P_r(t)$. En déduire sa transformée de Laplace.
2. Après avoir fait les hypothèses nécessaires sur le fonctionnement de l’ensemble du système (conditions initiales, paramètres négligeables...), calculer les transformées de Laplace des relations établies à la section 2.

3. En déduire toutes les fonctions de transfert recherchées.
4. On suppose maintenant que le **frottement visqueux** est **négligeable** ($f \simeq 0$). Calculer de nouveau les fonctions de transfert recherchées.
5. Faire de même, lorsqu’on suppose de plus que $R_c = 0$, puis lorsque $R_c \rightarrow +\infty$.

3.4 Propriétés dynamiques

Dans cette partie, on considère $f = 0$ mais également $R_c \rightarrow +\infty$.

En notant n l’ordre de la fonction de transfert entre U et U_{GT} , déterminer l’expression des n pôles en procédant aux simplifications nécessaires et à des hypothèses issues d’applications numériques. En d’autres termes, calculer le dénominateur commun des fonctions de transfert du système. Lors de la recherche analytique de ses n racines, procéder à une application numérique permettant de négliger certains termes par rapport à d’autres afin d’en déduire la nature réelle ou complexe d’un pôle.

Montrer numériquement que certains pôles sont plus rapides que d’autres.

En conclure que le système peut être approché par la relation :

$$U_{GT}(p) = \frac{K_v}{1 + \tau p} U(p) - \frac{\widetilde{K}_v}{1 + \tau p} P_r(p) \quad (14)$$

où K_v désigne la *constante de vitesse* du moteur, τ la *constante de temps électromécanique* et $P_r(p)$ la perturbation ramenée à l’entrée. On précisera l’expression de \widetilde{K}_v en fonction de K_v et l’expression de K_v et τ en fonction des données.

On conservera autant que faire se peut, les notations introduites à la section 2.

4 Simulations numériques

A l’aide du logiciel **Matlab** et de son interface de simulation d’expérimentation **Simulink**, on se propose d’étudier la réponse temporelle du servomécanisme dans différents cas de figure ainsi que l’influence de la résistance R_c .

Sur le plan numérique, on suppose que $C_{r0} = 10^{-3} Nm$ et que le coefficient de frottement visqueux f est de l’ordre de $10^{-6} \frac{Nm}{rad.s}$. On se propose de faire varier R_c dans l’intervalle $[0, +\infty)$, $+\infty$ désignant en pratique “une valeur très grande” pour R_c .

1. Saisir les différents paramètres ainsi que les données numériques de départ dans un nouveau fichier **TPMCC.m**.

2. Construire le schéma-bloc **Simulink** représentant le modèle complet du servomécanisme.
Dans toute la suite, on observera la réponse en vitesse à un échelon de tension d'amplitude $U_0 = 10V$.
3. Pour $f = 0$ et $R_c = 0$, étudier l'influence de C_{r0} sur le temps de réponse et le gain statique, en faisant varier ce paramètre de $\pm 50\%$ autour de sa valeur nominale.
4. Pour une valeur de C_{r0} fixée, par exemple 10^{-3} , étudier d'abord l'influence de f sur le temps de réponse et le gain statique, en faisant varier ce paramètre de $\pm 100\%$ autour de sa valeur nominale. Etudier ensuite l'influence de R_c sur les mêmes propriétés lorsque ce paramètre évolue comme indiqué.
Dans les deux cas, on prendra par exemple 10 valeurs des paramètres dans leur intervalle d'étude, judicieusement espacés.
5. A l'aide de **Matlab**, calculer les pôles pour les différents cas étudiés ci-dessus et tracer leur évolution dans le plan complexe.
6. Tracer le diagramme de Bode du transfert de $U(p)$ vers $U_{GT}(p)$ pour les différentes valeurs considérées précédemment.
7. Tracer le diagramme de Bode du transfert de $P_r(p)$ vers $U_{GT}(p)$ pour les différentes valeurs considérées précédemment.
8. Interpréter et comparer les courbes avant de conclure. **Attention aux unités !**

5 Modèle simplifié

La section précédente a permis d'établir que le comportement dynamique du servomécanisme pouvait être assimilé à celui d'un système du 1^{er} ordre, lorsque la bande passante d'intérêt est suffisamment faible pour pouvoir négliger les phénomènes purement électriques (Voir Figure 3).

Ainsi, en notant $U_{GT}(p)$ et $\Omega_m(p)$ les transformées de Laplace des signaux $U_{GT}(t)$ et $\Omega_m(t)$ respectivement, $U(p)$ celle du signal $U(t)$ et $P_r(p)$ celle du signal $P_r(t)$, la relation *entrées-sortie* approchée est donnée par (15) et (16).

$$U_{GT}(p) = K_\Omega \Omega_m(p) \quad (15)$$

$$\Omega_m(p) \simeq \frac{C_v}{1 + \tau_m p} U(p) - \frac{\widetilde{C}_v}{1 + \tau_m p} P_r(p). \quad (16)$$

où τ_m est la *constante de temps électromécanique* qui vaut approximativement $\tau_m \simeq 9,17 \cdot 10^{-3} [sec/rad]$. De plus, $C_v \simeq 61,261 [rad.s^{-1}.V^{-1}]$ et $\widetilde{C}_v \simeq 5036,2 [rad.s^{-1}.N^{-1}.m^{-1}]$.

