

ライフサイクル一般均衡モデルによる
年金制度の世代別分析

松井健一

平成 17 年 1 月 12 日

1 はじめに

少子高齢化が急速に進んでいる現代の日本において、現在の年金制度は世代間の衡平性を保ちつつ存続することは可能であろうか。この少子高齢化が進んでいくなれば、給付と負担のバランスが崩れ、その事によって年金財政が悪化する危険性は大きい。現行の給付水準を維持しようとするならば、その負担は将来世代へと先送りされることになり、世代間で格差が拡大してしまうといった問題あり、そのことが年金制度の存続可能性を懐疑的なものとしているのではないだろうか。このような問題がこれからの年金制度設計を考える上で重要である。社会保険庁の平成 14 年度国民年金被保険者実態調査によると、2002 年度の国民年金の納付率が過去最低の 62.8%になったとの調査結果も出ている。これは国民が年金制度に対し懐疑的な態度を示している証ではないだろうか。

次に、少子高齢化により生産人口が減少していることを示す。国立社会保障・人口問題研究所の「日本の将来推計人口」(2002 年 1 月推計)によると、総人口は「低位推計」では 2004 年に 1 億 2748 万人でピークに達し、以後長期の人口減少過程に入るとされている¹。全人口に対する生産年齢(15～64 歳)人口の割合は、2000 年で 68.1%であり、2020 年で 61.0%、2050 年には 52.9%までに落ち込むと推計されている。こういった少子高齢化傾向を適切に取り入れた年金制度改革の必要性が高まっている。

このような状況のなか、年金制度についての様々な試算やシミュレーションが試みられている。そこで本稿ではライフサイクル一般均衡モデルを用いて数値計算によるシミュレーション分析を行い、その結果を分析することを目的とする。

図 1: 総人口の推移: 高位・中位・低位 出所: 国立社会保障・人口問題研究所 HP
<http://www.ipss.go.jp/>

¹ 国立社会保障・人口問題研究所の「中位推計」では、2006 年に 1 億 2774 万人でピークに達し、その後減少に転じるとされているが、これまで推計されてきた出生率は、政策的な意図もあり一貫して過大推計され続けてきている。

ライフサイクル一般均衡モデルは、Auerbach, Kotlikoff [1] の一連の研究により開発されたモデルであり、税制改革の経済へ与える影響を、家計の世代という概念を取り入れてシミュレーションする目的のもとに開発されたものである。このモデルを拡張し、さまざまな年金制度試案に対しその政策効果を世代間の効用を考慮し分析したものに本間など [9][10] がある。本稿は本間など [9] でなされた分析にいくつかの変更を加え、誤植などの修正をし、再度分析を試みたものである。そして、高齢化、人口減少や年金給付率の変更などの影響を後の節において分析する。本稿の特徴は、モデルで使用される人的資本関数の推計にノンパラメトリック回帰の手法のひとつである kernel regression を用いたことや、CES 型生産関数の推計を、最近のデータを用いて再推計を試みたこと、また、統計、数値計算ソフト R でシミュレーションプログラムを作成したことである。

以下では、まず第 2 節においてライフサイクル一般均衡モデルを紹介する。第 3 節においては、モデルで用いられているパラメータを推定する。第 4 節では、前節の結果に基づいてシミュレーション分析を試みる。最後に第 5 節では今後の課題を述べる。

2 ライフサイクル一般均衡モデルの枠組み

この節では、ライフサイクル一般均衡モデルを紹介する。このモデルの定式化は、各経済主体の行動原理を重視したシミュレーションモデルであり、マクロ計量モデルではなくミクロ的な基礎付けを持ったモデルとなっている。本節で紹介するモデルは主に本間など [9][10] において検討されたモデルを踏襲しているものである。ライフサイクル一般均衡モデルには大きく 2 つの特徴がある。まず、第一の特徴として、順次生まれてくる家計（コーホート）が生涯全体にわたっての効用最大化行動（通時的効用最大化）をする結果として貯蓄が決定される。こうしたライフサイクルでの視点からの貯蓄決定は人口構成の変化、貯蓄供給の変化も扱うことを可能にすることが出来る。第二に、一般均衡モデルを用いたことで、ライフサイクル理論で決定される貯蓄が、資本市場における投資を通じて実物資本に結び付けられ、利潤最大化行動をとる企業の産出量へと影響を与える。また、貯蓄の変化が利子率の変化も引き起こし、貯蓄量や産出量に影響を与える。このような過程をモデルに取り込んでいることである。

以下のモデルの基本構造は家計・企業・政府から構成される。まずこれらの主体行動をのモデルを紹介し、その後市場均衡の条件をあらわす。

2.1 家計行動

2.1.1 家計の効用関数の特定化

本モデルでは時間は離散的時間で、その単位は 1 年としている。家計は、生まれてくる時点が異なることを除けば同質的であると仮定し、代表的家計の行動により定式化する事としている。効用は余暇と消費で規定されている。ここで、 c_s は s 歳時の消費、 l_s は s 歳時の余暇をあらわす。効用関数は時間に関して分離可能であり、各期の効用を足し合わせたものをライフサイクル全体の効用としてあらわされるとしている。 $U(\cdot)$ はライフサイクル全体の効用関数であり、 $u(\cdot)$ は各期の瞬時効用関数である。

$$U(c, l) = U[u_1(c_1, l_1), \dots, u_{60}(c_{60}, l_{60})] \quad (1)$$

このとき、代表的家計の s 歳のときの効用関数 $u(\cdot)$ は CES 型効用関数を用い、

$$u_s = (c_s^{(1-1/\rho)} + \alpha l_s^{(1-1/\rho)})^{1/(1-1/\rho)} \quad (2)$$

と定式化している．また，ライフサイクル全体の効用関数 $U(\cdot)$ は $u(\cdot)$ を時間に関して集計した形の CES 型効用関数であり，

$$U_t = (1 - 1/\gamma)^{-1} \sum_{s=1}^{60} (1 + \delta)^{-(s-1)} u_s^{1-1/\gamma} \quad (3)$$

と定式化している．

$\rho, \alpha, \gamma, \delta$ は taste parameter であり，それぞれ個人の行動の選好を違った側面からあらわしている． ρ は消費と余暇の同時点間の代替の弾力性パラメータであり， α は家計の余暇に対する比重を示すパラメータをあらわす．また， γ は異時点間の代替の弾力性のパラメータであり，残る δ は割引率であり，時間選好率として使われる．これらのもとで家計は生涯全体に渡っての効用を最大化するように労働供給と消費の意思決定をする．

Auerbach, Kotlikoff [1] では 75 歳までの生存を仮定していたが，本稿では 21 歳で意思決定主体として登場し，80 歳まで生存することを想定し (3) 式では添字 s は 1 から 60 までとしている．また寿命の不確実性は存在しないとする．

