

# Kitaev spin liquid

2023 年 10 月 12 日

## 目次

1	introduction	2
2	Kitaev model	2
2.1	マヨナラ表現 . . . . .	2
2.2	Hamiltonian の変換 . . . . .	5
2.3	$Z_2$ ゲージ自由度 . . . . .	5
2.4	$Z_2$ Flux . . . . .	6
3	Kitaev 模型を解く手順	6
3.1	Majonara の一般論 . . . . .	6
3.2	固有状態の表現 . . . . .	8
4	基底状態の性質	9
4.1	一様 Flux のセクター . . . . .	9
4.2	基底状態の相図 . . . . .	9
5	Toric code limit	9
5.1	異方的極限の有効ハミルトニアン . . . . .	9
5.2	低エネルギー有効模型 . . . . .	9
5.3	Toric code 模型への帰着 . . . . .	9
6	Toric code model	9
6.1	$\hat{A}_s, \hat{B}_p$ の性質 . . . . .	10
6.2	基底状態 . . . . .	11
6.3	トポロジカル縮退 . . . . .	12
6.4	励起状態 . . . . .	12
7	Stabilizer state	12

16th, September, 2022

## 1 introduction

この講義では, Kitaev スピン液体について学ぶ [1]. Kitaev スピン液体を通じて, 量子スピン液体の性質を理解し, その量子情報操作への応用がどのようになされるか具体的に理解する.

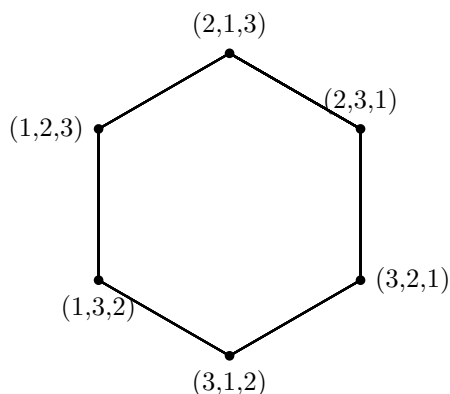


図 1 六角格子を tex で書く練習

## 2 Kitaev model

図 2 (a) サイト  $j$  に対する結合. 赤, 緑, 青はそれぞれ,  $x, y, z$ -interaction を表している. (b) Kitaev 模型を定義する六角格子 (honeycomb lattice). (c) 副格子. 下を A-副格子, 上を b-副格子と呼び, A-副格子のサイトに対応する index を  $i$  とする.

$$\hat{H} = -J_x \sum_{\langle j, j' \rangle_x} \hat{S}_j^x \hat{S}_{j'}^x - J_y \sum_{\langle j, j' \rangle_y} \hat{S}_j^y \hat{S}_{j'}^y - J_z \sum_{\langle j, j' \rangle_z} \hat{S}_j^z \hat{S}_{j'}^z \quad (1)$$

ここで,  $\hat{S}_j^\alpha$  はサイト  $j$  に作用するスピン  $1/2$  の演算子を表す. また,  $\langle j, j' \rangle_\alpha$  は  $\alpha$ -bond で結合するサイト  $\langle j, j' \rangle$  の組を表す. 例えば, サイト  $j$  と  $j'$  とが  $\hat{S}_j^x \hat{S}_{j'}^x$  interaction; — で繋がってれば,  $\langle j, j' \rangle_x$  となる.  $y, z$  の場合も同様にして,  $\langle j, j' \rangle_y$ : —,  $\langle j, j' \rangle_z$ : — と対応する.

さらにいくつかの記号を導入する.  $j_\alpha, \alpha = \{x, y, z\}$  はサイト  $j$  から  $\alpha$ -bond でつながったサイトを表す.

