Projet 1 : Poursuite de cible par filtre de Kalman Étendu

On considère ici le problème de pistage par des moyens de type radar ou sonar d'objets d'intérêt (cibles) évoluant dans un plan vertical.

Description du probléme

Un dispositif de poursuite (radar, sonar etc...), dont la position est fixe et connue, mesure à des instants discrets $t = kT$, T période de mesure connue également, la distance qui le sépare de la cible ainsi que l'angle (site) que fait la direction de la droite cible - radar avec l'horizontale locale.
Ces mesures, notées par la suite D_k et α_k, sont entachées d'erreurs additives modélisées par des bruits blancs centrés $n_D(k)$ et $n_s(k)$ de variances $\sigma_D^2(k)$ et $\sigma_s^2(k)$ à l'instant kT. Ces bruits sont supposés indépendants.
Le problème est d'estimer à chaque instant la position $(x(t), y(t))$ de la cible à l'aide de ces mesures.
On se place dans un repère (O, x, y) du plan, le dispositif de poursuite est fixe en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et la cible se déplace dans le plan x,y. Sa position dans le plan est donc entièrement définie à chaque instant par le couple $x(t), y(t)$. Nous allons dans un premier temps établir les équations dynamiques de l'état de la cible qui seront utilisées dans les filtres.
Exercice 1 Équation de la dynamique de l'état

On suppose que la fréquence d'échantillonnage du radar ou du sonar est suffisamment faible pour qu'entre deux instants de mesure kT et $(k+1)T$ l'accélération de la cible soit constante et vaille $a(k) = (a_x(k), a_y(k))$.

L'accélération $a(k)$ sera modélisée par la somme de l'accélération de gravité et d'un processus stochastique. La gravité est supposée constante, de module égal à $g = 9.81$ et orientée suivant y négativement vers le bas. La composante stochastique est constituée de deux composantes a_x suivant x et a_y suivant y qui sont supposées indépendantes. et les caractéristiques de corrélation traduisent le comportement de la cible. Pour modéliser le fait qu'une cible qui accélère à l'instant kT accélérera probablement à l'instant $(k+1)T$ on introduit la matrice de corrélation suivante entre les composantes successives des accélérations : $r_x(\ell) = \mathrm{E}[a_x(k)a_x(k+\ell)] = \sigma_a^2 \exp -\mu\ell$, $r_y(\ell) = \mathrm{E}[a_y(k)a_y(k+\ell)] = \sigma_a^2 \exp -\mu\ell$ où μ caractérise la rapidité de la manoeuvre alors que σ_a^2 caractérise l'intensité de l'accélération durant la manoeuvre.

1. Montrer qu'un tel processus $a(k)$ peut être mis sous la forme : $a_x(k+1) = \beta a_x(k) + w_x(k)$, $a_y(k+1) = \beta a_y(k) + w_y(k)$ où $w_x(k)$, $w_y(k)$ sont les composantes d'un vecteur bruit blanc stationnaire d'ordre 2, centré, de variance σ_w^2 . Exprimer β et σ_w^2 en fonction de μ et σ_a^2 (on raisonnera composante par composante).
2. Écrire les lois d'évolution de $x(t), y(t)$ et de $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ entre les instants kT et $(k+1)T$. En déduire l'équation de la dynamique de l'état défini par $X(k) = [x(kT), y(kT), \dot{x}(kT), \dot{y}(kT), \ddot{x}(kT), \ddot{y}(kT)]^t$ sous la forme : $X(k+1) = F_k X(k) + G_k u(k)$

   On explicitera les matrices F_k, G_k et les caractéristiques du bruit d'état $u(k)$.
3. Le vecteur de mesures (D_k, α_k) à l'instant t, distance entre la cible et le radar et angle entre la droite cible -radar et l'horizontale, peut s'exprimer en fonction des positions $(x(t), y(t)$ et (x_0, y_0) de la cible et du dispositif d'observation. Écrire l'équation d'observation associée.
4. Construction des pseudos mesures : On considère ici une transformation des mesures permettant de les transformer sous une forme plus proche de l'état que l'on cherche à estimer. Soient $\tilde{x}(k) = D_k \cos \alpha_k$ et $\tilde{y}(k) = D_k \sin \alpha_k$ où D_k et α_k sont les mesures bruitées à l'instant k. Montrer que les hypothèses de bruit gaussien sur les mesures D_k et α_k ne permettent pas d'assurer que les pseudo-mesures peuvent être modélisées sous la forme d'une somme d'une fonction de l'état et de bruits gaussiens.

Exercice 2 Estimation par Filtre de Kalman

1. Ecrire les équations du filtre de Kalman simple correspondant aux équations dynamiques de l'état et l'équation d'observation correspondant aux pseudo-mesures
2. Suggérer un moyen de déterminer les matrices de covariances associées aux pseudo-mesures
3. Implémenter l'algorithme résultant sous matlab

Exercice 3 Filtre de Kalman étendu On parle de Filtre de Kalman étendu lorsque les équations de la dynamique et / ou d'observation sont des versions linéarisées des équations de départ autour de l'estimation courante de $X(k) = [x(kT), y(kT), \dot{x}(kT), \dot{y}(kT), \ddot{x}(kT), \ddot{y}(kT)]^t$ à l'instant k, $\hat{X}(k|k-1)$.