次に，家計の s 歳時の予算制約式は次のようにあらわされる．

$$A_{s+1} = [1 + (1 - \tau_y)r]A_s + (1 - \tau_y - \tau_p)we_s(1 - l_s) + b_s - (1 + \tau_c + \tau_{pc})c_s \quad (4)$$

ここで， A は家計の保有資産であり， e は労働の効率性の尺度， w は効率あたり賃金率をあらわすので we が家計の粗賃金率である．また，1 年間の労働可能時間を 1 に基準化している²ので $1 - l$ は労働供給量とみなすことができる．税体系はすべて比例税とし， τ_y は所得税率， τ_c は消費税率， τ_p は年金保険料率， τ_{pc} は年金消費税率をあらわす．また， $RE - 1$ 歳まで働くとし， RE 歳から年金支給開始とする． b_s は年金給付額をあらわし，標準報酬年額を H ，給付率を β とすると，

$$\begin{cases} b_s = \beta H & (s \geq RE) \\ b_s = 0 & (s < RE) \end{cases} \quad (5)$$

$$H = \frac{1}{RE - 1} \sum_{t=1}^{RE-1} we_t(1 - l_t) \quad (6)$$

とあらわされる．

2.1.2 ライフサイクル全体での制約式 (現在価値制約式)

(4) 式であらわされた各期の予算制約式をライフサイクル全体での制約式であらわすと以下のようになる．

$$\sum_{s=1}^{60} \frac{(1 - \tau_y - \tau_p)we_s(1 - l_s)}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} + \sum_{s=RE}^{60} \frac{\beta H}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} = \sum_{s=1}^{60} \frac{(1 + \tau_c + \tau_{pc})c_s}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} \quad (7)$$

家計の通時的効用最大化問題を解く場合，(7) 式のほかに，労働供給が負にならないための制約を課す．また，労働供給量と同時に退職時期も選択する．年金給付開始年齢以降は必ず退職すると仮定する．

$$\begin{cases} l_s \leq 1 & (s < RE) \\ l_s = 1 & (s \geq RE) \end{cases} \quad (8)$$

²Auerbach, Kotlikoff [1] では，年間 5000 時間としている

以上の制約の下で次式 (57) の家計の通時的効用最大化問題を解く．

$$\begin{aligned}
\max U_s &= \max (1 - 1/\gamma)^{-1} \sum_{s=1}^{60} (1 + \delta)^{-(s-1)} u_s^{1-1/\gamma} \\
\text{s.t. } \sum_{s=1}^{60} \frac{(1 - \tau_y - \tau_p)\omega e_s(1 - l_s)}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} &+ \sum_{s=RE}^{60} \frac{\beta H}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} - \sum_{s=1}^{60} \frac{(1 + \tau_c + \tau_{pc})c_s}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} = 0 \\
l_s &\leq 1 \quad (s < RE) \\
l_s &= 1 \quad (s \geq RE)
\end{aligned} \tag{9}$$

この制約条件付き最大化問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解き， c_s と l_s の比を取ると，

$$l_s = J_s c_s, \quad J_s = [\{w_s^* D_s + z N E_s\} / (D_s \alpha (1 + \tau_c + \tau_{pc}))]^{-\rho} \tag{10}$$

となる．ただし，

$$\mu_s = \frac{\theta_s}{\lambda} (1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1} \tag{11}$$

$$D_s = (1 + (1 - \tau_y)r)^{-(s-1)} \tag{12}$$

$$N E_s = \frac{\beta w e_s}{RE - 1} \sum_{t'=RE}^{60} (1 + (1 - \tau_y)r)^{-(t'-1)} \tag{13}$$

$$w_s^* = (1 - \tau_y - \tau_p)w e_s + \mu_s \tag{14}$$

$$z = \begin{cases} 1 & (s < RE) \\ 0 & (s \geq RE) \end{cases} \tag{15}$$

ここで λ は生涯にわたる予算制約に関するラグランジュ乗数であり， θ は余暇の制約に関するラグランジュ乗数． μ_s は余暇が 1 を超えたり 0 を下回ってしまう，もしくは年金支給開始後に余暇を 1 にするような w_s^* にするためのスラック変数である．また， c ， l についてそれぞれ前期比を取ることにより，

$$c_s = \left(\frac{\nu_s}{\nu_{s-1}} \right) \left(\frac{1 + (1 - \tau_y)r}{1 + \delta} \right)^\gamma c_{s-1} \tag{16}$$

$$l_s = \left(\frac{\nu_s}{\nu_{s-1}} \right) \left(\frac{w_s^*}{w_{s-1}^*} \right)^{-\rho} \left(\frac{1 + (1 - \tau_y)r}{1 + \delta} \right)^\gamma l_{s-1} \tag{17}$$

が得られ，動学経路が決定される．ただし，

$$\nu_s = (1 + \alpha J_s^{1-1/\rho})^{(\rho-\gamma)/(1-\rho)} \tag{18}$$

である．以上から， c と l の家計の効用最大化行動に基づく最適動学経路が得られた．これは c_1 が一度決定されればその他の時点の c ， l が決定されることを意味する．

2.2 企業

次に，生産の定式化に移る．ライフサイクル一般均衡モデルでは，1 つの代表的企業によるマクロ生産関数を用いる事が多い．本稿でも，それに倣い 1 次同次関数である CES 型生産関数をとし以下のように定式化されているものを用いる．

$$Y_t = A[\epsilon K_t^{1-1/\sigma} + (1 - \epsilon)L_t^{1-1/\sigma}]^{1/(1-1/\sigma)} \tag{19}$$

ただし、 Y_t は s 期の総生産量、 K は総資本、 L は総労働供給量、 σ は生産要素間の代替の弾力性パラメータ、 ϵ はウェイトパラメータ、 A は規模パラメータをあらわす。

(19) 式を技術的制約とした企業の費用最小化問題を考える。

$$\min\{rK_t + wL_t\} \quad (20)$$

$$s.t. \quad Y_t - A[\epsilon K_t^{1-1/\sigma} + (1-\epsilon)L_t^{1-1/\sigma}]^{1/(1-1/\sigma)} = 0 \quad (21)$$

ラグランジュの未定乗数法によりこの問題を解くと、費用最小化のための必要条件、

$$\frac{w}{r} = \frac{(1-\epsilon)}{\epsilon} \left(\frac{K_t}{L_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \quad (22)$$