### 2.1 マヨナラ表現

#### 2.1.1 マヨナラ演算子の一般的な性質

$2N$  個の演算子の組  $\{\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{2N-1}\}$  で次の性質を満たすものをマヨナラ演算子と呼ぶ:

- エルミート :

$$\hat{c}_j^\dagger = \hat{c}_j \quad (2)$$

- 反交換関係

$$[\hat{c}_j, \hat{c}_{j'}]_+ = \hat{c}_j \hat{c}_{j'} + \hat{c}_{j'} \hat{c}_j = 2\delta_{j,j'} \quad (3)$$

すなわち、異なるマヨナラは反可換であり、一つのマヨナラ演算子を二乗すると、単位演算子になることがわかる。

2つのマヨナラ演算子から複素フェルミオンを作ることができる；

$$\hat{a}_m = \frac{1}{2}(\hat{c}_{2m} - i\hat{c}_{2m+1}) \quad (4)$$

$$\hat{a}_m^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{c}_{2m} + i\hat{c}_{2m+1}) \quad (5)$$

これらの演算子はフェルミオンの生成消滅演算子と同様の交換関係を満たす：

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger]_+ = 1 \quad (6)$$

Kitaev 模型を解くために、各サイト  $j$  に対して、4つのマヨナラ演算子を定義する：

$$\{\hat{c}_j, \hat{b}_j^x, \hat{b}_j^y, \hat{b}_j^z\} \quad (7)$$

これらの演算子は次の交換関係を満たす；

$$[c_j, c_{j'}]_+ = 2\delta_{j,j'} \quad (8)$$

$$[b_j^\alpha, b_{j'}^{\alpha'}]_+ = 2\delta_{j,j'}\delta_{\alpha,\alpha'} \quad (9)$$

$$[c_j, b_{j'}^{\alpha'}]_+ = 0 \quad (10)$$

これらを用いて、スピン 1/2 の演算子を次のように表現する：

$$\hat{S}_j^\alpha = \frac{i}{2}\hat{c}_j\hat{b}_j^\alpha. \quad (11)$$

スピン 1/2 演算子は Pauli 演算子で記述することができる：

$$\hat{S}_j^\alpha = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_j^\alpha. \quad (12)$$

$\hbar = 1$  をとる．ここで、Pauli 演算子は以下で行列表現され、

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

以下の反交換関係を満たす：

$$[\hat{\sigma}^\alpha, \hat{\sigma}^{\alpha'}]_+ = 2\delta_{\alpha,\alpha'} \quad (14)$$

マヨナラ表現によるスピン 1/2 演算子の反交換関係について確認する．例として  $[\hat{S}_j^x, \hat{S}_j^y]_+$  について確認する．(11) より、

$$\hat{S}_j^x \hat{S}_j^y = \frac{i}{2}\hat{c}_j\hat{b}_j^x \cdot \frac{i}{2}\hat{c}_j\hat{b}_j^y = -\frac{i}{2}\hat{c}_j\hat{b}_j^y \cdot \frac{i}{2}\hat{c}_j\hat{b}_j^x = \hat{S}_j^y \hat{S}_j^x \quad (15)$$

よって、スピン 1/2 演算子の反交換関係が成り立つことがわかる。これは以下のように示せる：

$$\begin{aligned}
\hat{c}_j \hat{b}_j^x \hat{c}_j \hat{b}_j^y &= \hat{c}_j \hat{b}_j^x \hat{c}_j \hat{b}_j^y = \hat{c}_j (-1) \hat{c}_j \hat{b}_j^x \hat{b}_j^y \\
&= \hat{c}_j (-1) \hat{c}_j \hat{b}_j^x \hat{b}_j^y = \hat{c}_j (-1) \hat{c}_j (-1) \hat{b}_j^y \hat{b}_j^x \\
&= (-1)^2 \hat{c}_j \hat{c}_j \hat{b}_j^y \hat{b}_j^x = (-1)^2 \hat{c}_j (-1) \hat{b}_j^y \hat{c}_j \hat{b}_j^x \\
&= -\hat{c}_j \hat{b}_j^y \hat{c}_j \hat{b}_j^x
\end{aligned} \tag{16}$$