1. Écrire l'équation d'observation linéarisée autour de $\hat{X}(k|k-1)$ sous la forme $z_k = H_k X(k) + b(k)$ en exprimant H_k et $b(k)$ à l'aide de $\hat{X}(k|k-1)$, des bruits de mesure $n_D(k)$ et $n_{si}(k)$, $b(k)$ est-il centré ?

2. Comment modifier les équations du filtre de Kalman pour tenir compte d'un bruit de mesure non centré ?
3. En déduire les équations du filtre de Kalman correspondant à ce modèle linéarisé, en faisant apparaître les paramètres nécessaires à l'initialisation et au fonctionnement du filtre d'une récurrence à l'autre.
4. En pratique, il est très courant d'initialiser un filtre de Kalman avec $X_0 = 0$ et $P_0 = \lambda I$, avec λ *grand* de manière à traduire notre incertitude sur cet état initial. On démarre le filtre et au bout de quelques récurrences, grâce aux observations, la covariance diminue considérablement traduisant la plus grande confiance que l'on peut accorder à l'estimation de l'état. Que se passe-t-il dans le cas du filtre étendu considéré ? Expliquer ce phénomène.
5. Implémenter l'algorithme résultant sous matlab

Exercice 4 Filtrage probabiliste Dans la pratique, le capteur ne collecte pas un seul vecteur de mesures provenant de la cible mais un ensemble d'échos qui peuvent provenir effectivement de la cible mais également d'échos sur des objets proches (mais sans intérêt) d'interférence électromagnétique, d'anomalies acoustiques voire de fausses alarmes. Il est donc nécessaire d'instaurer une procédure permettant d'effectuer une sélection a priori parmi ces mesures avant de les prendre en compte pour l'estimation de l'état de la cible.
On se place ici dans l'hypothèse où l'état de la cible a été estimé jusqu'à l'instant k par filtre de Kalman étendu et que nous disposons des équations classiques
Equation d'observation : $z(k) = H_k X(k) + b(k)$
Equation d'état : $X(k+1) = F_k X(k) + G_k u(k)$
À l'instant $k+1$, le capteur collecte un ensemble de mesures que nous cherchons à trier pour pouvoir ou non les utiliser pour l'estimation de la cible. Nous noterons par la suite $Z(k+1)$ l'ensemble des mesures obtenues à l'instant k +1 par le capteur.
Parmi les mesures collectées nous pouvons déjà effectuer un premier tri en spécifiant une région de l'espace des mesures compatibles avec l'état estimé à l'instant k.

Dans la suite, on définira $Z_{k+1} = z^i_{k+1}, i = 1, \ldots, m_k$ l'ensemble des mesures $Z(k+1)$ recueillies au temps $k+1$ et appartenant au domaine de validation. Nous allons étudier un filtre permettant de sélectionner les mesures correctes (c'est-à-dire issues de la cible) parmi les mesures constituant Z_{k+1}.

Exercice 5 Filtre NNSF (Nearest neighbor standard filter) Dans ce filtre, la mesure conservée est celle qui est la plus proche de la mesure prédite au sens de l'erreur quadratique moyenne minimale. La mise à jour est ensuite effectuée par filtrage de Kalman étendu classique.

1. Rappeler l'expression de la prédiction d'observation $z(k+1/k)$ et de la matrice de covariance $S_{k+1/k}$ associée obtenue par linéarisation,
2. Exprimer l'erreur quadratique moyenne de prédiction pour chacune des mesures disponibles.
3. En déduire les pas de l'algorithme correspondant à un tel filtre.

Exercice 6 Partie pratique
Pour la partie pratique, on fournit l'ensemble des mesures et la position initiale de la cible X_0 ainsi que la période d'échantillonage $T = 0.1$. Les mesures sont constituées de valeurs de la distance et de l'angle. Lorsqu'il y a plusieurs mesures pour le même temps, les premières valeurs sont les valeurs de distance puis les valeurs d'angles. On prendra initialement $\sigma_a = 0.05$ et $\mu = 0.01$ pour le bruit d'accélération.
Les bruits de mesure distance et angle sont décorrélés.
Caractéristiques des bruits $\sigma_D^2(k) = 100^2$ et $\sigma_s^2(k) = 0.01^2$

Le premier signal fourni correspond à une trajectoire à vitesse constante (fichier mesurestrajKalm1.mat). Observer précisément le comportement des deux filtres (convergence, matrice de covariance). (Attention, dans le cas où la vitesse est constante, l'accélération est nulle (pas de gravité ni de composante stochastique, le vecteur d'état se réduit aux positions et vitesses). Traiter les différents signaux fournis (fichier mesurestrajKalm2.mat) à l'aide du Filtre de Kalman simple (avec pseudo mesures) et du filtre Kalman étendu. Utiliser le filtre probabiliste pour le jeu de données spécifique mesurestrajKalm3.mat.
Comparer les résultats obtenus par les deux filtres en jouant sur les paramètres d'initialisation et le bruit d'état. On prendra initialement $\sigma_a = 0.05$ et $\mu = 0.01$ pour le bruit d'accélération. Une analyse du comportement du filtre en fonction du choix des paramètres de réglage est requise. À l'issue des différents tests et des résultats obtenus, on présentera une première synthèses des avantages et inconvénients du filtre étendu.