が得られる。ここで、 w は実質賃金、 r は実質資本収益率である。

2.3 政府

ライフサイクル一般均衡モデルでは公的年金の分析に主眼を置くため、政府部門は租税を調達して公共財を供給する一般会計部門と、公的年金制度を運営する年金会計部門の2部門に独立して構成されるとしている。 s 期の一般会計予算制約式を

$$G_t = R_t \quad (23)$$

とし、 s 期の年金会計予算制約式を

$$P_t = B_t \quad (24)$$

としている。本稿のシミュレーションでは単純化のため公債発行は無く、年金は完全賦課方式とし年金積立金も無いものとしている。ここで、 G は公債利子以外の政府支出、 R は労働所得税と資本所得税、消費税からの税収、 P は年金保険料収入、年金消費税収入、 B は年金給付額をあわわす。これらはそれぞれ

$$R_t = \tau_y w L_t + \tau_y r S_t + \tau_c C_t \quad (25)$$

$$P_t = \tau_p w L_t + \tau_{pc} C_t \quad (26)$$

$$B_t = N_t \sum_{s=R}^{60} (1+n_t)^{-(s-1)} b_s \quad (27)$$

$$G_t = N_t \sum_{s=1}^{60} (1+n_t)^{-(s-1)} g \quad (28)$$

として定義している。 S は家計の供給する貯蓄総額、 C は民間消費の総額で

$$S_t = N_t \sum_{s=1}^{60} (1+n_t)^{-(s-1)} A_s \quad (29)$$

$$C_t = N_t \sum_{s=1}^{60} (1+n_t)^{-(s-1)} c_s \quad (30)$$

としてそれぞれ定義している。なお、 g は一人当たり政府支出、 N_t は t 期に新たに意思決定主体として参入する家計の総数であり、ここでは21歳人口を指す。 n_t は世代成長率³である。

³このモデルで定義される世代成長率とは、21歳時に新規新規に参入してくる新規参入人口の増加率を表している。

2.4 市場均衡

資本市場の均衡条件は、家計の供給する貯蓄総額と年金会計の積立金が実物資本と公債に等しいという恒等式であらわされ、

$$S_t = K_t \quad (31)$$

としている。労働市場は

$$L_t = N_t \sum_{s=1}^{60} (1+n)^{-(s-1)} (1-l_s) e_s \quad (32)$$

が市場の均衡条件となり、完全雇用市場の仮定を置くとしている。財市場にに関しては集計された消費と資本の来期との差であわられる投資、政府支出の和が生産量に等しいとし、

$$Y_t = C_t + (K_{t+1} - K_t) + G_t \quad (33)$$

のように市場均衡の条件を置いている。

3 パラメータの推定

3.1 人的資本 e のプロフィール

本稿では、人的資本の推定において、本間など [9][10] では2次多項式を用いて推定していたものを、ノンパラメトリック回帰分析の手法の一つである kernel regression を用い、よりモデルの制約を緩めた推定を行った。このことにより、必ずしも左右対称とはいえない賃金関数にあわせた、よりフィットした推定が可能となる。以下、竹澤 [11]、simonoff [2]、元山・両角 [12] を参考に kernel regression の手法の概要を紹介する。

人的資本 e を年齢に応じた賃金率と定義し、推定する。年齢を x とし、賃金率 y を推定するノンパラメトリック回帰モデルを次のように設定し、 $m(x)$ の推定量 $\hat{m}(x)$ を求める。

$$y = m(x) + \epsilon \quad (34)$$

ここで、 X, Y をともに確率変数とする。この X, Y という確率変数が観測値 X_i, Y_i をもたらすと言える。 X が従う確率密度関数を $f_X(x)$ 、 X, Y の従う同時確率密度関数を $f(x, y)$ 、 $X = x$ を条件とする条件付き確率密度関数を $f(y|x)$ と定義する。ここで $f(y|x)$ は、乗法公式より

$$f(y|x) = f(x, y) / f_X(x) \quad (35)$$

として定義される関数である。 $m(x)$ はある予測変数の値に対する推定値を与えるものであるが、それは予測変数 X がある値 x に固定されている条件下での、目的変数 y の期待値 $E[Y|X = x]$ と読みかえることができる。以上より、

$$m(x) = E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (36)$$

ここで、 $f(x, y), f_X(x)$ を、与えられたデータ $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ から、カーネル密度推定量を用いて推定する。このとき、推定量 $\hat{f}(x, y), \hat{f}_X(x)$ はカーネル関数 $K(\cdot)$ を用い、次のようにあらわされる。

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{nh_x h_y} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_x}\right) K\left(\frac{y - Y_i}{h_y}\right) \quad (37)$$

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nh_x} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_x}\right) \quad (38)$$

カーネル関数 K は以下の性質を満たすものを用いる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\psi) d\psi = 1, \int_{-\infty}^{\infty} \psi K(\psi) d\psi = 0, \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 K(\psi) d\psi < \infty \quad (39)$$

本稿ではカーネル関数としてガウス型カーネル $K(\psi) = (2\pi)^{-1/2} \exp -\psi^2/2$ を用いる。

この推定量を用いると $\hat{m}(x)$ は、

$$\hat{m}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{\frac{1}{nh_x h_y} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_x}\right) K\left(\frac{y - Y_i}{h_y}\right)}{\frac{1}{nh_x} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_x}\right)} dy \quad (40)$$

$y = Y_i + h_y \eta$ と変数変換すれば、 $dy = h_y d\eta$ 、故に

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_y} \int_{-\infty}^{\infty} y K\left(\frac{y - Y_i}{h_y}\right) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} (Y_i + h_y \eta) K(\eta) d\eta \\ &= Y_i \end{aligned} \quad (41)$$

以上より、ナダラヤ・ワトソン推定量 $\hat{m}_{NW}(x)$ は、

$$\hat{m}_{NW}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{nh_x h_y} K\left(\frac{x - X_i}{h_x}\right)}{\frac{1}{nh_x} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h_x}\right)} Y_i = \sum_{i=1}^n W_i(x) Y_i \quad (42)$$

と表せる。この結果を用いて計算する R のプログラムを次に示す。これは、 x と 2 つのデータを与えると、データに基づき x に対応する y の推定値を返すものである。このようにして得られた Nadaraya-Watson kernel 推定量から、人的資本 e を推定する。

本稿では、人的資本を各年齢に対する賃金率を人的資本として定義している。データは『賃金構造基本調査』(2002) を用い、1973～2001 年の産業計、事業規模計の年齢階級別データを 2000 年基準 CPI で実質化し、それを時間給に換算したものをを用いた。トレンドを取り除くために各年毎に平均時間給を 1 として基準化し、その比を取ったデータで kernel regression を試みている。計算結果は以下のとおりである。

3.2 CES 型生産関数の推定

ここでは、わが国一国の生産関数の推定の手順を示し、実際に推定する。生産関数を以下のように定式化する。

$$Y = A [\epsilon K^{-\rho} + (1 - \epsilon) L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \quad (43)$$

$$\sigma = (\rho + 1)^{-1} \quad (44)$$

表 1: kernel regression の R プログラム

```

kernel.reg <- function(x, data1, data2 ,bw.x = "default")
{
  n1 <- length(data1); n2 <- length(data2)
  if(n1!=n2)
    {return(print("data1 and data2 lengths differ"))}    #データの長さの一致確認

  if(bw.x == "default")
    {hx <- sd(data1) * 1.059 * n1^(-1/5)}                #バンド幅の決定
  else{ hx <- bw.x}

  kappa.x <- 0; kappa.y <- 0
  sum <- 0
  for(i in 1:n1){
    kappa.x <- exp(-0.5*((x - data1[i])/hx)^2) + sum      #Gaussian Kernel
    sum <- kappa.x
  }
  sum <- 0
  for(j in 1:n1){
    kappa.y <- data2[j] * exp(-0.5*((x - data1[j])/hx)^2) + sum #Gaussian Kernel
    sum <- kappa.y
  }
  kappa.y <- kappa.y / kappa.x
  return(list(x = x, y = kappa.y))
}

```

σ は代替の弾力性パラメーター, ρ は代用パラメーター, ϵ は分配パラメーター, A は効率パラメーターをあらわす. さらに, 一階の条件より次式が成り立ち, さらに対数変換し線形化する. ここで, p_v は 1990 年基準の消費者物価指数であり, 賃金, 資本収益率を実質化するために用いられる.