一方で、角運動量の交換関係

$$[\hat{S}_j^\alpha, \hat{S}_j^\beta] = \hat{S}_j^\alpha \hat{S}_j^\beta - \hat{S}_j^\beta \hat{S}_j^\alpha = i\epsilon_{\alpha,\beta,\gamma} \hat{S}_j^\gamma \tag{17}$$

$$[\hat{S}_j^x, \hat{S}_j^y] = i\hat{S}_j^z \tag{18}$$

も満たすためには (11) では条件が不足している。これを満たすために、条件 (11) に加えて、

$$\hat{D}_j \equiv \hat{c}_j \hat{b}_j^x \hat{b}_j^y \hat{b}_j^z = 1 \tag{19}$$

の関係を要請する。すると、

$$\begin{aligned}
\hat{S}_j^x \hat{S}_j^y &= \frac{i}{2} \hat{c}_j \hat{b}_j^x \cdot \frac{i}{2} \hat{c}_j \hat{b}_j^y = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \hat{c}_j \hat{b}_j^x \hat{c}_j \hat{b}_j^y \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \hat{b}_j^z \hat{b}_j^y \hat{c}_j \hat{b}_j^y \quad (\text{using (19), } \hat{c}_j \hat{b}_j^x = \hat{b}_j^z \hat{b}_j^y) \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^2 \hat{b}_j^z \hat{b}_j^y \hat{c}_j \hat{b}_j^y = \left(\frac{i}{2}\right)^2 \hat{b}_j^z (-1) \hat{c}_j \hat{b}_j^y \hat{b}_j^y \\
&= (-1) \left(\frac{i}{2}\right)^2 \hat{b}_j^z \hat{c}_j \hat{b}_j^y \hat{b}_j^y = (-1)^2 \left(\frac{i}{2}\right)^2 \hat{c}_j \hat{b}_j^z \hat{b}_j^y \hat{b}_j^y \\
&= \frac{i}{2} \cdot \frac{i}{2} \hat{c}_j \hat{b}_j^z = \frac{i}{2} \hat{S}_j^z
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\hat{S}_j^x \hat{S}_j^y = \frac{i}{2} \hat{S}_j^z \tag{21}$$

$$\hat{S}_j^y \hat{S}_j^x = -\frac{i}{2} \hat{S}_j^z \tag{22}$$

$$[\hat{S}_j^x, \hat{S}_j^y] = i\hat{S}_j^z \tag{23}$$

すなわち、(11) から、spin1/2 演算子の反交換関係が、(11), (19) から角運動量の交換関係が導かれる。

## 2.2 Hamiltonian の変換

(11) の表現を用いて, Hamiltonian(1) を書き換える :

$$\begin{aligned}
\hat{S}_i^x \hat{S}_{i_x}^x &= \frac{i}{2} \hat{c}_i \hat{b}_i^x \cdot \frac{i}{2} \hat{c}_{i_x} \hat{b}_{i_x}^x \\
&= \frac{i}{4} \hat{c}_i \hat{b}_i^x \hat{c}_{i_x} \hat{b}_{i_x}^x = \frac{i}{4} \underline{\hat{b}_i^x \hat{c}_i \hat{c}_{i_x} \hat{b}_{i_x}^x} \\
&= (-1) \frac{i}{4} \hat{b}_i^x \hat{c}_i \hat{c}_{i_x} \hat{b}_{i_x}^x = (-1) \frac{i}{4} \hat{b}_i^x \hat{c}_i (-1) \hat{b}_{i_x}^x \hat{c}_{i_x} \\
&= (-1)^2 \frac{i}{4} \hat{b}_i^x \hat{c}_i \hat{b}_{i_x}^x \hat{c}_{i_x} = (-1)^2 \frac{i}{4} \hat{b}_i^x (-1) \hat{b}_{i_x}^x \hat{c}_i \hat{c}_{i_x} \\
&= -\frac{i}{4} (\hat{b}_i^x \hat{b}_{i_x}^x) \hat{c}_i \hat{c}_{i_x} = -\frac{i}{4} \hat{U}_i^x \hat{c}_i \hat{c}_{i_x}
\end{aligned} \tag{24}$$

ここで,  $\hat{U}_i^x = \hat{b}_i^x \hat{b}_{i_x}^x$  は  $Z_2$  ゲージ場である.  $y$ -bond :  $\hat{S}_i^y \hat{S}_{i_y}^y$ ,  $z$ -bond :  $\hat{S}_i^z \hat{S}_{i_z}^z$  についても同様に書き換えることができ, したがって, Hamiltonian は

$$\hat{H} = \sum_{i \in A} \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{i}{4} J_\alpha \hat{U}_i^\alpha \hat{c}_i \hat{c}_{i_\alpha} \tag{25}$$

ここで, 1 つ目の和  $\sum_{i \in A}$  は A-sub lattice について和を, 2 つ目の和  $\sum_{\alpha=x,y,z}$  は  $x, y, z$ , 3 方向についての和を表している.

