



# **AUT202** - Automatique : dynamique et contrôle des systèmes TP2

**Matheus SANTOS SANO**

Palaiseau, France

Mars 2023

# PARTIE 1 - Equation de Lagrange

## Q1

Le but de ce projet est la stabilisation d'une balle libre de rouler sur un plateau pivotant. Il s'agit d'un système à deux degrés de liberté : l'angle  $\theta(t)$  que fait le plateau par rapport à l'horizontale et le position  $r(t)$  de la balle qui roule sans glisser sur ce plateau. Ce système est équipé d'un seul moteur. Fixé sur l'axe de rotation du plateau, ce moteur délivre un couple  $u(t)$ . Le système est illustré ci-dessous :

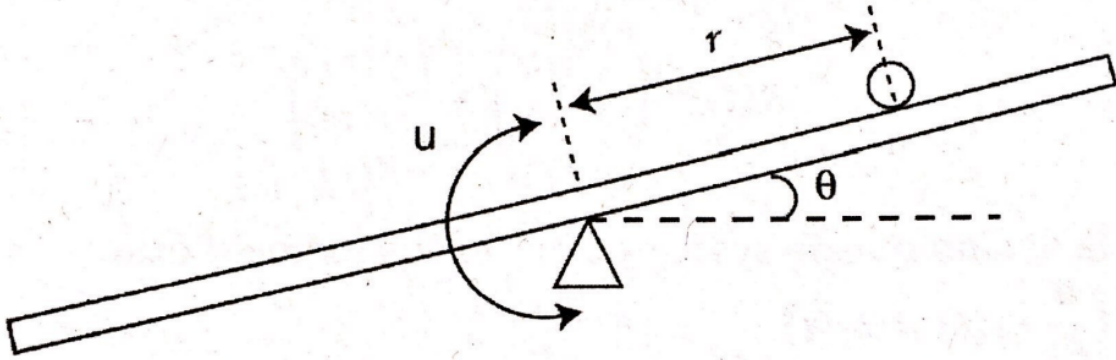


FIGURE 1 – L'illustration du système.

On note :

1.  $J$  : le moment d'inertie du plateau par rapport à son axe de rotation ;
2.  $m$  : la masse de la balle ;
3.  $R$  : le rayon de la balle ;
4.  $J_b$  : le moment d'inertie de la balle par rapport à son centre ;
5.  $g$  : l'accélération de l'apesanteur.

On remarque enfin que l'inertie de la balle peut s'écrire :  $J_b = \sigma.m.R^2$  avec  $0 < \sigma \leq 1$  dépendant de la densité en fonction du rayon. On cherche à amener la balle à une position de consigne  $r_{ef}$ , à partir des capteurs de position  $r(t)$  et  $\theta(t)$ .

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  est défini en fonction de l'énergie cinétique  $E_c$  et l'énergie potentielle  $E_p$  du système dynamique :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

Pour faire le calcul de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, on considère le système ci-dessous :

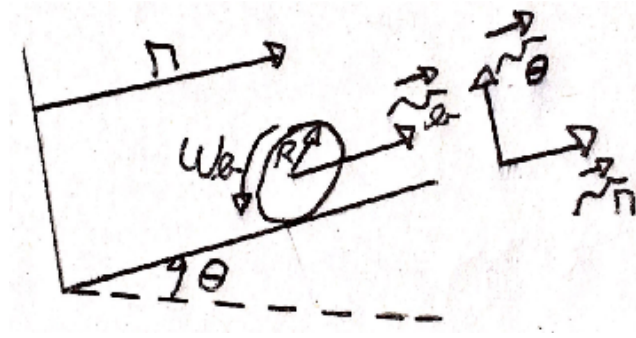


FIGURE 2 – Le système dynamique de la balle sur le plateau.

Il est important de noter que pour l'énergie cinétique de la balle, il faut considerer sa rotation et sa translation. Donc l'énergie cinétique du système est :

$$E_c = E_{c(\text{plateau})} + E_{c(\text{balle})} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot J_b \cdot (w_b(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_b(t))^2$$

La vitesse angulaire  $w_b$  est la somme de la vitesse angulaire de la balle par rapport au plateau et de la vitesse angulaire du plateau :

$$\vec{v}_b(t) = \dot{r}(t) \cdot \vec{v}_r(t) + r(t) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{v}_\theta(t)$$

$$w_b(t) = w_{b|\text{plateau}}(t) + w_{\text{plateau}}(t) = \frac{\dot{r}(t)}{R} + \dot{\theta}(t)$$

Comme la balle roule plus vite que le plateau se bouge, l'effet de la rotation de la barre dans l'énergie cinétique de rotation de la balle sur elle-même est négligeable. L'énergie cinétique est, alors :

$$E_c = E_{c(\text{plateau})} + E_{c(\text{balle})} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot J_b \cdot \left( \frac{\dot{r}(t)}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot ((\dot{r}(t))^2 + (r(t))^2 \cdot (\dot{\theta}(t))^2)$$

## Q2

En supposant que l'axe de rotation est au niveau du centre de gravité du plateau, l'énergie potentielle du système est :

$$E_p = m \cdot g \cdot h_b(t) = m \cdot g \cdot r(t) \cdot \sin(\theta(t))$$

## Q3

A partir de l'énergie potentielle et cinétique, le lagrangien  $\mathcal{L}$  est calculé :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \frac{1}{2} \cdot J_b \cdot \left( \frac{\dot{r}(t)}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot ((\dot{r}(t))^2 + (r(t))^2 \cdot (\dot{\theta}(t))^2) - m \cdot g \cdot r(t) \cdot \sin(\theta(t))$$

Le lagrangien vérifie alors pour chaque paramètre de position  $q_i(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + F_{q_i}$$

Les paramètres de position sont :  $q_1(t) = r(t)$  et  $q_2(t) = \theta(t)$ . Donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} + F_r \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left( \frac{J_b}{R^2} + m \right) \cdot \dot{r}(t) = (1 + \sigma) \cdot m \cdot \dot{r}(t) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m \cdot r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - m \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) \\ F_r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}((1 + \sigma) \cdot m \cdot \dot{r}(t)) &= m \cdot r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - m \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) + 0 \\ (1 + \sigma) \cdot \frac{d\dot{r}(t)}{dt} &= r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - g \cdot \sin(\theta(t))\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + F_{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (J + m \cdot (r(t))^2) \cdot \dot{\theta}(t) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) \\ F_{\theta} = u(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}((J + m \cdot (r(t))^2) \cdot \dot{\theta}(t)) = -m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) + u(t)$$

Les équations de Lagrange sont alors :

$$\begin{cases} (1 + \sigma) \cdot \frac{d\dot{r}(t)}{dt} = r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - g \cdot \sin(\theta(t)) \\ \frac{d}{dt}((J + m \cdot (r(t))^2) \cdot \dot{\theta}(t)) = -m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) + u(t) \end{cases}$$

## PARTIE 2 - Modélisation, équilibre, linéarisé tangent, stabilité

### Q4

Dans le système dynamique illustré à la Figure 1,  $(r(t), \theta(t))$  est l'état :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

De cette façon, on peut montrer la dynamique du système sous la forme d'état suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r(t) &= \dot{r}(t) \rightarrow \frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t) \\ \frac{d}{dt}\theta(t) &= \dot{\theta}(t) \rightarrow \frac{d}{dt}x_3(t) = x_4(t)\end{aligned}$$

A partir des équations de Lagrange obtenues à l'item précédent (Q3) :

$$\begin{aligned}(1 + \sigma) \cdot \frac{d\dot{r}(t)}{dt} &= r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - g \cdot \sin(\theta(t)) \iff \frac{d\dot{r}(t)}{dt} = \frac{r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - g \cdot \sin(\theta(t))}{1 + \sigma} \\ \frac{d\dot{r}(t)}{dt} &= \frac{r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - g \cdot \sin(\theta(t))}{1 + \sigma} \rightarrow \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{x_1(t) \cdot (x_4(t))^2 - g \cdot \sin(x_3(t))}{1 + \sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}((J + m \cdot (r(t))^2) \cdot \dot{\theta}(t)) = -m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) + u(t) \iff \\
& \frac{d}{dt}(J \cdot \dot{\theta}(t)) + \frac{d}{dt}((m \cdot (r(t))^2) \cdot \dot{\theta}(t)) = -m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) + u(t) \iff \\
& J \cdot \frac{d}{dt}(\dot{\theta}(t)) + m \cdot 2 \cdot r(t) \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + (m \cdot (r(t))^2) \cdot \frac{d}{dt}\dot{\theta}(t) = -m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) + u(t) \iff \\
& \frac{d}{dt}(\dot{\theta}(t)) = \frac{u(t) - m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) - 2 \cdot m \cdot r(t) \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t)}{J + (m \cdot (r(t))^2)} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{d}{dt}(x_4(t)) = \frac{u(t) - m \cdot g \cdot x_1(t) \cdot \cos(x_3(t)) - 2 \cdot m \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_4(t)}{J + m \cdot (x_1(t))^2}
\end{aligned}$$

La dynamique du système s'écrit sous forme d'état :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}r(t) = \dot{r}(t) \\ \frac{d}{dt}\dot{r}(t) = \frac{r(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - g \cdot \sin(\theta(t))}{1+\sigma} \\ \frac{d}{dt}\theta(t) = \dot{\theta}(t) \\ \frac{d}{dt}\dot{\theta}(t) = \frac{u(t) - m \cdot g \cdot r(t) \cdot \cos(\theta(t)) - 2 \cdot m \cdot r(t) \cdot \dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t)}{J + m \cdot (r(t))^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{x_1(t) \cdot (x_4(t))^2 - g \cdot \sin(x_3)}{1+\sigma} \\ \frac{d}{dt}x_3(t) = x_4(t) \\ \frac{d}{dt}x_4(t) = \frac{u(t) - m \cdot g \cdot x_1(t) \cdot \cos(x_3(t)) - 2 \cdot m \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_4(t)}{J + m \cdot (x_1(t))^2} \end{cases}$$

## Q5

Le système peut être représenté dans le module Simulink de MATLAB comme suit :

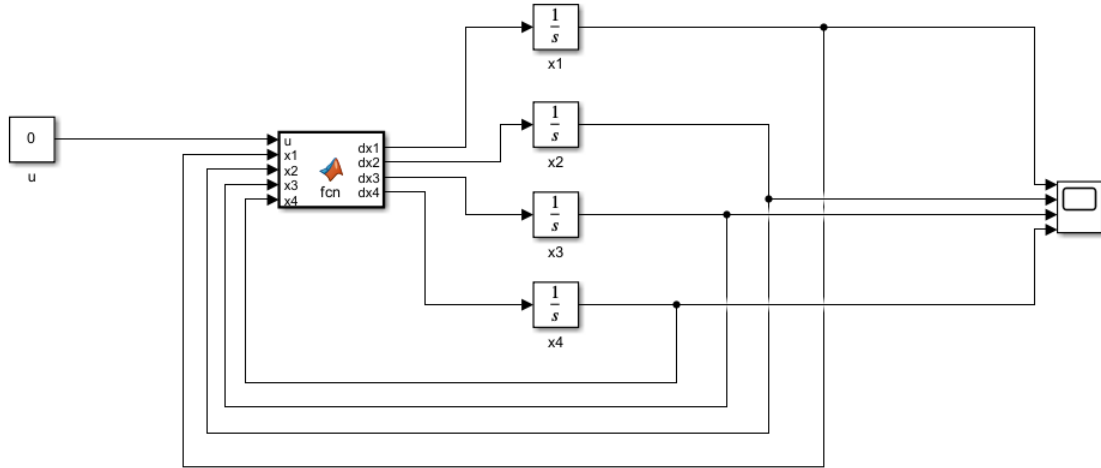


FIGURE 3 – Système dans Simulink MATLAB.