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{A^\rho}{1-\epsilon} \right)^\sigma \left(\frac{w}{p_v} \right)^\sigma \Rightarrow \log \left(\frac{Y}{L} \right) = \gamma_1 + \sigma \log \left(\frac{w}{p_v} \right) \quad (45)$$

$$\frac{Y}{K} = \left(\frac{A^\rho}{\epsilon} \right)^\sigma \left(\frac{r}{p_v} \right)^\sigma \Rightarrow \log \left(\frac{Y}{K} \right) = \gamma_2 + \sigma \log \left(\frac{r}{p_v} \right) \quad (46)$$

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \right)^\sigma \left(\frac{w}{r} \right)^\sigma \Rightarrow \log \left(\frac{K}{L} \right) = \gamma_3 + \sigma \log \left(\frac{w}{r} \right) \quad (47)$$

ただし,

$$\gamma_1 = \log \left(\frac{A^\rho}{1-\epsilon} \right)^\sigma, \gamma_2 = \log \left(\frac{A^\rho}{\epsilon} \right)^\sigma, \gamma_3 = \log \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \right)^\sigma \quad (48)$$

表 2: 推定された年齢ごとの時間給 (比率化)

年齢	時間給	年齢	時間給	年齢	時間給	年齢	時間給	年齢	時間給
18	46.5%	30	92.6%	42	120.2%	54	117.9%	66	79.7%
19	48.4%	31	96.0%	43	121.2%	55	115.3%	67	78.1%
20	51.3%	32	99.6%	44	122.1%	56	111.8%	68	77.1%
21	54.3%	33	102.3%	45	122.8%	57	108.6%	69	76.6%
22	58.3%	34	105.3%	46	123.4%	58	104.5%		
23	62.8%	35	108.1%	47	123.9%	59	100.7%		
24	66.9%	36	110.4%	48	124.1%	60	96.2%		
25	71.9%	37	112.7%	49	124.1%	61	91.9%		
26	76.1%	38	114.4%	50	123.9%	62	88.8%		
27	80.6%	39	116.2%	51	123.2%	63	85.8%		
28	84.3%	40	117.6%	52	122.2%	64	83.7%		
29	88.5%	41	119.0%	53	120.4%	65	81.4%		

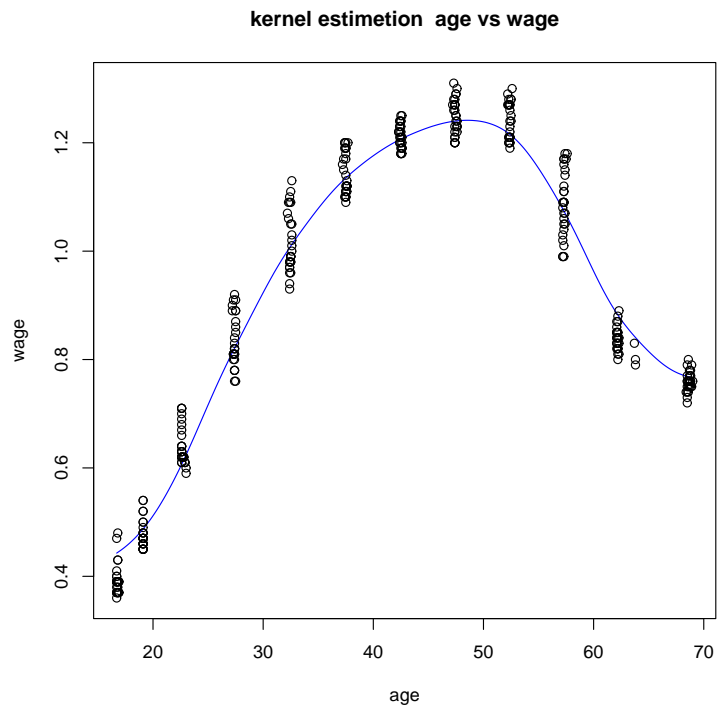


図 2: Kernel Regerssin による賃金率の推定

である．ここで，(47) 式は，(45) 式と (46) 式の差に他ならないが，3 本の方程式を用いた回帰分析によっても A, ϵ, σ は矛盾なく推定できることが示される．

(45)，(46)，(47) の 3 つの方程式から，以下のように定数項にダミー変数を用いた回帰モデルが導かれ，これから最小 2 乗法によりパラメータを推定することができる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

ここで， $y_1 = \log(Y/L)$ ， $y_2 = \log(Y/K)$ ， $y_3 = \log(K/L)$ ， $x_1 = \log(w/p_v)$ ， $x_2 = \log(r/p_v)$ ， $x_3 = \log(w/r)$ とし， u_1, u_2, u_3 は誤差項とする．この推計に用いたデータを表??にあらわす．推計期間は 1975 年から 1994 年までの 20 年間である．

推定結果と観測値のプロット図をそれぞれ表 3，図 3 に示してある．結果は有意であり，当てはまりは概して良く，定数項ダミーを考慮すると，ほぼ直線に並んでいることが見て取れる．決定係数もほぼ 1 に近い 0.9998 となっている．また，ここで得られた代替の弾力性 $\sigma = 1.14225$ という結果は， $\sigma = 1$ とするコブダグラス型生産関数に近いものであるということがわかる．