このように, 表現すると次の交換関係を得る :

$$[\hat{U}_i^\alpha, \hat{H}] = 0 \tag{26}$$

$$[\hat{U}_i^\alpha, \hat{U}_{i'}^{\alpha'}] = 0 \tag{27}$$

すべての  $Z_2$  ゲージ場  $\hat{U}_i^\alpha$  は互いに交換する保存量で,  $\hat{U}_i^\alpha$  は同時対角化可能であることわかる. さらに  $\hat{U}_i^\alpha = \pm 1$  の値を取る. また,  $\hat{c}_i$  について 2 次形式なので解くことができる.

## 2.3 $Z_2$ ゲージ自由度

(11), (19) はスピン 1/2 のほぼ忠実な表現だが, 異なる  $\hat{c}_j, \hat{b}_j$  の表現が同一のスピン表現を与えてしまい, いわゆる無駄な自由度を持つことがわかる.

サイト  $j$  のすべてのマヨナラを同時に  $-1$  倍する変換

$$\hat{c}_j \rightarrow -\hat{c}_j, \quad \hat{b}_j^\alpha \rightarrow -\hat{b}_j^\alpha \tag{28}$$

を考える. この変換について (11) の形は不変であることがわかる. つまり, (11) はマヨナラの符号に関して不定性を残した表現であることがわかる. マヨナラ演算子の符号を変える変換がゲージ自由度になっていることがわかる. この  $-1$  倍の自由度に対する変換を  $Z_2$  ゲージ変換という.

(19) で定義した  $\hat{D}_j$  が  $Z_2$  ゲージ変換の生成子 (generator) になっていることがわかる：

$$\hat{D}_j^\dagger \hat{c}_j \hat{D}_j = -\hat{c}_j \quad (29)$$

$$\hat{D}_j^\dagger \hat{b}_j^\alpha \hat{D}_j = -\hat{b}_j^\alpha \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_i^\dagger \hat{U}_i^\alpha \hat{D}_i &= \hat{D}_i^\dagger (i \hat{b}_i^\alpha \hat{b}_{i_\alpha}^\alpha) \hat{D}_i \\ &= i (\hat{D}_i^\dagger \hat{b}_i^\alpha \hat{D}_i) \hat{b}_{i_\alpha}^\alpha \\ &= -i \hat{b}_i^\alpha \hat{b}_{i_\alpha}^\alpha = -\hat{U}_i^\alpha \end{aligned} \quad (31)$$

つまり  $\{\hat{U}_i^\alpha\}$  はゲージ変換に対して不変ではないことがわかる．なので，ゲージ不変な保存量を見つけたい．

22th, September, 2022

## 2.4 $Z_2$ Flux

物理的な状態に 1 対 1 に対応する表現として，ゲージ不変な保存量を導入する．図??にあるように各六角形  $p$  に沿ってゲージ場の積を取って得られる  $Z_2$  ゲージフラックス  $W_p$  を導入する：

$$\hat{W}_p = \hat{u}_{p_1}^y \hat{u}_{p_1}^z \hat{u}_{p_3}^x \hat{u}_{p_3}^y \hat{u}_{p_5}^z \hat{u}_{p_5}^x \quad (32)$$

ここで，

$$\hat{D}_i \hat{u}_i^\alpha \hat{D}_i = \hat{D}_i (i \hat{b}_i^\alpha \hat{b}_{i_\alpha}^\alpha) \hat{D}_i = i (\hat{D}_i \hat{b}_i^\alpha \hat{D}_i) \hat{b}_{i_\alpha}^\alpha = i (-\hat{b}_i^\alpha) \hat{b}_{i_\alpha}^\alpha = -\hat{u}_i^\alpha \quad (33)$$