La dynamique du système sous forme d'état que on a trouvé dans l'item précédent est implémentée dans MATLAB :

```

function [dx1, dx2, dx3, dx4] = fcn(u, x1, x2, x3, x4)

%paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

%dynamique du système
dx1 = x2;
dx2 = (x1*(x4)^2 - g*sin(x3))/(1+sigma);
dx3 = x4;
dx4 = (u-m*g*x1*cos(x3)-2*m*x1*x2*x4)/(J+m*(x1)^2);

```

FIGURE 4 – Dynamique du système.

## Q6

Comme on peut le voir sur la Figure 3, la commande  $u(t)$  est nulle. De cette façon, la dynamique est simulée pour différentes conditions initiales. Lorsque toutes les conditions initiales sont nulles, le système ne bouge pas, parce qu'il est déjà stable :

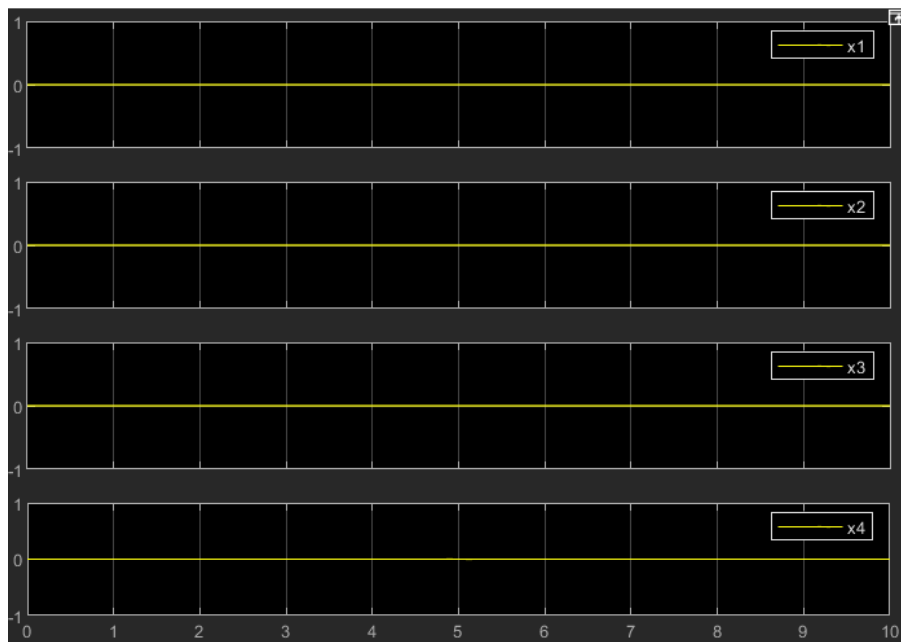


FIGURE 5 – Les états du système dynamique pour conditions initiales nulles  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0, 0, 0, 0)$ .

Par contre, quand il y a la condition initiale  $x_1(0) = 1m$ , le plateau tourne à 90 degrés dans le sens horaire et la balle tombe en chute libre. Comme on peut le voir sur la figure ci-dessous, la vitesse du angle  $\theta(t)$  ( $x_4(t)$ ) devient nulle lorsque l'angle atteint 90 degrés. De cette façon, la vitesse de la balle augmente de manière linéaire dont l'accélération est la gravitationnelle  $g$  :

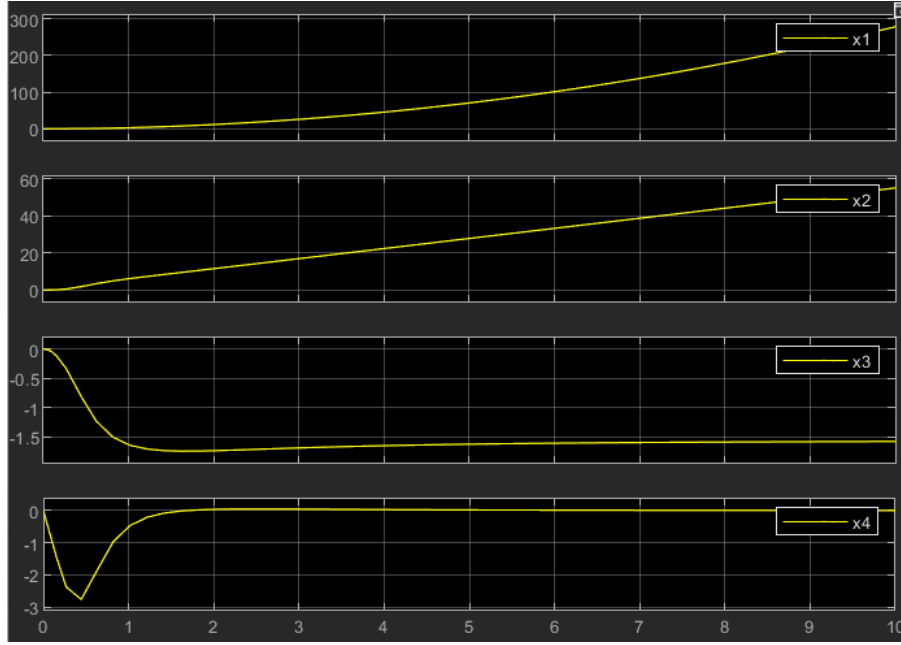


FIGURE 6 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1, 0, 0, 0)$ .

Quand la balle a une vitesse initiale ou une position initiale non nulle, le système réagit de la même manière que ci-dessus, même si les conditions initiales  $x_3(0)$  et  $x_4(0)$  sont nulles ou non nulles. Néanmoins, quand  $x_1(0) = 0m$ ,  $x_2(0) = 0m.s^{-1}$  et les conditions initiales  $x_3(0)$  ou  $x_4(0)$  sont non nulles, la balle tombe aussi en chute libre, mais le plateau tourne à 90 degrés dans le sens antihoraire. Cela peut être vu dans la figure suivante :

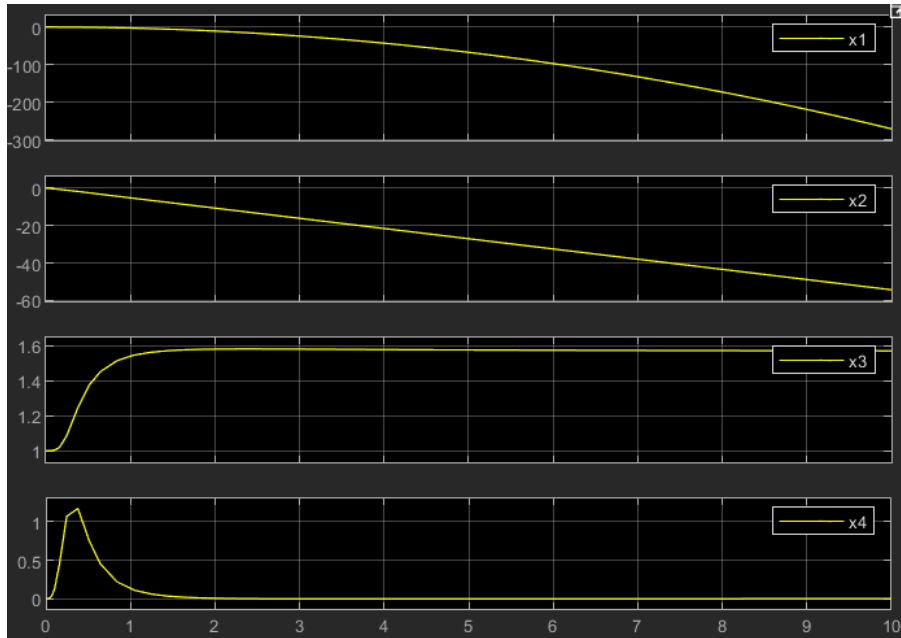


FIGURE 7 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0, 0, 1, 0)$ .

## Q7

À partir de la dynamique du système obtenue à la question Q4, on calcule les équations de l'équilibre :

$$\begin{cases} 0 = x_{2e} \\ 0 = \frac{x_{1e} \cdot (x_{4e})^2 - g \cdot \sin(x_{3e})}{1 + \sigma} \\ 0 = x_{4e} \\ 0 = \frac{u_e - m \cdot g \cdot x_{1e} \cdot \cos(x_{3e}) - 2 \cdot m \cdot x_{1e} \cdot x_{2e} \cdot x_{4e}}{J + m \cdot (x_{1e})^2} \end{cases}$$

De cette façon, les points d'équilibre du système sont calculés :

$$x_{2e} = 0$$

$$x_{4e} = 0$$

$$\sin(x_{3e}) = 0 \rightarrow x_{3e} = 0$$

$$u_e = m \cdot g \cdot x_{1e}$$

Il faut noter que  $x_{3e}$  pourrait être aussi  $x_{3e} = \pi$ , cependant il n'a pas de sens physique. Par ailleurs, la commande d'équilibre  $u_e$  dépend de  $x_{1e}$  qui, dans ce cas, est la position sur laquelle on souhaite stabiliser la balle. De cette façon, on peut la stabiliser sur la position de référence ( $r_{ref} = x_{1e}$ ) à partir de la commande d'équilibre  $u_e$ . L'état d'équilibre et la commande d'équilibre en fonction de la position  $r_{ref}$  sont présentés ci-dessous :

1. L'état d'équilibre :

$$\begin{cases} x_{1e} = x_{ref} \\ x_{2e} = 0 \\ x_{4e} = 0 \\ x_{3e} = 0 \end{cases} \rightarrow X_{ref} = (x_{ref}, 0, 0, 0)$$

2. La commande d'équilibre :

$$u_{ref} = m \cdot g \cdot x_{ref}$$

## Q8

Le bloc qui calcule l'état d'équilibre  $X_{ref}$  et la commande d'équilibre  $u_{ref}$  est ajouté dans le modèle Simulink. Dans ce moment, on considère  $K = [0, 0, 0, 0]$  :

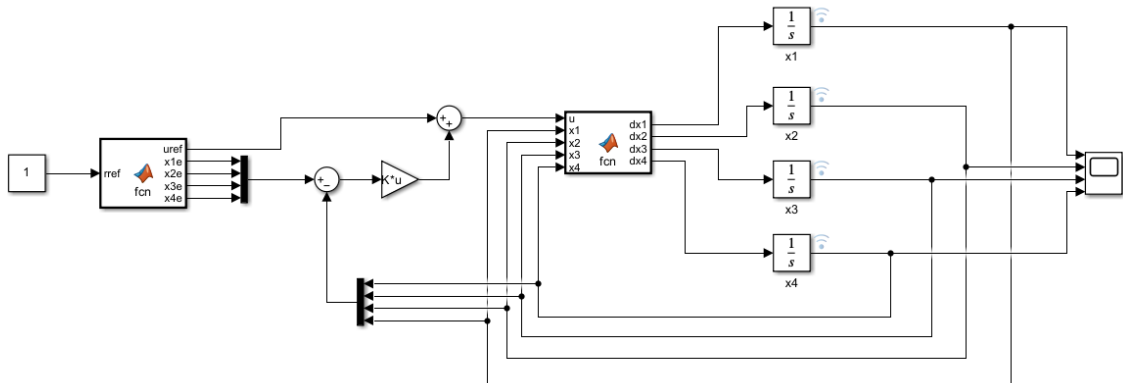


FIGURE 8 – Système dans Simulink MATLAB.



```

function [uref, x1e, x2e, x3e, x4e] = fcn(rref)

%paramètres du système
m = 0.6;
g = 9.81;

%l'état d'équilibre
x1e = rref;
x2e = 0;
x3e = 0;
x4e = 0;

%commande d'équilibre
uref = m*g*rref;

```

FIGURE 9 – Fonction qui calcule l'état d'équilibre et la commande d'équilibre en fonction de  $r_{ref}$ .