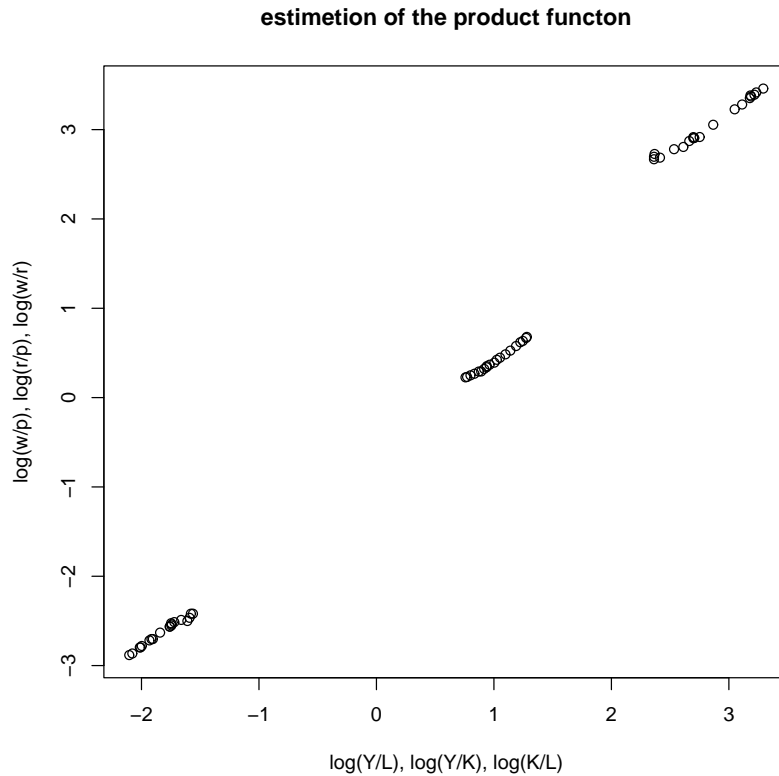


図 3: 観測値のプロット

$\hat{\gamma}_1 = (\hat{\delta}_1 + \hat{\alpha})$ ， $\hat{\gamma}_2 = (\hat{\delta}_2 + \hat{\alpha})$ という関係から $\hat{\gamma}_1$ ， $\hat{\gamma}_2$ が推定され，さらに A と ϵ も推定される．(49) の第 3 式から $\hat{\gamma}_3$ が推定されるが，上述のように最小二乗法を用いるときは $\hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2$ とい

表 3: 推定結果

	回帰係数	標準誤差	t 値	P 値
$\hat{\alpha}$	1.82947	0.10606	17.25	< 2e-16
$\hat{\delta}_1$	-0.64895	0.05711	-11.36	3.65e-16
$\hat{\delta}_2$	1.18052	0.04977	23.72	< 2e-16
$\hat{\sigma}$	1.14225	0.01866	61.21	< 2e-16
$R^2 = 0.9998$				

う関係が保証されるため、矛盾は生じない。(48) の 3 つの式の推定結果は

$$\begin{aligned}
\log(Y/L) &= 0.53157 + 1.14225 \log(w/p_v) \\
\log(Y/K) &= 1.18052 + 1.14225 \log(r/p_v) \\
\log(K/L) &= -0.64895 + 1.14225 \log(w/r)
\end{aligned} \tag{50}$$

である。

これから、 $\rho = (1/\sigma) - 1$ より、 ρ を求めることができる。そして、(48) 式より

$$\exp\left(\frac{\gamma_3}{\sigma}\right) = \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right) \Rightarrow \epsilon = \frac{\exp(\gamma_3/\sigma) + 1}{\exp(\gamma_3/\sigma)} \tag{51}$$

より、 ϵ が推定できる。

以上で求められた σ, ϵ, ρ を用いることで A の推定値として

$$A_1 = \left[\epsilon \exp\left(\frac{\gamma_1}{\sigma}\right) \right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{52}$$

$$A_2 = \left[(1-\epsilon) \exp\left(\frac{\gamma_2}{\sigma}\right) \right]^{\frac{1}{\rho}} \tag{53}$$

として、2 つの式が矛盾なく得られる。以上より、推定されたパラメーターは

$$\hat{A} = A_1 = A_2 = 0.87608 \tag{54}$$

$$\hat{\epsilon} = 0.36166 \tag{55}$$

$$\hat{\sigma} = 1.14225 \tag{56}$$

である。以上の結果を考慮し、また、シミュレーションの整合性を持つために、シミュレーションで用いるパラメータは、 $\sigma = 1.14$, $\epsilon = 0.2$, $A = 1$ を使用する。

3.3 家計の効用関数パラメーターの決定に関する議論

ここでは、(2)、(3) 式で定式化した家計の CES 型効用関数のパラメータについて考察する。労働と消費の両方を含めた通時的な効用関数のパラメーターの実証研究は、Mankiw *et.al* [3] が行っている。また、日本のデータを用いて推定した研究には本間など [9] がある。しかし、これらの研究では異時点間の代替の弾力性 γ については安定的な数値が得られていない。代表的な既存研究では、統計的手法を用いて推計されたパラメーターをもとシミュレーションで実際に計算し整合性が取れるようにパラメーターを決定している。このような作業をカリブレーションという。

表 4: 変数リスト

Y	国内総生産 (実質), 1990 年価格, 単位:10 億円 出典:国民経済計算
K	国富 (正味資産) 1990 年価格 単位:10 億円 出典:国民経済計算
L	雇用者数 \times 総労働時間数, 単位:百万時間 出典:毎月勤労統計
W	賃金率 \Rightarrow 雇用者所得 (10 億円)/L
R	資本収益率 \Rightarrow 資本分配分 (名目 GDP から雇用者所得を引いたもの) を K で除したもの
P	消費者物価指数, 1990 年基準

表 5: 代表的既存研究における効用関数のパラメーター

	余暇の比重 パラメータ α	異時点間の代替 の弾力性 γ	時間選好率 δ	同時点間の代替 の弾力性 ρ
本間など [9]	0.1	0.3	0.6	0.01
上村 [6]	0.1	0.5	0.6	-0.055
小塩 [8]	0.2	0.5	1	-0.01
Auerbach <i>et.al</i> [1]	1.5*	0.25	0.8	0.015

* : auerbach *et.al* では余暇賦存量を 5000 としているためスケールが異なる .

ここで代表的な既存研究で用いられているパラメータを表 5 に示す . 本稿では家計の効用関数パラメータを既存研究を参考に , シミュレーションとの整合性を考慮し , $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $\rho = 0.6$, と設定する .

4 シミュレーション分析の手順と結果

4.1 シミュレーションの手順

この節では , 前節までで決定 , 推定されたパラメーターを用いてシミュレーションを行う . 分析方法としては , 与えられたパラメータから , 1) 初期定常状態 を決定し , それに対して , 2) 世代成長率が 1% から 0% に減少したケース , 3) そのときの年金保険料率の上昇を年金消費税の導入により保険料上昇を補ったケース , 4) 保険料負担を増やさずに給付水準を下げたケース , のそれぞれを比較し , このような状況のもとで年金負担率 , 租税負担率 , 効用水準などがどのように変化するかを分析する .

まず , シミュレーション手順を示す . 収束計算にはガウスザイデル法を用いる . 具体的な計算方法は以下に示す .

1. 賃金率 w と利子率 r を初期値として与える .
2. 年金支給年齢 RE を所与として τ_y, τ_p を与え , その下で家計は消費計画 c , 貯蓄計画 s , 労働供給計画 $(1 - l)$ を立てる .