を用いると，1つのサイトに対して， $(-1)$  が2回ずつ合計6回出てくるので， $(-1)^6 = 1$  となり， $\hat{W}_p$  が任意の  $i$  に対してゲージ不変であることがわかる：

$$\hat{D}_i \hat{W}_p \hat{D}_i = \hat{W}_p \quad (34)$$

$Z_2 \text{Flux} \hat{W}_p$  の固有値は  $\pm 1$  の値を取る．スピン演算子を用いて，次のように書くこともできる：

$$\hat{W}_p = \hat{S}_{p_1}^x \hat{S}_{p_2}^y \hat{S}_{p_3}^z \hat{S}_{p_4}^x \hat{S}_{p_5}^y \hat{S}_{p_6}^z \quad (35)$$

## 3 Kitaev 模型を解く手順

### 3.1 Majonara の一般論

Hailtonian の対角化の説明に必要な Majonara の一般論について述べる．Majonara 演算子とは  $2N$  個の演算子の組  $\{\hat{c}_0, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{2N-1}\}$  で次の性質を満たすものであった：

- エルミート：

$$\hat{c}_j^\dagger = \hat{c}_j \quad (36)$$

- 反交換関係

$$[\hat{c}_j, \hat{c}_{j'}]_+ = \hat{c}_j \hat{c}_{j'} + \hat{c}_{j'} \hat{c}_j = 2\delta_{j,j'} \quad (37)$$

### 3.1.1 Fermion の半分

そして, Majonara 演算子を用いて, 複素フェルミオンを定義する:

$$\hat{a}_m = \frac{1}{2}(\hat{c}_{2m} - i\hat{c}_{2m+1}) \quad (38)$$

$$\hat{a}_m^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{c}_{2m} + i\hat{c}_{2m+1}) \quad (39)$$

これらの演算子はフェルミオンの生成消滅演算子と同様の交換関係を満たす:

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_m^\dagger]_+ = 1 \quad (40)$$

### 3.1.2 直交変換したものも Majonara

次に, Majonara 演算子間のユニタリ変換を考える. Majonara 演算子は実の演算子であるので, 実の直交行列によって変換を行う必要がある. そこで, 直交行列  $Q$ ,  $Q^t Q = I$  を導入し, 次のように Majonara を新しい Majonara に変換する:

$$\hat{c}'_{j'} = Q_{j'j} \hat{c}_j \quad (41)$$

ここで, 新しい演算子  $\hat{c}'_{j'}$  も Majonara 演算子となる.

### 3.1.3 Fermion Parity

フェルミオンパリティはフェルミオンをどう作るかによって依存する量である. (51) のようにフェルミオンを作ったとき, フェルミオンの偶奇によって, フェルミオンパリティは一般に以下のように書ける:

$$(-1)^F = \prod_{m=0}^{N-1} (i\hat{c}_{2m}\hat{c}_{2m+1}) = \prod_{m=0}^{N-1} (1 - 2\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m) \quad (42)$$

Fermion の粒子数  $\hat{n}_m$  が 0 or 1 であるから,  $m$  が占有されているとき,  $1 - 2\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$  は  $1 - 2 = -1$  の値を取り, 非占有のとき,  $1 - 0 = 1$  の値を取る. また, 直交変換  $Q$  によって, フェルミオンパリティは以下のように変換される:

$$(-1)^{F'} = (\det Q)(-1)^F \quad (43)$$

### 3.1.4 二次形式の対角化固有状態の表現

Majonara 演算子の二次形式

$$\hat{H} = \frac{i}{4} \sum_{j,j'} c_j A_{j,j'} c_{j'} \quad (44)$$

を考える.

$iA$  に関する固有値方程式を解く.  $iA$  の固有値方程式は以下のように書ける:

$$iA_{j,j'} u_{j'}^{(m)} = \epsilon_m u_{j'}^{(m)} \quad (45)$$

ここで,  $iA$  はエルミート行列であるので, その固有値  $\epsilon_m$  は実数となる. ここで (47) の複素共役を取ると,

$$-iA_{j,j'} u_{j'}^{(m)*} = \epsilon_m u_{j'}^{(m)*} \quad (46)$$

$$\therefore iA_{j,j'}u_{j'}^{(m)*} = -\epsilon_m u_{j'}^{(m)*} \quad (47)$$

となる．つまり，固有値  $\epsilon_m$  に対して， $-\epsilon_m$  も固有値として必ず存在し，その対応する固有値ベクトルは  $u_{j'}^{(m)*}$  となる．よって， $iA$  は正負の固有値を  $N$  個ずつ，全部で  $2N$  個持つ：

$$\epsilon_{N-1}, \epsilon_{N-2}, \dots, \epsilon_0, -\epsilon_0, -\epsilon_1, \dots, -\epsilon_{N-1} \quad (48)$$