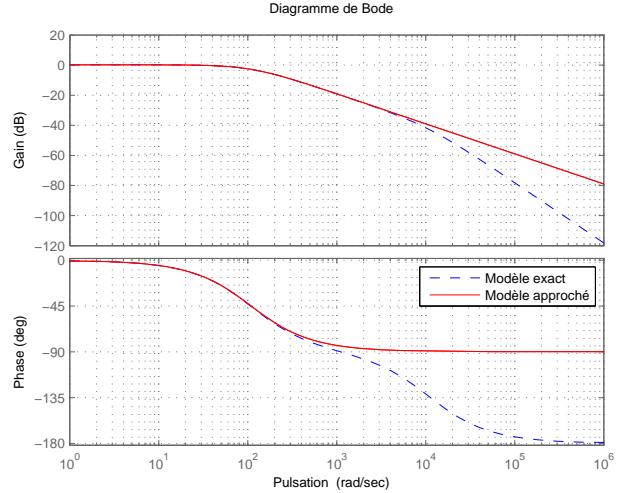


FIGURE 3 – Bode du transfert entre $U(p)$ et $U_{GT}(p)$.

6 Travail demandé

On souhaite insérer le système dans une structure d'asservissement numérique (voir Fig. 4) avec tout d'abord un correcteur numérique RST permettant de réaliser un asservissement de vitesse, puis avec un autre permettant un asservissement de position. Pour cela, nous allons calculer les polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ du correcteur RST dans chacun des cas.

6.1 Transfert de vitesse

En utilisant les notations de la figure 4 adaptées au problème considéré, c'est-à-dire avec $Y(p) = U_{GT}(p)$, $W(p) = P_r(p)$, ..., on définit $H_u(p)$ et $H_w(p)$ de sorte que :

$$Y(p) = H_u(p)U(p) - H_w(p)W(p). \quad (17)$$

Donner les expressions et valeurs numériques des transferts $H_u(p)$ et $H_w(p)$.

Échantillonnage du système en boucle ouverte : On suppose que la perturbation analogique $P_r(p)$ est un échelon de couple résistant d'amplitude constante notée $C_{r0} > 0$, $P_r(p) = \frac{C_{r0}}{p}$. Montrer que $P_r(z)$, la transformée en z du signal $P_r(t)$ échantillonné¹ à la période T_e est :

$$P_r(z) = \frac{z}{z-1} C_{r0} \quad (18)$$

En posant $D = e^{-\frac{T_e}{\tau_m}}$, montrer que la fonction de transfert de $U(z)$ vers $Y(z)$ s'écrit :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (19)$$

1. il s'agit d'un échantillonnage virtuelle qui n'a que pour but de considérer le signal $P_r(t)$ aux instants d'échantillonnage.

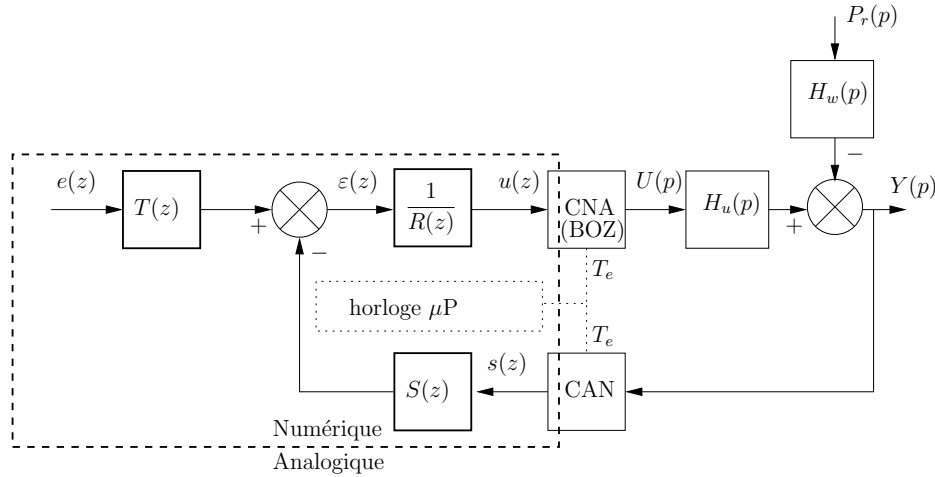


FIGURE 4 – Structure de commande numérique par correction RST.

où

$$B(z) = K_{\Omega} C_v (1 - D) \quad (20)$$

$$A(z) = z - D. \quad (21)$$

Montrer que pour une perturbation de couple constante, la fonction de transfert de $W(z)$ vers $Y(z)$ s'écrit

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{B_w(z)}{A(z)} \quad (22)$$

où

$$B_w(z) = K_{\Omega} \widetilde{C}_v (1 - D). \quad (23)$$

En déduire la relation suivante :

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) - \frac{B_w(z)}{A(z)} W(z). \quad (24)$$

Faire l'application numérique pour les fréquences d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$ valant successivement 100, 1000 puis 5000 Hz.