Avec le nouveau modèle Simulink, on peut analyser le trajectoire de la balle pour différentes valeurs de  $r_{ref}$ . Quand le système est initialisé exactement à l'équilibre, c'est-à-dire  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (r_{ref}, 0, 0, 0)$ , le système reste en équilibre :

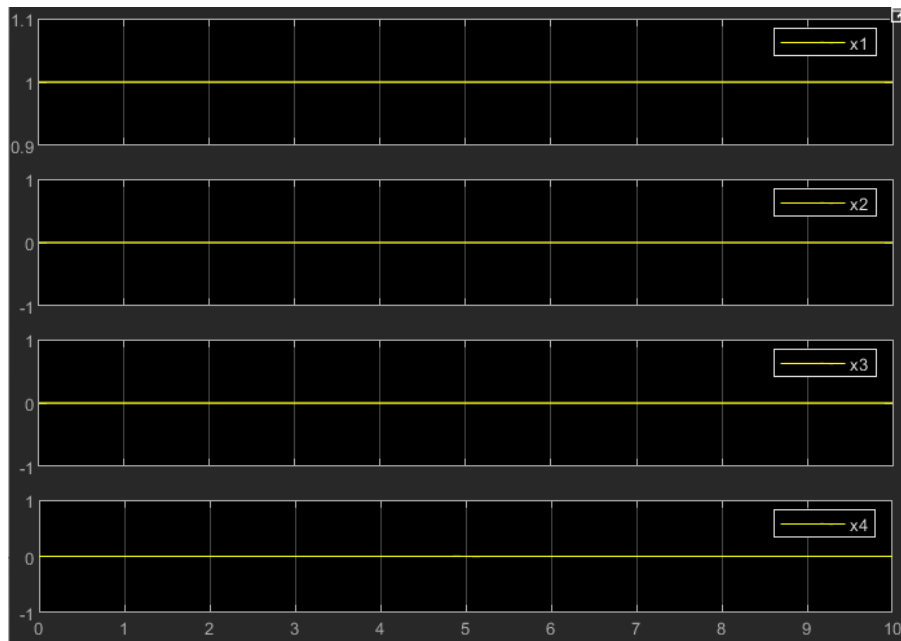


FIGURE 10 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1, 0, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 1$ .

Néanmoins, si le système n'est pas initialisé exactement à l'équilibre, c'est-à-dire  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) \neq (r_{ref}, 0, 0, 0)$ , les trajectoires divergent. Par exemple, si  $x_1(0) = 1.01$  ou  $x_3(0) = 0.01$ , le système ne se stabilise pas dans la position de référence :

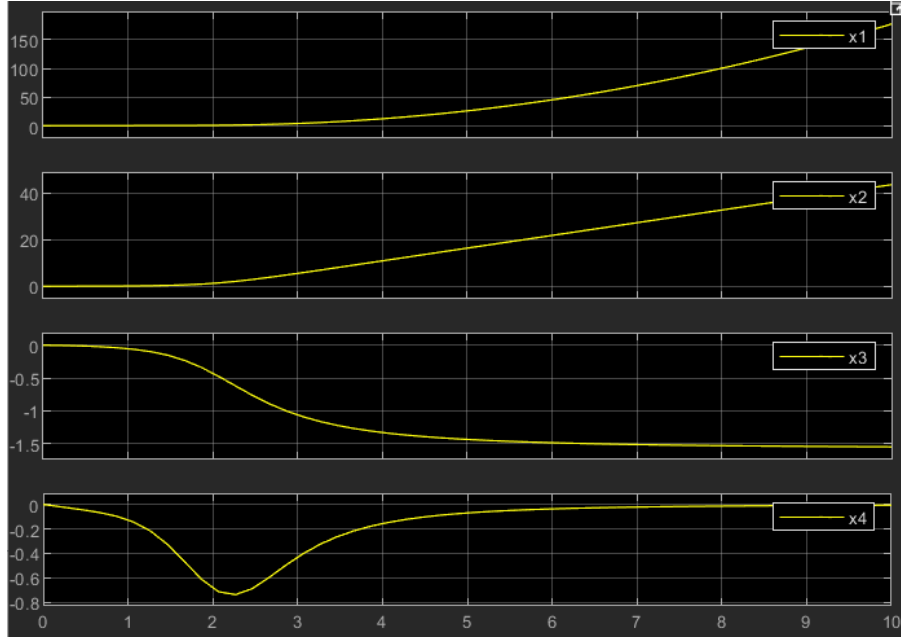


FIGURE 11 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1.01, 0, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 1$ .

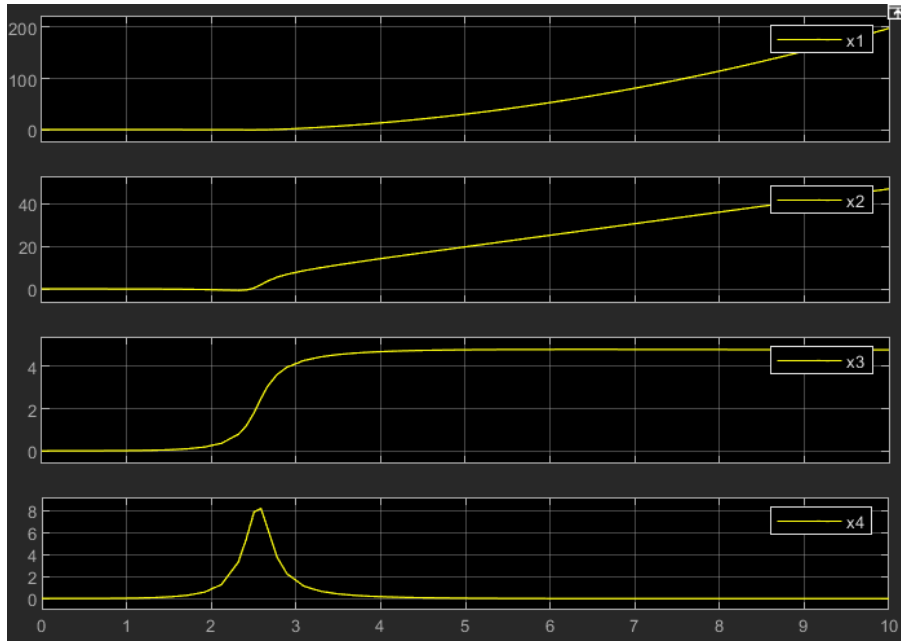


FIGURE 12 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1, 0, 0.01, 0)$  et  $r_{ref} = 1$ .

## Q9

On note  $X(t) = X_{ref} + \delta X(t)$  et  $u(t) = u_{ref} + \delta u(t)$  où  $\delta X(t)$  et  $\delta u(t)$  sont les écarts à l'équilibre :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1e} + \delta x_1(t) = x_{ref} + \delta x_1(t) \\ x_2(t) = x_{2e} + \delta x_2(t) = \delta x_2(t) \\ x_3(t) = x_{3e} + \delta x_3(t) = \delta x_3(t) \\ x_4(t) = x_{4e} + \delta x_4(t) = \delta x_4(t) \\ u(t) = u_{ref} + \delta u(t) = m \cdot g \cdot x_{ref} + \delta u(t) \end{cases}$$

Le linéarisé tangent autour de la position d'équilibre  $r_{ref} = 0$  est calculé :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1(t) = x_2(t) \\ \frac{d}{dt}x_2(t) = \frac{x_1(t) \cdot (x_4(t))^2 - g \cdot \sin(x_3)}{1+\sigma} \\ \frac{d}{dt}x_3(t) = x_4(t) \\ \frac{d}{dt}x_4(t) = \frac{u(t) - m \cdot g \cdot x_1(t) \cdot \cos(x_3(t)) - 2 \cdot m \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot x_4(t)}{J + m \cdot (x_1(t))^2} \end{cases} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\delta x_1(t) = \delta x_2(t) \\ \frac{d}{dt}\delta x_2(t) = \frac{\delta x_1(t) \cdot (\delta x_4(t))^2 - g \cdot \sin(\delta x_3)}{1+\sigma} \\ \frac{d}{dt}\delta x_3(t) = \delta x_4(t) \\ \frac{d}{dt}\delta x_4(t) = \frac{\delta u(t) - m \cdot g \cdot \delta x_1(t) \cdot \cos(\delta x_3(t)) - 2 \cdot m \cdot \delta x_1(t) \cdot \delta x_2(t) \cdot \delta x_4(t)}{J + m \cdot (\delta x_1(t))^2} \end{cases} \end{aligned}$$

On peut simplifier le système ci-dessus en considérant quelques approximations :

1. La multiplication de très petits nombres est approximativement nulle ;
2. Soit  $\delta\alpha$  un très petit angle,  $\cos(\delta\alpha) \approx 1$  et  $\sin(\delta\alpha) \approx \delta\alpha$ .

De cette façon, la linéarisation autout de l'équilibre  $r_{ref} = 0$  est :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{d}{dt}\delta x_1(t) = \delta x_2(t) \\ \frac{d}{dt}\delta x_2(t) = \frac{\delta x_1(t) \cdot (\delta x_4(t))^2 - g \cdot \sin(\delta x_3)}{1+\sigma} = \frac{-g \cdot \delta x_3}{1+\sigma} \\ \frac{d}{dt}\delta x_3(t) = \delta x_4(t) \\ \frac{d}{dt}\delta x_4(t) = \frac{\delta u(t) - m \cdot g \cdot \delta x_1(t) \cdot \cos(\delta x_3(t)) - 2 \cdot m \cdot \delta x_1(t) \cdot \delta x_2(t) \cdot \delta x_4(t)}{J + m \cdot (\delta x_1(t))^2} = \frac{\delta u(t) - m \cdot g \cdot \delta x_1(t)}{J} \end{cases} \\ & \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m \cdot g}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \cdot \delta u(t) \end{aligned}$$

## Q10

Pour calculer les valeurs propres (VP) du linéarisé tangent, il faut noter que c'est un système en boucle ouverte et le gain K est, alors, nul ( $K = 0$ ). Donc, les valeurs propres de  $A - BK$  sont obtenues par les racines du polynôme caractéristique défini par  $\det|A - \lambda I| = 0$  :

$$\det|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{-g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ \frac{-m \cdot g}{J} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \frac{m \cdot g^2}{J(1+\sigma)} = 0$$

$$\lambda^4 = \frac{m \cdot g^2}{J(1+\sigma)}$$

Comme on pose  $w = \sqrt[4]{\frac{m \cdot g^2}{(1+\sigma) \cdot J}}$  :

$$\lambda^4 - w^4 = 0 \rightarrow \lambda^4 = w^4$$

Comme ce polynôme caractéristique est quadratique, ses racines sont :  $w$ ,  $-w$ ,  $wi$  et  $-wi$ . Ces racines sont les valeurs propres du linéarisé en boucle ouverte en fonction de  $w$ .

Le système en boucle ouverte est stable, si toutes ses valeurs propres vérifient  $Re(\lambda) < 0$ , c'est-à-dire si tous les pôles sont situés dans le demi-plan négatif. Dans ce cas, il y a une valeur propre ( $w$ ) qui est dans le demi-plan positif ( $Re(w) > 0$ ). Par conséquent, le système en boucle ouverte est instable.