次に Hamiltonian の対角化を行う．正固有値  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1}$  に対応する  $2N$  次元の固有ベクトル  $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N-1)}$  を考える．ここで，固有ベクトルはそれぞれ規格化されているとする．これらの固有ベクトルを用いて，次の  $2N \times 2N$  行列を作る：

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \text{Re}u^{(0)}, \text{Im}u^{(0)}, \text{Re}u^{(1)}, \text{Im}u^{(1)}, \dots, \text{Re}u^{(N-2)}, \text{Im}u^{(N-2)}, \text{Re}u^{(N-1)}, \text{Im}u^{(N-1)} \end{bmatrix} \quad (49)$$

これは， $Q \equiv \sqrt{2}\tilde{Q}$  で直交行列となり， $Q^t Q = I$  となる．これを用いて Hamiltonian の対角化を行う：

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{i}{4} \sum_{j,j'} c_j A_{j,j'} c_{j'} = \frac{i}{4} C^t A C \\ &= \frac{i}{4} C^t Q Q^t A Q Q^t C \\ &= \frac{i}{4} C'^t Q^T A Q C' \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \epsilon_m (-i\hat{c}'_{2m} \hat{c}'_{2m+1}) \end{aligned} \quad (50)$$

ここで，直交変換後の Majonara 演算子について，Fermion を定義する：

$$\hat{\gamma}_m = \frac{1}{2}(\hat{c}'_{2m} - i\hat{c}'_{2m+1}) \quad (51)$$

$$\hat{\gamma}_m^\dagger = \frac{1}{2}(\hat{c}'_{2m} + i\hat{c}'_{2m+1}) \quad (52)$$

すると Hamiltonian は

$$\hat{H} = \sum_{m=0}^{N-1} \epsilon_m \left( \hat{\gamma}_m^\dagger \hat{\gamma}_m - \frac{1}{2} \right) \quad (53)$$

基底状態を  $|0\rangle_\gamma$  と書くと，任意の  $m$  について， $\hat{\gamma}_m |0\rangle_\gamma$  と書け，

$$\hat{H} |0\rangle_\gamma = - \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\epsilon_m}{2} |0\rangle_\gamma \quad (54)$$

### 3.2 固有状態の表現

30th, September, 2022

Kitaev 模型の固有関数の完全な形



## 4 基底状態の性質

### 4.1 一様 Flux のセクター

図 3 (a) サイト  $j$  に対する結合. 赤, 緑, 青はそれぞれ,  $x, y, z$ -interaction を表している. (b) Kitaev 模型を定義する六角格子 (honeycomb lattice). (c) 副格子. 下を A-副格子, 上を b-副格子と呼び, A-副格子のサイトに対応する index を  $i$  とする.

図 4 (a) サイト  $j$  に対する結合. 赤, 緑, 青はそれぞれ,  $x, y, z$ -interaction を表している. (b) Kitaev 模型を定義する六角格子 (honeycomb lattice). (c) 副格子. 下を A-副格子, 上を b-副格子と呼び, A-副格子のサイトに対応する index を  $i$  とする.

### 4.2 基底状態の相図

7th, October, 2022

## 5 Toric code limit

### 5.1 異方的極限の有効ハミルトニアン

### 5.2 低エネルギー有効模型

### 5.3 Toric code 模型への帰着

図 5 (a) サイト  $j$  に対する結合. 赤, 緑, 青はそれぞれ,  $x, y, z$ -interaction を表している. (b) Kitaev 模型を定義する六角格子 (honeycomb lattice). (c) 副格子. 下を A-副格子, 上を b-副格子と呼び, A-副格子のサイトに対応する index を  $i$  とする.

図 6 (a) サイト  $j$  に対する結合. 赤, 緑, 青はそれぞれ,  $x, y, z$ -interaction を表している. (b) Kitaev 模型を定義する六角格子 (honeycomb lattice). (c) 副格子. 下を A-副格子, 上を b-副格子と呼び, A-副格子のサイトに対応する index を  $i$  とする.