3. 一般会計収支，年金会計収支が均衡するまで τ_y, τ_p を変更し 2. に戻る．
4. 一般会計収支，年金会計収支が均衡したら，家計の資産 A ，労働供給 $(1-l)$ を集計し K_0, L_0 を求める．
5. 求められた K_0, L_0 を生産関数に与え，新たな賃金率 w と利子率 r を用いて K, L の値が収束するまで再度計算を繰り返す．こうして収束した値が均衡時の値である．また，この手順を図 4.1 に示している．

このシミュレーションプログラムは統計・数値計算ソフト R を用いて作成した．

既存研究の多くは定常状態の比較分析の手法をとっている．これは，定常状態では各変数が時間を通じて一定となり，家計は同一の効用関数を持つために定常状態における各家計のライフサイクル行動は同じものとなる．なので，ある時点での各世代の変数を集計する事と，ある世代の各年齢を集計する事は同じことになる．したがって，定常状態では単一の家計のプロファイルを追うことである時点での各世代の変数を見ることと同じになる．よって，本稿でも定常状態の比較を行うことにする．

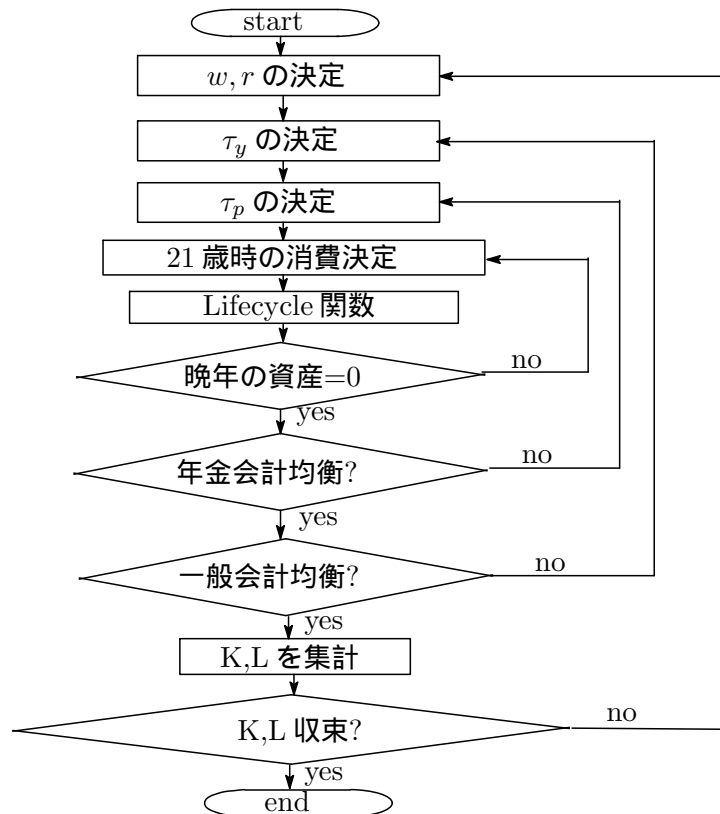


図 4: シミュレーションのフローチャート

4.2 シミュレーション結果

定常状態と世代成長率が 0% となる高齢化社会に関するシミュレーションの結果を表 6 にまとめている．

表 6: シミュレーション結果

	ケース 1) 初期定常状態	ケース 2) 高齢化社会	ケース 3) 年金消費税 5%	ケース 4) 給付率減
世代成長率 (n)	0.01	0.00	0.00	0.00
年金給付率 (β)	0.600	0.600	0.600	0.400
資本労働比率 (K/L)	7.1515	6.7680	7.6734	9.8794
生産労働比率 (Y/L)	1.5423	1.5220	1.5689	1.6695
資本生産比率 (K/Y)	4.6366	4.4467	4.8909	5.9175
賃金率 (w)	1.1705	1.1580	1.1906	1.2550
利子率 (r)	0.0519	0.0537	0.0492	0.0419
所得税率 (τ_y)	15.00%	16.35%	15.795%	14.465%
年金保険料率 (τ_p)	13.75%	21.82%	15.94%	14.547%
年金消費税率 (τ_{pc})	0.00%	0.00%	5.00%	0.00%
国民負担率	34.120%	44.274%	41.458%	34.659%
効用水準		-7.090	-5.900	-5.647

シミュレーションで用いたパラメーターは以下のとおりである．

$\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.3$, $\delta = 0.01$, $\rho = 0.6$, $\sigma = 1.14$, $\epsilon = 0.2$, $A = 1$

ケース 1) は初期定常状態であり，ケース 2) は高齢化社会の定常状態である．1 人当たり政府支出はすべてのケースで 0.825 に設定しており，初期定常状態における所得税率は 15.00% である．年金給付率は標準報酬年額の 60.0% に設定している．このときの年金保険料率は現状の水準に近い 13.75% となっている．国民負担率は 34.12% で 2001 年度の国民負担率 38.5% より若干低い水準である．

ケース 1) に比してケース 2) では，人口成長率が 0% になり生産人口の比率が低下し，年金保険料総額の減少を保険料率の上昇によって補っている．このとき年金保険料率は 13.75% から 21.82% へと上昇し，また国民負担率は 34.12% から 44.274% へと上昇している．

ケース 3) では年金消費税 5% を導入することにより，年金保険料率は 15.94% に留まっている．しかし、依然として国民負担率は 41.458% であり，ケース 2) とほぼ変わらない水準である．また，消費税方式という性格から退職後世代からも税を徴収しているので，実質給付率引き下げと同じ効果と考えられる．

ケース 4) では，年金給付率を引き下げたため，他のケースよりも退職後に備え貯蓄を増やしている傾向がある．そのため，他のケースと比べ K/L が上昇している．平均効用水準はケース 2) より上昇しているものの，世代別に効用を見ると退職世代の効用は、各ケースでほぼ同水準にあり，各ケースにより生産世代の効用が異なっている．全体的に最も効用水準が高いのはケース 4 の場合である．図 5 に世代別効用水準のグラフを示した．