On peut vérifier numériquement les valeurs propres en boucle ouverte avec MATLAB. Le script pour calculer les valeurs propres est présenté ci-dessous :

```
% Paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

% Matrices du système
w = ((m*g^2)/((1+sigma)*J))^(1/4);

A = [0, 1, 0, 0;
     0, 0, -g/(1+sigma), 0;
     0, 0, 0, 1;
     -m*g/(J), 0, 0, 0];

B = [0;
     0;
     0;
     1/J];

% Calcul des valeurs propres du système en boucle ouverte
K = [0, 0, 0, 0];
VPs = eig(A - B*K);

% Mappage des valeurs propres
SYS = ss(A, B, zeros(4), [0; 0; 0; 0]);
pzmap(SYS)
```

FIGURE 13 – Script pour calculer les valeurs propres et afficher le mappage de ses valeurs.

La valeur de  $w$  calculée par MATLAB est :  $w = 6.3284$ . Donc, les valeurs propres obtenues avec MATLAB et leur mappage sont présentés ci-dessous :

```

VPs =

-6.3284 + 0.0000i
-0.0000 + 6.3284i
-0.0000 - 6.3284i
 6.3284 + 0.0000i

```

FIGURE 14 – Les valeurs propres calculées avec MATLAB.

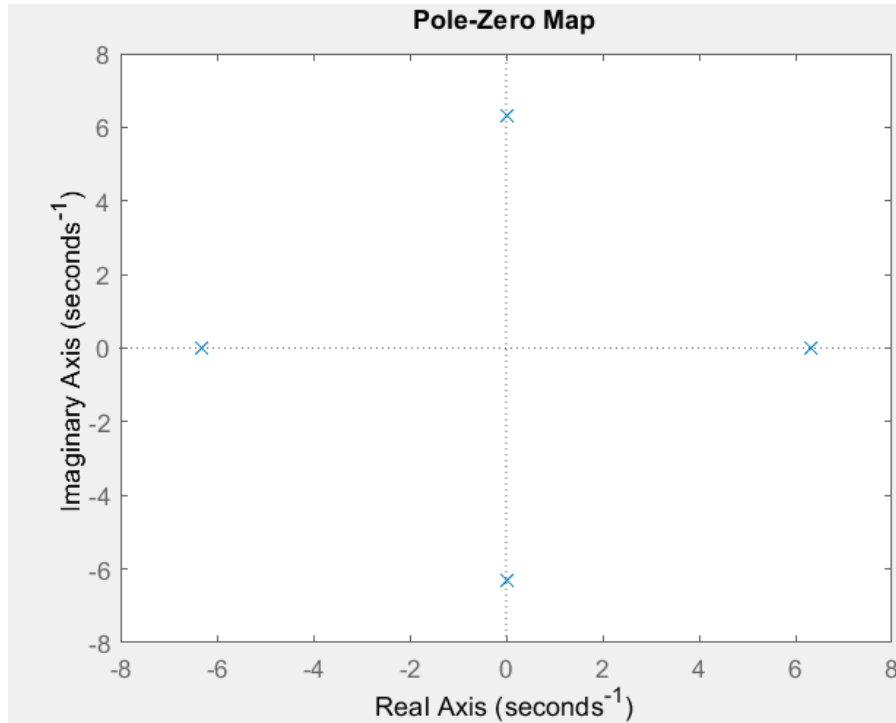


FIGURE 15 – Mappage des valeurs propres.

Comme on peut le voir ci-dessus, il y a une valeur propre de  $A - B.K$  dans le demi-plan positif ( $Re(w) > 0$ ). Donc, on vérifie que le système en boucle ouverte est instable.

## PARTIE 3 - Contrôleur

### Q11

Pour analyser si le linéarisé tangent est commandable, il faut calculer la matrice de commandabilité et vérifier si son rang est égal au nombre d'états. En autres termes, le système est commandable si et seulement si : la matrice  $C(A, B) = [B \ A.B \ \dots \ A^{n-1}.B]$  est de rang  $dim(x)$ . Soit  $n = dim(x) = 4$ , la matrice de commandabilité est calculée :

$$C(A, B) = [B \ A.B \ A^2.B \ A^3.B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-g}{J.(1+\sigma)} \\ 0 & 0 & \frac{-g}{J.(1+\sigma)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme on peut le voir dans la matrice de commandabilité ci-dessus, le rang de  $C(A, B)$  est égal à 4, la même valeur de  $\dim((x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)))$ . Ainsi, le linéarisé tangent est commandable.

Il est possible de vérifier le rang de la matrice de commandabilité avec MATLAB, tel qu'implémenté dans le script suivant :

```
% Paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

% Matrices du système
w = ((m*g^2)/((1+sigma)*J))^(1/4);

A = [0, 1, 0, 0;
     0, 0, -g/(1+sigma), 0;
     0, 0, 0, 1;
     -m*g/(J), 0, 0, 0];

B = [0;
     0;
     0;
     1/J];

% Matrice de commandabilité
C = [B, A*B, A*A*B, A*A*A*B];

% Rang de la matrice de commandabilité
rang = rank(C);
```

FIGURE 16 – Script pour calculer la matrice de commandabilité et son rang.

Avec le script ci-dessus, la matrice  $C(A, B)$  et son rang sont calculés. Comme on peut le voir ci-dessous, la matrice de commandabilité a en effet rang égal à 4 et le linéarisé tangent est, alors, commandable.

```
C =

      0      0      0 -272.5000
      0      0 -272.5000      0
      0  50.0000      0      0
  50.0000      0      0      0
```

FIGURE 17 – Matrice de commandabilité  $C(A, B)$ .

## Q12

Pour calculer le gain  $K$  il faut utiliser la fonction *place* de MATLAB qui permet de placer les valeurs propres de  $A - B.K$  sur les valeurs propres désirées (contenus dans le vecteur  $P$ ). Dans ce cas, on souhaite placer les valeurs propres en boucle fermée en  $-w$ ,  $-2.w$ ,  $-w + i.w$  et  $-w - i.w$ . Avec le nouveau gain  $K$ , les valeurs propres peuvent être calculées dans MATLAB.

Le script qui obtient le gain  $K$  et les valeurs propres en boucle fermée et leurs valeurs sont présentés ci-dessous :

```
% Paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

% Matrices du système
w = ((m*g^2)/((1+sigma)*J))^(1/4);

A = [0, 1, 0, 0;
     0, 0, -g/(1+sigma), 0;
     0, 0, 0, 1;
     -m*g/(J), 0, 0, 0];

B = [0;
     0;
     0;
     1/J];

% Calcul du gain K
P = [-w, -2*w, -w+1i*w, -w-1i*w];
K = place(A, B, P);

% Calcul des valeurs propres du système en boucle fermée
VPs = eig(A - B*K);
```

FIGURE 18 – Script pour calculer le gain  $K$  et les valeurs propres en boucle fermée.

```
K =

    -29.4300    -9.3009     8.0098     0.6328

VPs =

    -12.6569 + 0.0000i
    -6.3284 + 6.3284i
    -6.3284 - 6.3284i
    -6.3284 + 0.0000i
```

FIGURE 19 – Gain  $K$  et les valeurs propres en boucle fermée

Dans ce cas, toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan négatif. Donc, après placer les pôles en  $-w$ ,  $-2.w$ ,  $-w + i.w$  et  $-w - i.w$ , le système en boucle fermée est stable.

### Q13

Le modèle Simulink avec le retour d'état  $\delta u(t) = -K.\delta X(t)$  est illustré ci-dessous :

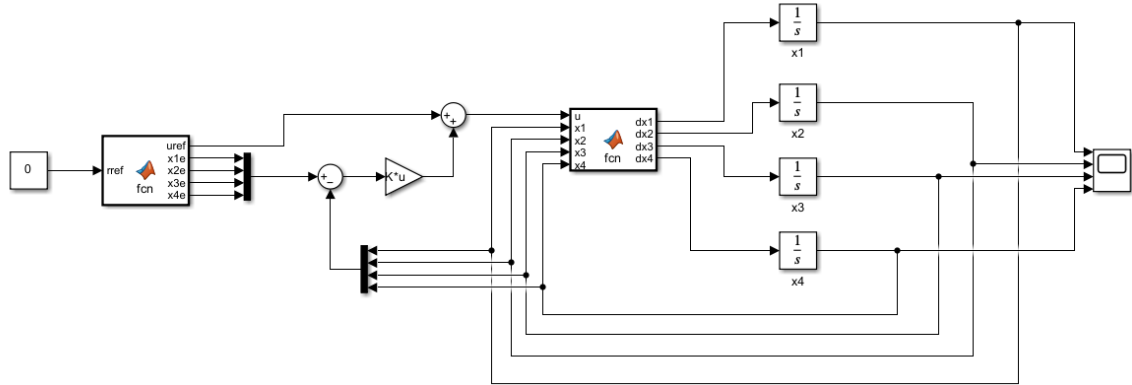


FIGURE 20 – Système dans Simulink MATLAB.

On peut vérifier que le retour d'état permet bien de stabiliser la balle sur la position  $r_{ref} = 0$ , mais seulement avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre. Sinon, le linéarisé tangent ne reste pas une approximation valable et, ainsi, les trajectoires divergent.

Dans ce cas, la balle a une vitesse initiale proche du point de référence  $x_2(t) = 0.1$  et le système est stable grâce au retour d'état qui permet de stabiliser la balle :

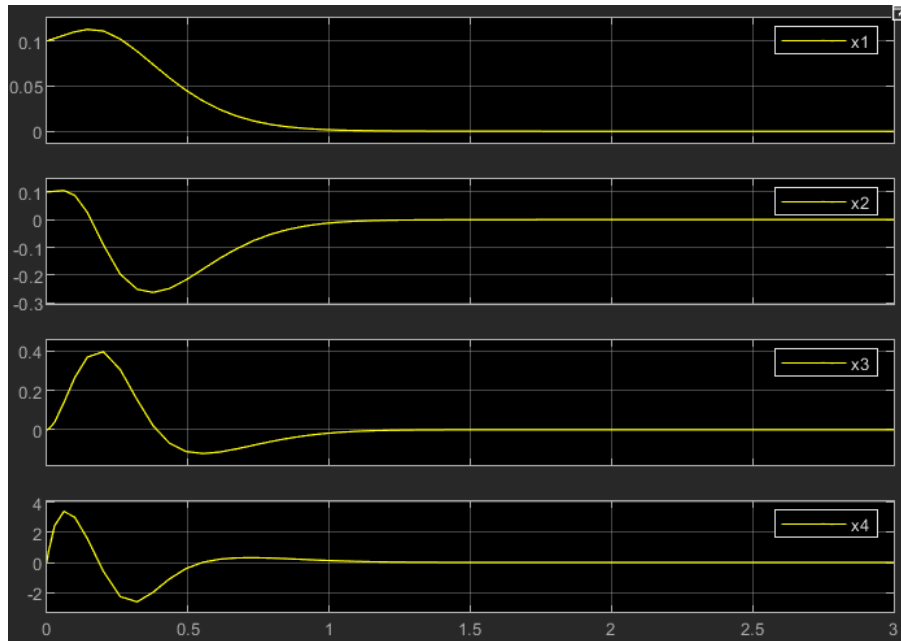


FIGURE 21 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

Dans cet autre cas, la vitesse initiale de la balle est bien supérieure à la vitesse d'équilibre. Donc, le système est instable même avec le retour d'état et les trajectoires divergent. Si la vitesse initiale de la balle est  $0.5m.s^{-1}$ , le système est encore stable. Cependant, si elle est  $0.6m.s^{-1}$ , le système n'est plus stable :