14th, October, 2022

## 6 Toric code model

$$\hat{H}_{\text{TC}} = -\lambda_s \sum_s \hat{A}_s - \lambda_p \sum_p \hat{B}_p = \hat{H}_s + \hat{H}_p \quad (55)$$

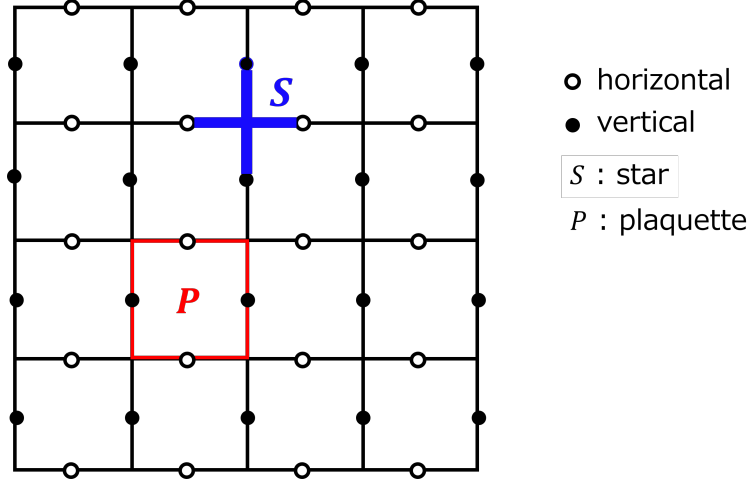


図7 (a) サイト  $j$  に対する結合. 赤, 緑, 青はそれぞれ,  $x, y, z$ -interaction を表している. (b) Kitaev 模型を定義する六角格子 (honeycomb lattice). (c) 副格子. 下を A-副格子, 上を B-副格子と呼び, A-副格子のサイトに対応する index を  $i$  とする.

$$\hat{A}_s = \hat{\sigma}_{s_1}^z \hat{\sigma}_{s_2}^z \hat{\sigma}_{s_3}^z \hat{\sigma}_{s_4}^z = \prod_{i \in s} \hat{\sigma}_{s_i}^z \quad (56)$$

$$\hat{B}_p = \hat{\sigma}_{p_1}^x \hat{\sigma}_{p_2}^x \hat{\sigma}_{p_3}^x \hat{\sigma}_{p_4}^x = \prod_{i \in p} \hat{\sigma}_{p_i}^x \quad (57)$$

ここで,  $j \in s$  は star(vertex)  $s$  に隣接する edge を,  $j \in p$  は plaquette に含まれる edge を表す.

## 6.1 $\hat{A}_s, \hat{B}_p$ の性質

### 性質 1

$\hat{A}_s, \hat{B}_p$  は全て可換である.  $\hat{A}_s$  どうし,  $\hat{B}_p$  どうしは互いに可換であることは自明である. (単位演算子との可換性だから)

$\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  が共有辺を持たない場合も可換であることは自明である.  $\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  が偶数個のサイトを共有するとき, Pauli 演算子の反交換関係  $\hat{\sigma}^z \hat{\sigma}^x = -\hat{\sigma}^x \hat{\sigma}^z$  より,  $\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  は可換であることがわかる:

$$[\hat{A}_s, \hat{B}_p] = 0 \quad (58)$$

■例 可換性が非自明な例として, fig. ?? の場合を考えてみよう. このとき,

$$\hat{A}_s = \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z \hat{\sigma}_3^z \hat{\sigma}_4^z \quad (59)$$

$$\hat{B}_p = \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_4^x \hat{\sigma}_5^x \hat{\sigma}_6^x \quad (60)$$

