union の DFA における証明の補足

概要

p.45-p.47 における証明において、alphabet が同じという仮定があったので、その仮定なしの一般化した証明を載せておきます.

Theorem 1.25

The class of regular languages is closed under the union operation

証明

A_1, A_2 を任意にとってきた正規言語とします.

A_1 を認識する DFA を M_1,A_2 を認識する DFA を M_2 とします.

$M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1), M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ であるとします.

このとき, $A_1 \cup A_2$ を認識する DFAM を次のように構成します.

$M = ((Q_1 \cup \{ s \}) \times (Q_2 \cup \{ s \}), \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, (q_1, q_2), F)$ とします. ただし、次に述べる条件を δ, F, s は満たします.

1.s は Q_1 にも Q_2 にも含まれない要素です.

2.$\delta\colon ((Q_1 \cup \{ s \}) \times (Q_2 \cup \{ s \})) \times (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \to ((Q_1 \cup \{ s \}) \times (Q_2 \cup \{ s \}))$ は次のように定義します.

そのために δ_1, δ_2 を次のように拡張します.

$\delta'_1\colon (Q_1 \cup \{ s \}) \times (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \to (Q_1 \cup \{ s \})$を$\delta'_1(r_1, a) = \begin{cases} \delta_1(r_1, a) & r_1 \in Q_1, a \in \Sigma_1 \\ s & otherwise \end{cases}$ と定めます.

同様に $\delta'_2\colon (Q_2 \cup \{ s \}) \times (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \to (Q_2 \cup \{ s \})$を$\delta'_2(r_2, a) = \begin{cases} \delta_2(r_2, a) & r_2 \in Q_2, a \in \Sigma_2 \\ s & otherwise \end{cases}$ と定めます.

この δ'_1, δ'_2 を利用して, $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta'_1(r_1, a), \delta'_2(r_2, a))$ として δ を定めます.

3.$F = \{ (r_1, r_2) \mid (r_1 \in F_1 \, or \, r_2 \in F_2) \}$.

以上の 3 条件を満たす M は $A_1 \cup A_2$ を認識する言語になっています.