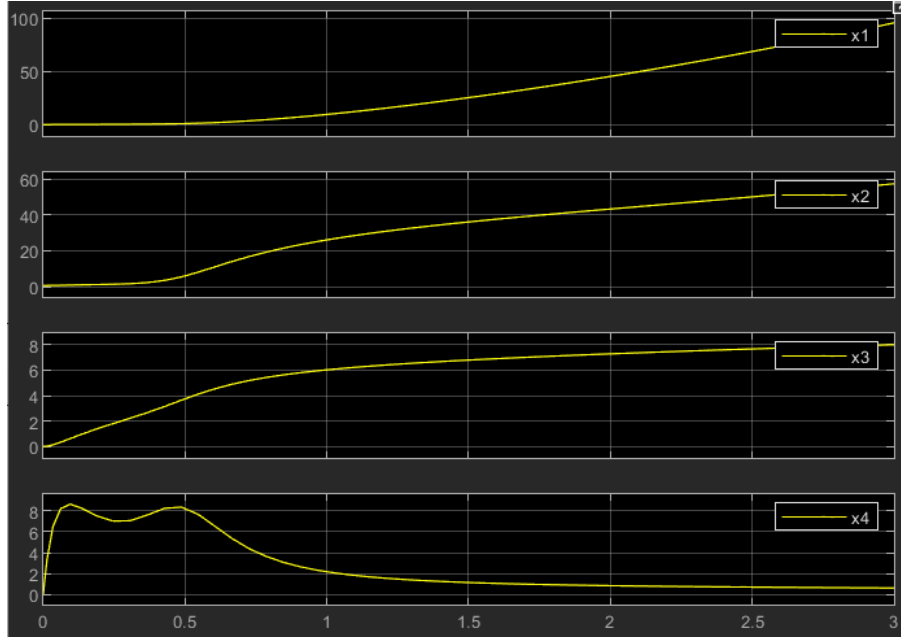


FIGURE 22 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.6, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

La position initiale, à son tour, n'a pas besoin d'être beaucoup plus grand que la position d'équilibre. Avec une position initiale  $x_1(0) = 0.28m$ , le système est déjà instable :

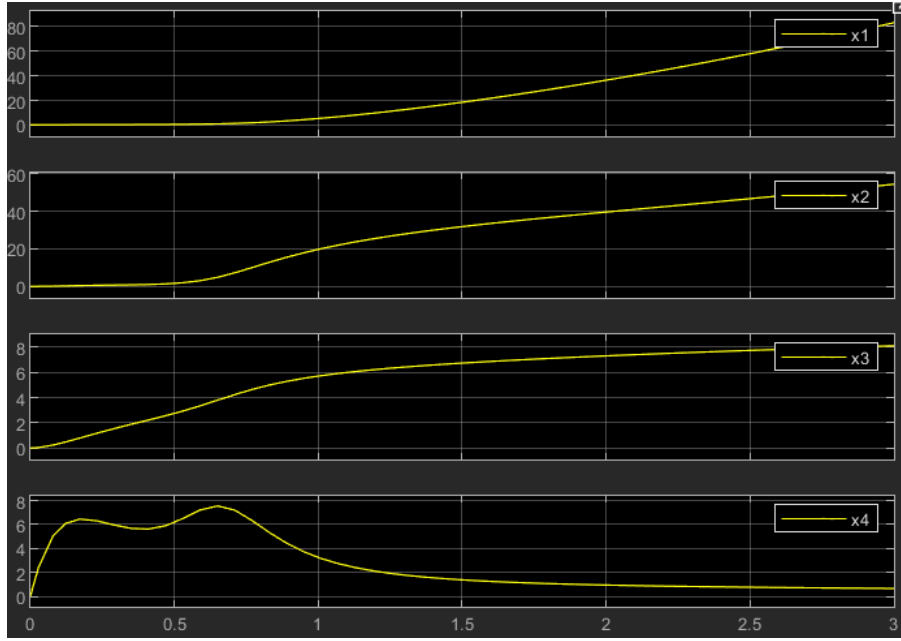


FIGURE 23 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.28, 0, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

## Q14

On cherche une commande  $u(t)$  qui minimise le critère quadratique  $J_{LQ}$  :

$$J_{LQ} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty ((\delta x_1(t))^2 + (\delta x_2(t))^2 + (\delta x_3(t))^2 + (\delta x_4(t))^2 + (\delta u(t))^2) dt$$

Ce critère peut s'écrire sous la forme matricielle. Soit :

$$\begin{aligned}
& (\delta x_1(t))^2 + (\delta x_2(t))^2 + (\delta x_3(t))^2 + (\delta x_4(t))^2 = \\
& = \begin{pmatrix} \delta x_1(t) & \delta x_2(t) & \delta x_3(t) & \delta x_4(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \\ \delta x_3(t) \\ \delta x_4(t) \end{pmatrix} = \delta X^T(t) \cdot R \cdot \delta X(t) \\
& (\delta u(t))^2 = (\delta u(t)) \cdot (1) \cdot (\delta u(t)) = \delta u(t) \cdot Q \cdot \delta u(t)
\end{aligned}$$

La forme matricielle est :

$$J_{LQ} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty (\delta X^T(t) \cdot R \cdot \delta X(t) + \delta u(t) \cdot Q \cdot \delta u(t)) dt$$

où les matrices R et Q sont :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = (1)$$

Sachant que le linéarisé tangent est commandable, ce problème de commande optimale admet une solution, parce les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. R est symétrique positive ;
2. Q est symétrique définie positive.

De cette façon, le commande  $u(t)$  stabilise le système et minimise le critère quadratique  $J_{LQ}$  :

$$u(t) = -K \cdot X(t)$$

Le gain optimal  $K$  est défini par l'équation suivante :

$$K = Q^{-1} \cdot B^T \cdot S$$

où  $S$  est l'unique solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati algébrique :

$$S \cdot A + A^T \cdot S - S \cdot B \cdot Q^{-1} \cdot B^T \cdot S + R = 0$$

## Q15

On peut calculer dans MATLAB le gain optimal  $K$  qui minimise le critère  $J_{LQ}$  à l'aide de la fonction *lqr*. Le script MATLAB est présenté ci-dessous :

```

% Paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

% Matrices du système
w = ((m*g^2)/((1+sigma)*J))^(1/4);

A = [0, 1, 0, 0;
     0, 0, -g/(1+sigma), 0;
     0, 0, 0, 1;
     -m*g/(J), 0, 0, 0];

B = [0;
     0;
     0;
     1/J];

R = eye(4);
Q = eye(1);

% Calcul gain optimal K qui minimise le critère JIQ
K = lqr(A, B, R, Q, zeros(4,1));

% Calcul des valeurs propres du système en boucle fermée
VPs = eig(A - B*K);

% Mappage des valeurs propres
SYS = ss(A-B*K, B, zeros(4), [0; 0; 0; 0]);
pzmap(SYS)

```

FIGURE 24 – Script pour calculer le gain optimal K avec la fonction *lqr* et les valeurs propres en boucle fermée.

Les résultats obtenus sont :

```

K =

    -11.8563    -4.0213     6.9244     1.1300

VPs =

-50.0029 + 0.0000i
-1.7369 + 2.7820i
-1.7369 - 2.7820i
-3.0249 + 0.0000i

```

FIGURE 25 – Gain optimal K et les valeurs propres en boucle fermée.

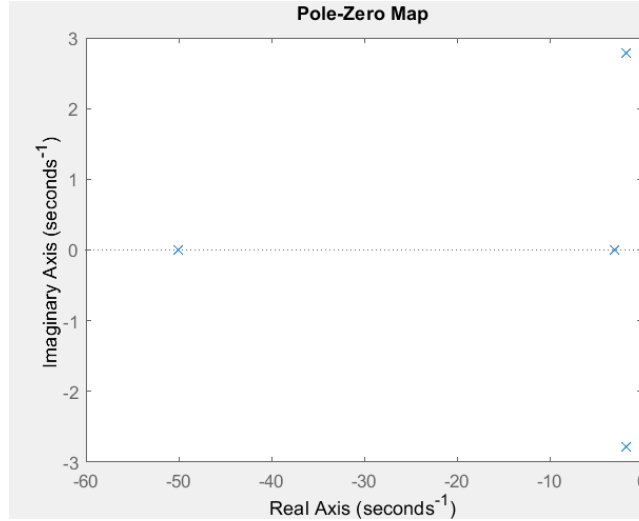


FIGURE 26 – Mappage des valeurs propres.

Comme on peut le voir ci-dessus, toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan négatif. Donc, le système est stable.

## Q16

Le modèle Simulink avec le retour d'état  $\delta u(t) = -K \cdot \delta X(t)$  qui minimise le critère  $J_{LQ}$  est le même illustré sur la Figure 20. On peut vérifier que le retour d'état permet bien de stabiliser la balle sur la position  $r_{ref} = 0$ , mais seulement avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre. Sinon, le linéarisé tangent ne reste pas une approximation valable et, ainsi, les trajectoires divergent.

On simule le système avec une vitesse initiale proche du point de référence  $x_2(t) = 0.1$  et on vérifie que le système est stable grâce au retour d'état qui permet de stabiliser la balle :

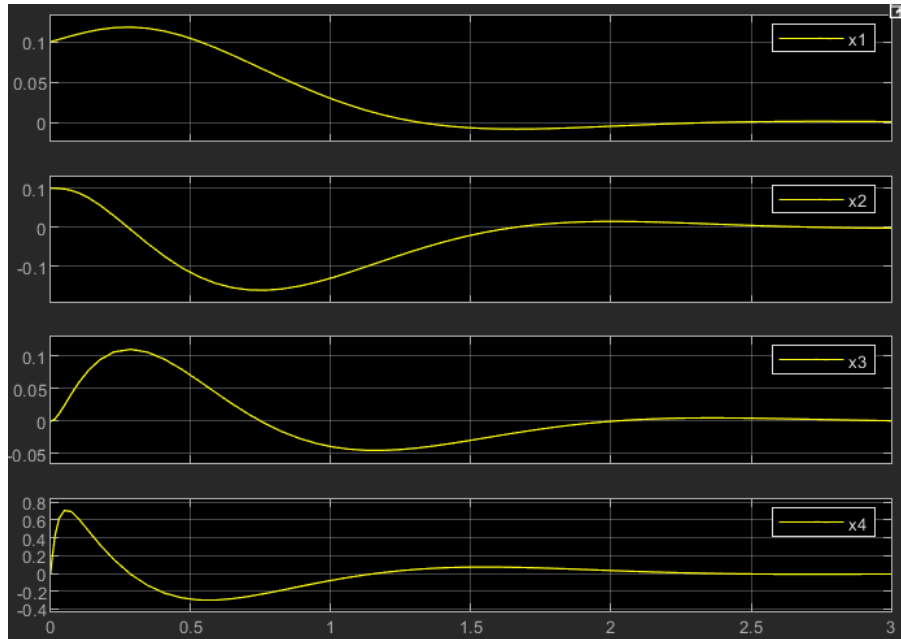


FIGURE 27 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

Quand la vitesse initiale de la balle est bien supérieure à la vitesse d'équilibre, le système est instable même avec le retour d'état qui minimise le critère  $J_{LQ}$ . Si la vitesse initiale de la balle est  $1.7m.s^{-1}$ , le système est encore stable. Cependant, si elle est  $1.8m.s^{-1}$ , le système n'est plus stable :