このとき、 $\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  はサイト 1 と 4 を共有する。Puli 演算子の反交換関係  $\hat{\sigma}^z \hat{\sigma}^x = -\hat{\sigma}^x \hat{\sigma}^z$  より、

$$\begin{aligned}
\hat{A}_s \hat{B}_p &= \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z \hat{\sigma}_3^z \hat{\sigma}_4^z \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_4^x \hat{\sigma}_5^x \hat{\sigma}_6^x \\
&= \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_2^z \hat{\sigma}_3^z \hat{\sigma}_4^z \hat{\sigma}_4^x \hat{\sigma}_5^x \hat{\sigma}_6^x \\
&= (-1)^2 \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z \hat{\sigma}_3^z \hat{\sigma}_4^x \hat{\sigma}_4^z \hat{\sigma}_5^x \hat{\sigma}_6^x \\
&= \hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_4^x \hat{\sigma}_5^x \hat{\sigma}_6^x \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z \hat{\sigma}_3^z \hat{\sigma}_4^z \\
&= \hat{B}_p \hat{A}_s
\end{aligned} \tag{61}$$

## 性質 2

$\hat{A}_s, \hat{B}_p$  の固有値は  $\pm 1$ . 次のように示せる：

$$(\hat{A}_s)^2 = (\hat{B}_p)^2 = 1 \tag{62}$$

## 6.2 基底状態

$\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  は可換なので同時に対角化可能.

$\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  が同時対角化可能ならば、全ての  $\hat{A}_s, \hat{B}_p$  に対して固有値  $+1$  をもつ同時固有状態が、もしも存在すれば、基底状態を作ることができる.

そこで、 $\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$  の固有状態について調べることにする.

### 6.2.1 $\hat{A}_s$ の固有状態

$\hat{\sigma}^z$  を対角化する基底を用いる. ここで、すべてのスピンの上向き状態を考える： $\uparrow\downarrow$

$$|\bar{1}\rangle = |\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\rangle \tag{63}$$

このとき、

$$\hat{A}_s |\bar{1}\rangle = +1 |\bar{1}\rangle, \quad \text{for all } v \tag{64}$$

つまり、 $|\bar{1}\rangle$  は  $\hat{A}_s$  の固有状態であり、その固有値は  $+1$  となる.

### 6.2.2 $\hat{B}_p$ の固有状態

次に、

$$|\Psi\rangle = \left\{ \prod_p (1 + \hat{B}_p) \right\} |\bar{1}\rangle \tag{65}$$

を考えてみる.  $\hat{B}_p$  どうしは可換,  $\hat{B}_p(1 + \hat{B}_p) = 1 + \hat{B}_p$  より、

$$\hat{B}_p |\Psi\rangle = \hat{B}_p \left\{ \prod_p (1 + \hat{B}_p) \right\} |\bar{1}\rangle = \left\{ \prod_p \hat{B}_p (1 + \hat{B}_p) \right\} |\bar{1}\rangle = \left\{ \prod_p (1 + \hat{B}_p) \right\} |\bar{1}\rangle = +1 |\Psi\rangle \tag{66}$$

よって、 $|\Psi\rangle$  は  $\hat{B}_p$  の固有状態であり、その固有値は  $+1$  である。この状態は量子情報の文脈で、surface code 状態とも呼ばれている。

性質 1 より、 $\hat{A}_s(1 + \hat{B}_p) = (\hat{A}_s + \hat{A}_s\hat{B}_p) = (\hat{A}_s + \hat{B}_p\hat{A}_s) = (1 + \hat{B}_p)\hat{A}_s$  となるから、

$$\hat{A}_s |\Psi\rangle = \hat{A}_s \left\{ \prod_p (1 + \hat{B}_p) \right\} |\bar{1}\rangle = \left\{ \prod_p (1 + \hat{B}_p) \right\} \hat{A}_s |\bar{1}\rangle = \left\{ \prod_p (1 + \hat{B}_p) \right\} |\bar{1}\rangle = |\Psi\rangle \quad (67)$$

ここで、 $\hat{A}_s |\bar{1}\rangle = |\bar{1}\rangle$  を用いた。よって、 $|\Psi\rangle$  は  $\hat{A}_s$  と  $\hat{B}_p$ ,  $(\forall s, p)$  の固有値  $+1$  に属する同時固有状態であるといえる。

## 6.3 トポロジカル縮退

### 6.3.1 別の基底状態

### 6.4 励起状態

## 7 Stabilizer state

## 参考文献

- [1] Alexei Kitaev. Anyons in an exactly solved model and beyond. Annals of Physics, 321(1):2–111, 2006.