Étude de la boucle fermée

1. Représentez le schéma-bloc détaillé du correcteur numérique RST.
2. Établir un cahier des charges permettant de réaliser un asservissement de vitesse, tout en rejetant asymptotiquement l'effet d'une perturbation constante ramenée à l'entrée du système. Le temps de réponse de la boucle fermée sera choisi 2 à 5 fois plus rapide que le comportement en boucle ouverte.
3. Calculer l'ordre minimale du correcteur RST approprié, ainsi que les valeurs numériques des coefficients des polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ du correcteur RST.

6.2 Transfert de position

Échantillonnage du système en boucle ouverte : Comme précédemment, en utilisant les notations de la figure 4 mais cette fois avec $Y(p) = U_P(p)$, $W(p) = P_r(p)$, ..., on définit $H_u(p)$ et $H_w(p)$ de sorte que :

$$Y(p) = H_u(p)U(p) - H_w(p)W(p). \quad (25)$$

Donner les nouvelles expressions et valeurs numériques des transferts $H_u(p)$ et $H_w(p)$.

Montrez que $U_P(p)$, la transformée de Laplace du signal $U_P(t)$, s'écrit en fonction de $U_{GT}(p)$ ainsi,

$$U_P(p) = \frac{X}{p} U_{GT}(p) \quad (26)$$

où X est une constante à déterminer, dépendant de K_{Ω} , K_{Θ} , x et éventuellement d'autres constantes du problème si nécessaire. En déduire la fonction de transfert $\frac{Y(z)}{U(z)}$ en montrant qu'elle vaut :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha z - \beta}{(z - 1)(z - D)} \quad (27)$$

où α et β sont deux constantes à déterminer, dépendant de X , C_v , T_e , τ_m et $D = e^{-\frac{T_e}{\tau_m}}$. Étudiez l'évolution des pôles et zéros de cette fonction de transfert lorsque $T_e \rightarrow 0$. Commentez en argumentant.

Étude de la boucle fermée :

1. Proposer un cahier des charges d'asservissement en position qui permet le rejet asymptotique de l'effet d'un couple de frottement inconnu mais supposé constant, tout en assurant un temps de réponse d'environ 0,1 s.
2. Calculer un correcteur RST approprié, de complexité aussi réduite que possible.
3. Développer un correcteur RST correspondant au cahier des charges précédemment défini, en vu de son implémentation sur la carte de prototypage rapide dS1104.

Travail à faire en séance

7 Mise en œuvre pratique

7.1 En simulation sur Matlab®

Après avoir saisi les paramètres du système dans le *workspace* (attention aux unités), développez un script **Matlab** permettant de représenter le diagramme de Bode pour les fonctions de transfert de $U(p)$ vers $U_{GT}(p)$ et de $U(p)$ vers $U_P(p)$, dans le cas où l'on considère le modèle continu exact, puis le modèle continu réduit.

Déterminez la bande passante dans chacun des cas. Comment choisiriez vous la fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$? Expliquer et justifier vos réponses.

Toujours à l'aide de **Matlab**, en utilisant la fonction **c2d** (faire **help c2d**), déterminer les fonctions de transferts en z $\frac{U_{GT}(z)}{U(z)}$ et $\frac{U_P(z)}{U(z)}$ pour les fréquences d'échantillonnage $F_e = 100 \text{ Hz}$, $F_e = 200 \text{ Hz}$ et $F_e = 1000 \text{ Hz}$.

7.2 Manipulation expérimentale sur maquette didactique et station informatique

Identification : Après avoir défini un protocole expérimental adéquat qui sera convenablement décrit dans le compte-rendu, développez le schéma **Simulink** et l'interface **ControlDesk** en vue d'identifier expérimentalement la fonction de transfert « quasi-continue » (c'est-à-dire pour $F_e = F_{e_{max}} = 20000 \text{ Hz}$) de $U(p)$ vers $U_{GT}(p)$. Faire les essais nécessaires. En déduire, la fonction de transfert de $U(p)$ vers $U_P(p)$.

Identifier les mêmes fonctions de transfert pour les différentes fréquences d'échantillonnage $F_e = 100 \text{ Hz}$, $F_e = 200 \text{ Hz}$ et $F_e = 1000 \text{ Hz}$.

Commande : On souhaite implémenter le correcteur numérique RST permettant de réaliser un asservissement de vitesse, puis de position.

Définir le protocole expérimental, le schéma **Simulink** et l'interface **ControlDesk** permettant de mettre en œuvre le correcteur obtenu lors de la préparation. Étudier la réponse à différents type de signaux de consigne, en commençant par une consigne de vitesse, puis de position angulaire constante. Commentez vos résultats.