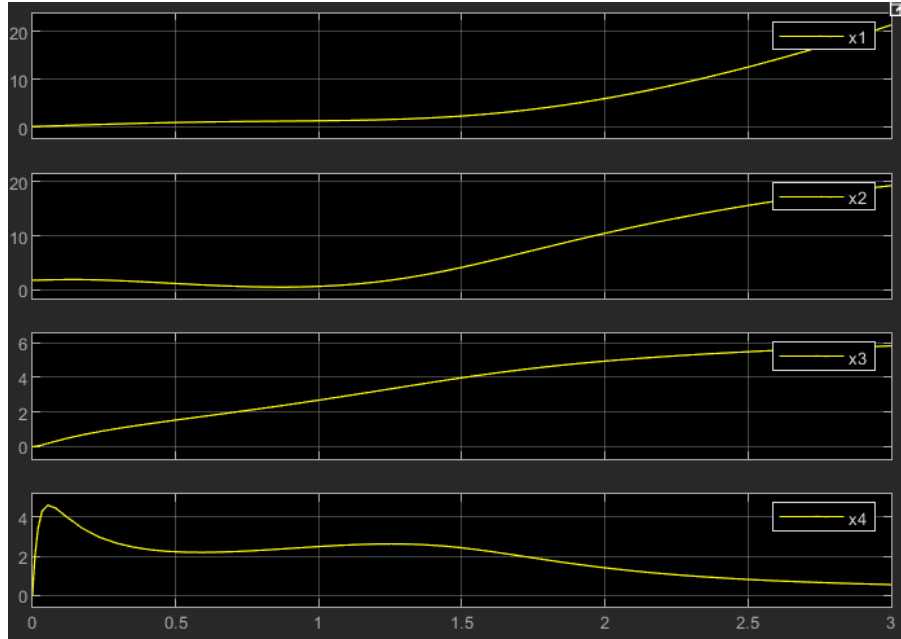


FIGURE 28 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 1.8, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

Quand la position initiale, à son tour, est égal à  $x_1(0) = 1.2m$ , le système est déjà instable :

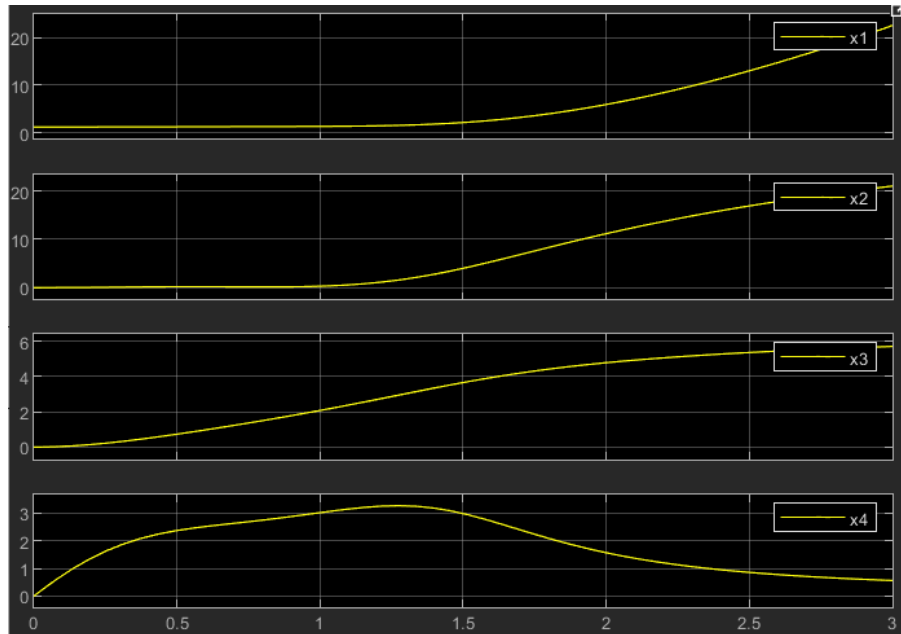


FIGURE 29 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (1.2, 0, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

## Q17

En comparant les résultats des deux méthodes présentées en Q13 et Q16, il es possible d'analyser certaines différences.

Avec le méthode dont le retour d'état minimise le critère  $J_{LQ}$ , il est possible d'augmenter la vitesse initiale et la position initiale plus que l'autre méthode. Par exemple, le système, dont le gain  $K$  place les valeurs propres en boucle fermée, est instable quand la vitesse initiale est  $x_2(0) = 0.6m.s^{-1}$  (Figure 22). Par contre, le système, dont le retour d'état minimise le critère  $J_{LQ}$ , devient instable seulement quand la vitesse est supérieure ou égale à  $x_2(0) = 1.8m.s^{-1}$  (Figure 28).

Par ailleurs, le système de la question Q13 devient instable quand la position initiale est  $x_1(0) = 0.28m$  (Figure 23). En revanche, le système de la question Q16 devient instable quand la position initiale est seulement  $x_1(0) = 1.2m$  (Figure 29).

Une autre différence est le temps de stabilisation. Le système se stabilise plus rapidement avec le méthode par déplacement des pôles qu'avec la méthode qui minimise le critère  $J_{LQ}$ . On peut voir cette différence sur les images suivantes :

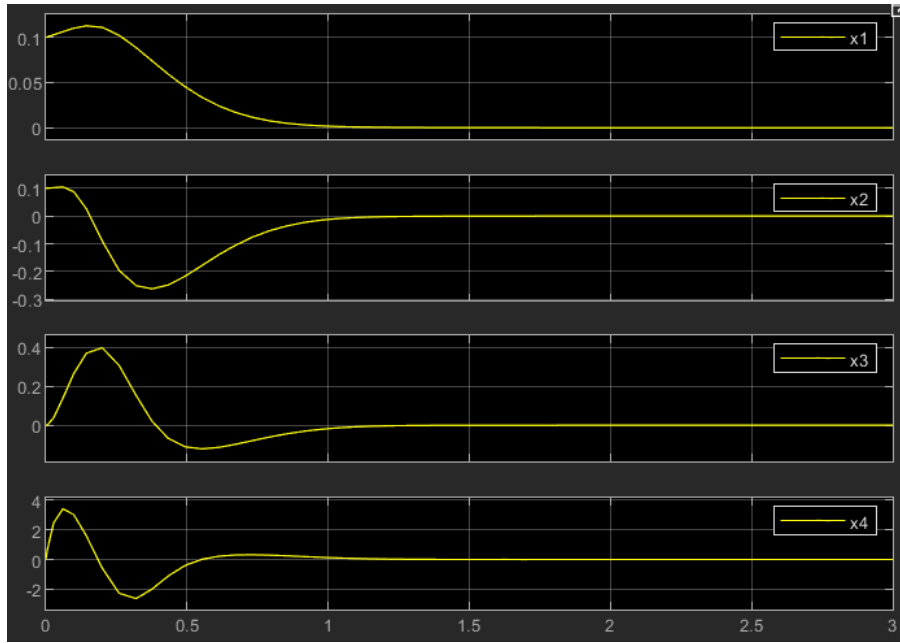


FIGURE 30 – Le méthode par déplacement des pôles. Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

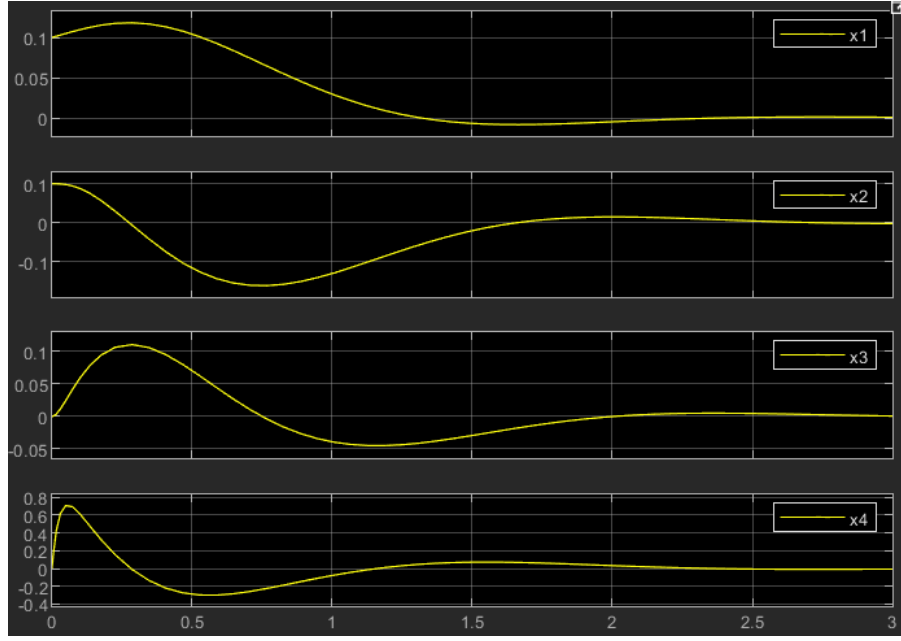


FIGURE 31 – Le méthode dont le gain optimale qui minise le critère  $J_{LQ}$ . Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

Comme on peut le voir sur les figures ci-dessus, le système se stabilise avec la méthode par déplacement des pôles au temps  $t = 1s$  (Figure 30). Avec le méthode qui minimise le critère  $J_{LQ}$ , il faut environ  $2s$  pour que le système se stabilise (Figure 31).

## PARTIE 4 - Observateur

### Q18

Comme obtenu à la question Q9, le linéarisé tangent autout de la position d'équilibre  $r_{ref} = 0$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m \cdot g}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \cdot \delta u(t)$$

On pose :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

Une autre façon de représenter la mesure Y est sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

Le linéarisé tangent du système avec mesure autout de la position  $r_{ref} = 0$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m.g}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} \cdot \delta u(t) \\ \\ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

## Q19

Pour analyser si le linéarisé tangent est observable, il faut calculer la matrice de observabilité et vérifier si son rang est égal au nombre d'états. En autres termes, le système est observable

si et seulement si la matrice  $O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ \dots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix}$  est de rang  $\dim(x)$ . Soit  $n = \dim(x) = 4$ , la matrice de observabilité est calculée :

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \\ C.A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{1+\sigma} & 0 \\ \frac{-m.g}{J} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-g}{1+\sigma} \\ 0 & \frac{-m.g}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme on peut le voir dans la matrice de observabilité ci-dessus, le rang de  $O(A, C)$  est égal à 4, la même valeur de  $\dim((x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)))$ . Ainsi, le linéarisé tangent est observable.

Il est possible de vérifier le rang de la matrice de observabilité avec MATLAB, tel qu'implémenté dans le script suivant :



```

% Paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

% Matrices du système
w = ((m*g^2)/((1+sigma)*J))^(1/4);

A = [0, 1, 0, 0;
     0, 0, -g/(1+sigma), 0;
     0, 0, 0, 1;
     -m*g/(J), 0, 0, 0];

B = [0;
     0;
     0;
     1/J];

R = eye(4);
Q = eye(1);

C = [1, 0, 0, 0;
     0, 0, 1, 0];

% Matrice de observabilité
O = [C;
     C*A;
     C*A*A;
     C*A*A*A];

% Rang de la matrice de observabilité
rang = rank(O);

```

FIGURE 32 – Script pour calculer la matrice de observabilité et son rang.

Avec le script ci-dessus, la matrice  $O(A, C)$  et son rang sont calculés. Comme on peut le voir ci-dessous, la matrice de observabilité a en effet rang égal à 4 et le linéarisé tangent est, alors, observable.

```

O =

    1.0000         0         0         0
         0         0    1.0000         0
         0    1.0000         0         0
         0         0         0    1.0000
         0         0   -5.4500         0
   -294.3000         0         0         0
         0         0         0   -5.4500
         0  -294.3000         0         0

rang =

    4

```

FIGURE 33 – Matrice de observabilité  $O(A, C)$  et son rang.