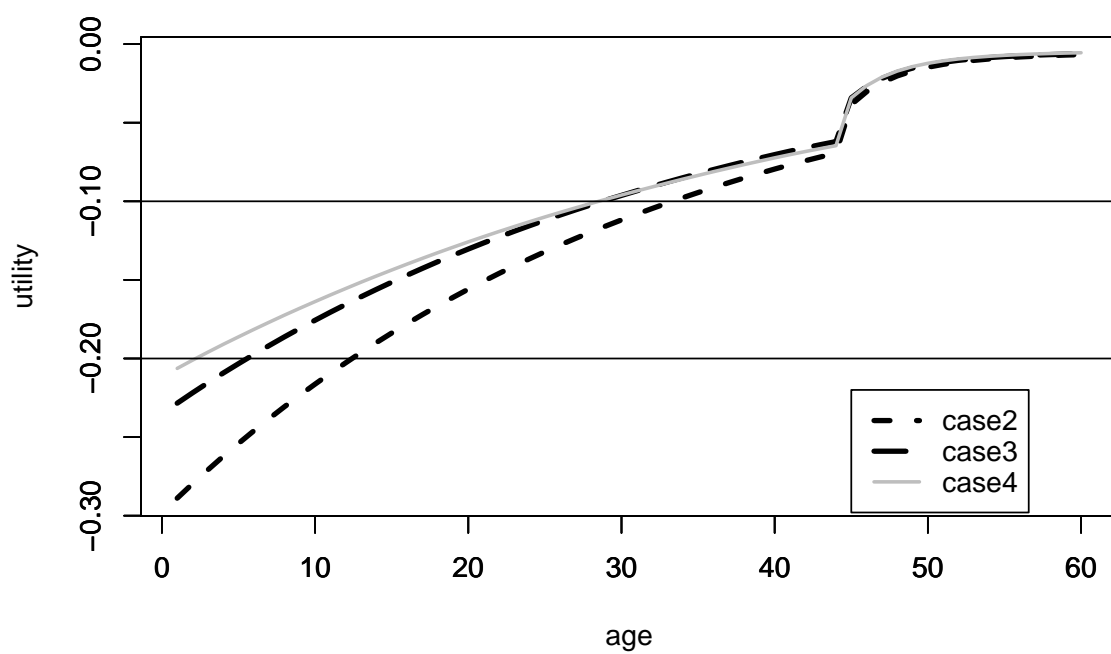


图 5: 世代別効用水準

5 おわりに

本稿では、ライフサイクル一般均衡モデルを用いて高齢化社会における年金制度のあり方を検討した。また、本稿での試みとしては人的資本の推計にノンパラメトリック回帰の手法の一つである kernel regression を用いて推計したこと、生産関数を新しいデータを用いて再推計しシミュレーションを行ったことなどがある。生産関数においては CES 型生産関数の推定結果は良好であり、代替の弾力性はほぼ 1 となったことからコブダグラス型生産関数での推計も一国の生産関数を表すことが可能であるとの結果が得られた。

しかし、シミュレーション分析についてはいくつかの問題点を残した。第一に、シミュレーションにおけるパラメーターの設定と実証分析との整合性である。実証分析から得られた人的資本や生産関数のパラメーターを考慮してシミュレーションのパラメーターを決定したものの、そこから得られた定常状態で示されている $K/L, r$ などの値は、現状の経済から少しずれてしまった。その理由としては、モデルでは一定の世代成長率の仮定を置いている事や財政均衡、年金会計均衡の仮定などがある。第二に、ガウスザイデル法の収束に関する問題である。ガウスザイデル法の難点として、初期値の設定により解が存在するにもかかわらず周期性を示したり、解が発散してしまったりする事がある。他の手法による収束計算を行うことも課題としたい。

参考文献

- [1] Auerbach, A. and L. J. Kotlikoff (1983), *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge University Press.
- [2] Simonoff, J. S. (1996), *Smoothing methods in statistics*, Springer series in statistics, New York, Springer. 邦訳:ジェフリー S. シモノフ (竹澤邦夫・大森宏訳 (1999)) 『平滑化とノンパラメトリック回帰への招待』, 農林統計協会
- [3] Mankiw, N.G., J.J.Rotemberg and L.H.Summers (1985), “Intertemporal Substitution in Macroeconomics”, *Quarterly Journal of Economics*, 100. p225-269.
- [4] Varian, H.R. (1978) *Microeconomic Analysis*, New York: Norton. 邦訳: H.R. ヴァリアン (佐藤 隆三・三野 和雄訳 (1986)) 『ミクロ経済分析』, 勁草書房
- [5] 奥村晴彦 (1991) 「C 言語による最新アルゴリズム辞典」技術評論社
- [6] 上村敏之 (1999) 「高齢化社会における租税・年金政策：ライフサイクル一般均衡モデルによるシミュレーション分析」『経済学研究 (関西学院大学)』第 30 号, p65-88
- [7] 上村敏之 (2002) 「社会保障のライフサイクル一般均衡分析：モデル・手法・展望」『経済論集 (東洋大学)』第 28 巻第 1 号, p15 - 36
- [8] 小塩隆士 (1999) 「年金民営化の経済分析」『日本経済研究』第 39 号, p1-20
- [9] 本間正明・跡田直澄・岩本康志・大竹文雄 (1987a) 「年金:高齢化社会と年金制度」浜田 宏一・黒田昌裕・堀内昭義編 『日本経済のマクロ分析』, 東大出版会, 第七章,p149-175
- [10] 本間正明・跡田直澄・岩本康志・大竹文雄 (1987b) 「ライフサイクル成長モデルによるシミュレーション分析—パラミターの推定と感度分析—」『大阪大学経済学』, 第 36 巻, 第 3-4 号,p99-109
- [11] 竹澤邦夫 (2001) 『みんなのためのノンパラメトリック回帰 [POD 版]』, 吉岡書店
- [12] 元山斉・両角良子 (2002) 「ノンパラメトリック回帰 カーネル法の理論と実践」美添泰人・大瀧雅之 (編著) 『家計のミクロ統計分析』統計情報研究開発センター, 研究叢書第 9 号, p127-162
- [13] 黒田昌裕 (1984) 「実証経済学入門」日本評論社

- [14] 根岸紳 (1989) 「技術進歩の計量分析」有斐閣
 [15] 脇田成 (1993) 「景気循環のモデル分析」三菱経済研究所
 [16] 厚生労働省 『賃金構造基本統計調査』 (2002)

A 補論：家計の効用最大化行動の導出

家計の通時的効用最大化問題を解く．

$$\begin{aligned}
 \max U_s &= \max (1 - 1/\gamma)^{-1} \sum_{s=1}^{60} (1 + \delta)^{-(s-1)} u_s^{1-1/\gamma} \\
 \text{s.t. } &\sum_{s=1}^{60} \frac{(1 - \tau_y - \tau_p)\omega e_s(1 - l_s)}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} + \sum_{s=RE}^{60} \frac{\beta H}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} - \sum_{s=1}^{60} \frac{(1 + \tau_c + \tau_{pc})c_s}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} = 0 \\
 &l_s \leq 1 \quad (s < RE) \\
 &l_s = 1 \quad (s \geq RE)
 \end{aligned} \tag{57}$$

ラグランジュ形式を

$$\begin{aligned}
 L &= (1 - 1/\gamma)^{-1} \sum_{s=1}^{60} (1 + \delta)^{-(s-1)} u_s^{1-1/\gamma} \\
 &+ \lambda \left\{ \sum_{s=1}^{60} \frac{(1 - \tau_y - \tau_p)\omega e_s(1 - l_s)}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} + \sum_{s=RE}^{60} \sum_{t=1}^{RE-1} \frac{\beta w e_t(1 - l_t)}{(RE - 1)(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} \right. \\
 &\left. - \sum_{s=1}^{60} \frac{(1 + \tau_c + \tau_{pc})c_s}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} \right\} + \sum_{s=1}^{60} \theta_s(1 - l_s)
 \end{aligned} \tag{58}$$