## Q20

Comme le système est observable, on peut choisir librement les valeurs propres de l'observateur :

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = A.\hat{X}(t) + B.u(t) + L.(Y(t) - C.\hat{X}(t))$$

Soit  $\hat{X}(t)$  l'état estimé et  $L$  le gain de l'observateur choisi judicieusement,  $A.\hat{X}(t) + B.u(t)$  est la prédiction du observateur lorsque  $L.(Y(t) - C.\hat{X}(t))$  est la correction du observateur. Les équations de l'observateur asymptotique permettant d'estimer l'état  $X(t)$  à partir de la mesure  $Y(t)$  et la commande  $u(t)$  sont :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{1+\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m.g}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} l_1 & l_5 \\ l_2 & l_6 \\ l_3 & l_7 \\ l_4 & l_8 \end{pmatrix} \left( y_1(t) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{pmatrix} \right)$$

## Q21

L'erreur d'estimation est  $E(t) = \hat{X}(t) - X(t)$ , donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= \frac{d}{dt}\hat{X}(t) - \frac{d}{dt}X(t) \\ \frac{d}{dt}E(t) &= (A.\hat{X}(t) + B.u(t) + L.(Y - C.\hat{X}(t))) - (A.X(t) + B.u(t)) \\ \frac{d}{dt}E(t) &= A.(\hat{X}(t) - X(t)) + L.C.(X(t) - \hat{X}(t)) \\ \frac{d}{dt}E(t) &= (A - L.C).E(t) \end{aligned}$$

Comme le système est observable, on peut choisir  $L$  de sorte à placer les valeurs propres de  $A - L.C$ , et en particulier des valeurs propres à partie réelle strictement négative afin que l'erreur d'estimation tende vers 0.

Pour calculer le gain  $L$  il faut utiliser la fonction *place* de MATLAB qui permet de placer les valeurs propres de  $A - L.C$  sur les valeurs propres désirées (contenus dans le vecteur  $P$ ). Dans ce cas, on souhaite placer les valeurs propres en boucle fermée en  $-w$ ,  $-3.w$ ,  $-2w + i.w$  et  $-2w - i.w$ . Avec le nouveau gain  $L$ , les valeurs propres peuvent être calculées dans MATLAB.

Le script qui obtient le gain  $L$  et les valeurs propres en boucle fermée et leurs valeurs sont présentés ci-dessous :

```

% Paramètres du système
J = 0.02;
m = 0.6;
sigma = 0.8;
g = 9.81;

% Matrices du système
w = ((m*g^2)/((1+sigma)*J))^(1/4);

A = [0, 1, 0, 0;
     0, 0, -g/(1+sigma), 0;
     0, 0, 0, 1;
     -m*g/(J), 0, 0, 0];

B = [0;
     0;
     0;
     1/J];

R = eye(4);
Q = eye(1);

C = [1, 0, 0, 0;
     0, 0, 1, 0];

% Calcul du gain L
P = [-w, -3*w, -2*w+1i*w, -2*w-1i*w];
L = place(A', C', P)';

% Calcul des valeurs propres du système en boucle fermée
VPs = eig(A - L*C);

```

FIGURE 34 – Script pour calculer le gain L et les valeurs propres en boucle fermée.

```

L =

    25.4167    0.1097
   132.6992    6.2693
    -0.2233   25.2109
   -222.1136   187.6802

VPs =

   -18.9853 + 0.0000i
   -12.6569 + 6.3284i
   -12.6569 - 6.3284i
    -6.3284 + 0.0000i

```

FIGURE 35 – Gain L et les valeurs propres en boucle fermée

Dans ce cas, toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan négatif. Donc, après placer les pôles en  $-w$ ,  $-2.w$ ,  $-w + i.w$  et  $-w - i.w$ , le système en boucle fermée est stable.

## Q22

Le modèle Simulink avec l'observateur est illustré ci-dessous :

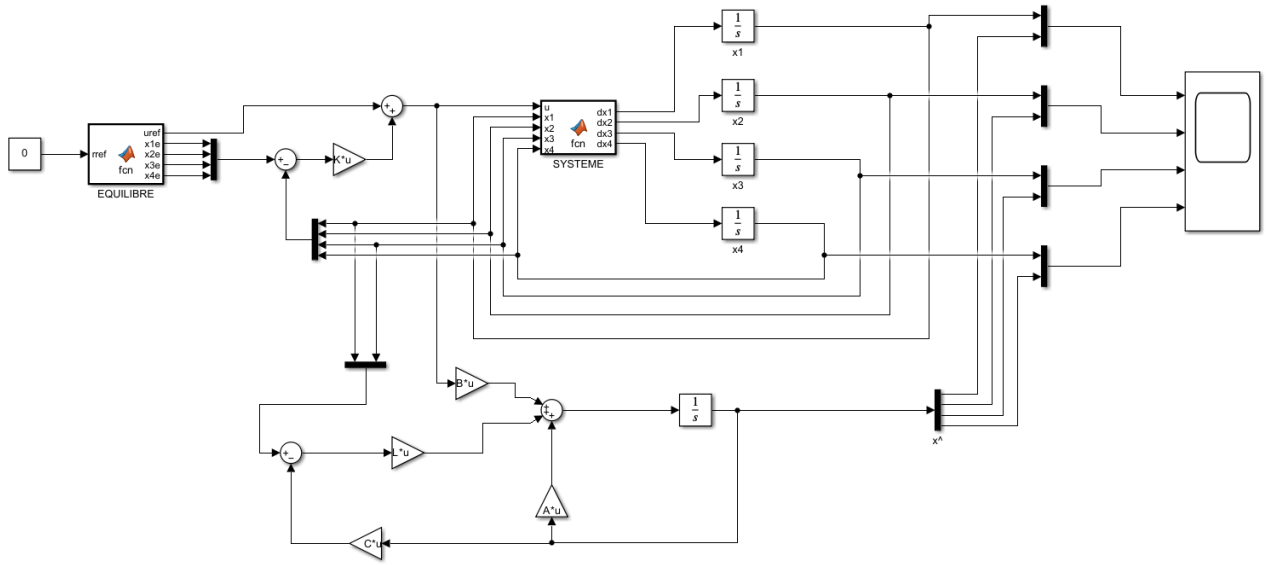


FIGURE 36 – Système dans Simulink MATLAB.

On peut vérifier que le retour d'état permet bien de stabiliser la balle sur la position  $r_{ref} = 0$ , mais seulement avec un état initial suffisamment proche de l'équilibre. Sinon, le linéarisé tangent ne reste pas une approximation valable et, ainsi, les trajectoires divergent.

On simule le système avec une vitesse initiale proche du point de référence  $x_2(t) = 0.1$  et on vérifie que le système est stable :

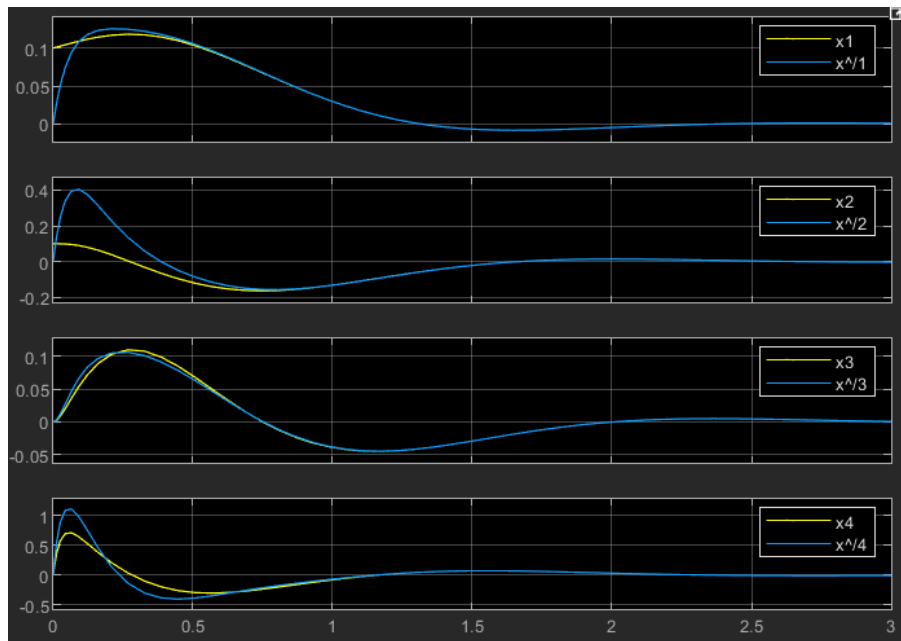


FIGURE 37 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

Comme on peut le voir ci-dessus, au début, les états estimés  $\hat{X}$  sont différents par rapport les états  $X$ , mais après, ils se stabilisent. Il faut alors utiliser l'état estimé par l'observateur dans le retour d'état.

## PARTIE 5 - Observateur-contrôleur

### Q23

Pour utiliser l'état estimé par l'observateur, on applique le retour d'état dans la loi de commande comme suivante :

$$u(t) = u_{ref} - K \cdot (\hat{X}(t) - X_{ref})$$

Bien que le système se stabilise plus rapidement avec la méthode par déplacement de pôles, j'ai choisi le gain  $K$  en minimisant le critère  $J_{LQ}$ , parce qu'il sera alors possible d'augmenter les valeurs initiales sans déstabiliser le système. Il faut noter que la condition initiale du observateur doit être différente de celle du système.

Le modèle Simulink avec l'observateur-contrôleur est illustré ci-dessous :

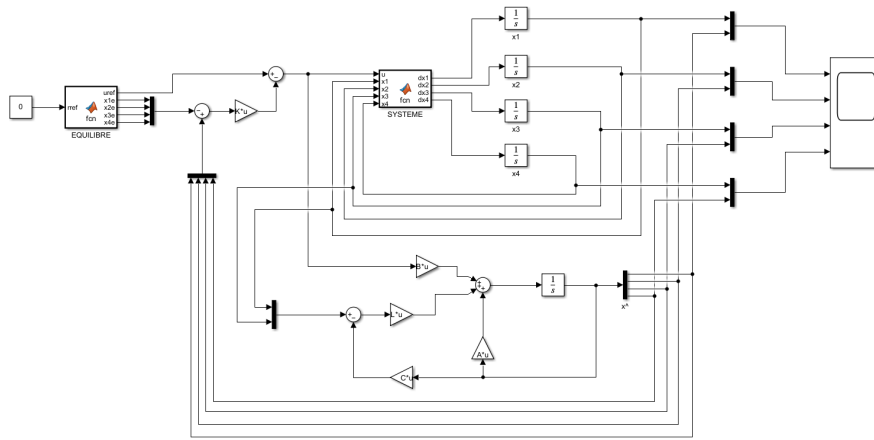


FIGURE 38 – Système dans Simulink MATLAB.

On simule le système avec différentes valeurs initiales et on vérifie que le système est stable. Par contre, l'état initial doit être suffisamment proche de l'équilibre :

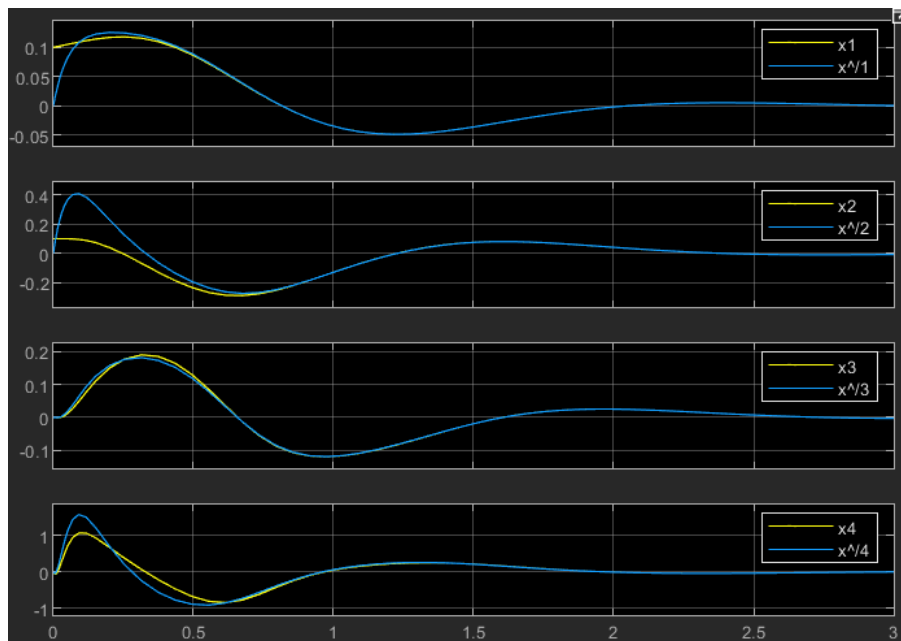


FIGURE 39 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.1, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

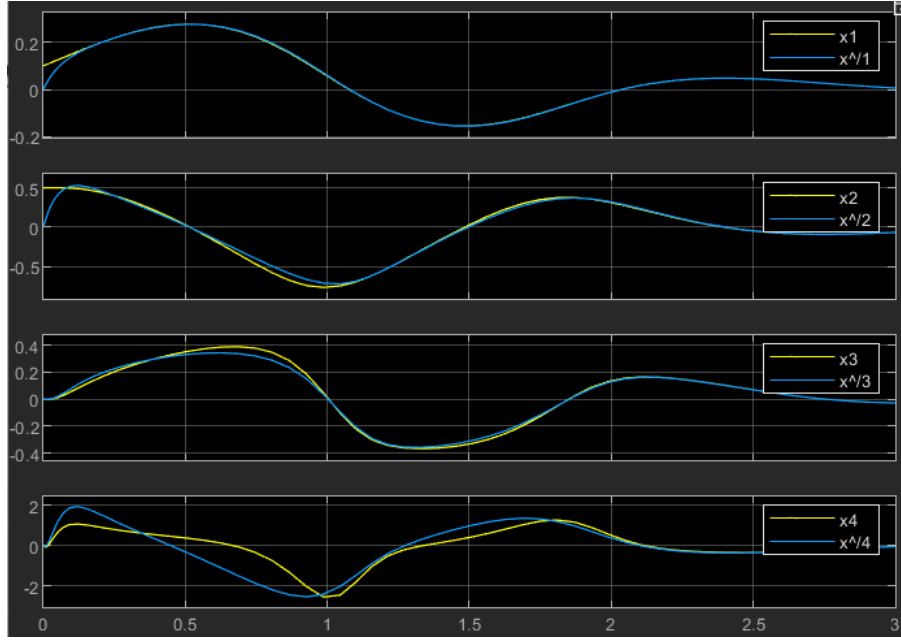


FIGURE 40 – Les états du système dynamique pour la condition initial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (0.1, 0.5, 0, 0)$  et  $r_{ref} = 0$ .

## Q24

Jusqu'à ce moment, on considère seulement une position de référence nulle. On souhaite maintenant stabiliser la balle sur une position non nulle ( $r_{ref} \neq 0$ ) qui doit être suffisamment proche de l'équilibre pour que le linéarisé tangent reste une approximation valable.

Comme on peut le voir ci-dessous, l'observateur-contrôleur permet bien d'estimer l'état et de stabiliser la balle sur la position de référence :

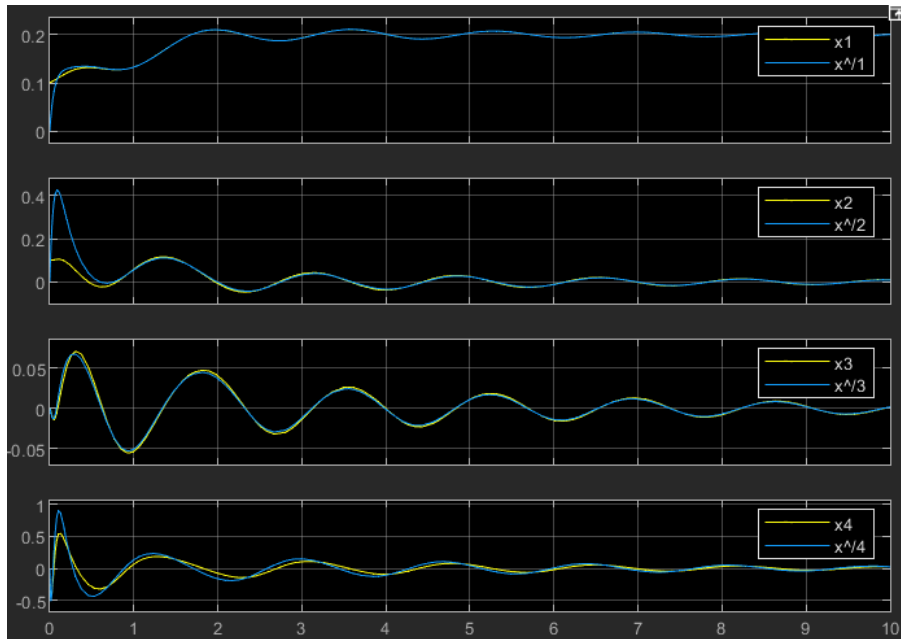


FIGURE 41 – Les états du système dynamique pour la position de référence égal à  $r_{ref} = 2$ .

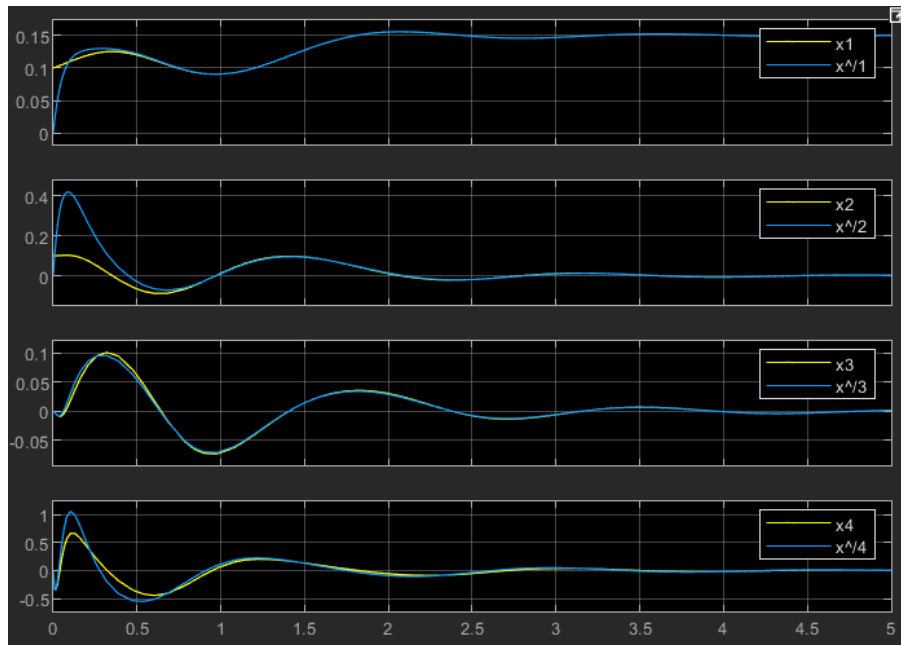


FIGURE 42 – Les états du système dynamique pour la position de référence égal à  $r_{ref} = 1, 5$ .

## Q25

Lorsque la balle s'éloigne significativement de la position  $r_{ref} = 0$ , l'observateur-contrôleur n'est plus performant.

Lorsque la balle s'éloigne de  $r_{ref} = 0$ , la position de la balle oscille :

1. quand  $r_{ref}$  est plus grand que le linéarisé tangent, le linéarisé, ce dernier se rapproche de la position.
2. par contre, le linéarisé tangent dépasse la position de référence et devient plus grand qu'elle. Ainsi, le linéarisé tangent diminue pour se rapprocher de la position. Cependant, il la dépasse et redevient plus petit que lui, répétant ainsi le comportement de l'item 1.

Ce comportement oscillatoire est illustré dans la figure suivante :

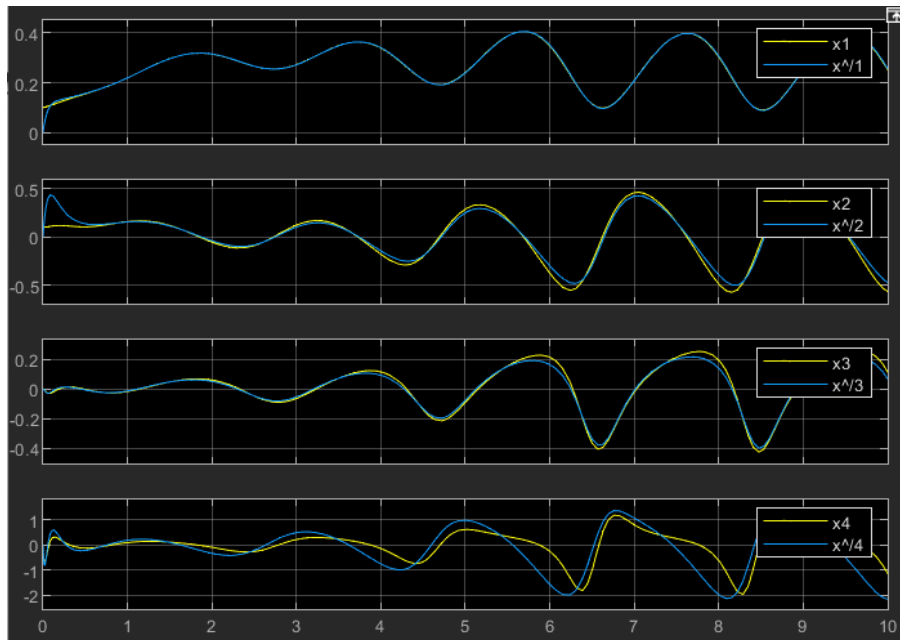


FIGURE 43 – Comportement oscillatoire des états du système dynamique.

En revanche, si la balle s'éloigne trop de la position  $r_{ref} = 0$ , les états n'ont pas cette caractéristique oscillatoire et les trajectoires divergent :

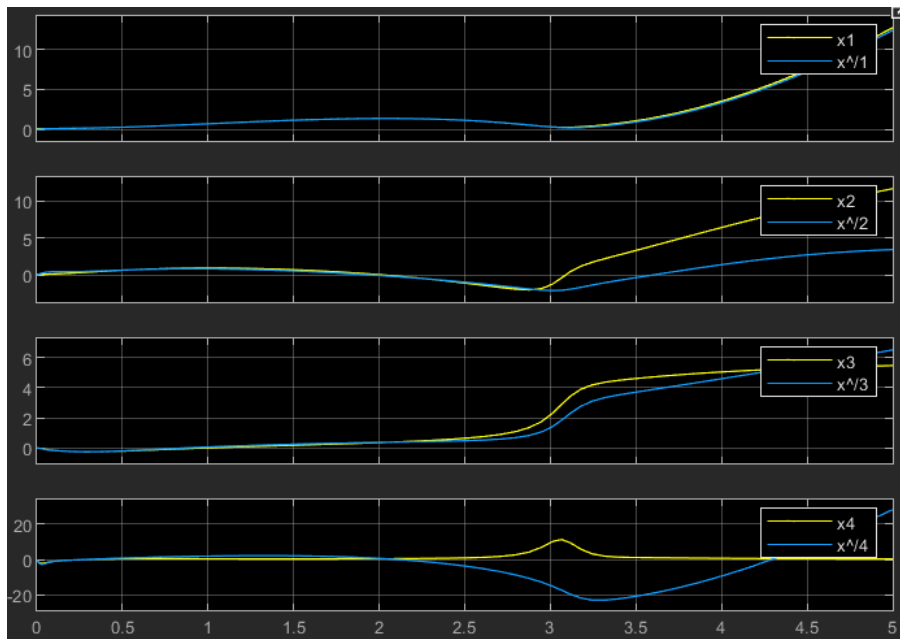


FIGURE 44 – Les trajectoires divergent pour une position de référence plus grand que  $r_{ref} = 0$ .