とすると，一階の条件より

$$\frac{\partial L}{\partial c_s} = \frac{1}{(1 + \delta)^{s-1}} \Omega_s c_s^{-\frac{1}{\rho}} - \lambda \frac{(1 + \tau_c + \tau_{pc})}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} = 0 \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial l_s} &= \frac{\alpha}{(1 + \delta)^{s-1}} \Omega_s l_s^{-\frac{1}{\rho}} \\
 &- \lambda \left[\frac{(1 - \tau_y - \tau_p)\omega e_s}{(1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1}} + \frac{\beta w e_s}{RE - 1} \sum_{t'=RE}^{60} (1 + (1 - \tau_y)r)^{-(t'-1)} \right] - \theta_s = 0
 \end{aligned} \tag{60}$$

ここで、

$$\mu_s = \frac{\theta_s}{\lambda} (1 + (1 - \tau_y)r)^{s-1} \tag{61}$$

$$D_s = (1 + (1 - \tau_y)r)^{-(s-1)} \tag{62}$$

$$NE_s = \frac{\beta w e_s}{RE - 1} \sum_{t'=RE}^{60} (1 + (1 - \tau_y)r)^{-(t'-1)} \tag{63}$$

とおき、さらに

$$w_s^* = (1 - \tau_y - \tau_p)\omega e_s + \mu_s$$

と書くと (60) 式は ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial l_s} &= \frac{\alpha}{(1+\delta)^{s-1}} \Omega_s l_s^{-\frac{1}{\rho}} - \lambda [w_s^* D_s + N E_s] \\ &= 0\end{aligned}\tag{64}$$

ただし ,

$$\Omega_s = \left[c_s^{(1-1/\rho)} + \alpha l_s^{(1-1/\rho)} \right]^{\frac{1/\rho-1/\gamma}{1-1/\rho}}\tag{65}$$

とあらわすことができる . 上記の式より $\frac{\partial L}{\partial l_s}$ と $\frac{\partial L}{\partial c_s}$ の比を取ると ,

$$l_s = J_s c_s\tag{66}$$

$$J_s = [\{w_s^* D_s + z N E_s\} / (D_s \alpha (1 + \tau_c + \tau_{pc}))]^{-\rho}\tag{67}$$

$$z = \begin{cases} 1 & (s < RE) \\ 0 & (s \geq RE) \end{cases}\tag{68}$$

また , (58) 式の c, l についてそれぞれ前期比を取ることにより ,

$$c_s = \left(\frac{\nu_s}{\nu_{s-1}} \right) \left(\frac{1 + (1 - \tau_y)r}{1 + \delta} \right)^\gamma c_{s-1}\tag{69}$$

$$l_s = \left(\frac{\nu_s}{\nu_{s-1}} \right) \left(\frac{w_s^*}{w_{s-1}^*} \right)^{-\rho} \left(\frac{1 + (1 - \tau_y)r}{1 + \delta} \right)^\gamma l_{s-1}\tag{70}$$

が得られ , 動学経路が決定される . ただし ,

$$\nu_s = (1 + \alpha J_s^{1-1/\rho})^{(\rho-\gamma)/(1-\rho)}\tag{71}$$

である . 以上から , c と l の家計の効用最大化行動に基づく最適動学経路が得られた .

B 補論 : 説明変数・被説明変数がともに線形従属の場合の最小二乗法

(49) 式で表される回帰モデルを一般化すると ,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \mathbf{X}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \mathbf{X}_k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}\tag{72}$$

とあらわされる . ここで y_i と u_i は n 次元ベクトル , \mathbf{X}_i は $n \times p$ 次元の行列 , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)'$ は k 次元ベクトル , β は p 次元ベクトルである . いま , c_i ($i = 1, \dots, k$) をスカラーとして観測値が ,

$$\sum_{i=1}^k c_i y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{X}_i = 0\tag{73}$$

という制約条件を満たす場合を考える．このとき通常の最小二乗法を適用すると

$$\sum_{i=1}^k c_i \hat{\alpha}_i = 0 \quad (74)$$

が成立することが示される．すなわち k 本の方程式からなる (72) 式には無駄があるが，特定の 1 本の方程式を除外しなくても矛盾のない推定結果が得られる．(73) 式の証明は次の通りである．

最小二乗法では残差の二乗和を最小にするように $\hat{\beta}$ を推定する．つまり，

$$Q = \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}\|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\beta} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \quad (75)$$

を最小にする． Q を $\hat{\beta}$ で微分して 0 とおくと，

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (76)$$

が得られる．

この推定値を (72) 式について明示的にあらわすと，

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nI_k & B \\ B' & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ t \end{bmatrix} \quad (77)$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned} B_{(k \times p)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{1}'\mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad a_{(k \times 1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'y_1 \\ \vdots \\ \mathbf{1}'y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}, \\ S_{(p \times p)} &= \sum_{i=1}^k \mathbf{X}_i' \mathbf{X}_i, \quad t_{(p \times 1)} = \sum_{i=1}^k \mathbf{X}_i' y_i \end{aligned}$$

である．(77) の逆行列を解くと，

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (nI_k)^{-1} + (nI_k)^{-1}BE^{-1}B'(nI_k)^{-1} & -(nI_k)^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}B'(nI_k)^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ t \end{bmatrix} \quad (78)$$

ただし， $E = S - B'(nI_k)^{-1}B = S - (B'B/n)$ である． $\hat{\alpha}$ に着目すると，

$$[\hat{\alpha}] = \left[\frac{1}{n}a + \frac{1}{n}BE^{-1}B'\frac{1}{n}a - \frac{1}{n}BE^{-1}t \right] = \frac{1}{n} \left[a + BE^{-1}(B'\frac{1}{n}a - t) \right] \quad (79)$$

である．ここで， $\sum c_i \hat{\alpha}_i$ を評価すると

$$\sum_{i=1}^k c_i \hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k c_i a_i + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^k c_i B_i' \right) E^{-1} \left[B' \frac{1}{n} a - t \right] \quad (80)$$

となるが，(73) 式から

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i a_i &= \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}' y_i = \mathbf{1}' \sum_{i=1}^k c_i y_i = \mathbf{1}' \cdot 0 = 0 \quad (\text{scalar}) \\ \sum_{i=1}^k c_i B_i' &= \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{1}' \mathbf{X}_i' = \mathbf{1}' \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{X}_i = \mathbf{1}' \cdot O = O \quad (1 \times p) \end{aligned}$$

となることから，

$$\sum_{i=1}^k c_i \hat{\alpha}_i = 0$$

が成立する．

なお，以上の結果は周知の事実かもしれないが，W.H.Greene *Econometric Analysis* (4th edition, 2000, Prentice Hall) など，通常の計量経済学の教科書に記載がないため，美添教授の指導の下に，まとめたものである．